

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

*Résolution numérique des équations différentielles fractionnelles linéaires à
l'aide des polynômes de Bernstein*

Présentée par :

TAHMI Khawla

Devant le jury composé de :

<i>M^r</i> NOURI Brahim	M.C.A,	Université de M'sila	Président.
<i>M^r</i> MERZOUGUI Abdelkrim	Prof,	Université de M'sila	Encadreur.
<i>M^r</i> MOKHTARI Abdelhak	M.C.A,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2021 /2022

Remerciements

Avant tout je remercie *ALLAH* le tout puissant d'avoir , éclairé notre vie , renforcé notre courage et notre volonté pour finir ce travail

Ainsi, je tiens également à remercier mon encadreur **Mr. MERZOUGUI Abdelkrim** pour avoir d'abord proposé ce thème, pour son suivi continué tout le long de la réalisation de ce mémoire et il n'a pas cessé

Je tiens à témoigner ma gratitude à **Mr. NOURI Brahim** et **Mr. ARIOUA Yacine** d'avoir accepté

Je remercie évidemment mes parents pour leur soutien et leur encouragement

Je voudrais également remercier tous mes amis pour leur présence et leur soutien. Je leur souhaite le bonheur et réussite dans la vie.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué d'une façon ou d'une autre à ce travail.

A tous **MERCI**

أهدي هذا العمل المتواضع

إلى من سهر و بذل كل ما بمقدوره من أجل راحتي إلى رفيق دربي وقُدوتي في الحياة أبي الغالي (عمار) حفظك الله لي وامدك بالصحة
إلى من بسمتها غايتي وما تحت أقدامها جنتي إلى من حملتني في بطنها وسقتني من صدرها وأسكنتني قلبها فغمرتني بحبها إلى صديقتي الحميمة و أمي
الرحيمة (الخامسة) حفظك الله ورعاك وجعل جنة الفردوس مثواك

إلى من قال فيه الشاعر :

أخاك أخاك فمن لا أخا له**كساع إلى الهيجاء بغير سلاح

إلى أخي الغالي على قلبي (سمير) لو اجتمعت كل الكلمات لشكرك فلن توفيك مقداره ذرة من حقدك وقفة اجلال وشكر مني لك وهذا لا
يساوي شيئا امام تضحياتك حفظك الله ورعاك لنا ورزقك من كل خير

إلى سندي ومصدر قوتي زوجي (سفيان) يقولون أن الورد أحلى ما في الكون وأنا أقول لو لا وجودك ما كان للورد لون فشكرا على دعمك لي
رعاك الرحمان وحفظك من كل مكروه

إلى أغلى ما أهداني ورزقني ربي إلى فلذة كبدي وروحي إبن حبيبي (إسماعيل) جعلك الله نفرا لنا ولأمة نبينا سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم
إلى من بهم أكبر وعليهم أعتد إلى شموع تثير ظلمة حياتي إلى من بوجودهم أكتسب قوة ومحبة لا حدود لها إلى أخواتي الاعزاء (هجيرة ،
سميرة، تونس)

إلى من هم بمثابة أبي و أمي (دادا عمر وخالتي صليحة) أطال الله عمركما وأعطاكما الصحة وحفظكما من كل مكروه شكرا على كل شيء

إلى الاستاذ القدير(مرزوقي عبد الكريم) الذي أشرف على هذا العمل وإتمامه ولم يبخل بالنصائح والافكار القيمة حفظك الله

إلى صديقات أخوات الدراسة ورفيقات الدرب شكرا على كل المواقف الأخوية والمحظرات الجميلة المليئة بالمحبة التي جمعتني بكم (إيمان ذ عائشة
شيماء نصيرة إيمان ب سعاد إيمان ح)

إلى كل الزملاء والزميلات كلية الرياضيات والاعلام الآلي وخاصة قسم المعادلات التفاضلية الجزئية و تطبيقاتها سنة ثانية ماستر

إلى روح أستاذي الزكية الطاهرة (حرايز رايح) رحمك الله واسكنك جنة الفردوس

إلى كل من ساعدني ولو ببسمة

إلى كل من له مكان في قلبي

Notations

$C([a, b])$: Espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$

\simeq : Approximation .

L : Opérateur linéaire borné .

$B_{i,n}$: Polynôme de Bernstein .

$f(t)$: Fonction donnée .

λ, c : Paramètres réels non nul .

u : La fonction inconnue (Solution exacte)

\tilde{u} : Solution approchée .

EDO : Équation différentielle ordinaire .

EDF : Équation différentielle fractionnaire .

EI : Équation intégral .

EID : Équation intégral-différentielle .

$EIDF$: Équation intégral-différentielle fractionnaire .

$\Gamma(\cdot)$: la fonction Gamma.

$\beta(\cdot, \cdot)$: la fonction Bêta.

Liste des tableaux

2.1	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1) pour $n = 10$	12
2.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1) pour $n = 10$	14
2.3	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.3) pour $n = 10$	16
2.4	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.4) pour $n = 10$	17
3.1	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.1) pour $n = 10$	21
3.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.2) pour $n = 10$	22
3.3	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.3) pour $n = 10$	23
3.4	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.4) pour $n = 10$	25
3.5	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.5) pour $n = 10$	26
3.6	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.6) pour $n = 10$	27
3.7	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.7) pour $n = 10$	28
3.8	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.8) pour $n = 10$	31

3.9	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.9) pour $n = 10$	32
3.10	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.10) pour $n = 10$	33
3.11	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.11) pour $n = 10$	34
4.1	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1) pour $n = 10$	37
4.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.2) pour $n = 10$	39
4.3	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.3) pour $n = 10$	40
4.4	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.4) pour $n = 10$	41
4.5	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.5) pour $n = 10$	42
4.6	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.6) pour $n = 10$	43
4.7	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.7) pour $n = 10$	44
4.8	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.8) pour $n = 10$	45
4.9	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.9) pour $n = 10$	48
4.10	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.10) pour $n = 10$	49
4.11	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.11) pour $n = 10$	50
4.12	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.12) pour $n = 10$	51

4.13	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.13) pour $n = 10$	52
4.14	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.14) pour $n = 10$	54
4.15	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.15) pour $n = 10$	56
4.16	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.16) pour $n = 10$	57
4.17	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.17) pour $n = 10$	58
4.18	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.18) pour $n = 10$	59
5.1	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (5.1) pour $n = 10$	62
5.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (5.2) pour $n = 10$	63
5.3	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (5.3) pour $n = 10$	64

Liste des figures

1.1	Les premiers polynômes de Bernstein pour $n=10$	7
2.1	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1) pour $n = 10$	13
2.2	Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.2) pour $n = 10$	14
2.3	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(2.3) pour $n = 10$	17
2.4	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(2.4) pour $n = 10$	18
3.1	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.1) pour $n = 10$	21
3.2	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.2) pour $n = 10$	22
3.3	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.3) pour $n = 10$	23
3.4	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.4) pour $n = 10$	26
3.5	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.5) pour $n = 10$	27
3.6	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.6) pour $n = 10$	28
3.7	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.7) pour $n = 10$	29

3.8	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.8) pour $n = 10$	31
3.9	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.9) pour $n = 10$	32
3.10	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.10) pour $n = 10$	33
3.11	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.11) pour $n = 10$	34
4.1	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1) pour $n = 10$	38
4.2	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.2) pour $n = 10$	39
4.3	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.3) pour $n = 10$	40
4.4	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.4) pour $n = 10$	41
4.5	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.5) pour $n = 10$	42
4.6	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.6) pour $n = 10$	43
4.7	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.7) pour $n = 10$	44
4.8	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.8) pour $n = 10$	45
4.9	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.9) pour $n = 10$	48
4.10	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.10) pour $n = 10$	49
4.11	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.11) pour $n = 10$	50

4.12	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.12) pour $n = 10$	51
4.13	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.13) pour $n = 10$	52
4.14	comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.14) pour $n = 10$	54
4.15	comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.15) pour $n = 10$	56
4.16	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.16) pour $n = 10$	57
4.17	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.17) pour $n = 10$	58
4.18	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.18) pour $n = 10$	59
5.1	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(5.1) pour $n = 10$	62
5.2	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(5.2) pour $n = 10$	63
5.3	Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(5.3) pour $n = 10$	64

Table des matières

Remerciements	i
Notations	iii
Liste des tableaux	vi
Liste des figures	ix
Introduction	1
1 Bases mathématiques du Calcul fractionnaire	3
1.1 Intégrales et Dérivées fractionnaires	3
1.1.1 Intégrale de Riemann-Liouville	3
1.1.2 Dérivées de Riemann-Liouville	4
1.1.3 Dérivées fractionnaires de Caputo	5
1.2 Polynômes de Bernstein	6
1.2.1 Propriétés des polynômes de Bernstein	7
1.2.2 Dérivation des polynômes de Bernstein	8
1.2.3 Représentation matricielle des polynômes de Bernstein	8
1.2.4 Approximation par les polynômes de Bernstein	9
2 Méthodes de résolution des EDO et EDF	10
2.1 Résolution d'une EDO par les polynômes de Bernstein	10
2.1.1 Discrétisation d'une EDO	10
2.1.2 Illustration par des exemples numériques	12
2.2 Résolution d'une EDF par les polynômes de Bernstein	14
2.2.1 Illustration par des exemples numériques	16

3	Résolution numérique des équations intégrales linéaires	19
3.1	Description de la méthode et résolution numériques des équation intégrales de Fredholm	19
3.2	Description de la méthode et résolution numérique des équations intégrales de Volterra	23
3.3	Description de la méthode et résolution numérique des équations intégrales de Fredholm-Volterra	29
4	Résolution Numérique des équations intégro-différentielles linéaires	35
4.1	Description de la méthode	35
4.1.1	Application de la méthode	37
5	Résolution Numérique des équations intégro-différentielles fractionnaires	60
5.1	Formulation de la solution approximative d'équations intégro-différentielle fractionnaire	60
5.2	Exemples illustratifs	61
	Introduction	65

Introduction

De nombreuses méthodes ont été étudiées et discutées pour la solution des EDO, EDF, EI, EID et EIDF. La méthode de décomposition d'Adomian, la méthode de séries de Taylor et des ondelettes de Legendre, la méthode trapézoïdale répétée et la méthode de Simpson répétée. Ainsi, depuis quelques années l'intérêt des chercheurs à utiliser les polynômes de Bernstein pour la solution des équations mathématiques (équations différentielles, équations intégrales, équations intégrales-différentielles etc ...) a augmenté. B.N. Mandal et S. Bhattacharya dans [1] et [2] ont utilisé les polynômes de Bernstein pour résoudre les équations intégrales de Volterra et de Fredholm. J. Hou et al. [3] ont résolu les équations intégrales de Fredholm. K. Maleknejad et al. [4] ont obtenu la solution de Volterra les équations intégrales de premier et de second type en appliquant la méthode de discrétisation à l'aide des polynômes de Bernstein. Ali-pour et Rostamy dans la référence [5] résolu l'équation intégrale d'Abel en utilisant l'approximation de Bernstein. K. Maleknejad et al. dans la réf. [6] VFIDEs résolus numériquement en utilisant la méthode de collocation avec fusion de matrices opérationnelles de polynômes de Bernstein. F. Hosseini et al. dans la réf. [7] ont appliqué une matrice opérationnelle polynomiale Bernstein bidimensionnelle pour la résolution mixte Volterra-Fredholm équation intégrale. Dans ce travail, la solution numérique des équations intégrales de Volterra-Fredholm est présentée par la méthode de discrétisation basée sur les polynômes de Bernstein pour résoudre les deux formes d'EFV. La précision de la solution par la technique numérique proposée dépend du degré de polynôme de Bernstein. La précision désirée peut être obtenue en augmentant seulement le degré de polynôme. D'une part l'augmentation de degré augmente le coût de calcul, mais d'autre part la précision requise peut être obtenue.

Ce mémoire est composée de cinq chapitres :

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions et propriétés sur le

calcul fractionnaire de type Riemann-Liouville et Caputo. Nous donnons également quelques définitions et résultats préliminaires sur les polynômes de Bernstein à savoir (dérivation, représentation matricielle des polynômes de Bernstein, approximation des fonction par les polynômes de Bernstein...), afin de les utiliser dans les chapitres qui suivent.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les problèmes aux limites associés aux équations différentielles ordinaires linéaires, ainsi que les problèmes associés aux équations différentielles d'ordre fractionnaire, en estimant que la solution s'écrit sous forme d'une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein. La méthode de collocation est utilisée pour trouver la solution approximative.

Dans le troisième chapitre, nous essaierons de résoudre les équations intégrales linéaires de type Volterra et Fredholm ainsi que les équations de type mixte (Volterra-Fredholm), la méthode décrite dans le chapitre précédent sera utilisé dans ce chapitre. une variété d'exemples seront introduits pour tester l'efficacité de la méthode.

Dans les chapitres quatre et cinq, nous présentons la méthode de ondelettes de Haar pour résoudre des équations différentielles intégral-différentielles et intégral fractionnaires-différentielles de type Volterra et Fredholm. plusieurs exemples de types différents ont été testés et comparés à la solution exacte, pour montrer la validité de la méthode en certains points de collocation.

BASES MATHÉMATIQUES DU CALCUL FRACTIONNAIRE

Ce chapitre est consacré sur des concepts mathématiques de base du calcul fractionnaire et des équations différentielles fractionnaires. Nous donnons également quelques définitions et résultats préliminaires sur les polynômes de Bernstein à savoir (dérivation, représentation matricielle des polynômes de Bernstein, approximation des fonction par les polynômes de Bernstein...), afin de les utiliser dans les chapitres qui suivent.

1.1 Intégrales et Dérivées fractionnaires

1.1.1 Intégrale de Riemann-Liouville

Définition 1.1. [1] L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b]; (I_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

de même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par

$$\forall t \in [a, b]; (I_{b-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (x-t)^{\alpha-1} f(x) dx$$

Proposition 1.1. pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a

$$1. (I_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}$$

$$2. (I_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}$$

Proposition 1.2. Soit $\alpha > 0, \beta > 0$, et $f \in L^1([a, b])$, alors :

$$1. (I_{a+}^{\alpha} I_{a+}^{\beta} f)(t) = (I_{a+}^{\beta} I_{a+}^{\alpha} f)(t) = (I_{a+}^{\alpha+\beta} f)(t)$$

$$2. (I_{b-}^{\alpha} I_{b-}^{\beta} f)(t) = (I_{b-}^{\beta} I_{b-}^{\alpha} f)(t) = (I_{b-}^{\alpha+\beta} f)(t)$$

1.1.2 Dérivées de Riemann-Liouville

Définition 1.2. Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], D_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (x-t)^{n-\alpha-1} f(x) dx.$$

La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite pour d'ordre α de f est définie par

$$\forall t \in [a, b], D_{b+}^{\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_t^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(x) dx.$$

Remarque 1.1. 1. pour $\alpha = 0, n = 1$. On a $D_{a+}^0 f(t) = \frac{d}{dt} (I_{a+}^1 f) = f(t)$

2. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les entiers $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$- D_{a+}^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

$$- D_{b-}^n f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t)$$

Proposition 1.3. Pour $\alpha > 0, \beta > 0$, on a

$$1. (D_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}$$

$$2. (D_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}$$

1.1.3 Dérivées fractionnaires de Caputo

Définition 1.3. La dérivée fractionnaire de Caputo d'une fonction $f(t)$ donnée sur l'intervalle $[a; b]$ est définie par la relation suivante :

$$\forall t \in [a, b], {}^c D_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - x)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(x) dx$$

avec $n = [\alpha] + 1$; où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α .

Définition 1.4. Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^c D_{a+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t (t - x)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(x) dx$$

Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α est définie par :

$$\forall t \in [a, b], {}^c D_{b-}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n - \alpha)} \int_t^b (x - t)^{n - \alpha - 1} f^{(n)}(x) dx$$

Proposition 1.4. pour $\alpha > 0, \beta > 0$, on a :

1. $({}^c D_{a+}^\alpha (t - a)^{\beta - 1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha - 1}, \beta > n$
2. $({}^c D_{b-}^\alpha (b - t)^{\beta - 1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (b - t)^{\beta - \alpha - 1}, \beta > n$

Proposition 1.5. Pour $f^{(n)}(x) = d^n f/dx^n$ et $n = [\alpha] + 1$. si $\alpha + 1 = n \in \mathbb{N}$ alors $D^n f(x)$ correspond à la dérivée régulière $f^{(n)}(x)$. Les relations suivantes sont réalisées :

$$I^\alpha (I^\beta f(x)) = I^\beta (I^\alpha f(x)) = I^{\alpha + \beta} f(x) \quad (1.1)$$

$$D^\alpha (D^\beta f(x)) = D^\beta (D^\alpha f(x)) = D^{\alpha + \beta} f(x) \quad (1.2)$$

$$D^\alpha (I^\beta f(x)) = D^{\alpha - \beta} f(x), \alpha \geq \beta \quad (1.3)$$

$$I^\alpha (D^\alpha f(x)) = f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!}, x \geq 0 \quad (1.4)$$

1.2 Polynômes de Bernstein

Définition 1.5. La forme générale des polynômes de Bernstein de degré n sur l'intervalle $[a, b]$ est défini par :

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}, \quad a \leq x \leq b, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.5)$$

Où

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Quelques polynômes

Les premiers polynômes de Bernstein sur l'intervalle $[0, 1]$, pour $n = 10$ sont :

$$B_{0,10}(t) = (1-t)^{10}$$

$$B_{1,10}(t) = 10(1-t)^9 t$$

$$B_{2,10}(t) = 45(1-t)^8 t^2$$

$$B_{3,10}(t) = 120(1-t)^7 t^3$$

$$B_{4,10}(t) = 210(1-t)^6 t^4$$

$$B_{5,10}(t) = 252(1-t)^5 t^5$$

$$B_{6,10}(t) = 210(1-t)^4 t^6$$

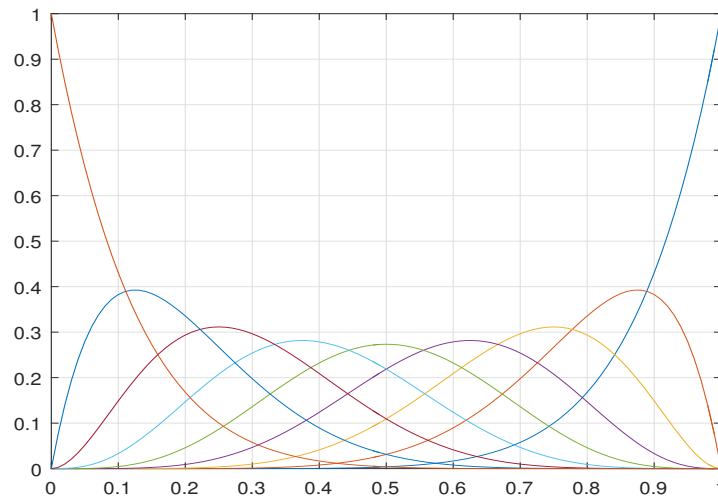
$$B_{7,10}(t) = 120(1-t)^3 t^7$$

$$B_{8,10}(t) = 45(1-t)^2 t^8$$

$$B_{9,10}(t) = 10(1-t) t^9$$

$$B_{10,10}(t) = t^{10}$$

On voit entre autres qu'ils sont tous positifs pour $t \in [0, 1]$ voir le graphe (1.1)

FIGURE 1.1 – Les premiers polynômes de Bernstein pour $n=10$

1.2.1 Propriétés des polynômes de Bernstein

Ces polynômes constituent une base de $R_n[t]$ (l'ensemble des polynômes définis sur \mathbb{R}) et vérifient, pour tout $t \in [0, 1]$, les identités suivantes :

1. Les polynômes de Bernstein sont définis par une relation de récurrence

Proposition 1.6. *On peut définir les polynômes de Bernstein de degré n par deux polynômes de Bernstein de degré $n - 1$*

$$B_{k,n}(t) = (1 - t)B_{k,n-1}(t) + tB_{k-1,n-1}(t) \quad (1.6)$$

2. Les polynômes de Bernstein sont tous non négatifs

3. Les polynômes de Bernstein forment une partition de l'unité

Proposition 1.7. *Un ensemble de fonctions $f_i(t)$ est dit une partition d'unité si :*

$$\forall t, \sum_{i=0}^k f_i(t) = 1.$$

Les $k + 1$ polynômes de Bernstein de degré k forment une partition d'unité si :

$$\forall t \in [0, 1], \quad \sum_{i=0}^k b_{i,n}(t) = 1. \quad (1.7)$$

1.2.2 Dérivation des polynômes de Bernstein

Proposition 1.8. *Les dérivés des polynômes de Bernstein de degré n sont des polynômes de degré $n - 1$. En utilisant la définition du polynôme de Bernstein, nous pouvons montrer que cette dérivée peut être écrite comme une combinaison linéaire des polynômes de Bernstein de degré $n - 1$ En particulier*

$$\frac{d}{dt} b_{i,n}(t) = n(b_{i-1,n-1}(t) - b_{i,n-1}(t)) \quad (1.8)$$

1.2.3 Représentation matricielle des polynômes de Bernstein

Dans plusieurs applications, les matrices associées aux polynômes de Bernstein sont très importants, Le polynôme donné est écrit comme une combinaison linéaire des fonctions des bases de Bernstein

$$B(t) = c_0 b_{0,n}(t) + c_1 b_{1,n}(t) + \dots + c_n b_{n,n}(t)$$

On peut facilement écrire :

$$B(t) = [b_{0,n}(t) b_{1,n}(t) \dots b_{n,n}(t)] \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

Où :

$$b_{i,n}(x) = \binom{n}{i} \frac{(x-a)^i (b-x)^{n-i}}{(b-a)^n}, \quad a \leq x \leq b, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.9)$$

et

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Et on peut convertir à :

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & \cdots & t^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{00} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{10} & b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n0} & b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Telle que les $b_{i,j}$ sont les coefficients de la base canonique de l'espace des polynômes et on dit que la matrice est triangulaire inférieur

Dans le cas carrée $n = 2$ on a :

$$B(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

1.2.4 Approximation par les polynômes de Bernstein

Développement d'une fonction en série de Bernstein

Une fonction $f \in L^2[0, 1]$ peut être écrite

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n c_{i,n} b_{i,n}(t)$$

Où, $c_{i,n} = \langle f, b_{i,n} \rangle$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire standard sur $L^2[0, 1]$. Si la série est tronquée au $n = m$, alors nous avons

$$f \cong \sum_{i=0}^m c_{i,m} b_{i,m} = C^T B(t)$$

où, C et $B(t)$ sont les matrices $(m + 1) \times 1$ données par

$$C = [c_{0,m}, c_{1,m}, \dots, c_{m,m}]^T$$

et

$$B(t) = [b_{0,m}(t), b_{1,m}(t), \dots, b_{m,m}(t)]^T$$

MÉTHODES DE RÉOLUTION DES EDO ET EDF

L'objectif principal de ce chapitre est de présenter une méthode d'approximation basée sur les polynômes de Bernstein pour les équations différentielles ordinaires et les équations différentielles d'ordre fractionnaire. Cette méthode transforme l'équation différentielle et l'équation différentielle fractionnaire en un système d'équations algébriques linéaires en utilisant les points de collocation, qui est ensuite résolu à l'aide de MATLAB. En outre, quelques exemples sont présentés pour illustrer la précision de la méthode et les résultats ont été présentés sous forme graphique

2.1 Résolution d'une EDO par les polynômes de Bernstein

La méthode de collocation est une méthode de *projection* permet d'approcher la solution d'une équation différentielle ordinaire à l'aide des *polynômes de Bernstein*

2.1.1 Discrétisation d'une EDO

Dans cette partie, nous voulons à l'EDO de 1^{ere} et 2^{eme} ordre qui défini par :

$$Lu(x) = f(x), \quad x \in [a, b] \quad (2.1)$$

Avec :

$$\begin{aligned} L(y) &= a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \dots + a_n(x)y^{(n)} \\ &= \sum_{i=0}^n a_i(x)y^{(i)} \end{aligned}$$

Où $f(x)$ est une fonction continue dans $[a, b]$

Nous convertissons cette équation en système des équations linéaires. Pour ce résultat, nous avons besoin de quelques fonctions de base pour estimer la solution de EDO. De sorte que, nous choisissons des polynômes de Bernstein comme les fonctions de base.

Maintenant nous employons la technique de la méthode de **Collocation** Pour ceci, nous estimons la fonction inconnue $u(x)$ comme suit

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n} \quad (2.2)$$

Où $B_{i,n}$ sont des polynômes de Bernstein et, $c_i, i = 0, 1, \dots, n$ sont des paramètres inconnus.

Alors

$$\begin{aligned} u'(x) &= \sum_{i=0}^n c_i b'_{i,n}(x), \\ u''(x) &= \sum_{i=0}^n c_i b''_{i,n}(x) \\ &\vdots \\ u^n(x) &= \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}^{(n)}(x) \end{aligned} \quad (2.3)$$

On remplace 2.2 et 2.3 dans l'équation 2.1, nous obtenons

$$L \left[\sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) + \sum_{i=0}^n c_i b'_{i,n}(x) + \sum_{i=0}^n c_i b''_{i,n}(x) + \dots + \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}^{(n)}(x) \right] = \sum_{i=0}^n a_i b_{i,n}(x)$$

Où

$$\sum_{i=0}^n c_i [L(b_{i,n}(x) + b'_{i,n}(x) + b''_{i,n}(x) + \dots + b_{i,n}^{(n)}(x))] = \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x)$$

Alors les équations de Collocation sont obtenues et ainsi pour chaque $(j = 0, 1, \dots, n)$ nous prenons une équation linéaire avec les inconnus $(n + 1)(c_i, i = 0, 1, \dots, n)$.

Enfin représente le système $(n + 1)$ des équations linéaires dans les inconnues $(n + 1)$, sont donné.

$$A_{i,j}X_i = b_j, \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

Où

$$A_{i,j} = L(b_{i,n}(x) + b'_{i,n}(x) + b''_{i,n}(x) + \dots + b_{i,n}^{(n)}(x))$$

$$b_j = \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x_j)$$

$$X_j = (c_i), i = 0, 1, \dots$$

2.1.2 Illustration par des exemples numériques

Exemple 2.1. Soit le problème homogène suivant :

$$\begin{cases} u'(x) - u(x) = 0; & x \in [0, 1] \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

La solution exacte de cette équation est : $u(t) = e^t$

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 2$:

les résultats dans le tableau et graphe (2.1)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
2	0.1	1.10517092	1.10517092	5.264011e-12
3	0.2	1.22140276	1.22140276	5.692335e-12
4	0.3	1.34985881	1.34985881	6.313172e-12
5	0.4	1.49182470	1.49182470	6.971312e-12
6	0.5	1.64872127	1.64872127	7.709389e-12
7	0.6	1.82211880	1.82211880	8.517631e-12
8	0.7	2.01375271	2.01375271	9.418244e-12
9	0.8	2.22554093	2.22554093	1.040101e-11
10	0.9	2.45960311	2.45960311	1.151435e-11
11	1.0	2.71828183	2.71828183	1.260236e-11

TABLE 2.1 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1) pour $n = 10$

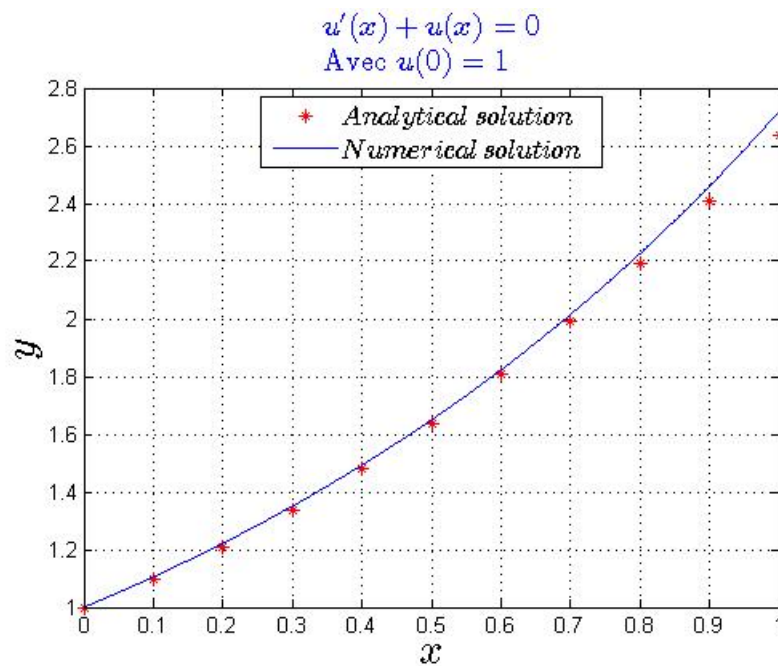


FIGURE 2.1 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.1) pour $n = 10$

Exemple 2.2. Soit le problème non homogène suivant :

$$\begin{cases} u'(x) - u(x) = x; & x \in [0, 1] \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

La solution exacte de cette équation est :

$$u(x) = 2e^x - x - 1$$

La solution approché $\tilde{u}(x)$ de la solution exacte $u(x)$ est obtenu par la solution du système des équations linéaires pour $n = 2$:

les résultats dans le tableau et graphe (2.2)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
2	0.1	1.11034184	1.11034184	1.053202e-11
3	0.2	1.24280552	1.24280552	1.139000e-11
4	0.3	1.39971762	1.39971762	1.263167e-11
5	0.4	1.58364940	1.58364940	1.394729e-11
6	0.5	1.79744254	1.79744254	1.542078e-11
7	0.6	2.04423760	2.04423760	1.703659e-11
8	0.7	2.32750541	2.32750541	1.883649e-11
9	0.8	2.65108186	2.65108186	2.080469e-11
10	0.9	3.01920622	3.01920622	2.303135e-11
11	1.0	3.43656366	3.43656366	2.520606e-11

TABLE 2.2 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1) pour $n = 10$

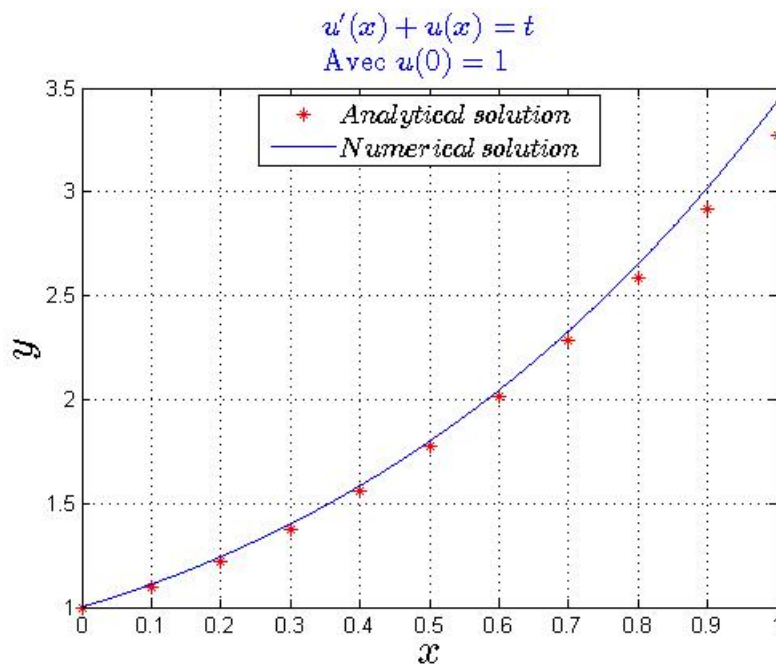


FIGURE 2.2 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.2) pour $n = 10$

2.2 Résolution d'une EDF par les polynômes de Bernstein

Dans ce section , pour les résolution l'équation différentielle fractionnaire en utilisant le polynôme de Bernstein

La forme de EDF on donnée :

$$D^\alpha u(x) = \sum_{i=1}^k a_i D^{\beta_i} u(x) + a_{k+1} u(x) + g(x) \quad (2.4)$$

avec la condition

$$u^{(i)}(0) = d_i, i = 0, 1, \dots, n - 1$$

Où

$a_j, (j = 1, \dots, k + 1)$ ce sont de vrais coefficients constants et $n - 1 < \alpha < n$ et $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_k < \alpha$

D^α désignent les dérivées fractionnaires de l'ordre α Riemann-Liouville

Afin d'utiliser les polynômes de Bernstein pour résoudre cette équation, nous approximations $u(x)$ avec les polynômes de Bernstein comme suit

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) \quad (2.5)$$

Où $B_{i,n}$ sont des polynômes de Bernstein et, $c_i, i = 0, 1, \dots, n$ sont des paramètres inconnus.

On remplace 2.5 dans l'équation 2.4, nous obtenons

$$D^\alpha \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) = \sum_{i=0}^k a_i D^{\beta_i} \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) + a_{k+1} \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) + g(x)$$

Où

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[D^\alpha b_{i,n}(x) - \sum_{i=0}^k a_i D^{\beta_i} b_{i,n}(x) - a_{k+1} b_{i,n}(x) \right] = g(x)$$

Alors les équations de Collocation sont obtenues et ainsi pour chaque ($j = 0, 1, \dots, n$) nous prenons une équation linéaire avec les inconnus $(n + 1)(c_i, i = 0, 1, \dots, n)$.

Enfin représente le système $(n + 1)$ des équation linéaires dans les inconnue $(n + 1)$, sont donné.

$$A_{i,j} X_i = b_j, \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

Où

$$A_{i,j} = D^\alpha b_{i,n}(x) - \sum_{i=0}^k a_i D^{\beta i} b_{i,n}(x) - a_{k+1} b_{i,n}(x)$$

$$b_j = g(x)$$

$$X_j = (c_i), i = 0, 1, \dots$$

2.2.1 Illustration par des exemples numériques

Exemple 2.3. Soit le problème suivant :

$$D^{\frac{1}{2}}u(x) = x^2.$$

avec $u(0) = 0$ La solution exacte de cette équation est :

$$u(x) = \frac{16x^{\frac{5}{2}}}{15\sqrt{\pi}}$$

si on applique la méthode on a les résultats suivants (2.3)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000e+00
2	0.100	0.001903	0.001903	2.946862e-16
3	0.200	0.010765	0.010765	8.049117e-16
4	0.300	0.029666	0.029666	1.065120e-15
5	0.400	0.060898	0.060898	1.380840e-15
6	0.500	0.106385	0.106385	1.873501e-15
7	0.600	0.167815	0.167815	2.275957e-15
8	0.700	0.246717	0.246717	2.442491e-15
9	0.800	0.344492	0.344492	1.998401e-15
10	0.900	0.462445	0.462445	7.216450e-16
11	1.000	0.601802	0.601802	1.110223e-16

TABLE 2.3 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.3) pour $n = 10$

Exemple 2.4. [27] Soit le problème suivant :

$$D^{\frac{3}{2}}u(x) = 12x - 6x^{\frac{1}{2}}.$$

avec $u(0) = 0, \quad u'(0) = 0$

La solution exacte de cette équation est donnée par : $3.6108x^{(5/2)} - 2.6587x^2$

Si on applique la méthode on a les résultats suivants

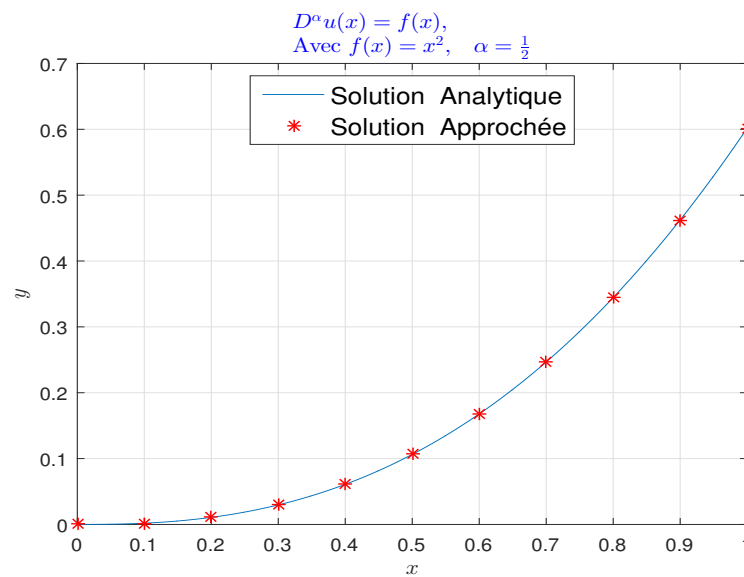


FIGURE 2.3 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(2.3) pour $n = 10$

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000e+00
2	0.100	-0.015168	-0.015168	3.348016e-16
3	0.200	-0.041755	-0.041755	7.771561e-16
4	0.300	-0.061286	-0.061286	2.081668e-16
5	0.400	-0.060000	-0.060000	2.935152e-15
6	0.500	-0.026363	-0.026363	6.220718e-15
7	0.600	0.049768	0.049768	7.494005e-15
8	0.700	0.177548	0.177548	6.217249e-15
9	0.800	0.365394	0.365394	2.442491e-15
10	0.900	0.621138	0.621138	4.440892e-16
11	1.000	0.952133	0.952133	0.000000e+00

TABLE 2.4 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (2.4) pour $n = 10$

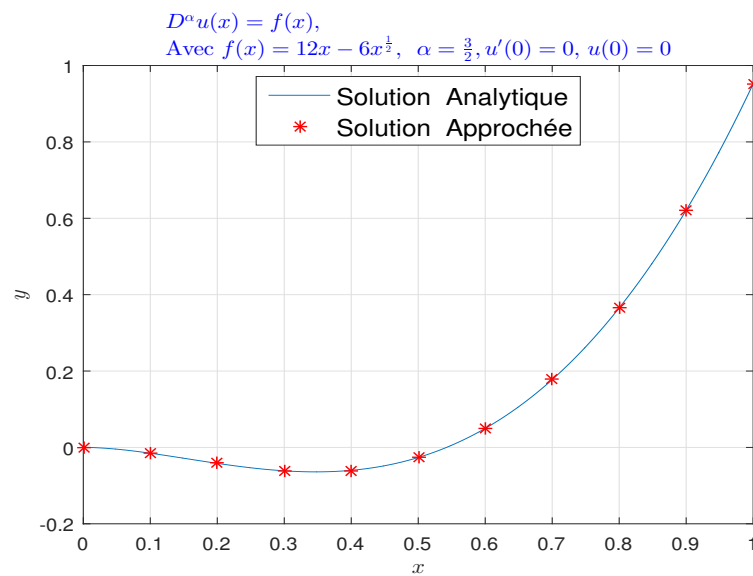


FIGURE 2.4 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(2.4) pour $n = 10$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES LINÉAIRES

Dans ce chapitre, on cherche la solution approchée de quelques type d'équations intégrales à savoir (Equations intégrales de Fredholm, Equations intégrales de Volterra et Equations intégrales de Fredholm–Volterra). Dans les méthodes numérique, on a s'utilisant les polynômes de Bernstein

3.1 Description de la méthode et résolution numériques des équation intégrales de Fredholm

On considère l'équation intégrale de Fredholm est donné par :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt; x \in [a, b] \quad (3.1)$$

Tels que, $u(x)$ une fonction inconnue à déterminer, $k(x; t)$ est le noyau et f est une fonction donnée. Pour déterminer la solution approchée de l'équation (3.1), on utilise la méthode des polynômes de Bernstein. Où $u(x)$ est approximée par les polynômes de Bernstein sur $[a, b]$ par

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) \quad (3.2)$$

Tels que, C et $B(x)$ sont des matrices données par

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t$$

$$B(x) = [b_{0,n}, b_{1,n}(x), \dots, b_{n,n}(x)]$$

Et $b_{i,n}(x)$ sont les polynômes de Bernstein de degré n et ($i = 0, 1, 2, \dots, n$).

et $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ sont des coefficients inconnus à déterminer. La substitution de la relation (3.2) dans (3.1) nous donne l'équation suivante :

$$\sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(t) dt = f(x), x \in [a, b]$$

ce qui donne

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[b_i^n(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) b_{i,n}(t) dt \right] = f(x), x \in [a, b]$$

Pour déterminés les coefficients inconnues $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, nous choisissons les points collocation

$$x = x_j, j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Alors

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[b_{i,n}(x_j) - \lambda \int_a^b k(x_j, t) b_{i,n}(t) dt \right] = f(x_j), x_j \in [a, b]$$

On obtient Alors un système d'équations algébrique linéaire

$$AX = b \tag{3.3}$$

Tels que

$$\begin{aligned} A &= [B_i^n(x_j) - \lambda \int_a^b k(x_j, t) b_{i,n}(t) dt]_{(n+1)(n+1)}, j, i = 0, 1, 2, \dots, n \\ b &= [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t \\ X &= [c_0, c_1, \dots, c_n]^t \end{aligned}$$

Le système linéaire (3.3) peut être résolu par n'importe quelle méthode de résolution de système linéaire pour déterminer les coefficients $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$: Ces c_i lorsqu'ils remplacés dans (3.2) produisent $u(x)$ approximativement.

Exemples illustratifs

Exemple 3.1. On considère l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = x + \int_{-1}^1 (x^4 - t^4)u(t) dt$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = x$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.1)

n	x	La solution exacte	La solution approchée	Erreur
1	-1.000	-1.000000	-1.000000	0.000000e+00
2	-0.800	-0.800000	-0.800000	7.105427e-15
3	-0.600	-0.600000	-0.600000	1.543210e-14
4	-0.400	-0.400000	-0.400000	2.853273e-14
5	-0.200	-0.200000	-0.200000	4.105050e-14
6	0.000	0.000000	0.000000	4.464484e-14
7	0.200	0.200000	0.200000	3.713696e-14
8	0.400	0.400000	0.400000	2.348122e-14
9	0.600	0.600000	0.600000	1.154632e-14
10	0.800	0.800000	0.800000	4.329870e-15

TABLE 3.1 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.1) pour $n = 10$

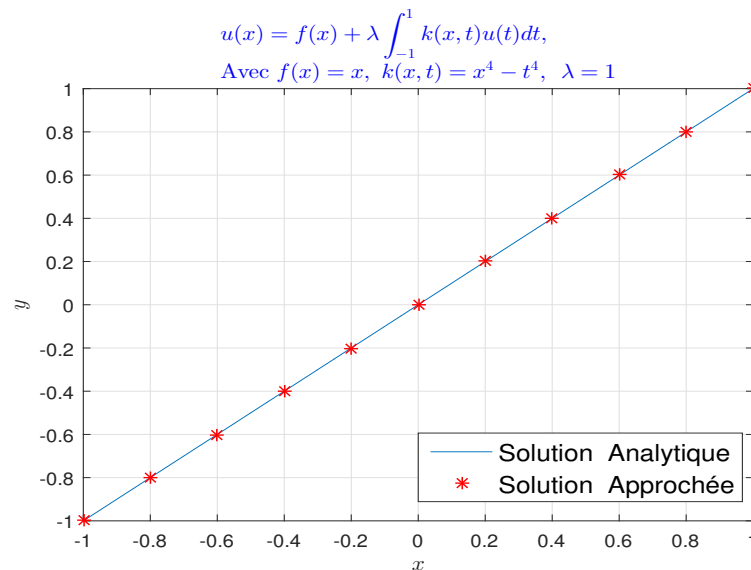


FIGURE 3.1 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.1) pour $n = 10$

Exemple 3.2. On considère l'équation intégrale de Fredholm par

$$u(x) = -\frac{2}{\pi} \cos(x) - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-t)u(t)dt$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = \sin(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.2)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000	-0.000000	9.853301e-09
2	0.157	0.156434	0.156434	9.774772e-09
3	0.314	0.309017	0.309017	1.381628e-08
4	0.471	0.453990	0.453990	1.004187e-08
5	0.628	0.587785	0.587785	1.564014e-08
6	0.785	0.707107	0.707107	1.328362e-08
7	0.942	0.809017	0.809017	1.620696e-08
8	1.100	0.891007	0.891007	1.163075e-08
9	1.257	0.951057	0.951057	1.285263e-08
10	1.414	0.987688	0.987688	1.196220e-08

TABLE 3.2 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.2) pour $n = 10$

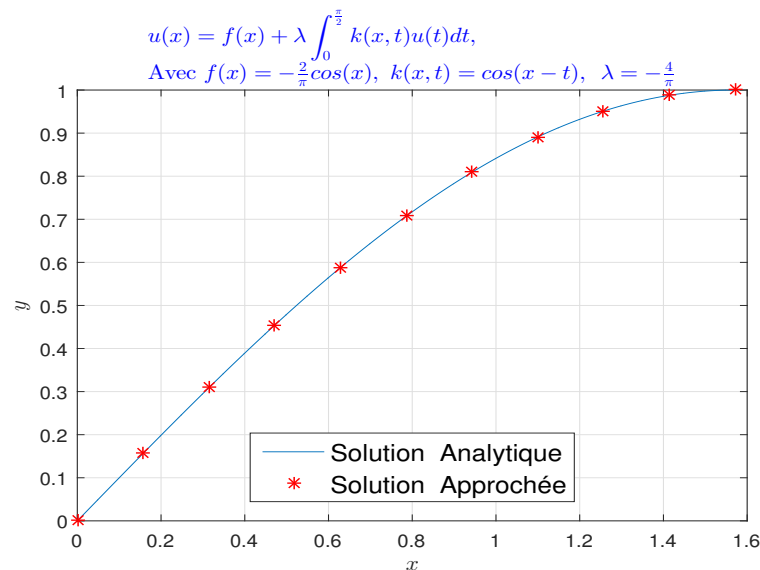


FIGURE 3.2 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.2) pour $n = 10$

Exemple 3.3. On considère l'équation intégrale de Fredholm par :

$$u(x) = 1 - \int_{-1}^1 (xt + x^2t^2)u(t)dt$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 1 + \frac{10}{9}x^2$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.3)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.000	2.111111	2.111111	4.440892e-16
2	-0.800	1.711111	1.711111	5.773160e-15
3	-0.600	1.400000	1.400000	1.643130e-14
4	-0.400	1.177778	1.177778	1.554312e-14
5	-0.200	1.044444	1.044444	4.218847e-15
6	0.000	1.000000	1.000000	5.329071e-15
7	0.200	1.044444	1.044444	7.327472e-15
8	0.400	1.177778	1.177778	6.661338e-15
9	0.600	1.400000	1.400000	1.043610e-14
10	0.800	1.711111	1.711111	1.043610e-14

TABLE 3.3 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.3) pour $n = 10$

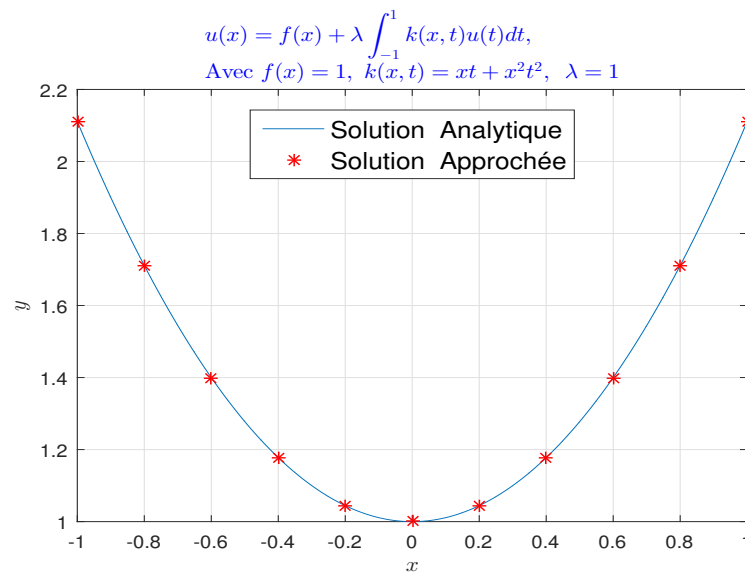


FIGURE 3.3 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.3) pour $n = 10$

3.2 Description de la méthode et résolution numérique des équations intégrales de Volterra

On considère l'équation intégrale de Volterra est donné par :

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt, a < x < b \tag{3.4}$$

Tels que, $u(x)$ une fonction inconnue à déterminer, $k(x;t)$ est le noyau et f est une fonction connue. Pour déterminer la solution approchée de l'équation (3.4), on utilise

la méthode décrite dans la section précédente, où on suppose que la solution $u(x)$ est approximée par les polynômes de Bernstein sur $[a, b]$ par : Où $u(x)$

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) \quad (3.5)$$

Tels que C et $B(x)$ sont des matrices données par

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t$$

$$B_n(t) = [b_{0,n} b_{1,n}(t), \dots, b_{n,n}(t)]$$

avec $b_{i,n}(x)$ sont les polynômes de Bernstein de degré n pour $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$.

et $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ sont des coefficients inconnus à déterminer. La substitution de la relation (3.5) dans (3.4) nous donne :

$$\sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(t) dt = f(x), a < x < b$$

donc

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[b_{i,n} - \lambda \int_a^x k(x, t) b_{i,n}(t) dt \right] = f(x), a < x < b$$

Pour déterminés les coefficients inconnus $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, nous choisissons les points collocation

$$x = x_j, j = 0, 1, 2, \dots, n$$

Alors

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[b_{i,n}(x_j) - \lambda \int_a^{x_j} k(x_j, t) b_{i,n}(t) dt \right] = f(x_j), a < x_j < b$$

Alors, on obtient un système d'équations algébrique linéaire

$$AX = b \quad (3.6)$$

Tels que

$$\begin{aligned} A &= [b_{i,n}(x_j) - \lambda \int_a^{x_j} k(x_j, t) b_{i,n}(t) dt]_{(n+1)(n+1)}, i, j = 0, 1, 2, \dots, n \\ b &= [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t \\ X &= [c_0, c_1, \dots, c_n]^t \end{aligned}$$

Le système linéaire (3.6) peut être résolu par n'importe quelle méthode de résolution de système linéaire pour trouver les $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$. En substituant les valeurs de $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ (3.5), on obtient la solution approchée de $u(x)$ sous forme d'un polynôme de degré n .

Exemples illustratifs

Exemple 3.4. On considère l'équation intégrale de Volterra par

$$u(x) = x - \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 5$$

La solution exacte est donnée par $u(x) = \sin(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.4)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000e+00
2	0.500	0.479426	0.479426	2.589819e-07
3	1.000	0.841471	0.841472	5.874966e-07
4	1.500	0.997495	0.997496	7.545768e-07
5	2.000	0.909297	0.909298	7.408569e-07
6	2.500	0.598472	0.598473	5.447054e-07
7	3.000	0.141120	0.141120	2.151065e-07
8	3.500	-0.350783	-0.350783	1.658313e-07
9	4.000	-0.756802	-0.756803	5.110663e-07
10	4.500	-0.977530	-0.977531	7.085466e-07

TABLE 3.4 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.4) pour $n = 10$

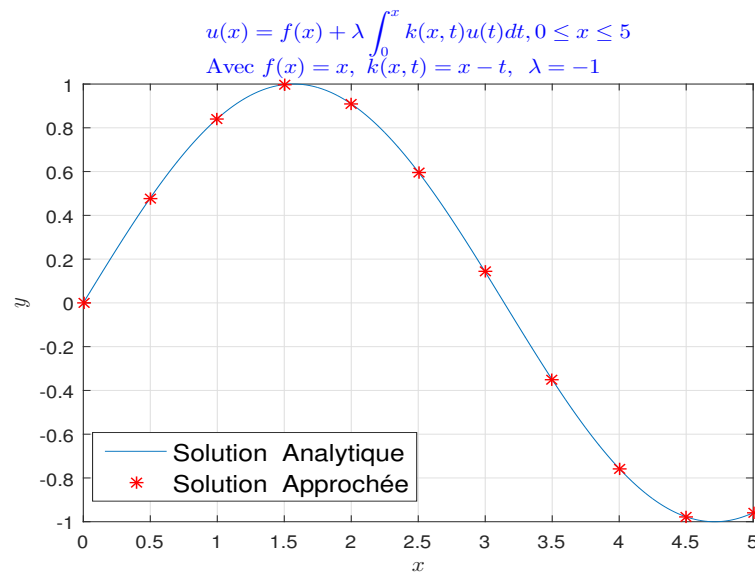


FIGURE 3.4 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.4) pour $n = 10$

Exemple 3.5. On considère l'équation intégrale de Volterra par

$$u(x) = \sin(x) - 4 \int_0^x (x - t)u(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 5$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = -\frac{1}{3} \sin(x) + \frac{2}{3} \sin(2x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.5)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000e+00
2	0.500	0.401172	0.401338	1.657279e-04
3	1.000	0.325708	0.325978	2.701921e-04
4	1.500	-0.238418	-0.238298	1.207925e-04
5	2.000	-0.807634	-0.807774	1.394253e-04
6	2.500	-0.838774	-0.839045	2.716914e-04
7	3.000	-0.233317	-0.233470	1.531176e-04
8	3.500	0.554919	0.555022	1.029627e-04
9	4.000	0.911840	0.912116	2.759413e-04
10	4.500	0.600589	0.600727	1.382301e-04

TABLE 3.5 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.5) pour $n = 10$

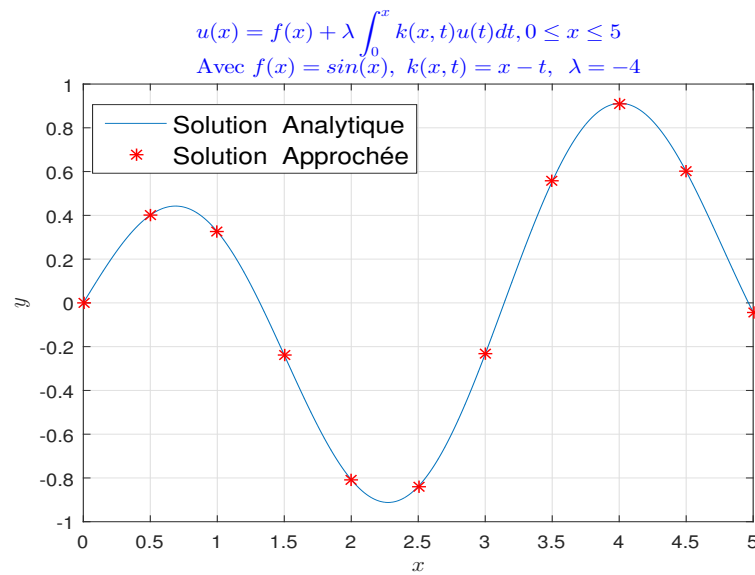


FIGURE 3.5 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.5) pour $n = 10$

Exemple 3.6. On considère l'équation intégrale de Volterra par

$$u(x) = 1 + 2x + \sin(x) + x^2 - \cos(x) + \int_0^x u(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 2x + \sin(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.6) :

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	1.000000	1.000000	4.440892e-16
2	0.157	0.975377	0.975377	1.635359e-13
3	0.314	0.902113	0.902113	3.945733e-13
4	0.471	0.782013	0.782013	6.029621e-13
5	0.628	0.618034	0.618034	8.106849e-13
6	0.785	0.414214	0.414214	1.011802e-12
7	0.942	0.175571	0.175571	1.195072e-12
8	1.100	-0.092019	-0.092019	1.343731e-12
9	1.257	-0.381966	-0.381966	1.443068e-12
10	1.414	-0.687131	-0.687131	1.518452e-12

TABLE 3.6 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.6) pour $n = 10$

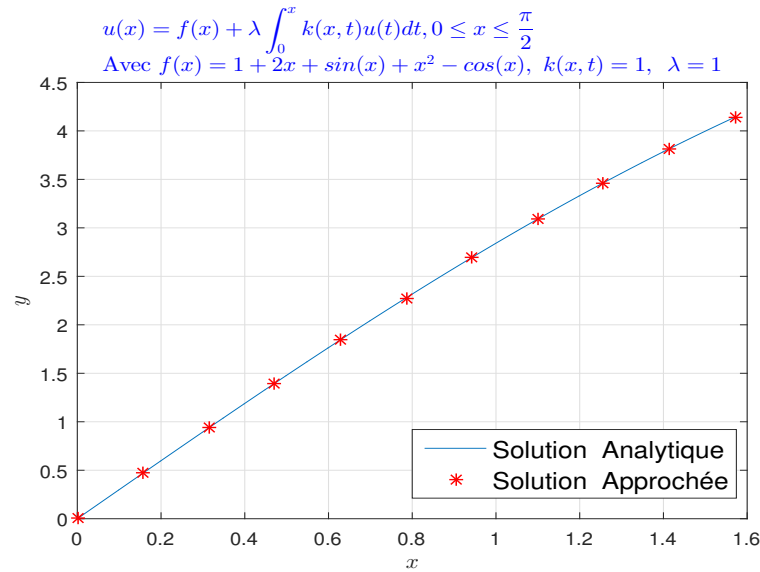


FIGURE 3.6 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.6) pour $n = 10$

Exemple 3.7. On considère l'équation intégrale de Volterra par

$$u(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \int_0^x (x - t)u(t)dt, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 2 \cos(x) - 1$. Les résultats sont présentés dans le tableau (3.7) :

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000e+00
2	0.196	0.587789	0.587789	4.171649e-10
3	0.393	1.168082	1.168082	2.644549e-10
4	0.589	1.733667	1.733667	2.467744e-10
5	0.785	2.277903	2.277903	1.841047e-10
6	0.982	2.794965	2.794965	1.700386e-10
7	1.178	3.280074	3.280074	1.098570e-10
8	1.374	3.729679	3.729679	1.704232e-10

TABLE 3.7 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.7) pour $n = 10$

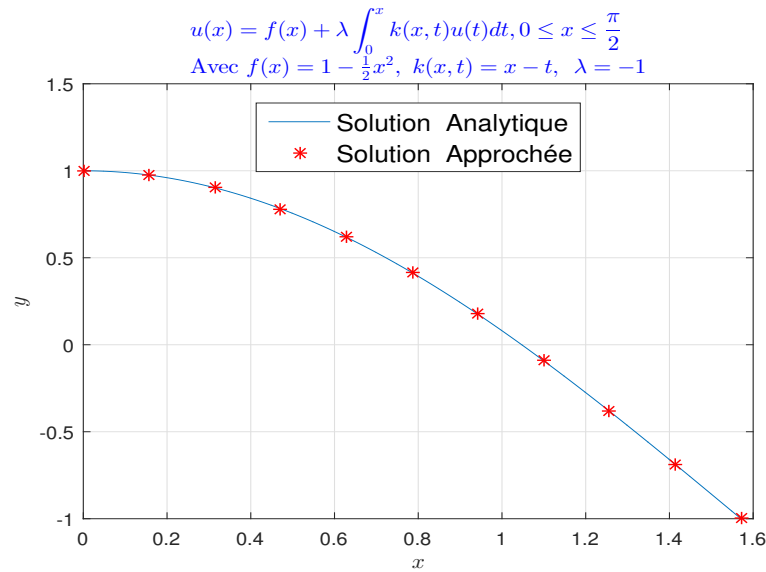


FIGURE 3.7 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.7) pour $n = 10$

3.3 Description de la méthode et résolution numérique des équations intégrales de Fredholm-Volterra

Considérons l'équation intégrale linéaire de Fredholm–Volterra, définie par :

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t)u(t)dt \quad (3.7)$$

Où $k(x,t)$, $f(x)$ sont des fonctions données, λ_1 et λ_2 sont des paramètres réels.

On suppose que la solution est de la forme :

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x). \quad (3.8)$$

Pour déterminer la solution approchée on procède comme suit, on remplace 3.8 dans l'équation 3.7, nous obtenons :

$$\sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t) \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t) \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(t)dt \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[b_{i,n}(x) - \lambda_1 \int_a^x k_1(x,t) b_{i,n}(t)dt - \lambda_2 \int_a^b k_2(x,t) b_{i,n}(t)dt \right] = f(x) \quad (3.10)$$

Pour déterminer les coefficients inconnues c_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), nous choisissons les points collocation

$$x = x_j, j = 0, 2, \dots, n$$

Alors

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[b_{i,n}(x_j) - \lambda_1 \int_0^{x_j} k_1(x_j, t) b_{i,n}(t) dt - \lambda_2 \int_0^1 k_2(x_j, t) b_{i,n}(t) dt \right] = f(x_j) \quad (3.11)$$

Alors, on obtient un système linéaire

$$AX = b \quad (3.12)$$

Tel que

$$a_{i,j} = \left[b_{i,n}(x_j) - \lambda_1 \int_0^{x_j} k_1(x_j, t) \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(t) dt - \lambda_2 \int_0^1 k_2(x_j, t) \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(t) dt \right].$$

$$b = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t$$

$$X = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t$$

Pour déterminer les coefficients $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, on résout Le système linéaire 3.12 par la méthode directe. En substituant les valeurs de c_i dan l'équation (3.8), on obtient une approximation de la solution $u(x)$.

Exemples illustratifs

Exemple 3.8. [21] Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm–Volterra :

$$u(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}x^4 + \int_0^x xtu(t)dt + \int_0^1 xtu(t)dt, \quad x \in [0, 1]$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = x$. Les résultats sont présentés dans le tableau et la figure (3.8) :

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000e+00
2	0.100	0.100000	0.100000	4.149459e-15
3	0.200	0.200000	0.200000	8.465451e-15
4	0.300	0.300000	0.300000	8.160139e-15
5	0.400	0.400000	0.400000	2.442491e-15
6	0.500	0.500000	0.500000	5.218048e-15
7	0.600	0.600000	0.600000	8.326673e-15
8	0.700	0.700000	0.700000	4.329870e-15
9	0.800	0.800000	0.800000	3.996803e-15
10	0.900	0.900000	0.900000	5.662137e-15
11	1.000	1.000000	1.000000	0.000000e+00

TABLE 3.8 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.8) pour $n = 10$

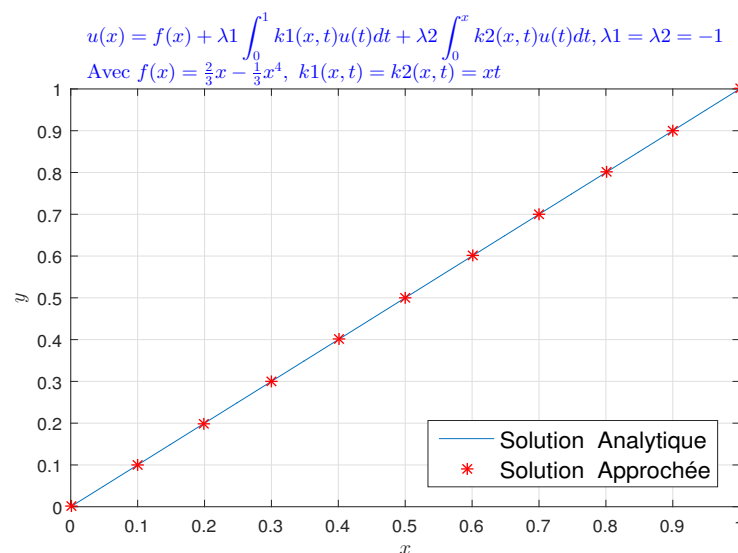


FIGURE 3.8 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.8) pour $n = 10$

Exemple 3.9. [21] Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm–Volterra :

$$u(x) = 2 \cos(x) - x \cos(2) - 2x \sin(2) + x - 1 + \int_0^x (x - t)u(t)dt + \int_0^2 xt u(t) \quad , x \in [0, 2]$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = \cos(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau et la figure (3.9)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	1.000000	1.000000	0.000000e+00
2	0.200	0.980067	0.980067	5.117018e-13
3	0.400	0.921061	0.921061	2.237543e-12
4	0.600	0.825336	0.825336	3.883338e-12
5	0.800	0.696707	0.696707	5.693890e-12
6	1.000	0.540302	0.540302	7.713941e-12
7	1.200	0.362358	0.362358	1.005035e-11
8	1.400	0.169967	0.169967	1.281772e-11
9	1.600	-0.029200	-0.029200	1.607505e-11
10	1.800	-0.227202	-0.227202	2.017192e-11
11	2.000	-0.416147	-0.416147	2.375050e-11

TABLE 3.9 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.9) pour $n = 10$

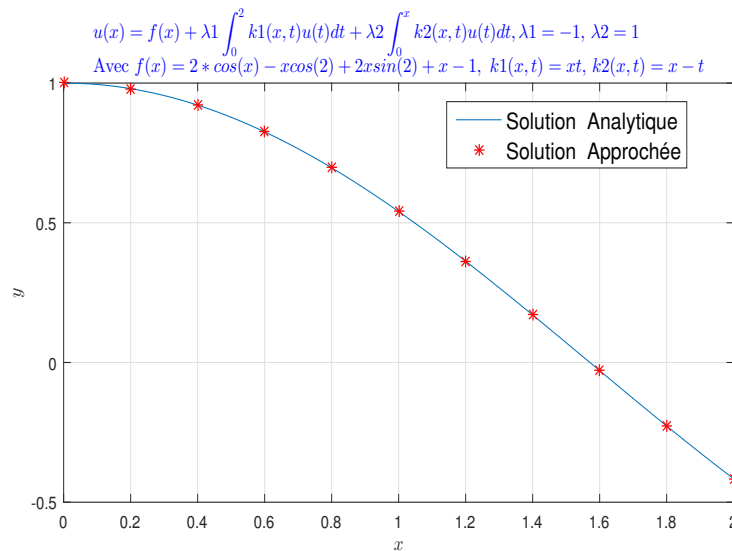


FIGURE 3.9 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.9) pour $n = 10$

Exemple 3.10. [21] Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm–Volterra :

$$u(x) = 3x + 4x^2 - x^3 - x^4 - 2 + \int_0^x tu(t)dt + \int_{-1}^1 tu(t)dt \quad , x \in [0, 1]$$

La solution exacte de cette équation est : $u(x) = 3x + 4x^2$. Les résultats sont présentés dans le tableau et la figure (3.10)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.000	1.000000	1.000000	0.000000e+00
2	-0.800	0.160000	0.160000	2.331468e-14
3	-0.600	-0.360000	-0.360000	4.674039e-14
4	-0.400	-0.560000	-0.560000	4.418688e-14
5	-0.200	-0.440000	-0.440000	2.037259e-14
6	0.000	0.000000	0.000000	1.901257e-15
7	0.200	0.760000	0.760000	1.032507e-14
8	0.400	1.840000	1.840000	1.176836e-14
9	0.600	3.240000	3.240000	1.554312e-14
10	0.800	4.960000	4.960000	1.421085e-14
11	1.000	7.000000	7.000000	0.000000e+00

TABLE 3.10 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.10) pour $n = 10$

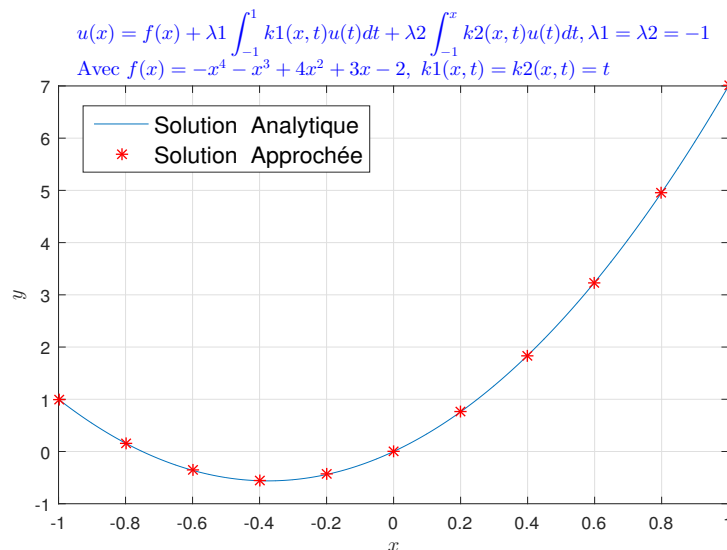


FIGURE 3.10 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.10) pour $n = 10$

Exemple 3.11. [21] Soit l'équation intégrale linéaire de Fredholm–Volterra :

$$u(x) = e^x - 1 - x + \int_0^x u(t)dt + \int_0^1 xu(t)dt$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = xe^x$. Les résultats sont présentés dans le tableau et la figure (3.11)

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000e+00
2	0.100	0.110517	0.110517	1.761230e-13
3	0.200	0.244281	0.244281	2.338130e-13
4	0.300	0.404958	0.404958	3.263501e-13
5	0.400	0.596730	0.596730	4.241052e-13
6	0.500	0.824361	0.824361	5.325740e-13
7	0.600	1.093271	1.093271	6.425971e-13
8	0.700	1.409627	1.409627	7.618350e-13
9	0.800	1.780433	1.780433	8.839596e-13
10	0.900	2.213643	2.213643	1.051159e-12
11	1.000	2.718282	2.718282	1.109335e-12

TABLE 3.11 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (3.11) pour $n = 10$

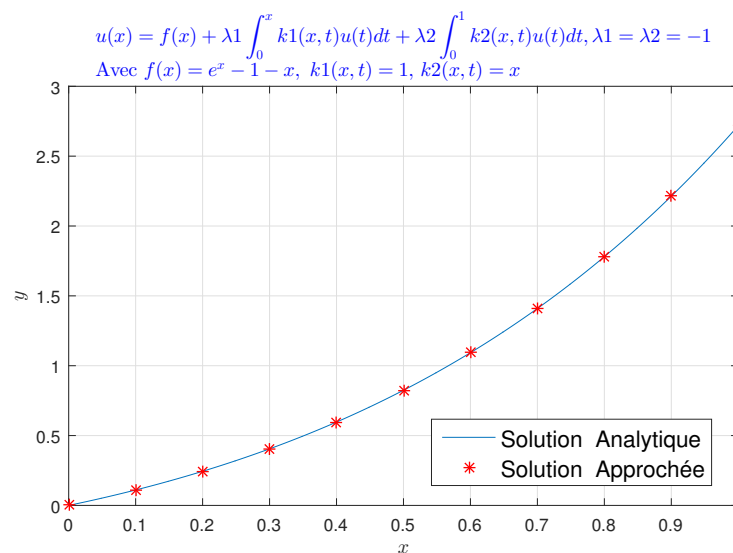


FIGURE 3.11 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(3.11) pour $n = 10$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Dans ce chapitre, la méthode de collocation basée sur les polynômes de Bernstein est introduite pour les solutions approchées des équations intégro-différentielles linéaires de Fredholm, Volterra et Fredholm–Volterra (FVIDE). En outre, des exemples numériques sont inclus pour démontrer la validité et l'applicabilité de la technique et des comparaisons sont effectuées avec les solutions exactes.

4.1 Description de la méthode

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, nous considérons l'équation intégro-différentielle linéaire, d'ordre n définie par :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(x) u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, t) u(t) dt \quad (4.1)$$

Où $\alpha_i(x)$ et $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions données, λ est paramètre réel et $E = [a, b]$, où $E = [a, x]$,

On suppose que la solution est de la forme :

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x). \quad (4.2)$$

Où $b_{i,n}$ sont les polynômes de Bernstein, c_i des constantes inconnues être déterminer, Alors

$$\begin{aligned}
u'(x) &= \sum_{i=0}^n c_i b'_{i,n}(x), \\
u''(x) &= \sum_{i=0}^n c_i b''_{i,n}(x) \\
&\vdots \\
u^n(x) &= \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}^{(n)}(x)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

On remplace 4.2 et 4.3 dans l'équation 4.1, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^n \alpha_n(x) c_i b_{i,n}^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x) \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, t) \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(t) dt \tag{4.4}$$

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[\alpha_n(x) b_{i,n}^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x) b_{i,n}^{(i)}(x) - \lambda \int_E k(x, t) b_{i,n}(t) dt \right] = f(x) \tag{4.5}$$

Pour déterminés les coefficients inconnues c_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), nous choisissons les points collocation

$$x = x_j, j = 0, 2, \dots, n$$

Alors

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[b_{i,n}^n x_j + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x_j) b_{i,n}^{(i)} x_j - \lambda \int_E k(x_j, t) b_{i,n} dt \right] = f(x_j) \tag{4.6}$$

Alors, on obtient un système linéaire

$$AX = b \tag{4.7}$$

Tel que

$$\begin{aligned}
A = a_{i,j} &= \left[b_{i,n}^n(x_j) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x_j) b_{i,n}^{(i)}(x_j) - \lambda \int_E k(x_j, t) b_{i,n} dt \right] \cdot \quad j, i = 0, 1, 2, \dots, n \\
b &= [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t \\
X &= [c_0, c_1, \dots, c_n]^t
\end{aligned}$$

Le système linéaire 4.7 peut être résolu par n'importe quelle méthode de résolution de système linéaire pour déterminer les coefficients c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). : Ces c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) lorsqu'ils sont remplacés dans (4.1) produisent une approximation de la solution $u(x)$.

4.1.1 Application de la méthode

4.1.1.1 Equation intégrro-différentielle linéaire de Fredholm

Exemple 4.1. : Soit l'équation intégrro-différentielle linéaire du second ordre de Fredholm

$$\begin{cases} xu''(x) + xu'(x) + u(x) = e^{-x} - (1 - e^{-1})x + \int_0^1 xu(t)dt, x \in [0, 1] \\ u'(0) = 1, u(0) = -1 \end{cases}$$

La solution exacte de ce problème est donnée par : $u(x) = e^{-x}$.

Les résultats de la méthode sont présentés dans le tableau 4.1 et la figure 4.1

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
2	0.100	0.90483742	0.90483742	1.471478e-11
3	0.200	0.81873075	0.81873075	3.548750e-11
4	0.300	0.74081822	0.74081822	5.363165e-11
5	0.400	0.67032005	0.67032005	6.904211e-11
6	0.500	0.60653066	0.60653066	8.204792e-11
7	0.600	0.54881164	0.54881164	9.295531e-11
8	0.700	0.49658530	0.49658530	1.020509e-10
9	0.800	0.44932896	0.44932896	1.095944e-10
10	0.900	0.40656966	0.40656966	1.158146e-10
11	1.000	0.36787944	0.36787944	1.209310e-10

TABLE 4.1 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.1) pour $n = 10$

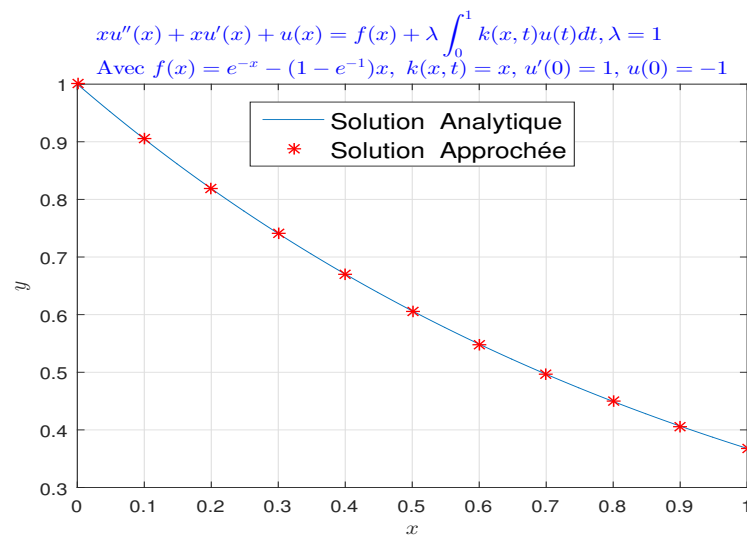


FIGURE 4.1 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.1) pour $n = 10$

Exemple 4.2. Soit l'équation intégral-différentielle linéaire du premier ordre de Fredholm

$$\begin{cases} u'(x) = 6x + 3 + \int_0^1 xtu(t)dt & x \in [0, 1] \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 3x + 4x^2$.

Les résultats sont présentés dans le tableau 4.2 et la figure 4.2

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	0.00000000	0.00000000	0.000000e+00
2	0.1	0.34000000	0.34000000	1.321165e-14
3	0.2	0.76000000	0.76000000	9.436896e-15
4	0.3	1.26000000	1.26000000	3.996803e-15
5	0.4	1.84000000	1.84000000	1.332268e-15
6	0.5	2.50000000	2.50000000	4.440892e-16
7	0.6	3.24000000	3.24000000	4.440892e-16
8	0.7	4.06000000	4.06000000	0.000000e+00
9	0.8	4.96000000	4.96000000	8.881784e-16
10	0.9	5.94000000	5.94000000	8.881784e-16
11	1.0	7.00000000	7.00000000	0.000000e+00

TABLE 4.2 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.2) pour $n = 10$

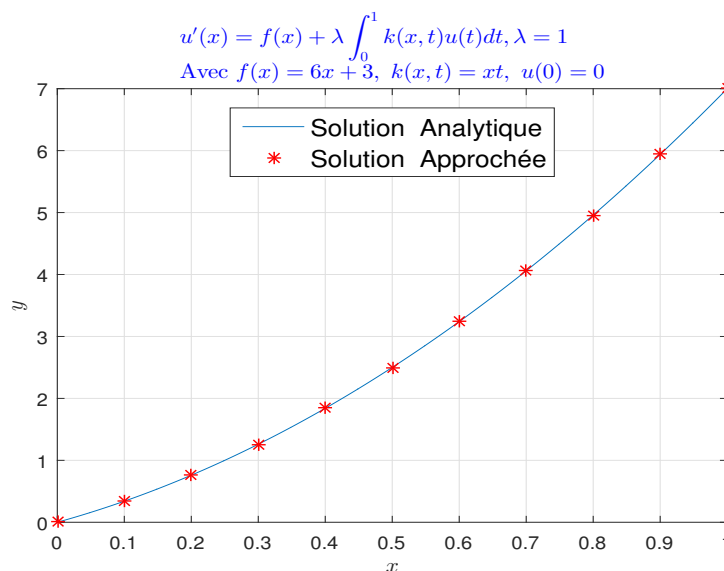


FIGURE 4.2 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.2) pour $n = 10$

Exemple 4.3. : Soit l'équation intégró-différentielle linéaire du second ordre de Fredholm

$$\begin{cases} u''(x) = 32x + \int_{-1}^1 (1 - xt)u(t)dt & x \in [-1, 1] \\ u'(-1) = 12, u(-1) = -\frac{5}{2} \end{cases} \quad (4.8)$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 1 + \frac{3}{2}x^2 + 5x^3$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.3 et la figure 4.3

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.0	-2.50000000	-2.50000000	0.000000e+00
2	-0.8	-0.60000000	-0.60000000	1.065814e-14
3	-0.6	0.46000000	0.46000000	1.831868e-15
4	-0.4	0.92000000	0.92000000	5.195844e-14
5	-0.2	1.02000000	1.02000000	1.512124e-13
6	0.0	1.00000000	1.00000000	2.897682e-13
7	0.2	1.10000000	1.10000000	4.618528e-13
8	0.4	1.56000000	1.56000000	6.505907e-13
9	0.6	2.62000000	2.62000000	8.069101e-13
10	0.8	4.52000000	4.52000000	8.357759e-13
11	1.0	7.50000000	7.50000000	5.968559e-13

TABLE 4.3 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.3) pour $n = 10$

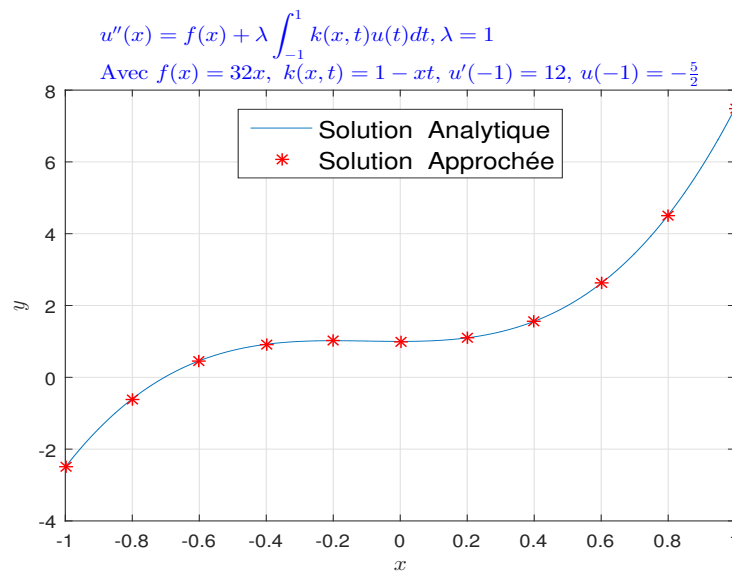


FIGURE 4.3 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.3) pour $n = 10$

Exemple 4.4. [20] : Soit l'équation intégrô-différentielle linéaire du premier ordre de Fredholm

$$\begin{cases} u'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 xt u(t)dt, x \in [0, 1] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = x$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.4 et la figure 4.4

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	0.00000000	0.00000000	0.000000e+00
2	0.1	0.10000000	0.10000000	5.412337e-16
3	0.2	0.20000000	0.20000000	1.443290e-15
4	0.3	0.30000000	0.30000000	9.436896e-16
5	0.4	0.40000000	0.40000000	5.551115e-17
6	0.5	0.50000000	0.50000000	6.106227e-16
7	0.6	0.60000000	0.60000000	5.551115e-16
8	0.7	0.70000000	0.70000000	3.330669e-16
9	0.8	0.80000000	0.80000000	1.110223e-16
10	0.9	0.90000000	0.90000000	1.110223e-16
11	1.0	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00

TABLE 4.4 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.4) pour $n = 10$

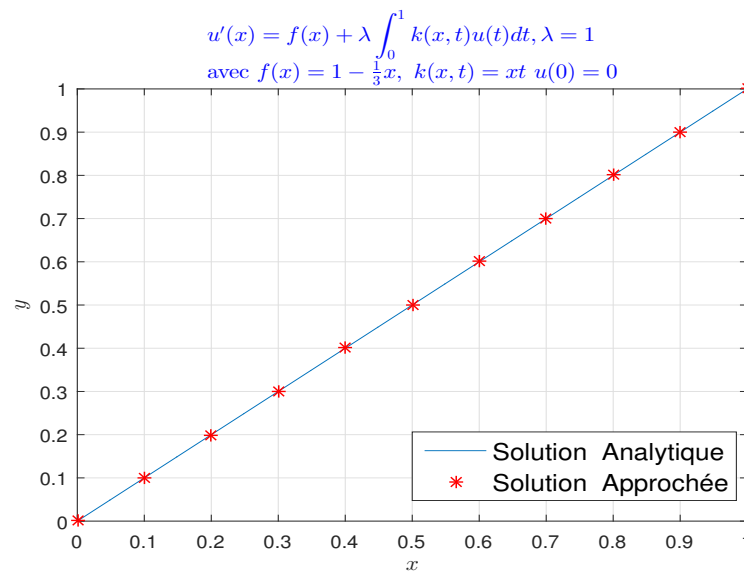


FIGURE 4.4 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.4) pour $n = 10$

Exemple 4.5. : Soit l'équation intégréo-différentielle linéaire du second ordre de Fredholm

$$\begin{cases} u''(x) + 2u'(x) + 3u(x) = 6e^x - \frac{1}{2}x + \int_0^1 xtu(t)dt, & x \in [0, 1] \\ u(0) = 1, & u'(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = e^x$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.5 et la figure 4.5

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
2	0.1	1.10517092	1.10525184	8.092024e-05
3	0.2	1.22140276	1.22201723	6.144730e-04
4	0.3	1.34985881	1.35182474	1.965930e-03
5	0.4	1.49182470	1.49623687	4.412169e-03
6	0.5	1.64872127	1.65687145	8.150182e-03
7	0.6	1.82211880	1.83542502	1.330622e-02
8	0.7	2.01375271	2.03369789	1.994518e-02
9	0.8	2.22554093	2.25362092	2.807999e-02
10	0.9	2.45960311	2.49728376	3.768065e-02
11	1.0	2.71828183	2.76696467	4.868285e-02

TABLE 4.5 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.5) pour $n = 10$

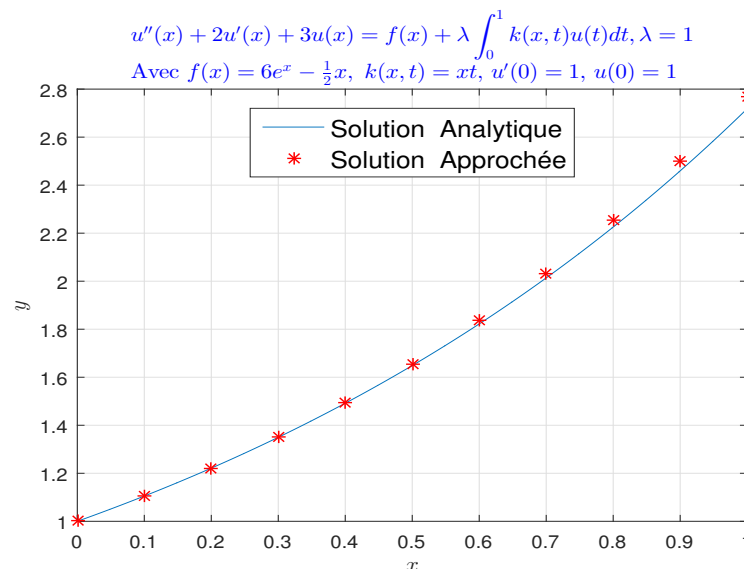


FIGURE 4.5 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.5) pour $n = 10$

Exemple 4.6. : Soit l'équation intégréo-différentielle linéaire du premier ordre de Fredholm

$$\begin{cases} u'(x) = 2 + \frac{7}{4}x + x^2 + \int_0^1 xt u(t)dt, & x \in [0, 1] \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = x^2$.

Les résultats sont présentés dans le tableau 4.6 et la figure 4.6

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	0.00000000	-0.00000000	1.632846e-15
2	0.1	0.01000000	0.01000000	1.014119e-14
3	0.2	0.04000000	0.04000000	2.579187e-14
4	0.3	0.09000000	0.09000000	3.926026e-14
5	0.4	0.16000000	0.16000000	5.145884e-14
6	0.5	0.25000000	0.25000000	6.339373e-14
7	0.6	0.36000000	0.36000000	7.510659e-14
8	0.7	0.49000000	0.49000000	8.587575e-14
9	0.8	0.64000000	0.64000000	9.481305e-14
10	0.9	0.81000000	0.81000000	1.029177e-13
11	1.0	1.00000000	1.00000000	1.199041e-13

TABLE 4.6 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.6) pour $n = 10$

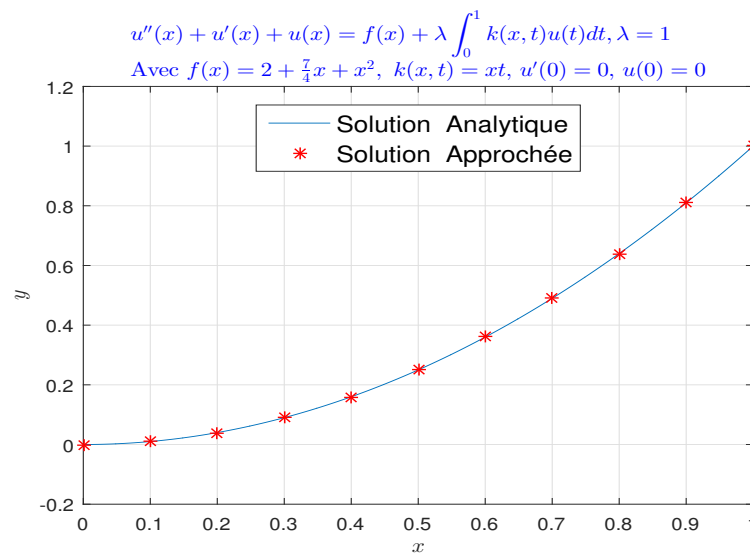


FIGURE 4.6 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.6) pour $n = 10$

Exemple 4.7. : Soit l'équation intégró-différentielle linéaire du second ordre de Fredholm

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) + u(x) = e^{-x} + \int_0^1 xtu(t)dt, & x \in [0, 1] \\ u'(0) = -1, u(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = e^{-x}$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.7 et la figure 4.7

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
2	0.1	0.90483742	0.90483742	1.487721e-11
3	0.2	0.81873075	0.81873075	3.637823e-11
4	0.3	0.74081822	0.74081822	5.580814e-11
5	0.4	0.67032005	0.67032005	7.284640e-11
6	0.5	0.60653066	0.60653066	8.757206e-11
7	0.6	0.54881164	0.54881164	1.000635e-10
8	0.7	0.49658530	0.49658530	1.104148e-10
9	0.8	0.44932896	0.44932896	1.187315e-10
10	0.9	0.40656966	0.40656966	1.251261e-10
11	1.0	0.36787944	0.36787944	1.297352e-10

TABLE 4.7 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.7) pour $n = 10$

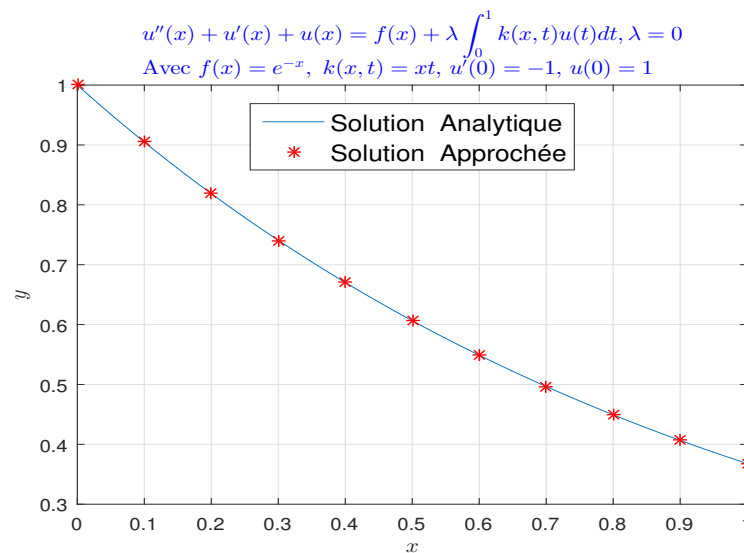


FIGURE 4.7 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.7) pour $n = 10$

Exemple 4.8. : Soit l'équation intégró-différentielle linéaire du second ordre de Fredholm

$$\begin{cases} u''(x) = -\sin(x) + x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} xtu(t)dt, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ u'(0) = 1, u(0) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = \sin(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.8 et la figure 4.8

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	0.00000000	0.00000000	8.860477e-16
2	0.2	0.15643447	0.15643446	2.608212e-09
3	0.3	0.30901699	0.30901699	6.600168e-09
4	0.5	0.45399050	0.45399049	1.046061e-08
5	0.6	0.58778525	0.58778524	1.403461e-08
6	0.8	0.70710678	0.70710676	1.722984e-08
7	0.9	0.80901699	0.80901697	1.995113e-08
8	1.1	0.89100652	0.89100650	2.210380e-08
9	1.3	0.95105652	0.95105649	2.359313e-08
10	1.4	0.98768834	0.98768832	2.432401e-08
11	1.6	1.00000000	0.99999998	2.420376e-08

TABLE 4.8 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.8) pour $n = 10$

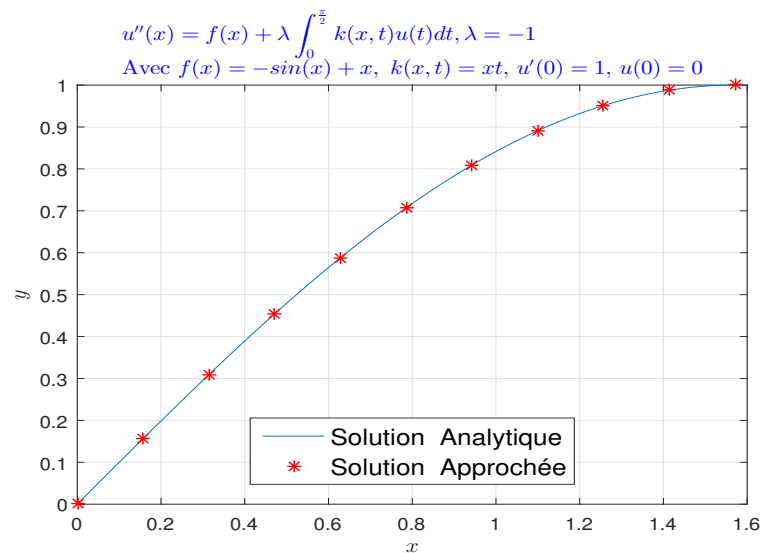


FIGURE 4.8 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.8) pour $n = 10$

4.1.1.2 Equation intégrô-différentielle linéaire de Volterra

Considérons l'équation intégrô-différentielle linéaire de Volterra, d'ordre n définie par :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(x)u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)u(t)dt \quad (4.9)$$

Où $\alpha_i(x)$ et $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions données, λ est paramètre réel

On suppose que la solution est de la forme :

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x). \quad (4.10)$$

Pour déterminer la solution approchée on procède comme auparavant, on remplace 4.9 et 4.3 dans l'équation 4.8, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^n \alpha_n(x) c_i b_{i,n}^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x) \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}^{(i)}(x) = f(x) + \lambda \int_E k(x, t) \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(t) dt \quad (4.11)$$

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[\alpha_n(x) b_{i,n}^{(n)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x) b_{i,n}^{(i)}(x) - \lambda \int_E k(x, t) b_{i,n}(t) dt \right] = f(x) \quad (4.12)$$

Pour déterminer les coefficients inconnues c_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), nous choisissons les points collocation

$$x = x_j, j = 0, 2, \dots, n$$

Alors

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[b_{i,n}^n x_j + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x_j) b_{i,n}^i x_j - \lambda \int_E k(x_j, t) b_{i,n} dt \right] = f(x_j) \quad (4.13)$$

Alors, on obtient un système linéaire

$$AX = b \quad (4.14)$$

Tel que

$$A = a_{i,j} = \left[b_{i,n}^n(x_j) + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x_j) b_{i,n}^i(x_j) - \lambda \int_a^x k(x_j, t) b_{i,n} dt \right] \quad j, i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$b = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t$$

$$X = [c_0, c_1, \dots, c_n]^t$$

Le système linéaire 4.7 peut être résolu par la méthode directe pour déterminer les coefficients c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$). Ces c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) seront alors substitués dans l'équation (4.8) produisant une approximation de la solution $u(x)$.

4.1.1.3 Equation intégr-différentielle linéaire de Volterra

Exemple 4.9. : Soit l'équation intégr-différentielle linéaire du premier ordre de Volterra

$$\begin{cases} u'(x) = 2 - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4} \int_0^x u(t) dt, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = 2x$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.9 et la figure 4.9

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000000000	-0.000000000000	2.226808e-16
2	0.100	0.200000000000	0.200000000000	4.996004e-15
3	0.200	0.400000000000	0.400000000000	8.049117e-15
4	0.300	0.600000000000	0.600000000000	1.232348e-14
5	0.400	0.800000000000	0.800000000000	1.565414e-14
6	0.500	1.000000000000	1.000000000000	1.487699e-14
7	0.600	1.200000000000	1.200000000000	1.065814e-14
8	0.700	1.400000000000	1.400000000000	4.884981e-15
9	0.800	1.600000000000	1.600000000000	1.110223e-15
10	0.900	1.800000000000	1.800000000000	2.220446e-16
11	1.000	2.000000000000	2.000000000000	0.000000e+00

TABLE 4.9 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.9) pour $n = 10$

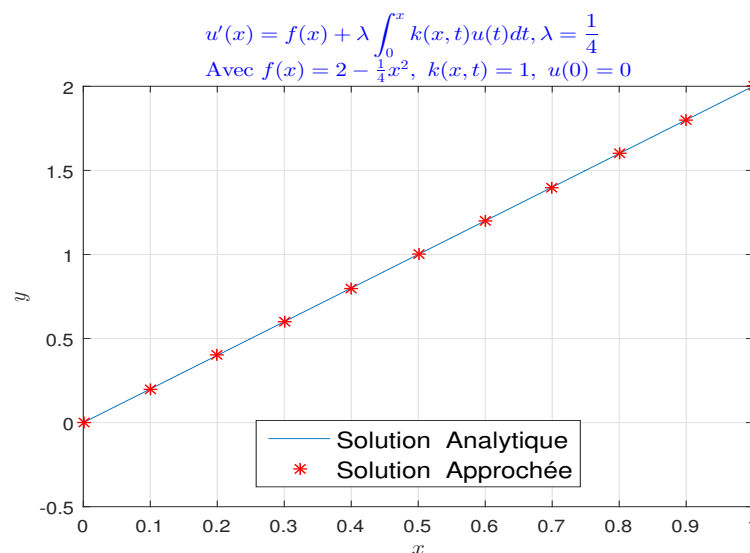


FIGURE 4.9 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.9) pour $n = 10$

Exemple 4.10. : Soit l'équation intégro-différentielle linéaire du premier ordre de Volterra

$$\begin{cases} u'(x) = 1 + \int_0^x u(t)dt, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = e^x$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.10 et la figure 4.10

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000e+00
2	0.100	1.105170918076	1.105170918071	4.643397e-12
3	0.200	1.221402758160	1.221402758156	4.588552e-12
4	0.300	1.349858807576	1.349858807571	4.712897e-12
5	0.400	1.491824697641	1.491824697636	4.858780e-12
6	0.500	1.648721270700	1.648721270695	5.062395e-12
7	0.600	1.822118800391	1.822118800385	5.310197e-12
8	0.700	2.013752707470	2.013752707465	5.616840e-12
9	0.800	2.225540928492	2.225540928486	5.969447e-12
10	0.900	2.459603111157	2.459603111151	6.408207e-12
11	1.000	2.718281828459	2.718281828452	6.766587e-12

TABLE 4.10 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.10) pour $n = 10$

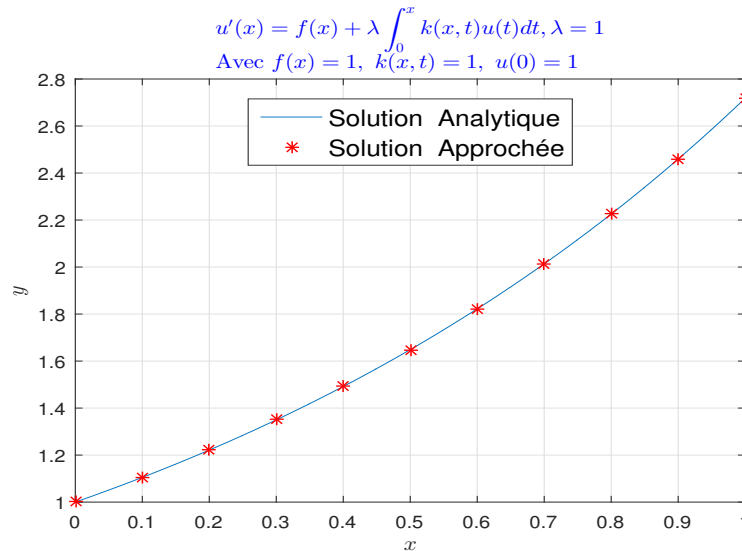


FIGURE 4.10 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.10) pour $n = 10$

Exemple 4.11. [19] : Soit l'équation intégrô-différentielle linéaire du second ordre de Volterra

$$\begin{cases} u''(x) = 1 + x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \\ u'(0) = 1, \quad u(0) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = e^x$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.11 et la figure 4.11

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	1.000000000000	1.000000000000	0.000000e+00
2	0.100	1.105170918076	1.105170918124	4.841305e-11
3	0.200	1.221402758160	1.221402758285	1.243841e-10
4	0.300	1.349858807576	1.349858807777	2.014613e-10
5	0.400	1.491824697641	1.491824697920	2.785230e-10
6	0.500	1.648721270700	1.648721271056	3.556566e-10
7	0.600	1.822118800391	1.822118800823	4.329206e-10
8	0.700	2.013752707470	2.013752707981	5.104184e-10
9	0.800	2.225540928492	2.225540929081	5.882992e-10
10	0.900	2.459603111157	2.459603111824	6.667471e-10
11	1.000	2.718281828459	2.718281829205	7.460543e-10

TABLE 4.11 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.11) pour $n = 10$

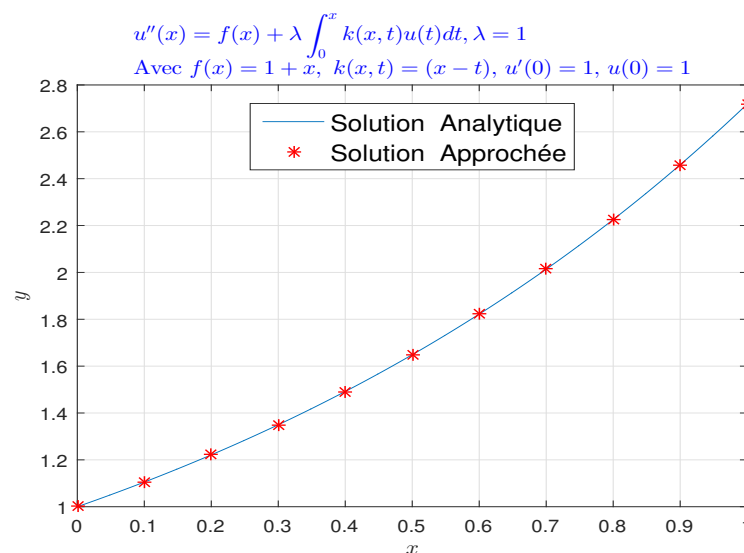


FIGURE 4.11 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.11) pour $n = 10$

Exemple 4.12. [19] : Soit l'équation intégro-différentielle linéaire du second ordre de Volterra

$$\begin{cases} u''(x) = -x - \frac{1}{6}x^3 - \int_0^x (x-t)u(t)dt \\ u'(0) = 2, \quad u(0) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $y(x) = x + \sin(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.12 et la figure 4.12

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000000000	0.000000000000	0.000000e+00
2	0.100	0.199833416647	0.199833083313	3.333342e-07
3	0.200	0.398669330795	0.398658669106	1.066169e-05
4	0.300	0.595520206661	0.595439293387	8.091327e-05
5	0.400	0.789418342309	0.789077660345	3.406820e-04
6	0.500	0.979425538604	0.978386982602	1.038556e-03
7	0.600	1.164642473395	1.162061637146	2.580836e-03
8	0.700	1.344217687238	1.338648256157	5.569431e-03
9	0.800	1.517356090900	1.506517383761	1.083871e-02
10	0.900	1.683326909627	1.663835844522	1.949107e-02
11	1.000	1.841470984808	1.808539987078	3.293100e-02

TABLE 4.12 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.12) pour $n = 10$

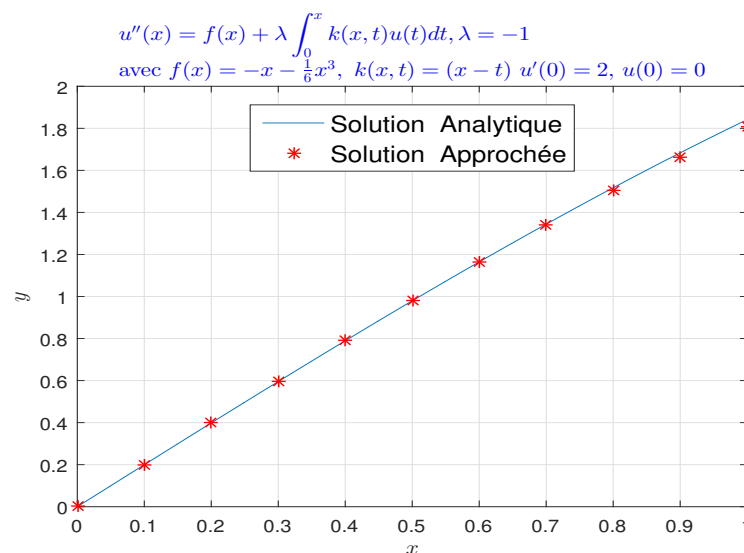


FIGURE 4.12 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.12) pour $n = 10$

Exemple 4.13. [22] : Soit l'équation intégró-différentielle linéaire du second ordre de Volterra

$$\begin{cases} u'(x) = 1 + \sin(x) + \int_0^x u(t)dt, \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = \frac{1}{4}e^x - \frac{3}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}\cos(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.13 et la figure 4.13

n	x	La solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	-1.000000000000	-1.000000000000	0.000000e+00
2	0.100	-0.899837416647	-0.899837416649	1.782907e-12
3	0.200	-0.798730664189	-0.798730664191	1.762035e-12
4	0.300	-0.695817208180	-0.695817208182	1.809553e-12
5	0.400	-0.590314357118	-0.590314357120	1.866507e-12
6	0.500	-0.481508958055	-0.481508958057	1.945277e-12
7	0.600	-0.368746834428	-0.368746834430	2.041312e-12
8	0.700	-0.251421894618	-0.251421894620	2.160661e-12
9	0.800	-0.128964845638	-0.128964845641	2.298217e-12
10	0.900	-0.000831451152	-0.000831451154	2.467054e-12
11	1.000	0.133509723302	0.133509723299	2.616463e-12

TABLE 4.13 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.13) pour $n = 10$

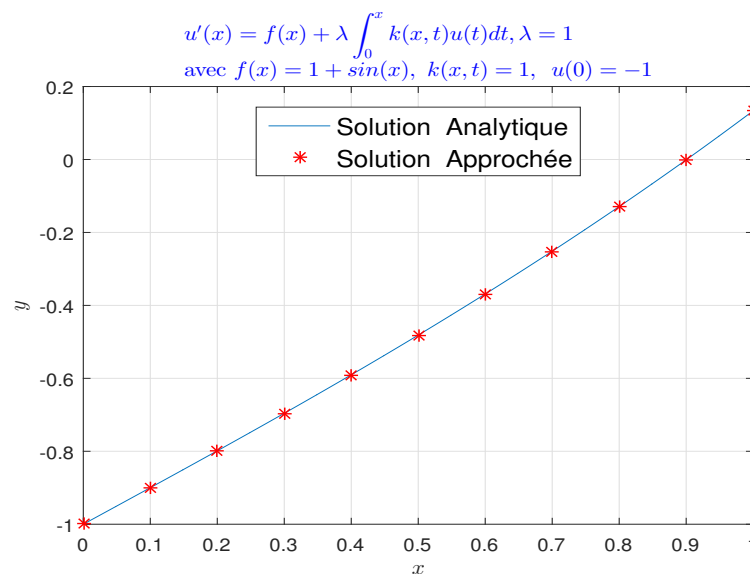


FIGURE 4.13 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.13) pour $n = 10$

4.1.1.4 Equation intégrale-différentielle linéaire de Fredholm–Volterra

Considérons l'équation intégrale-différentielle linéaire de Fredholm–Volterra, d'ordre n définie par :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i(x)u^{(i)}(x) = f(x) + \lambda_1 \int_0^x k_1(x,t)u(t)dt + \lambda_2 \int_0^1 k_2(x,t)u(t)dt \quad (4.15)$$

Où $\alpha_i(x)$, $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions données, λ est paramètre réel.

On suppose que la solution est de la forme :

$$u(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x). \quad (4.16)$$

Pour déterminer la solution approchée on procède comme suit, on remplace 4.9 et 4.3 dans l'équation 4.8, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \left(\alpha_i(x) \sum_{j=0}^n c_j b_{j,n}^{(i)}(x) \right) &= f(x) + \lambda 1 \int_0^x k1(x, t) \sum_{j=0}^n c_j b_{j,n}(t) dt \\ &+ \lambda 2 \int_0^1 k2(x, t) \sum_{j=0}^n c_j b_{j,n}(t) dt \end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\sum_{j=0}^n c_j \left[\sum_{i=0}^n \alpha_i(x) b_{j,n}^{(i)}(x) - \lambda 1 \int_0^x k1(x, t) b_{j,n}(t) dt - \lambda 2 \int_0^1 k2(x, t) b_{j,n}(t) dt \right] = f(x) \quad (4.18)$$

Pour déterminer les coefficients inconnues c_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), nous choisissons les points collocation

$$x = x_j, j = 0, 2, \dots, n$$

Alors

$$\sum_{j=0}^n c_j \left[\sum_{i=0}^n \alpha_i(x_j) b_{j,n}^{(i)}(x_j) - \lambda 1 \int_0^{x_j} k1(x_j, t) b_{j,n}(t) dt - \lambda 2 \int_0^1 k2(x_j, t) b_{j,n}(t) dt \right] = f(x_j) \quad (4.19)$$

Alors, on obtient un système linéaire

$$AX = b \quad (4.20)$$

Tel que

$$\begin{aligned} a_{i,j} &= \left[\sum_{i=0}^n \alpha_i(x_j) b_{j,n}^{(i)}(x_j) - \lambda 1 \int_0^{x_j} k1(x_j, t) b_{j,n}(t) dt - \lambda 2 \int_0^1 k2(x_j, t) b_{j,n}(t) dt \right] \\ b &= [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t \\ X &= [c_0, c_1, \dots, c_n]^t \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients c_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), on résout Le système linéaire 4.7 par la méthode directe. En substituant les valeurs de c_i dans l'équation (4.8), on obtient une approximation de la solution $u(x)$.

Exemple 4.14. [23] : Soit l'équation intégró-différentielle linéaire de Fredholm–Volterra

$$\begin{cases} u'(x) = 2e^x - 2 + \int_0^x u(t)dt + \int_0^1 u(t)dt, \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = e^x$

Les résultats sont présentés dans le tableau 4.1.1.4 et la figure 4.14

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	0.00000000	0.00000000	0.000000e+00
2	0.1	0.11051709	0.11051709	6.674014e-11
3	0.2	0.24428055	0.24428055	7.934400e-11
4	0.3	0.40495764	0.40495764	9.427048e-11
5	0.4	0.59672988	0.59672988	1.098529e-10
6	0.5	0.82436064	0.82436064	1.266433e-10
7	0.6	1.09327128	1.09327128	1.446325e-10
8	0.7	1.40962690	1.40962690	1.641396e-10
9	0.8	1.78043274	1.78043274	1.851759e-10
10	0.9	2.21364280	2.21364280	2.083667e-10
11	1.0	2.71828183	2.71828183	2.319855e-10

TABLE 4.14 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.14) pour $n = 10$

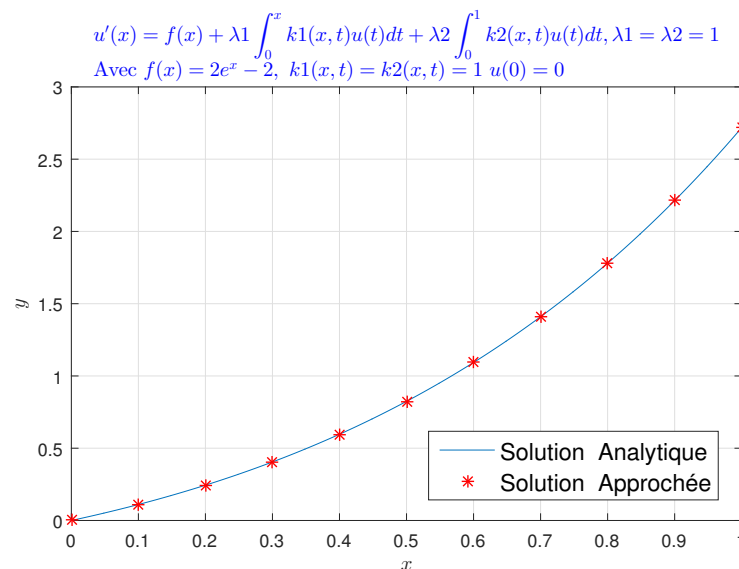


FIGURE 4.14 – comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.14) pour $n = 10$

Exemple 4.15. [10] : Soit l'équation intégral-différentielle linéaire de Fredholm–Volterra

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{27}{5} - \frac{1}{5}x^6 - \frac{3}{4}x^5 - x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 + \frac{41}{20}x + \int_{-1}^x xtu(t)dt + \int_{-1}^1 (x-t)u(t)dt, \\ u(-1) = 0 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = (x+1)^3$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.15 et la figure 4.15

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.0	0.00000000	0.00000000	0.000000e+00
2	-0.8	0.00800000	0.00800000	5.442695e-14
3	-0.6	0.06400000	0.06400000	5.133394e-14
4	-0.4	0.21600000	0.21600000	4.313216e-14
5	-0.2	0.51200000	0.51200000	3.641532e-14
6	0.0	1.00000000	1.00000000	2.842171e-14
7	0.2	1.72800000	1.72800000	1.554312e-14
8	0.4	2.74400000	2.74400000	2.664535e-15
9	0.6	4.09600000	4.09600000	8.881784e-16
10	0.8	5.83200000	5.83200000	8.881784e-16
11	1.0	8.00000000	8.00000000	0.000000e+00

TABLE 4.15 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.15) pour $n = 10$

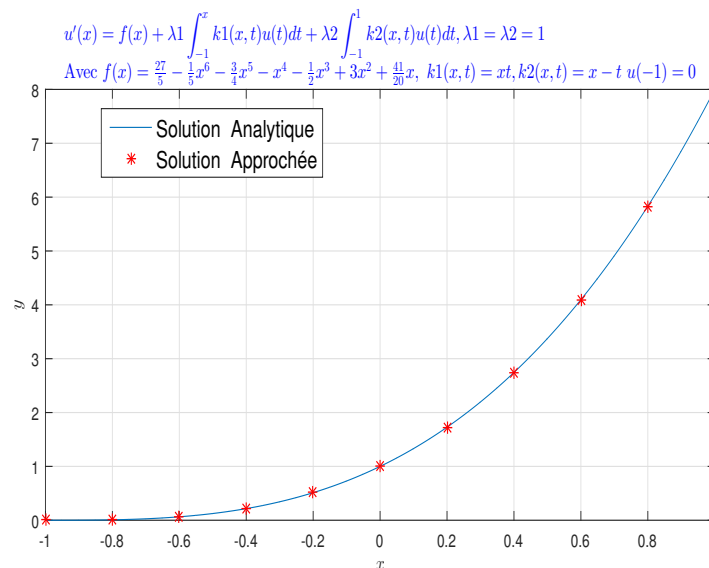


FIGURE 4.15 – comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.15) pour $n = 10$

Exemple 4.16. [23] [24] : Soit l'équation intégró-différentielle linéaire de Fredholm–Volterra

$$\begin{cases} u''(x) + u'(x) - xu(x) = e^x - \sin(x) + \frac{1}{2}x\cos(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \cos(x)e^{-t}u(t)dt + \int_0^1 \sin(x)e^{-t}u(t)dt, \\ u(-1) = u'(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = e^x$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.16 et la figure 4.16

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
2	0.1	1.10517092	1.10517065	2.706724e-07
3	0.2	1.22140276	1.22140205	7.048492e-07
4	0.3	1.34985881	1.34985767	1.140470e-06
5	0.4	1.49182470	1.49182313	1.568504e-06
6	0.5	1.64872127	1.64871928	1.988997e-06
7	0.6	1.82211880	1.82211640	2.401933e-06
8	0.7	2.01375271	2.01374990	2.809221e-06
9	0.8	2.22554093	2.22553772	3.212163e-06
10	0.9	2.45960311	2.45959950	3.612605e-06
11	1.0	2.71828183	2.71827781	4.014418e-06

TABLE 4.16 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.16) pour $n = 10$

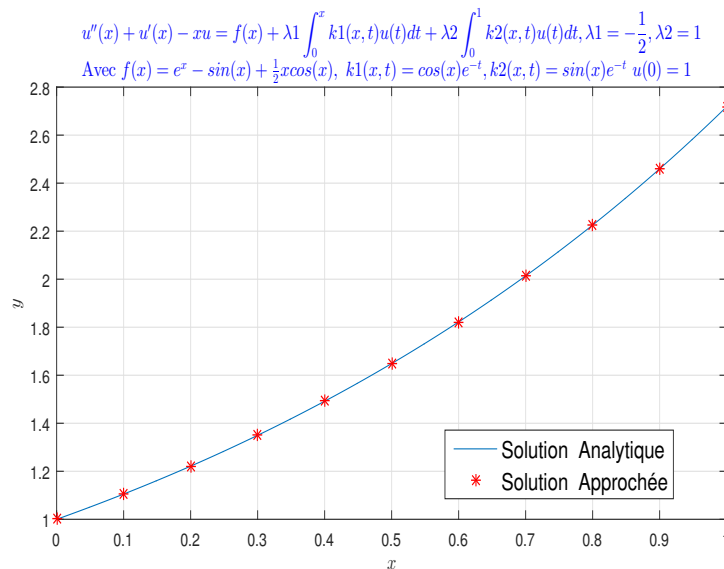


FIGURE 4.16 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.16) pour $n = 10$

Exemple 4.17. [16][25] : Soit l'équation intégrale de Fredholm–Volterra

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) + \int_0^x x^2 t u(t) dt + \int_0^1 x(x-t)u(t)dt, \\ f(x) = x^3 \sin(x) + (\sin(1) - 2\sin(\frac{x}{2}))x^2 + (1 - \sin(1) - \cos(1))x - \sin(x) \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par $u(x) = \cos(x)$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.17 et la figure 4.17

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.0	1.00000000	1.00000000	0.000000e+00
2	0.1	0.99500417	0.99500417	1.350253e-12
3	0.2	0.98006658	0.98006658	1.323053e-12
4	0.3	0.95533649	0.95533649	1.336597e-12
5	0.4	0.92106099	0.92106099	1.340372e-12
6	0.5	0.87758256	0.87758256	1.341594e-12
7	0.6	0.82533561	0.82533561	1.331046e-12
8	0.7	0.76484219	0.76484219	1.307066e-12
9	0.8	0.69670671	0.69670671	1.259659e-12
10	0.9	0.62160997	0.62160997	1.194378e-12
11	1.0	0.54030231	0.54030231	1.052713e-12

TABLE 4.17 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.17) pour $n = 10$

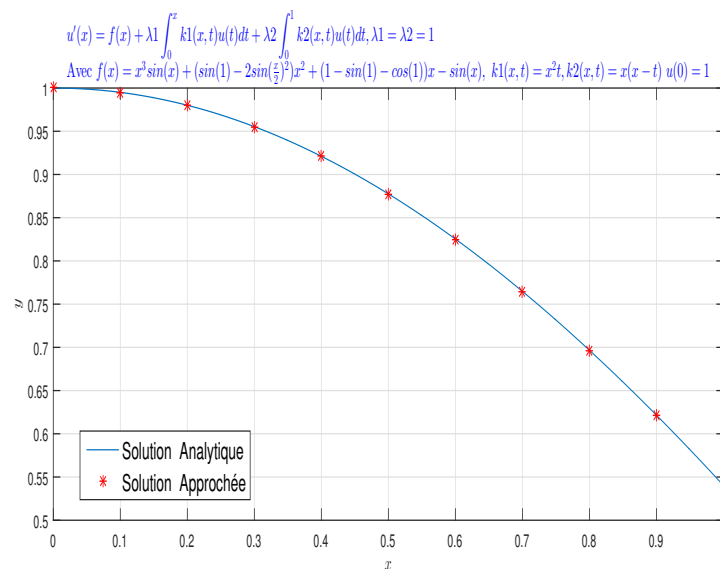


FIGURE 4.17 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.17) pour $n = 10$

Exemple 4.18. : Soit l'équation intégrale-différentielle linéaire de Fredholm–Volterra

$$\begin{cases} u''(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6 + \int_{-1}^x u(t)dt + \int_{-1}^1 (1 - 2xt)u(t)dt, \\ u(-1) = -7, \quad u'(-1) = 12 \end{cases}$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = -3x^2 + 6x + 2$. Les résultats sont présentés dans le tableau 4.18 et la figure 4.18

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	-1.0	-7.00000000	-7.00000000	0.000000e+00
2	-0.8	-4.72000000	-4.72000000	7.549517e-14
3	-0.6	-2.68000000	-2.68000000	8.393286e-14
4	-0.4	-0.88000000	-0.88000000	4.596323e-14
5	-0.2	0.68000000	0.68000000	2.984279e-13
6	0.0	2.00000000	2.00000000	6.599166e-13
7	0.2	3.08000000	3.08000000	1.113776e-12
8	0.4	3.92000000	3.92000000	1.648015e-12
9	0.6	4.52000000	4.52000000	2.260414e-12
10	0.8	4.88000000	4.88000000	2.938094e-12
11	1.0	5.00000000	5.00000000	3.652190e-12

TABLE 4.18 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (4.18) pour $n = 10$

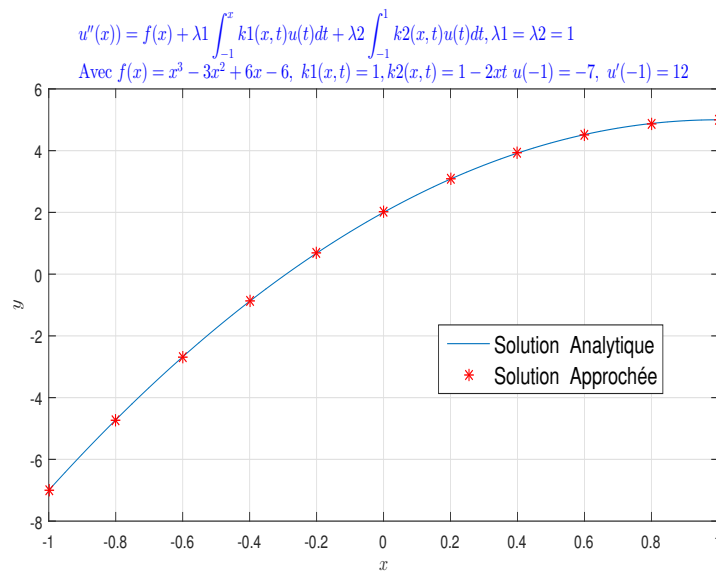


FIGURE 4.18 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(4.18) pour $n = 10$

RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS INTÉGRÉ-DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES

Dans ce chapitre, les polynômes sont utilisés pour approximer la solution des EIDF dans laquelle la définition de Caputo est adoptée pour la dérivée fractionnelle. On donne quelques exemples pour comparaison des solutions approchées avec les solutions exactes.

5.1 Formulation de la solution approximative d'équations intégré-différentielle fractionnaire

Étant donnée l'équation

$${}^C D^\alpha y(x) = f(x) + \int_a^b k(x, t)y(t)dt, \quad n-1 < \alpha \leq n \quad n \in \mathbb{N} \quad (5.1)$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$y^{(j)}(a) = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (5.2)$$

où ${}^C D^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo de $y(x)$, $k(x, t)$, $f(x)$ sont des fonctions données, x et t sont des variables réelles variant dans l'intervalle $[0, 1]$ et $y(x)$ est la fonction inconnue à déterminer. Notre approche dans cette partie est d'utiliser les polynômes de Bernstein pour construire une solution approchée de l'équation intégré-différentielle fractionnaire (5.1)–(5.2). En prenant l'intégration fractionnaire des deux côtés de l'équation (5.1) et en utilisant la propriété 1.4 de la proposition (1.5) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
I^\alpha({}^C D^\alpha y(x)) &= I^\alpha f(x) + I^\alpha \left(\int_0^1 k(x,t)y(t)dt \right) \\
y(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} y^k(0) \frac{x^k}{k!} + I^\alpha f(x) + I^\alpha \left(\int_0^t k(x,t)y(t)dt \right)
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Nous utilisons la base polynomiale de Bernstein pour estimer la solution de (5.1).

$$y(x) = \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) \tag{5.4}$$

Substituant (5.4) dans (5.3)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} y^k(0^+) \frac{x^k}{k!} + I^\alpha f(x) + I^\alpha \left(\int_0^1 k(x,t) \sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(t) dt \right) \\
\sum_{i=0}^n c_i b_{i,n}(x) - I^\alpha \left(\sum_{j=0}^n c_j \psi(x) \right) &= \sum_{k=0}^{m-1} y^k(0^+) \frac{x^k}{k!} + I^\alpha f(x)
\end{aligned}$$

où

$$\psi(x) = \int_0^1 k(x,t) b_{i,n}(t) dt$$

Ainsi nous avons,

$$\sum_{i=0}^n c_i [b_{i,n}(x) - I^\alpha \psi(x)] = \sum_{k=1}^{m-1} y^k(0^+) \frac{x^k}{k!} + I^\alpha f(x). \tag{5.5}$$

En substituant $x = x_j, j = 0, \dots, n$ dans l'équation (5.5), avec x_j sont choisis comme points de collocation distincts appropriés dans (a, b) , nous obtenons un système linéaire de $(n + 1)$ équations à $(n + 1)$ inconnues. Pour déterminer les inconnus c_i , les $(n + 1)$ équations linéaires sont résolues à l'aide du logiciel Matlab. En substituant $c_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ dans l'équation (5.4), nous obtenons la solution approximative de l'équation intégral-différentielle fractionnaire (5.1).

5.2 Exemples illustratifs

Exemple 5.1. Soit l'équation intégral-différentielle fractionnaire suivante :

$$D^{\frac{1}{2}} u(x) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} + \frac{3x\sqrt{\pi}}{4} - \frac{9}{10} - \int_0^1 u(t)dt, \quad u(0) = 0 \quad x \in [0, 1].$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = x^{\frac{3}{2}} + x$, Les résultats sont présentés dans le tableau 5.1 et la figure 5.1

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000e+00
2	0.100	0.131623	0.131648	2.571244e-05
3	0.200	0.289443	0.289479	3.636288e-05
4	0.300	0.464317	0.464361	4.453525e-05
5	0.400	0.652982	0.653034	5.142487e-05
6	0.500	0.853553	0.853611	5.749475e-05
7	0.600	1.064758	1.064821	6.298235e-05
8	0.700	1.285662	1.285730	6.802871e-05
9	0.800	1.515542	1.515614	7.272575e-05
10	0.900	1.753815	1.753892	7.713731e-05
11	1.000	2.000000	2.000081	8.130986e-05

TABLE 5.1 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (5.1) pour $n = 10$

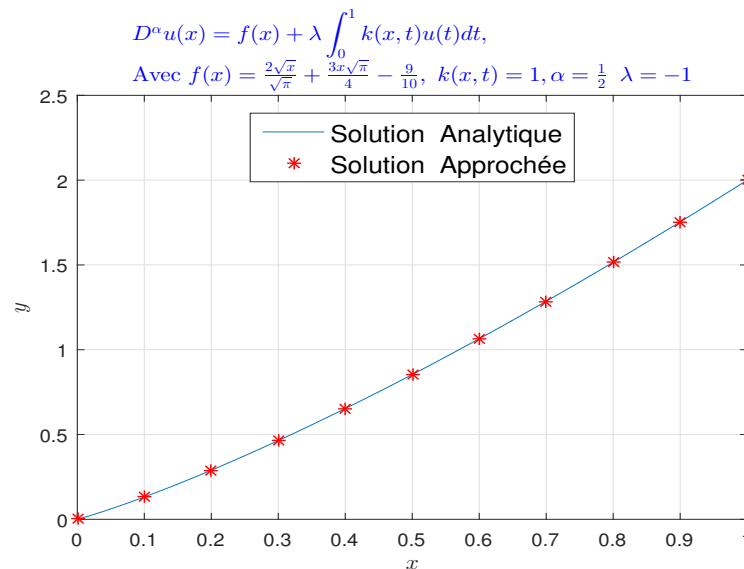


FIGURE 5.1 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(5.1) pour $n = 10$

Exemple 5.2. [18] Soit l'équation intégró-différentielle fractionnaire suivante :

$$D^{\frac{1}{2}}u(x) = \frac{\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} + \frac{x}{12} + \int_0^1 (xt)u(t)dt, \quad u(0) = 0, \quad x \in [0, 1].$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = x^2 - x$. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.2 et la figure 5.2

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	0.000000	0.000000	0.000000e+00
2	0.100	-0.090000	-0.086737	3.263336e-03
3	0.200	-0.160000	-0.150770	9.230107e-03
4	0.300	-0.210000	-0.193043	1.695679e-02
5	0.400	-0.240000	-0.213893	2.610668e-02
6	0.500	-0.250000	-0.213515	3.648520e-02
7	0.600	-0.240000	-0.192039	4.796104e-02
8	0.700	-0.210000	-0.149562	6.043782e-02
9	0.800	-0.160000	-0.086159	7.384085e-02
10	0.900	-0.090000	-0.001890	8.811006e-02
11	1.000	0.000000	0.103196	1.031957e-01

TABLE 5.2 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (5.2) pour $n = 10$

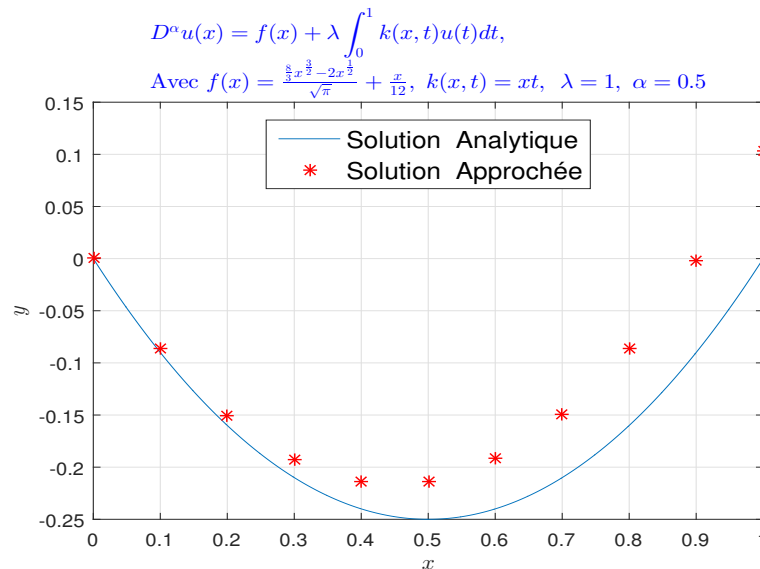


FIGURE 5.2 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(5.2) pour $n = 10$

Exemple 5.3. Soit l'équation intégrale-différentielle fractionnaire suivante :

$$D^{\frac{1}{2}}u(x) = x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\sqrt{\pi}x^2 + \frac{8}{3\sqrt{\pi}}x^{\frac{3}{2}} - 1 + \int_0^x 2tu(t)dt, \quad u(0) = -1, \quad x \in [0, 1].$$

La solution exacte est donnée par : $u(x) = x^{\frac{1}{2}} - 1$. Les résultats sont présentés dans le tableau 5.3 et la figure 5.3

n	x	Solution exacte	Solution approchée	Erreur
1	0.000	-1.000000	-1.000000	0.000000e+00
2	0.100	-0.683772	-0.684053	2.811928e-04
3	0.200	-0.552786	-0.552909	1.228559e-04
4	0.300	-0.452277	-0.452420	1.420928e-04
5	0.400	-0.367544	-0.367677	1.327947e-04
6	0.500	-0.292893	-0.293049	1.558184e-04
7	0.600	-0.225403	-0.225578	1.744951e-04
8	0.700	-0.163340	-0.163571	2.305332e-04
9	0.800	-0.105573	-0.105852	2.792396e-04
10	0.900	-0.051317	-0.051802	4.853818e-04
11	1.000	0.000000	-0.000147	1.468743e-04

TABLE 5.3 – Comparaison entre la solution approchée et la solution exacte de l'exemple (5.3) pour $n = 10$

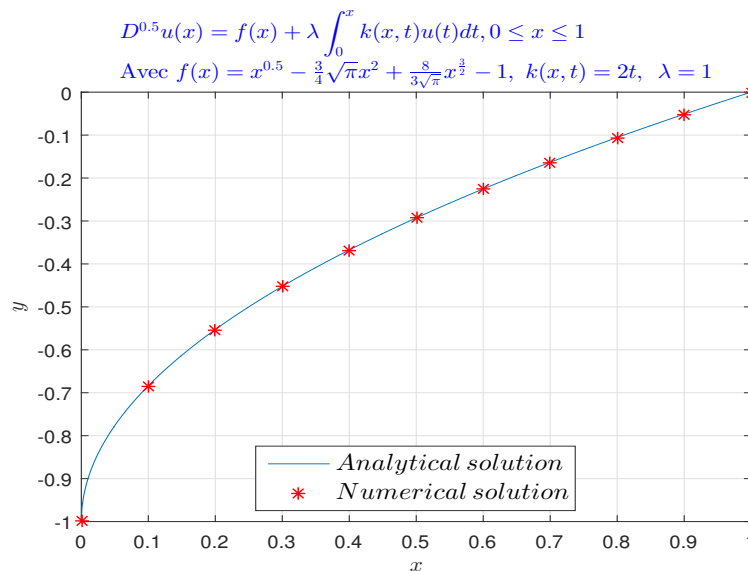


FIGURE 5.3 – Comparaison graphique entre la solution numérique et la solution exacte de l'exemple(5.3) pour $n = 10$

Conclusion

Dans cette mémoire , nous présentons une méthode de collection de résolution d'équations différentielles ordinaires et fractionnaire et d'équations intégrale et d'équations intégeo-différentielles et d'équations intégeo-différentielles fractionnaire à l'aide de polynômes de Bernstein , et elle est convertie en un ensemble d'équations algébriques , l'un des avantages de la méthode est d'obtenir la solution analytique si la solution réelle est une fonction polynomiale , et les exemples illustratifs ont été utilisés pour prouver l'application de cette méthode .

Bibliographie

- [1] 9 B. N. Mandal and S. Bhattacharya, "Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials," *Appl. Math. Comput* 190, 1707–1716 (2007)..
- [2] 10 B. N. Mandal and S. Bhattacharya, "Use of Bernstein polynomials in numerical solutions of Volterra integral equations," *Appl. Math. Sci* 2(36), 1773–1787 (2008).
- [3] 15 J. Hou, C. Yang, and S. Wang, "Numerical solution of Fredholm integral equations by using Bernstein polynomials," *In Progress in Informatics and Computing IEEE International Conference*, No. 1 : 427–430 (2010).
- [4] 16 K. Maleknejad, E. Hashemizadeh, and R. Ezzati, "A new approach to the numerical solution of Volterra integral equations by using Bernstein's approximation," *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul* 16, 647–655 (2011).
- [5] 17 M. Alipour and D. Rostamy, "Bernstein polynomials for solving Abels integral equation," *J. Comput. Math. Appl* 3(4), 403–412 (2011).
- [6] 18 K. Maleknejad, B. Basirat, and E. Hashemizadeh, "A Bernstein operational matrix approach for solving a system of high order linear Volterra Fredholm integro-differential equations," *Mathematical and Computer Modelling* 55, 1363–1372 (2012).
- [7] 19 F. Hosseini Shekarabi, K. Maleknejad, and R. Ezzati, "Application of two-dimensional Bernstein polynomials for solving mixed Volterra Fredholm integral equations," *Afrika Matematika* 26, 1237–1251 (2015).
- [8] 20 A. Alturk, "Application of the Bernstein polynomials for solving Volterra integral equations with convolution kernels," *Filomat* 30(4), 1045–1052 (2016).

- [9] Şuayip Yüzbaşı , Niyazi Şahin , Ahmet Yildirim,"A collocation approach for solving high-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equations," *Mathematical and Computer Modelling*, Volume 55, Issues 3–4, 2012, pp 547-563
- [10] Neşe İşler Acar, Ayşegül Daşcıoğlu (2019) "A projection method for linear Fredholm–Volterra integro-differential equations", *Journal of Taibah University for Science*, 13 :1,644-650
- [11] Salih Yalçınbas, Mehmet Sezer, Hüseyin Hilmi Sorkun "Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations", *Applied Mathematics and Computation* 210 (2009) 334–349
- [12] KHAN, Faheem, MUSTAFA, Ghulam, OMAR, Muhammad, et al. "Numerical approach based on Bernstein polynomials for solving mixed Volterra-Fredholm integral equations." *AIP Advances*, 2017, vol. 7, no 12, p. 125123.
- [13] J.A. Nanware, Parameshwari M. Goud and T.L. Holambe,"Solution of fractional integro-differential equations by Bernstein polynomials", *Malaya Journal of Matematik*, Vol. 5, No. 1, 581-586, 2020
- [14] B.N. Mandal, Subhra Bhattacharya,"Numerical solution of some classes of integral equations using Bernstein polynomials", *Applied Mathematics and Computation* 190 (2007) 1707–1716
- [15] Mohamed Abdel-Latif Ramadan, Kamal. Mohamed Raslan, Mahmoud Abd El Ghanny Nassar, "A Rational Chebyshev Functions Approach for Fredholm-Volterra Integro-Differential Equations", *Computational Methods for Differential Equations*, Vol. 3, No. 4, 2015, pp. 284-297
- [16] Shahooth MK, Ahmad RR, Din U-KS, Swidan W, Al-Husseini OK and Shahooth WK,"Approximation Solution to Solving Linear Volterra-Fredholm Integro-Differential Equations of the Second Kind by Using Bernstein Polynomials Method", *J Appl Computat Math* 2016, Volume 5, Issue 2 (2016) pp. 1-4
- [17] Osama H. Mohammed, Sarmad A. Altaie, "Approximate Solution of Fractional Integro-Differential Equations by Using Bernstein Polynomials " *Eng. Tech. Journal*, Vol.30, No.8, 2012, pp. 1362–373
- [18] M.H.T. Alshbool, Mutaz Mohammad, Osman Isik, Ishak Hashim,"Fractional Bernstein operational matrices for solving integro-differential equations involved

- by Caputo fractional derivative", *Results in Applied Mathematics*, vol.14, 2022, 100258
- [19] Okai J.O, Ilejimi D.O and Musa Ibrahim, "SOLUTION OF LINEAR VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND KIND USING THE MODIFIED ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD ", *GSJ : Volume 7, Issue 5, 2019*, pp.288–294
- [20] Nagma Irfan, Sunil Kumar, and Saurabh Kapoor, "Bernstein Operational Matrix Approach for Integro-Differential Equation Arising in Control theory" *Nonlinear Engineering 2014; 3(2) : 117–123*
- [21] Mohammed Khalid Shahooth, "Numerical Solution For Mixed Volterra-Fredholm Integral Equations Of The Second Kind By Using Bernstein Polynomials Method " *Mathematical Theory and Modeling, Vol.5, No.10, 2015*
- [22] M. Al-Towaiq, Ahmed Kasasbeh, "Modified Algorithm for Solving Linear Integro-Differential Equations of the Second Kind " *American Journal of Computational Mathematics, 2017, 7, 157-165*
- [23] Şuayip Yüzbaşı, Nurbol ISMAILOV, "An operational matrix method for solving linear Fredholm–Volterra integro-differential equations " *Turk. J. Math (2018) 42 : pp. 243–256*
- [24] Şuayip, Yüzbaşı, Niyazi şahin, Ahmet Yildirim "A collocation approach for solving high-order linear Fredholm–Volterra integro-differential equations", *Mathematical and Computer Modelling, Volume 55, Issues 3–4, 2012, pp. 547-563*
- [25] H. H. Omran, "NUMERICAL METHODS FOR SOLVING THE FIRST ORDER LINEAR FREDHOLM-VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS ", *Journal of Al-Nahrain University Vol.12 (2), 2009, pp.123-127*
- [26] H. H. Omran, "NUMERICAL METHODS FOR SOLVING THE FIRST ORDER LINEAR FREDHOLM-VOLTERRA INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS ", *Journal of Al-Nahrain University Vol.12 (2), 2009, pp.123-127*
- [27] Li Huang, Xian-Fang Li, Yulin Zhao and Xiang-Yang Duan "Approximate solution of fractional integro-differential equations by Taylor expansion method ", *Volume 62, Issue 3, August 2011, pp. 1127-1134*

ملخص

طريقة التجميع وتطبيقاتها

في هذه الدراسة، طريقة التجميع هي أحد أنواع طرق الإسقاط القائمة على متعددات حدود برنشتاين المعممة، وقد تم تطويرها لحل المعادلات التفاضلية، والمعادلات التفاضلية الجزئية، والمعادلات التكاملية، والمعادلات التفاضلية المتكاملة والمعادلات التكريرية التفاضلية. وبالإضافة إلى ذلك، قدمنا العديد من الأمثلة على مختلف المشاكل لإظهار قابلية تطبيق وصحة الطريقة. كلمات مفتاحية: المعادلات التفاضلية، المعادلات التفاضلية الكسرية، المعادلات التكاملية، المعادلة التفاضلية التكاملية، المعادلات التفاضلية التكاملية الكسرية، متعدد الحدود برنشتاين.

Abstract

Collocation Method's and its applications

In this study, the collocation method is one of the types of projection methods based on generalized Bernstein polynomials, is developed to solve differential equations, fractional differential equations, integral equations, integro-differential equations and fractional integro-differential equations. Besides, we have provided many examples of various problems to show the applicability and validity of the method.

Key words: Differential equations, Fractional differential equations, Integral equations, Integro differentials equations, Fractional integro differentials equations. collocation method, Bernstein polynomials

Résumé

Méthode de collocation et ses applications

Dans cette étude, la méthode de collocation est l'un des types de méthodes de projection basées sur les polynômes de Bernstein généralisés, est développé pour résoudre les équations différentielles, équations différentielles fractionnelles, équations intégrales, équations integro-différentielles et équations integro-différentielles fractionnelles. En outre, nous avons fourni de nombreux exemples de divers problèmes pour montrer l'applicabilité et la validité de la méthode.

Mots clé: Equations différentielles linéaires, Equations différentielles fractionnaires, Equations intégrales, Equations integro différentielles, Equations integro différentielles fractionnelles, Méthode de collocation, Polynômes de Bernstein