

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master :

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématiques et numérique

Thème :

Polynômes de Chebyshev décalés pour les équations intégrales
de Volterra-Fredholm de première espèce

Présenté par:

MEBARKI KAHINA


Soutenu publiquement le: 15/06/2025

Devant le jury composé de:

LAKHAL Aissa	M.C.B,	Université de M'sila	Président :
NADIR Mostefa	Prof	Université de M'sila	Encadreur :
GAGUI Bachir	M.C.A,	Université de M'sila	Examineur :

Année universitaire 2024/2025





Avant tout nous remercions
ALLAH *le tout puissant*
et miséricordieux, pour nous
avoir permis de finaliser ce
travail.



Remerciements

J'adresse mes remerciements les plus sincères :

À mon encadreur

*Monsieur Le Professeur **NADIR Mostefa***

*C'est pour moi un très grand privilège d'avoir pu réaliser ce travail
sous votre direction.*

*Je vous remercie pour votre encadrement exemplaire, pour la
confiance que vous m'avez toujours accordée, pour vos brillantes idées
et pour votre étonnante disponibilité.*

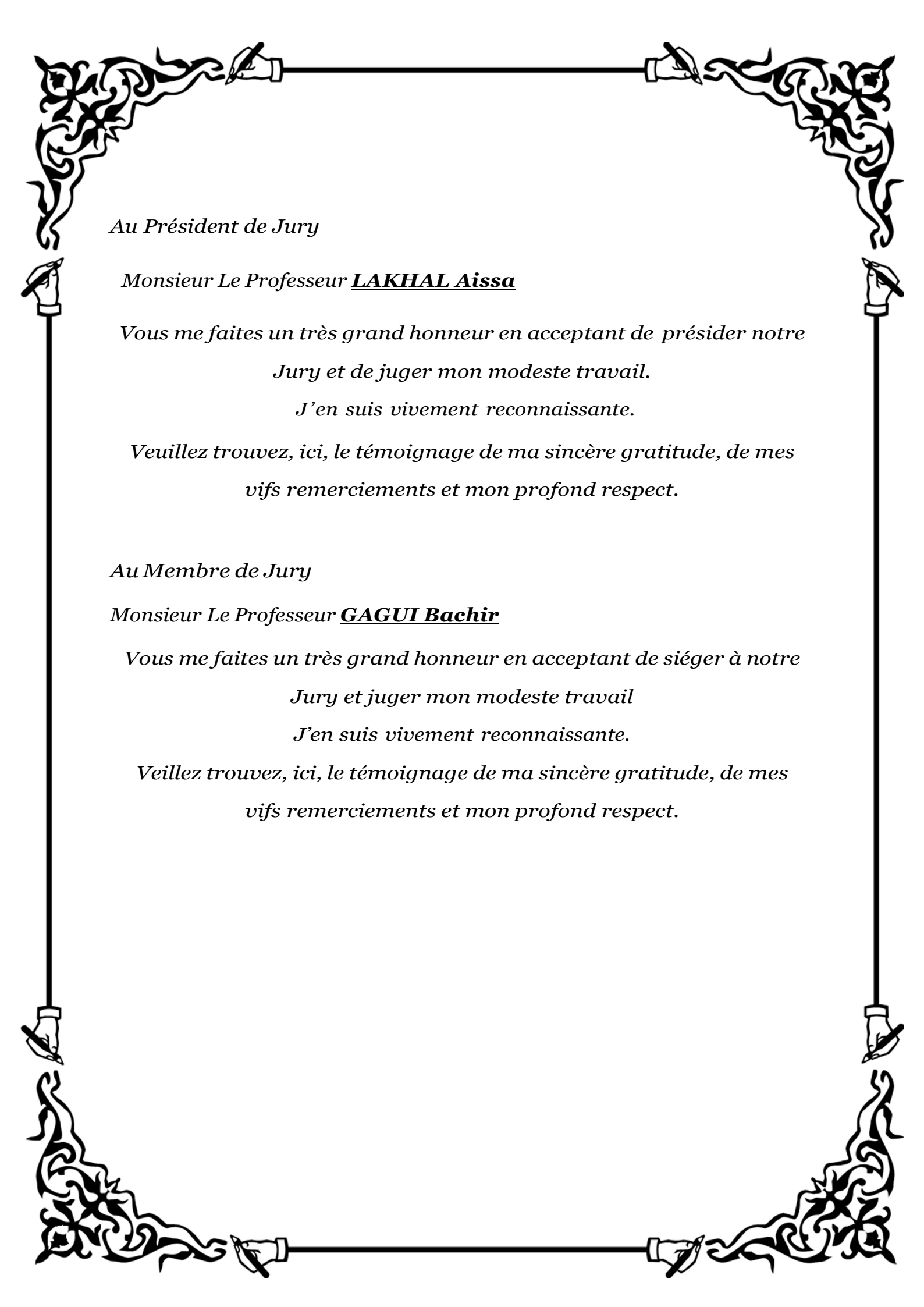
Je suis très touchée par votre modestie et votre gentillesse.

*Vous m'avez guidée et patiemment aidée tout au long de ce travail, et
vos conseils m'ont toujours été précieux.*

Je vous admire pour votre savoir et vos qualités professionnelles

Soyez assuré de ma vive reconnaissance et mon profond respect.

*Veillez trouver à travers ce travail l'expression de ma sincère
gratitude et de ma respectueuse considération.*



Au Président de Jury

*Monsieur Le Professeur **LAKHAL Aissa***

*Vous me faites un très grand honneur en acceptant de présider notre
Jury et de juger mon modeste travail.*

J'en suis vivement reconnaissante.

*Veillez trouvez, ici, le témoignage de ma sincère gratitude, de mes
vifs remerciements et mon profond respect.*

Au Membre de Jury

*Monsieur Le Professeur **GAGUI Bachir***

*Vous me faites un très grand honneur en acceptant de siéger à notre
Jury et juger mon modeste travail*

J'en suis vivement reconnaissante.

*Veillez trouvez, ici, le témoignage de ma sincère gratitude, de mes
vifs remerciements et mon profond respect.*

DEDICACES

Je dédie ce mémoire à :

Mon papa chéri « Rachid »

A la façon que tu as d'être mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie, d'inspiration et de bonheur.

Aucune dédicace ne saurait exprimer l'amour, l'estime, le dévouement et le respect que j'ai pour toi.

Ma chère maman « Rabia »

Tu as comblé ma vie de tendresse, d'affection et de compréhension Rien au monde ne pourrait compenser les efforts et les sacrifices que tu as consentis pour mon bien être et la poursuite de mes études dans de bonnes conditions.

Puisse Dieu, te procure santé, bonheur et longue vie.

Mon très cher mari « Hakim »

Pour ton précieux soutien, pour ta gentillesse sans égal, pour ta patience, pour avoir cru en moi. Que DIEU réunisse nos chemins pour un long commun serein et que ce travail soit le témoignage de mon amour et de ma reconnaissance.

Mon fils « Kinan »

Le rayon de soleil qui éclaire ma vie

Mes sœurs adorées « Sissa et Nihad »

Pour votre présence qui m'embellie la vie, je vous souhaite beaucoup de réussite dans l'avenir.

Mon frère « Khaled »

Pour ton aide et ton soutien quotidien

Ma très chère amie « Imen »

Pour ton soutien, tes encouragements et pour tous les moments inoubliables !

**Je remercie particulièrement l'enseignant
« NADIR Mohameed Nasseh »**

Pour tout ce que vous m'avez appris, ainsi que pour vos encouragements et votre soutien permanent.

À tous ceux qui ont contribué de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire

Table des matières

Introduction	i
1 Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique	1
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle	1
1.1.1 Espace vectoriel normé :[1]	1
1.1.2 Espace de Banach :[1]	2
1.1.3 Espace de Hilbert :[1]	3
1.1.4 Opérateurs linéaires bornés :[1]	6
1.1.5 Opérateurs compact :[1]	7
1.1.6 Equations aux Opérateurs compacts :[1]	9
2 Equations intégrales et leurs classification :	12
2.1 Classification des équations intégrales première espèce :	12
2.1.1 Equations intégrales de Volterra première espèce :[4]	12
2.1.2 Equations intégrales de Fredholm première espèce :[4]	12
2.1.3 Equation intégral de volterra-Fredholm de première espèce :[4]	13
2.2 Transformation de Equation Intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce à seconde espèce :[9]	13
2.3 Classification des équations intégrales seconde espèce :[3][4]	15
2.3.1 Equations intégrales de Volterra seconde espèce :[4]	15
2.3.2 Equations intégrales de Fredholm seconde espèce :[4]	15
2.3.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm seconde espèce :[4]	15
2.4 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm :[4]	16
2.5 Polynômes de première espèce T_n :[2]	18
2.6 Graphes des polynômes de Tchebychev :	20
3 Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm :	22
3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredholm :[4][5][7]	22
3.1.1 Méthode de collocation :[4]	22
3.1.2 Méthode de collocation-Tchebyshev :[4]	23
3.2 Exemples Numériques :[5]	25
Conclusion	29
Bibliographie	29

Introduction

Les équations intégrales jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines des sciences appliquées et théoriques.

Parmi ces équations, les équations de Volterra et de Fredholm occupent une place particulière en raison de leurs applications variées et de leurs propriétés mathématiques intéressantes, plus précisément, l'équation intégrale de Volterra Fredholm souvent rencontré dans l'analyse de phénomènes dynamiques et de systèmes à mémoire.

Afin de résoudre cette équation de manière numérique, plusieurs méthodes ont été développées, parmi lesquelles les polynômes de Tchebychev se distinguent par leur efficacité et leur précision. Ces polynômes connus pour leurs propriétés de minimisation des erreurs d'approximation de fonctions.

Dans ce travail, nous intéressons à l'utilisation des polynômes de Tchebychev décalés pour la résolution numériques des équations intégrales de Volterra Fredholm du premier type.

Notre travail est structuré en trois chapitres :

Le Premier chapitre : est une introduction à l'analyse numérique on a utilisé les notions de base de l'analyse fonctionnelle, et la théorie des opérateurs bornés, compacts et intégraux.

Le Deuxième chapitre : est dédié à la classification des équations intégrales. Il introduit et différencie les types classiques : les équations de Volterra, de Fredholm et de Volterra-Fredholm. Une attention particulière est portée aux équations de première espèce et à leur transformation en équations de seconde espèce, ce qui permet de mieux comprendre leurs techniques de résolution.

Le Troisième chapitre : traite de la résolution numérique des équations intégrales de type Volterra Fredholm, nous y utilisons des méthodes basées sur les polynômes de Tchebychev pour démontré l'efficacité de ces techniques. Ce chapitre s'accompagne d'exemples concrets les avantages des méthodes employées.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et numérique

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace vectoriel normé :[1]

Normes

Soit E un espace vectoriel sur le corps $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R} , telle que

1. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$, et $\lambda \in K$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout $x, y \in E$

on dit que E est un espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme $\|\cdot\|$

Tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace métrisable

Proof. Pour tout $x, y \in E$ on définit la fonction ϕ par

$$\phi(x, y) = \|x - y\|$$

On remarque que cette fonction est bien une métrique sur E car, on a

$$\phi(x, y) = \|x - y\| = 0$$

ou encore

$$x - y = 0$$

D'où l'égalité

$$x = y$$

Il est évident de voir que la distance $\phi(x, y)$ est symétrique

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| \\ &= \|y - x\| = \phi(y, x)\end{aligned}$$

Pour l'inégalité triangulaire, on écrit

$$\begin{aligned}\phi(x, y) &= \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \\ &\leq \|x - z\| + \|z - y\| \\ &= \phi(x, z) + \phi(z, y)\end{aligned}$$

□

1.1.2 Espace de Banach :[1]

Suite de Cauchy :

Soit (x_n) une suite d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$; on dit que la suite (x_n) est de Cauchy si, on a la relation suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Soit x_n une suite de Cauchy dans un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ contient une sous suite x_{n_k} convergente vers x alors la suite x_n est aussi convergente vers le même élément x .

Soit x_n une suite de Cauchy alors il vient

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

en particulier pour $n_k \geq N_\varepsilon$, on a

$$\forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x_{n_k}\| < \varepsilon$$

avec la convergence de la suite x_{n_k} vers x

$$n_k \geq N_\varepsilon, \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon$$

D'où la convergence de la suite x_n vers l'élément x

$$\begin{aligned} \forall p, n_k \geq N_\varepsilon, \|x_p - x\| &= \|x_p - x + x_{n_k} - x_{n_k}\| \\ &\leq \|x_p - x_{n_k}\| + \|x_{n_k} - x\| < \varepsilon \end{aligned}$$

Espaces complets

Definition 1.1 *Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit complet, si toute suite de Cauchy x_n d'élément de E est une suite convergente dans E*

Autrement dit,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall p, q \geq N_\varepsilon \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Implique l'existence d'un élément $x \in E$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Espaces de Banach

Definition 1.2 *On appelle espace de Banach $(E, \|\cdot\|)$ tout espace vectoriel normé et complet pour la distance déduite de sa norme.*

1.1.3 Espace de Hilbert :[1]

Produit scalaire

Definition 1.3 On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
5. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Definition 1.4 un espace de Hilbert H est un espace complet par rapport à la norme induite par le produit scalaire. En d'autres termes un espace de Hilbert est un espace de Banach dont la norme induite par un produit scalaire.

Généralement l'espace H est séparable et de dimension infinie, en d'autres termes, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans H et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe n vecteurs dans H linéairement indépendants.

Exemple 1.5 L'espace $L^2(a, b)$

L'espace $L^2(I, \mathbb{R})$ des fonctions de carré intégrales défini par

$$L^2(I, \mathbb{R}) = \left\{ f; \int_I |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

ou l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni de la norme

$$\|f\|^2 = \int_I |f(t)|^2 dt$$

induite par le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_I f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert

Orthogonalité

Definition 1.6 (*Vecteurs orthogonaux*) On dit que deux vecteurs x et y d'un espace de Hilbert H sont orthogonaux si :

$$\langle x, y \rangle = 0$$

Base hilbertiennes

Une partie X de H est dite dense dans H si :

$$\forall y \in H, \forall \varepsilon > 0, \exists x \in X; \|x - y\| < \varepsilon$$

de manière équivalente si tout y de H est limite d'une suite d'éléments x_n de X :

$$\|x_n - y\| \longrightarrow 0$$

Definition 1.7 Soit H un espace de Hilbert sur le corps \mathbb{k} et $F = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs. On dit que F est une base de Hilbert (base hilbertienne) de H si :

1. F est une famille orthonormée de H , c'est-à-dire :
$$\begin{cases} \forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies \langle e_i, e_j \rangle = 0 \\ \forall i \in I, \langle e_i, e_i \rangle = \|e_i\|^2 = 1 \end{cases}$$
2. La famille F est de plus complète ou total, c'est-à-dire : l'ensemble des combinaisons linéaires finies des éléments de F est dense dans H

Theorem 1.8 (*Riesz-Fischer*) Soit un système orthonormé dans un espace de Hilbert H , et soient les valeurs $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_i$ telles que la série $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ soit convergente, alors on peut trouver un vecteur $f \in H$, tel que

$$\alpha_i = \langle f; \varphi_i \rangle, \quad \forall i = 1, 2, \dots$$

et de plus, on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f; \varphi_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$$

ou encore

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$$

Soit $\{\varphi_k\}$ un système orthonormé d'éléments d'un espace de Hilbert H , pour que ce système soit complet, il faut et il suffit que, le seul vecteur de H orthogonal au système $\{\varphi_k\}$ est le vecteur nul. Cela signifie qu'il n'existe pas un vecteur non nul de H , qui soit orthogonal à tous les vecteurs du système $\{\varphi_k\}$

Theorem 1.9 *Tous les espaces de Hilbert séparables sont isomorphes entre eux.*

Remark 1.10 *Comme il est connu en algèbre linéaire, que tous les espaces vectoriels ou euclidiens de mêmes dimensions finies n sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à l'espace K^n alors de même tous les espaces de Hilbert sont isomorphes entre eux, car chacun est isomorphe à L_2*

1.1.4 Opérateurs linéaires bornés :[1]

Linéarité des opérateurs

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur A défini sur E dans F est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

– *Condition additive*

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

– *Condition homogène*

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0).$$

L'opérateur linéaire A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous-ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G .

Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire A défini sur E dans F est dit borné s'il existe une constante positive $C > 0$, telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

La norme $\|A\| = \sup \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

La notion d'isométrie est plus forte que celle de l'isomorphie.

Normes équivalentes

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$, ces deux normes sont dites équivalentes, si on peut trouver deux constantes positives α et β , telles que

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1, \quad \forall x \in E.$$

Autrement dit, les deux normes sont dites équivalentes si et seulement si, l'application identique de E dans E soit un isomorphisme entre les espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$.

1.1.5 Opérateurs compact : [1]

Definition 1.11 Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.

Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G , il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F .

Theorem 1.12 (*critère de compacité*)

Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E , la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans F .

Proof. Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact. \square

Theorem 1.13 *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Theorem 1.14 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Proof. Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autres part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. \square

Theorem 1.15 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A est compact.

Corollary 1.16 *La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

Theorem 1.17 *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

Theorem 1.18 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Noyau faiblement singulier

Definition 1.19 *On appelle noyau faiblement singulier la fonction K continue sur $G \times G \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf peut être aux points $x = t$ et telle que,*

$$\forall x, t \in G, x \neq t, \exists M > 0, |K(x, t)| < \frac{M}{|x - t|^{n-\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq n$$

Theorem 1.20 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

1.1.6 Equations aux Opérateurs compacts :[1]

Equations de second espèce

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ définit l'équation de second espèce donnée par

$$\varphi - A\varphi = f; \quad \varphi, f \in X$$

où f est une fonction donnée et φ la fonction inconnue

Theorem 1.21 *Le noyau de l'opérateur T défini par*

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous espace fermé et de dimension finie

Theorem 1.22 *La suite d'ensemble des noyaux*

$$N(T), N(T^2), \dots, N(T^n), \dots$$

est une suite croissante stationnaire. Autrement dit, elle ne contient qu'un nombre fini d'ensembles distincts, c'est à dire il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{0\} \subset N(T), N(T^2) \subset \dots \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = \dots$$

Le nombre p est appelé le nombre de Riez de l'opérateur compact A pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$

Theorem 1.23 *L'image de l'opérateur T défini par ,*

$$\text{Im } T = T(X) = R(T) = \{\psi = T\varphi; \text{ telle que } \varphi \in X\}$$

est un sous espace fermé

Le nombre de Riez p pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$ et le nombre de Riez q pour l'ensemble des images $\{R(T^n)\}$ sont égaux. Autrement dit

$$p = q$$

Theorem 1.24 *Les sous espaces $N(T^n)$ et $R(T^n)$ sont supplémentaires. Autrement dit*

$$X = \ker T^n \oplus \text{Im } T^n \equiv N(T^n) \oplus R(T^n)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz

Lemma 1.25 *L'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si, T^r est injectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Lemma 1.26 *L'opérateur $T = I - A$ est surjectif si et seulement si T^r est surjectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Theorem 1.27 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si il est surjectif, de plus l'opérateur admet un inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ borné*

Theorem 1.28 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors, pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

admette une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

admette la solution triviale $\varphi = 0$.

Chapitre 2

Equations intégrales et leurs classification :

2.1 Classification des équations intégrales première espèce :

2.1.1 Equations intégrales de Volterra première espèce :[4]

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x, t) = 0$ pour $x < t$

Definition 2.1 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme :

$$\int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

2.1.2 Equations intégrales de Fredholm première espèce :[4]

Definition 2.2 On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce une équation de la forme :

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $f(x)$ et $k(x, t)$ sont des fonctions connues, les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équations de Fredholm .

~~2.1.3 Equation intégral de volterra-Fredholm de première espèce :[4]~~

Dans cette section, on va donner quelques méthodes de résolution des équations intégrales de première espèce définie par

$$\int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad a \leq t \leq x \leq b$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue. Cette équation généralement très difficile résoudre voir impossible numériquement. Généralement on utilise des régularisations pour obtenir

une équation intégrale de seconde espèce la quelle on peut trouver une solution posés, les solutions de ces équations sont généralement instables. On doit régulariser ce type de problème comme par exemple la dérivation.

2.2 Transformation de Equation Intégrales de Volterra-Fredholm de première espèce à seconde espèce :[9]

Transformation par dérivation

Soit l'équation intégrale de Volterra-Fredholm de première espèce

$$\int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt = f(x), a \leq t \leq x \leq b \quad (2.1)$$

Supposons que $k_1(x, t), k_2(x, t), \frac{\partial k_1(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial k_2(x, t)}{\partial x}, f(x)$ et $f'(x)$ sont continues pour tout $x \in [a, b]$. Alors,

en dérivant les deux membres de l'équation (2.2.1) par rapport à la variable x , on obtient

$$k_1(x, x) \varphi(x) + \int_a^x k_1'(x, t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_2'(x, t) \varphi(t) dt = f'(x) \quad (2.2)$$

si $k_1(x, x) \neq 0$ pour tout $a \leq x \leq b$, alors on peut transformer l'équation (2.2.2) à l'équation

intégrale de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) + \int_a^x k_3(x,t) \varphi(t) dt + \int_a^b k_4(x,t) \varphi(t) dt = g(x) \quad (2.3)$$

où

$$k_3(x,t) = \frac{k'_1(x,t)}{k_1(x,x)}, k_4(x,t) = \frac{k'_2(x,t)}{k_1(x,x)}, g(x) = \frac{f'(x)}{k_1(x,x)}$$

Si le noyau $k_3(x,t), k_4(x,t)$ est carré intégrable et $g(x) \in L^2([a,b])$ l'équation (2, 2, 3) admet une solution unique $\varphi \in L^2([a,b])$

Remark 2.3 Si $k_1(x,x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$ de l'équation (2.2.2) il vient

$$\int_a^x k'_1(x,t) \varphi(t) dt + \int_a^b k'_2(x,t) \varphi(t) dt = f'(x) \quad (2.4)$$

cette équation est aussi une équation de Volterra-Fredholm de première espèce.

Si $k'_1(x,t), k'_2(x,t)$ continue pour tout $x \in [a,b]$, dérivons l'équation (2.2.4) terme à terme par rapport à x , il vient

$$k'_1(x,x) \varphi(x) + \int_a^x k''_1(x,t) \varphi(t) dt + \int_a^b k''_2(x,t) \varphi(t) dt = f''(x) \quad (2.5)$$

Si $k'_1(x,x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, on peut transformer l'équation (2.2.4) à une équation

de Volterra-Fredholm de deuxième espèce, et ainsi de suite.

Remark 2.4 La condition $k_1(x,x) \neq 0$ pour tout $x \in [a,b]$, n'est pas nécessairement

pour que l'équation (2.2.1) admet une solution unique.

2.3 Classification des équations intégrales seconde espèce :[3][4]

2.3.1 Equations intégrales de Volterra seconde espèce :[4]

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x, t) = 0$ pour $x < t$

Definition 2.5 *On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce de la forme :*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

où $\varphi(x)$ est la fonctions inconnue , $k(x, t)$ et $f(x)$ des fonctions donnés, est un facteur inconnu.

2.3.2 Equations intégrales de Fredholm seconde espèce :[4]

Definition 2.6 *On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

où $\varphi(x)$ est la fonctions inconnue , $k(x, t)$ et $f(x)$ des fonctions donnés, est un facteur inconnu.

2.3.3 Equations intégrales de Volterra-Fredholm seconde espèce :[4]

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra et Fredholm disjoints, apparaît dans une équation intégrale .

Definition 2.7 *On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t) \varphi(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t) \varphi(t) dt, x \in [a, b] \quad (2.6)$$

On appelle équation intégrale mixte une équation de la forme 2 :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x \int_a^b k(s, t) \varphi(t) dt ds$$

où les fonctions k_1, k_2 et f est connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= 6x + 3x^2 + 2 - \int_0^x x\varphi(t) dt - \int_0^1 t\varphi(t) dt \\ \varphi(x) &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + x^3 - \int_0^x \int_0^1 (s-t) \varphi(t) dt ds \end{aligned}$$

2.4 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra-Fredholm :[4]

Dans cette section nous rappelons les théorèmes que nous allons utilisées pour obtenir des résultats d'existence et unicité de solutions de l'équation (??)

Definition 2.8 Soit X un espace normé et $T : X \rightarrow X$ un opérateur, T est dit un opérateur de Picard s'il existe $\varphi_0 \in X$ unique tel que

$$T(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(\varphi_0) = \varphi_0, \text{ pour tout } \varphi \text{ de } X$$

Theorem 2.9 (principe de contraction). Soit X un espace normé. Si $T : X \rightarrow X$ un opérateur de contraction admis un point fixe unique φ , alors T est un opérateur de Picard

$$\|\varphi_0 - T^n(\varphi_0)\| \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|\varphi - T(\varphi)\|, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Théorèmes d'existence et d'unicité :

On considère l'équation linéaire de Volterra-Fredholm

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a, b] \quad (2.7)$$

où

1. $f \in C[a, b]$, $k_1(x, t) \in C(D_1)$, avec $D_1 = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a \leq t \leq x \leq b\}$
2. $\varphi \in C[a, b]$, $k_2(x; t) \in C(D_2)$, avec $D_2 = [a, b] \times [a, b]$
3. $M_1 = \max_{(x,t) \in D_1} |k_1(x, t)|$, et $M_2 = \max_{(x,t) \in D_2} |k_2(x, t)|$

Theorem 2.10 *Dans les conditions de continuité ci-dessus, supposons qu'il existe une constante $c > 0$ tel que :*

$$\frac{1}{c} [M_1 + M_2 \exp(c(b - a))] < 1$$

Alors l'équation (2.7) a une solution unique $\varphi \in C[a, b]$, et cette solution peut être obtenir par la méthode d'approximation successive, à partir de $\varphi_0 \in C[a, b]$

Proof. Soit l'opérateur intégral $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$, défini par

$$T\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt$$

On a

$$\begin{aligned} |T\varphi(x) - T\psi(x)| &= \left| \int_a^x k_1(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt + \int_a^b k_2(x, t) (\varphi(t) - \psi(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |k_1(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt + \int_a^b |k_2(x, t)| |(\varphi(t) - \psi(t))| dt \\ &\leq M_1 \int_a^x |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t - a)) \exp(c(t - a)) dt + \\ &\quad M_2 \int_a^b |(\varphi(t) - \psi(t))| \exp(-c(t - a)) \exp(c(t - a)) dt \\ &\leq \left[\frac{M_1}{c} (\exp(c(x - a)) - 1) + \frac{M_2}{c} (\exp(c(b - a)) - 1) \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \left[\frac{M_1}{c} \exp(c(x - a)) + \frac{M_2}{c} \exp c(x - a + b - x) \right] \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x - a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b - x))) \|\varphi - \psi\| \\ &\leq \frac{\exp(c(x - a))}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b - a))) \|\varphi - \psi\| \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$|A\varphi(x) - A\psi(x)| \exp(-c(x-a)) \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|, \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

Alors

$$\|A\varphi - A\psi\| \leq \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a))) \|\varphi - \psi\|$$

On déduit que l'opérateur A est Lipschitzien de constante $k = \frac{1}{c} (M_1 + M_2 \exp(c(b-a)))$

La condition supposée garantit que A est une contraction. Alors on applique principe de contraction \square

2.5 Polynômes de première espèce T_n :[2]

Les polynômes de Tchebyshev $T_n(x)$ de première espèce sont des polynômes en x de degré n , définis par la relation

$$T_n(x) = \cos n\theta \text{ quand } x = \cos \theta \quad ((2.1))$$

où $x \in [-1, 1]$. Cela implique que la variable correspondante $\theta \in [0, \pi]$. Il est facile de voir que $T_0(x) = 1, T_1(x) = x$, et selon la formule de récurrence satisfaite par les polynômes de Tchebyshev :

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2 \cos \theta \cos(n-1)\theta$$

nous obtenons la relation fondamentale :

$$T_n(x) = 2T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

Notons que les fonctions $\{T_n(x), n = 0, 1, 2, \dots\}$ forment un système orthogonal sur l'intervalle $[-1, 1]$ par rapport au poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et que le système de polynômes $S_n(x)$ est donné par :

$$\left\{ S_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}} T_0(x), S_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1(x), S_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_2(x), \dots, S_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x) \right\}$$

forment un système orthonormal sur l'intervalle $[-1, 1]$ par rapport au poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

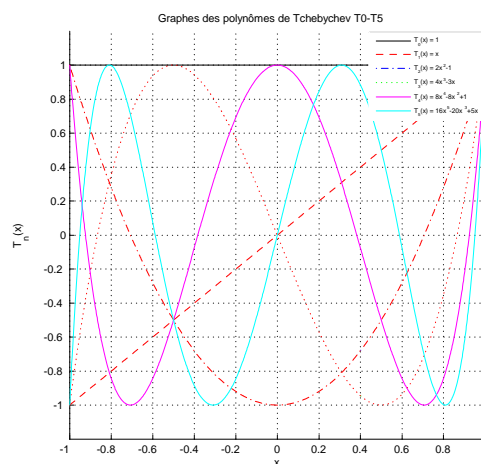
En d'autres termes :

$$\langle S_k(x), S_l(x) \rangle = \int_{-1}^1 \frac{S_k(x)S_l(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

2.6 Graphes des polynômes de Tchebychev :

Les polynômes de Tchebychev de première espèce $T_n(x)$ ont des graphes oscillants sur l'intervalle $[-1, 1]$, avec des zéros situés à des points spécifiques. Par exemple :

- $T_0(x) = 1$
- $T_1(x) = x$
- $T_2(x) = 2x^2 - 1$
- $T_3(x) = 4x^3 - 3x$
- $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
- $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$



$$T_0(x), T_1(x), T_2(x), T_3(x), T_4(x), T_5(x)$$

Definition 2.11 On appelle fonction poids sur un intervalle $[a; b] \subset \mathbb{R}$, toute fonction ω qui vérifie les deux conditions :

$$\forall x \in [a; b], \omega(x) > 0 \text{ et } \int_a^b w(x)dx < \infty$$

Example 2.12 Toutes les fonctions continues positives sur un compact sont des fonctions poids .

Definition 2.13 Soit $\{T_n(x)\}_{n \geq 0}$ une suite de polynômes avec $\deg(T_n) = n$, et soit ω une fonction poids sur $[a; b]$, on dit que $\{T_n(x)\}_{n \geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids ω dans $[a; b]$ si

$$\int_a^b T_n(x)T_m(x)\omega(x) dx = 0, m \neq n$$

Remark 2.14 puisque $\int_{-1}^1 T_n(x)T_m(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx = 0, m \neq n$, on peut dire que $\{T_n(x)\}_{n \geq 0}$ sont des polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ dans $[-1; 1]$

Chapitre 3

Résolution numériques des équations intégrales de Volterra-Fredholm :

3.1 Méthodes numériques pour les équations intégrales de Volterra-Fredholm :[4][5][7]

Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équation intégrales de volterra-Fredholm de second espèce en utilisant les polynômes de Tchebychev.

3.1.1 Méthode de collocation :[4]

On considère l'équation intégrale de Volterra-Fredholm suivante

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x, t)\varphi(t)dt \quad (3.1)$$

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à l'équation (3.1) consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (3.1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation.

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C([a, b])$ ou de $L^2([a, b])$. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base de X_n . On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$, telle que

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j(x) , \quad x \in [a, b]$$

Pour déterminer les coefficients (α_j) , on substituant, cette fonction dans l'équation (3.1), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned}
 r_n(x) &= \varphi_n(x) - \int_a^x k_1(x,t)\varphi_n(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)\varphi_n(t)dt - f(x) , \quad x \in [a, b] \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x,t)dt \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j(t) - \int_a^b k_2(x,t)dt \sum_{j=1}^n \alpha_j \psi_j(t) - f(x) \\
 &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \left\{ \psi_j(x) - \int_a^x k_1(x,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x,t)\psi_j(t)dt \right\} - f(x) \quad , \quad x \in [a, b]
 \end{aligned}$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, (i.e, aux points de collocation)

ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x_i,t)\psi_j(t)dt \right\} \alpha_j = f(x_i) \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

qui s'écrit sous la forme $A\alpha = F$, où

$$\begin{aligned}
 A &= \psi_j(x_i) - \int_a^x k_1(x_i,t)\psi_j(t)dt - \int_a^b k_2(x_i,t)\psi_j(t)dt, \quad i, j = 1, \dots, n \\
 \alpha &= (\alpha_i), \quad i = 1, \dots, n \\
 F &= f(x_i), \quad i = 1, \dots, n
 \end{aligned}$$

ce système admet une solution unique si $\det A \neq 0$, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

3.1.2 Méthode de collocation-Tchebyshev :[4]

On considère l'équation de Volterra-Fredholm de second espèce

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x,t)\varphi(t)dt + \int_a^b k_2(x,t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a, b] \quad (3.2)$$

On définit les polynômes de Tchebychev $T_i^*(x)$ de degré i sur $[a, b]$ comme suit

$$T_i^*(x) = T_i\left(\frac{2x - (a+b)}{b-a}\right)$$

où $T_i(x)$ sont les polynômes de Tchebyshev de degré i définis sur $[-1, 1]$

On utilise la méthode de Collocation pour approximer la solution exacte $\varphi(x)$ de l'équation (3.2).

On suppose

$$\varphi(x) \simeq \varphi_i(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i T_i^*(x) \quad (3.3)$$

où $T_i^*(x)$ sont les polynômes de Tchebychev de degré i définis sur $[a, b]$ et α_i des coefficients à déterminer.

Substituons (3.3) dans (3.2) on obtient

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i T_i^*(x) = f(x) + \int_a^x k_1(x, t) \sum_{i=0}^n \alpha_i T_i^*(t) dt + \int_a^b k_2(x, t) \sum_{i=0}^n \alpha_i T_i^*(t) dt$$

d'où

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \left[T_i^*(x) - \int_a^x k_1(x, t) T_i^*(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) T_i^*(t) dt \right] = f(x) \quad (3.4)$$

l'équation (3.4) peut s'écrire :

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \psi_i(x) = f(x)$$

où

$$\psi_i(x) = T_i^*(x) - \int_a^x k_1(x, t) T_i^*(t) dt - \int_a^b k_2(x, t) T_i^*(t) dt$$

Soit $\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i-1}{2n}\pi\right), i = 1, \dots, n$ les points de Tchebichev :

Alors les équations de collocation sont obtenues en prenant des points x_j

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n \quad (3.5)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_{ij} = f_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.6)$$

L'équation (3.5) représente un système linéaire de (n) inconnues qui s'écrit sous la forme

$$A\alpha = F$$

où

$$A = \psi_{ij}, i, j = 1, \dots, n$$

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^t$$

$$F = (f_1, \dots, f_n)^t$$

$$\alpha = A^{-1}F$$

3.2 Exemples Numériques :[5]

Après avoir traité les aspects théoriques liés aux équations intégrales et aux méthodes d'approximation utilisant les polynômes de Tchebyshev, nous passons dans ce chapitre à l'aspect pratique, en présentant des exemples numériques visant à évaluer l'efficacité de la méthode proposée.

Exemple 1 :

Résoudre l'équation intégrale suivante

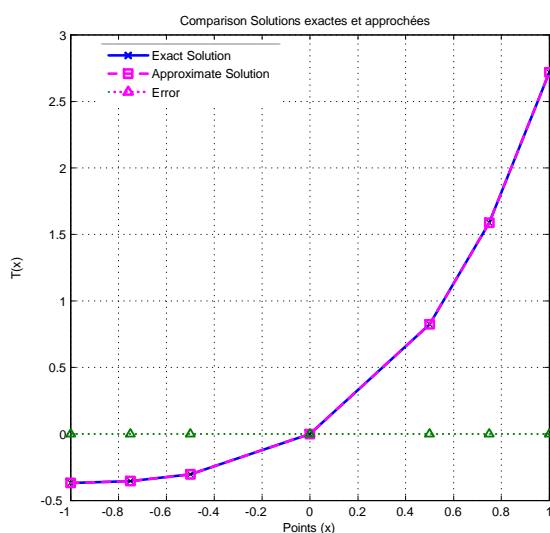
$$\int_{-1}^x (x-t)\varphi(t)dy + \int_{-1}^1 x\varphi(t)dy = f(x)$$

où la fonction $f(x) = 5e^{-1} - 2e^x + 4xe^{-1} + xe^x$ est calculée une fois que l'on affecte à l'équation la solution $\varphi(x)$ donnée par $\varphi(x) = xe^x$ Nous appliquons le premier polynôme de Tchebyshev $T_n(x)$ pour approximer la solution $\varphi(x)$ c'est-à-dire que $\varphi_N(x)$ solution du système algébrique avec $N = 8$

Pts de x	Solu. exacte	Solu.approx	Erreur
-1.000e+00	-3.678e-01	-3.678e-01	5.249e-07
-7.500e-01	-3.542e-01	-3.542e-01	3.742e-08
-5.000e-01	-3.032e-01	-3.032e-01	2.747e-08
0.000e+00	0.000e+00	1.473e-09	1.473e-09
5.000e-01	8.243e-01	8.243e-01	3.174e-08
7.500e-01	1.587e+00	1.587e+00	4.592e-08
1.000e+00	2.718e+00	2.718e+00	5.925e-07

Tableau 1 Solutions exactes et approchées de l'Exemple 1

en certains points arbitraires, en utilisant le premier polynôme de Tchebyshev $T_n(s)$



Exemple 2 :

Résoudre l'équation intégrale suivante

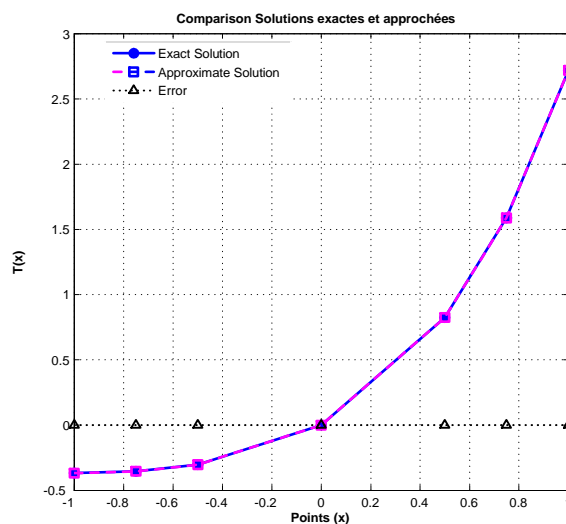
$$\int_{-1}^x (xy)\varphi(t)dy + \int_{-1}^1 \cosh(x+t)\varphi(t)dy = f(x)$$

où la fonction $f(x) = \frac{1}{4} \cosh x(4 + e^2 - e^{-2}) + x^2 \sinh x - x(\cosh x - e^{-1})$ est calculée une fois que l'on affecte à l'équation la solution $\varphi(x)$ donnée par $\varphi(x) = \cosh x$ Nous appliquons le premier polynôme de Tchebyshev $T_n(x)$ pour approximer la solution $\varphi(x)$ c'est-à-dire que $\varphi_N(x)$ solution du système algébrique avec $N = 8$

Pts de x	Solu. exacte	Solu.approx	Erreur
-1.000e+00	1.543e+00	1.543e+00	1.954e-09
-7.500e-01	1.294e+00	1.294e+00	2.007e-10
-5.000e-01	1.127e+00	1.127e+00	1.384e-11
0.000e+00	1.000e+00	1.000e+00	6.867e-10
5.000e+00	1.127e+00	1.127e+00	8.602e-12
7.500e+00	1.294e+00	1.294e+00	1.807e-10
1.000e+00	1.543e+00	1.543e+00	2.230e-09

Tableau 2 Solutions exactes et approchées de l'Exemple 2

en certains points arbitraires, en utilisant le premier polynôme de Tchebyshev $T_n(s)$



Exemple 3

Résoudre l'équation intégrale suivante

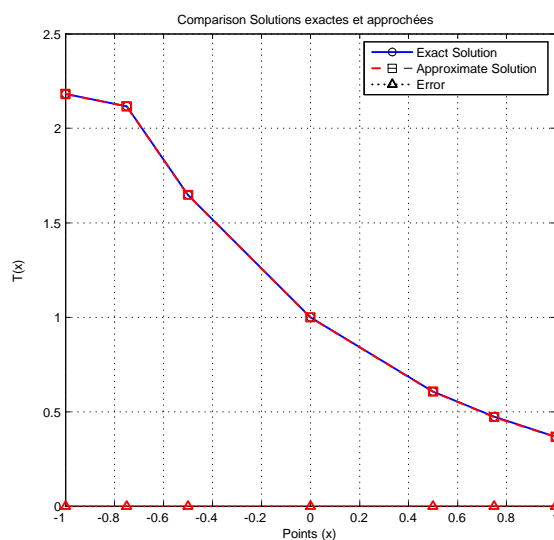
$$\int_{-1}^x (x^2 + t)\varphi(t)dy + \int_{-1}^1 e^{(x-t)}\varphi(t)dy = f(x)$$

où la fonction $f(x) = x^2e - xe^{-x} - e^x - x^2e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-2}e^x(e^4 - 1)$ est calculée une fois que l'on affecte à l'équation la solution $\varphi(x)$ donnée par $\varphi(x) = e^{-x}$ Nous appliquons le premier polynôme de Tchebyshev $T_n(x)$ pour approximer la solution $\varphi(x)$ c'est-à-dire que $\varphi_N(x)$ solution du système algébrique avec $N = 8$

Pts de x	Solu. exacte	Solu.approx	Erreur
-1.000e+00	2.182e+00	2.182e+00	1.161e-07
-7.500e-01	2.117e+00	2.117e+00	2.322e-09
-5.000e-01	1.648e+00	1.648e+00	7.922e-10
0.000e+00	1.000e+00	1.000e+00	1.942e-09
5.000e+00	6.065e-01	6.065e-01	1.210e-09
7.500e+00	4.742e-01	4.723e-01	3.591e-09
1.000e+00	3.678e-01	3.678e-01	2.402e-08

Tableau 3 Solutions exactes et approchées de l'Exemple 3

en certains points arbitraires, en utilisant le premier polynôme de Tchebyshev $T_n(s)$



Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié les équations intégrales de Volterra Fredholm du premier type, connues pour leur nature mal posée.

Pour surmonter cette difficulté, une technique de régularisation a été utilisée afin de transformer ces équations intégrales de première espèce en équations de seconde espèce, permettant ainsi l'application de méthodes numériques connues.

Nous avons utilisé les polynômes de Tchebychev décalés de première espèce pour approximer la solution.

Les résultats numériques obtenus ont confirmé la précision et l'efficacité de la méthode proposée, mettant en évidence sa pertinence pour ce type de problèmes.

Bibliographie

- [1] M. NADIR .Cours d'analyse fonctionnelle,université de M'sila Algérie 2004.
- [2] L. Aissa, N. Mostefa, N. Mohamed. Nasseh. Application of Tchebyshev Polynomials to Volterra-Fredholm Integral. The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, 7, 10 (2022), pp. 1-8.
- [3] K.E Atkinson ,The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind,cambridge university Press,2009.
- [4] M,N,NADIR, Sur la solution numérique des équations intégrales de Volterra- Fredholm en utiisant les polynômes de Tchebyshev,Master,université de M'sila 2022
- [5] A. M.Wazwaz, Linear and nonlinear integral equations methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.
- [6] Abd-Elhameed, W.M. ; Youssri, Y.H. : Numerical solutions for Volterra–Fredholm–Hammerstein integral equations via second kind Tchebyshev quadrature collocation algorithm. Adv. Math. Sci. Appl. 24, 129–141 (2014)
- [7] L. Yucheng, Application of the Tchebyshev polynomial in solving Fredholm integral equations,Mathematical and Computer Modelling, 50 (2009), pp. 465 469
- [8] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Tchebyshev polynomials,Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics, 4 (2014), pp. 15-20.
- [9] HAFID.H ,Calcul numérique des équations intégrales de première es- pèce,Master,université de M'sila 2024

الملخص:

الهدف من هذا البحث هو إيجاد حلول عددية تقريبية للمعادلات التكاملية من نوع فولتيرا-فريدولم من النوع الأول، وذلك بعد تحويلها إلى معادلات من النوع الثاني باستخدام تقنية النظام. تم استخدام كثيرات حدود تشيبيشيف المعدلة من النوع الأول لتقريب الحل. وقد تم تقدير أمثلة عددية لتوضيح فعالية ودقة الطريقة المقترحة.

الكلمات المفتاحية:

كثيرات حدود تشيبيشيف من النوع الأول – المعادلات التكاملية – النظام – الطرق العددية

Résumé :

Le but de ce mémoire est de trouver des solutions numériques approximatives aux équations intégrales de Volterra-Fredholm du premier type, en les transformant en équations du second type à l'aide de la technique de régularisation. Les polynômes de Chebyshev décalés de première espèce sont utilisés pour approximer la solution. Des exemples numériques sont présentés pour démontrer l'efficacité et la précision de la méthode proposée.

Mots clés :

Polynômes de Chebyshev de première espèce – Équations intégrales –
Régularisation – Méthodes numériques

Abstract :

The objective of this study is to find approximate numerical solutions for Volterra-Fredholm integral equations of the first kind by transforming them into second kind equations using a regularisation technique. Shifted Chebyshev polynomials of the first kind are used to approximate the solution. Numerical examples are presented to demonstrate the effectiveness and accuracy of the proposed method.

Keywords:

First-kind Chebyshev polynomials – Integral equations – Regularisation –
Numerical methods