



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** Mathématiques:

**Option** : Analyse fonctionnelle

**Par**

MIRA SOMIA

**Sujet**

Sur un espace fractionnaire de sobolev avec exposant variable et applications

**Devant le jury :**

Mr. Hereiz Rabeh

Prof. Univ de M'sila Président

Mr. Moktari Abdelhak

Prof. Univ de M'sila Encadreur

Mr. Dechoucha Noureddine

Prof. Univ de M'sila Examineur

**Promotion : 2018 / 2019**

## Remerciements

Je remercie **ALLAH** le clément et le mésirécordieux.

Mes premiers remerciements vont à docteur **Moktari Abdelhak** , qui a dirigé mes travaux de recherches avec beaucoup de patience et de gentillesse.

Je remercie vont également à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

**Mr. Hereiz Rabeh**

**Mr. Dechoucha Noureddine**

**Mr. Moktari Abdelhak**

Je ne saurais oublier de remercier l'ensemble des enseignants département de Mathématique qui ont participé dans notre formation.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

SOMIA

# Table des matières

<b>Notations</b>		<b>3</b>
<b>Introduction</b>		<b>5</b>
<b>1 L'espace de sobolev classique et de type fractionnaire</b>		<b>6</b>
1.1 L'espace $L^p$ . . . . .		6
1.1.1 Définition généralités . . . . .		6
1.1.2 Grands théorèmes de convergences . . . . .		7
1.2 L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ . . . . .		8
1.3 L'espace de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$ . . . . .		9
1.3.1 Espace de Sobolev fractionnaire, $0 < s < 1$ . . . . .		9
1.3.2 Espace de Sobolev fractionnaire, $s > 1$ . . . . .		11
1.3.3 Operateur p-laplacien fractionnaire . . . . .		12
<b>2 Espaces de Lebesgue et de sobolev à exposant variable</b>		<b>15</b>
2.1 Espaces de Lebesgue à exposant variable $L^{p(x)}$ . . . . .		15
2.2 Espaces de Sobolev à exposant variable $W^{1,p(x)}(\Omega)$ . . . . .		17
<b>3 L'espace <math>W^{s,q(x);p(x,y)}(\Omega)</math></b>		<b>19</b>
3.1 Définition et propriétés . . . . .		19
3.2 Propriétés de l'opérateur fractionnaire $(-\Delta)_{p(x,y)}^s$ . . . . .		23
3.3 Application aux problème fractionnaire non local avec exposant variable . . . . .		27

<b>Conclusion</b>	<b>29</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>30</b>

---

## Notations

---

$\mathbb{R}$  ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^N$  espace euclidien de dimension  $N$ .

$x$  vecteur de  $\mathbb{R}^N$ ,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq N$ .

$dx$  mesure de Lebesgue de dimension  $N$ .

$\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$  muni de la mesure de Lebesgue.

$\bar{\Omega}$  la fermeture de  $\Omega$ .

$u$  fonction mesurable définie de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

$\nabla u$  gradient de  $u$ ,  $\nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ .

$\operatorname{div} v$  divergence du vecteur  $v$ ,  $\operatorname{div} v = \left( \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial v_N}{\partial x_N} \right)$

$\Delta u$  laplacien de  $u$ ,  $\Delta u = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \right)$

$C_+(\bar{\Omega})$  telle que  $C_+(\bar{\Omega}) = \{p \in C(\bar{\Omega}), p(x) > 1, \forall x \in \bar{\Omega}\}$

$C_0^\infty(\Omega)$  L'espace des fonctions de classe  $C^\infty$  à support compact incluse dans  $\Omega$

$p'$  conjugué de Holder de  $p$ ,  $p' = \frac{p}{p-1}$  si  $p > 1$  et  $p' = \infty$  si  $p = 1$ .

$p^*$  l'exposant de Sobolev tel que :  $p^* = \frac{Np}{N-p}$ , avec  $N > p$ .

$W^{1,p}(\Omega)$  espace de Sobolev des fonctions de  $L^p(\Omega)$  dont les dérivées partielles au sens faible d'ordre 1 sont également dans  $L^p(\Omega)$ , muni de la norme  $\|u\|_{W^{1,p}} = \sum \|\partial_i u\|_{L^p}$ .

$W_0^{1,p}(\Omega)$  la fermeture de  $C_0^\infty(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ , i.e.  $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$ .

$H^1(\Omega)$   $u \in L^2(\Omega)$  et  $\nabla u \in L^2(\Omega)$ .

$p.p.$  presque partout.

T.C.D théorème de convergence dominé de Lebesgue.

$\rightharpoonup$  convergence faible.

$\rightarrow$  convergence forte.

$E'$  est le dual topologique de  $E$  ou l'espace des formes linéaire et continue sur  $E$ .

$E_0$  la fermeture de  $C_0^\infty(\Omega)$  en  $E$

$W_0^{s,p}(\Omega)$  la fermeture de  $C_0^\infty(\Omega)$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$

$[s]$  désigne la partie entière de  $s$

---

# Introduction

Espaces fractionnaires de Sobolev et les équations non locales correspondantes ont des applications aux divers problèmes non linéaires, tels les transitions de phase, le problème des obstacles minces, les matériaux stratifiés, surfaces minimales, science des matériaux, etc. Nous nous référons à Di Nezza, Palatucci et Valdinoci [6] pour une introduction complète à l'étude des problèmes non locaux. Une grande quantité des papiers ont été écrits sur des problèmes cartennents l'opérateur fractionnaire  $(-\Delta)^s$  ( $0 < s < 1$ ) voir [5, 1, 11, 14, 15]. Nous nous référons également aux monographies récentes [12, 4, 13] pour une approche variationnelle approfondie des problèmes non locaux.

Une question naturelle est de voir quels résultats peuvent être récupérés lorsque la norme L'opérateur Laplace est remplacé par le laplacien fractionnaire. D'autre part, pour certains matériaux non homogènes (tels l'électrorhéologie de la fluide, parfois appelé " smart fluid "), l'approche standard basée sur Les espaces de Lebesgue  $L^p$  et de Sobolev  $W^{1,p}$  qui ne sont pas suffisante. Ceci conduit à l'étude des Espaces de Lebesgue et Sobolev à l'exposant variable  $L^{p(x)}$  et  $W^{1,p(x)}$ , où  $p$  est une fonction à valeur réelle.

Les espaces de Lebesgue à exposants variables sont apparus dans la littérature en 1931 dans le journal par Orlicz [18].

Il est donc de voir une question naturelle : quels est les résultats peuvent être "récupérés" lorsque l'opérateur  $p(x)$ -Laplace est remplacé par une version fractionnaire  $p(x)$ -Laplacien . Au loin que nous savoir, le seul résultat sur les espaces fractionnaires de Sobolev à exposant variable et l'opérateur  $p(x)$ -Laplacien fractionnaire est obtenue dans [17]. En particulier, les auteurs généraliser l'opérateur  $p(x)$ -Laplace au cas fractionnaire. Ils introduisent également un espace fonctionnel pour étudier une équation dans laquelle l'opérateur  $p(x)$ -Laplacien fractionnaire est présent.

---

Notre mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier, on donne quelques résultats classiques concernant les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev .

Dans le second chapitre, on étudie les espaces de Lebesgue à exposant variable  $L^{p(x)}$  et les espaces de Sobolev à exposant variable  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ .

Et enfin, le dernier chapitre, on étudie l'espace fractionnaire de Sobolev avec exposant variable  $W^{s,q(x),p(x,y)}(\Omega)$  puis, on donne une application sur l'existence d'une solution faible dans l'espace  $W_0^{s,q(x),p(x,y)}(\Omega)$  pour le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} (-\Delta)_{p(x,y)}^s u(x) + |u(x)|^{q(x)-1} u(x) = \lambda |u(x)|^{r(x)-1} u(x), & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & , \text{ dans } \partial\Omega \end{cases}$$

où  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  et  $q, r$  sont des fonctions réelles vérifiant certaines conditions

l'approche qui on va utiliser est l'approche de variationnelle via ce principe d'EKLAND

# Chapitre 1

## L'espace de sobolev classique et de type fractionnaire

### 1.1 L'espace $L^p$

Dans ce qui suit, on considère  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$

#### 1.1.1 Définitions générales

**Définition 1.1.1** Soit  $1 \leq p < \infty$  ; on pose

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\} \quad (1.1.1)$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^p} = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (1.1.2)$$

**Définition 1.1.2** On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; \text{mesurable et il existe une constante } c \text{ telle que } |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\} \quad (1.1.3)$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{c ; |f(x)| \leq c \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

## 1.1.2 Grands théorèmes de convergences

**Théorème 1.1.1 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1$ .

On suppose que :

- 1-  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  p.p. sur  $\Omega$ ,
- 2- Il existe une fonction  $g \in L^1$  telle que pour chaque  $n$ ,  $f_n(x) \leq g(x)$  p.p. sur  $\Omega$ .

Alors  $f \in L^1(\Omega)$  et  $\|f_n - f\|_{L^1} \rightarrow 0$ .

**Théorème 1.1.2 (Fubini)** Soit  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  des ouverts de  $\mathbb{R}^N$

On suppose que  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ , Alors pour presque tout  $x \in \Omega_1$

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \text{ et } \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout  $y \in \Omega_2$

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \text{ et } \int_{\Omega_1} |F(x, y)| dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

**Proposition 1.1.1 (Inégalité de Holder)** Soit  $q$  la conjugué de  $p$  i.e  $\left\{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right\}$  et soit  $f \in L^p$  et  $g \in L^q$  avec  $1 \leq p < \infty$  alors  $f.g \in L^1$  et on a :

$$\int_{\Omega} |f.g| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$$

**Lemme 1.1.1 (lamme de fatou)** Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions de  $L^1$  telle que

1- Pour chaque  $n$ ,  $f_n(X) \geq 0$  p.p. sur  $\Omega$

2-  $\sup_n \int f_n < \infty$ .

Pour chaque  $x \in \Omega$  on pose  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n(X)$ .

Alors  $f \in L^1(\Omega)$  et

$$\int f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int f_n$$

**Théorème 1.1.3 ( Tonelli )** On suppose que

$$\int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty$$

Pour presque tout  $x \in \Omega_1$  et que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x, y)| dy < \infty$$

Alors  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ .

**Théorème 1.1.4 ( Inégalité de Young )** Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs, et  $p$  et  $q$  des réels strictement positifs vérifiant :  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Alors on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

## 1.2 L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

**Définition 1.2.1** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ , on définit l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\Omega)$  par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \int_{\mathbb{R}} u \nabla \varphi = - \int_{\mathbb{R}} g \varphi, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\} \quad (1.2.1)$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p \quad (1.2.2)$$

Pour  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , on note  $g = \nabla u$ , Si  $p = 2$ , alors on note

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

**Proposition 1.2.1**

- L'espace  $W^{1,p}$  est un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq \infty$ .
- L'espace  $W^{1,p}$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ .
- L'espace  $W^{1,p}$  séparable pour  $1 \leq p < \infty$ .

### 1.3 L'espace de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$

#### 1.3.1 Espace de Sobolev fractionnaire, $0 < s < 1$

**Définition 1.3.1** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , et soient  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in [1, +\infty[$ , on définit l'espace de Sobolev fractionnaire  $W^{s,p}(\Omega)$  par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{N}{p} + s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\} \quad (1.3.1)$$

C'est un espace vectoriel, on le muni par la norme :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := ([u]_{s,p}^p + \|u\|_{L^p(\Omega)}^p)^{\frac{1}{p}}$$

avec :

$$[u]_{s,p} = \left( \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

**Proposition 1.3.1** Soit un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ ,  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in [1, +\infty[$ , nous avons alors :

- 1–  $W^{s,p}(\Omega)$  est un espace séparable, et de Banach pour tout  $1 \leq p < +\infty$ .
- 2–  $W^{s,p}(\Omega)$  est un espace réflexif pour tout  $1 < p < +\infty$ .
- 3–  $W^{s,p}(\Omega)$  est un espace uniformément convexe pour tout  $1 < p < +\infty$ .

**Preuve.** Soit  $(u_n)_n$  suite de Cauchy pour la norme  $\|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)}$ , alors  $(u_n)_n$  est de Cauchy dans  $L^p(\Omega)$ , donc convergence vers  $u$  dans  $L^p(\Omega)$ .

On suppose  $(v_n)_n$ :

$$v_n(x, y) = \frac{u_n(x) - u_n(y)}{|x - y|^{\frac{N}{p} + s}}$$

Qui est de Cauchy dans  $L^p(\Omega)$ , donc converge dans  $L^p(\Omega)$ .

Soit  $(u_{\sigma(n)})_n$  une sous suite de  $(u_n)_n$ , et par T.C.D converge p.p. vers  $u(x)$  et par suite  $(v_{\sigma(n)})_n$  converge p.p. pour tout  $(x, y)$  vers :

$$u(x, y) = \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{\frac{N}{p} + s}}$$

On applique lemme de Fatou, on obtient :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \leq \liminf_{x \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|u_{\sigma(n)}(x) - u_{\sigma(n)}(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy$$

Alors  $u \in W^{s,p}(\Omega)$  (car  $u_{\sigma(n)}(x) \in W^{s,p}(\Omega)$  ).

De plus d'après T.C.D nous avons

$$\frac{|u_n(x) - u_n(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} \text{ dans } L^p(\Omega \times \Omega)$$

D'où  $u_n \rightarrow u$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$ . ■

**Exemple 1.3.1**  $x \rightarrow \ln|x| \in W^{s,p}(]0, 1[)$  avec  $sp < 1$  en effet :

On pose

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln|x| - \ln|y||^p}{|x - y|^{sp+1}} dx dy$$

on a

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|\ln|x| - \ln|y||^p}{|y|^{sp+1} \left| \frac{x}{y} - 1 \right|^{sp+1}} dx dy$$

En faisant le changement de variable  $t = \frac{x}{y}$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{y}} y^{-sp} \frac{|\ln|ty| - \ln|y||^p}{|t - 1|^{sp+1}} dt dy \\ &= \int_0^1 y^{-sp} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln t|^p}{|1 - t|^{sp+1}} dt dy \\ &\leq \int_0^1 y^{-sp} \left( \int_0^1 \frac{|\ln t|^p}{|1 - t|^{sp+1}} dt + \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln t|^p}{|1 - t|^{sp+1}} dt \right) dy \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

– Pour  $I_1$  les equivalences suivant :

$$\frac{|\ln t|^p}{|1 - t|^{sp+1}} \underset{v(0)}{\sim} |\ln t|^p \text{ et } \frac{|\ln t|^p}{|1 - t|^{sp+1}} \underset{v(1)}{\sim} |1 - t|^{p-sp-1}$$

De plus :  $\int_0^1 y^{-sp} dy < +\infty$  car  $sp < 1$  donc  $I_1 < +\infty$

–Pour  $I_2$ , d'après la formule de Fubuni, nous avons :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 y^{-sp} \int_0^{\frac{1}{y}} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} dt dy \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} \left( \int_0^{\frac{1}{t}} y^{-sp} dy \right) dt \\ &= \frac{1}{-sp+1} \int_1^{\infty} \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} dt \end{aligned}$$

Or on a

$$\frac{1}{|1-t|^{sp+1}} \underset{v(+\infty)}{\sim} \frac{1}{|t|^{sp+1}}$$

alors :

$$\frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} \underset{v(+\infty)}{\sim} \ln |t|^p t^{-2} \text{ et } \frac{|\ln t|^p}{|1-t|^{sp+1}} t^{sp-1} \underset{v(1)}{\sim} |1-t|^{p-sp-1}$$

Donc  $I_2 < +\infty$  ce qui implique que  $I < +\infty$

### 1.3.2 Espace de Sobolev fractionnaire, $s > 1$

**Définition 1.3.2** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$  et Soit  $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$  avec  $s > 1$  et  $p \in [1, +\infty[$ .

L'espace  $W^{s,p}(\Omega)$  est défini par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{[s],p}(\Omega) \text{ tq } D^\alpha u \in W^{s-[\alpha],p}(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| = s \right\} \quad (1.3.2)$$

ou  $[s]$  désigne la partie entière de  $s$ .

C'est un espace vectoriel, on le muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left( \|u\|_{W^{[s],p}(\Omega)}^p + \sum_{|\alpha|=[s]} \|D^\alpha u\|_{W^{s-[\alpha],p}(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

– Si  $s = [s]$ , alors l'espace  $W^{s,p}(\Omega)$  est coïncide avec l'espace de Sobolev classique.

$(W^{s,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{s,p}(\Omega)})$  est un espace de Banach .

### 1.3.3 Opérateur p-laplacien fractionnaire

**Définition 1.3.3** Soit  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in [1, +\infty[$ , alors on définit le p-laplacien fractionnaire par :

1- Si  $p \neq 2$ :  $(-\Delta)_p^s$  est non linéaire.

2- Cet opérateur est appelé non local, en ce sens que la valeur de p-laplacien fraction  $u(x)$  à tout point  $x \in \Omega$  dépend non seulement des valeurs de  $x$  sur l'ensemble  $\Omega$ , mais en fait sur la tout  $\mathbb{R}^N$ .

3- Cette définition est une généralisation de l'opérateur Laplacien fractionnaire lorsque  $p = 2$ , est qui défini par :

$$(-\Delta)^s u(x) = 2C(N, s) PV \int_{\mathbb{R}^N} \frac{(u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy$$

avec une normalisation d'un constant  $C = C(N, s)$

4-  $(-\Delta)_p^s \rightarrow (-\Delta)_p$  quand  $s \rightarrow -1$

Pour plus des détails, on peut consulter [6]

**Définition 1.3.4**  $W_0^{s,p}(\Omega)$  la fermeture de  $C_0^\infty(\Omega)$  dans  $W^{s,p}(\Omega)$

**Proposition 1.3.2** Soit  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in [1, +\infty[$ . Alors :

$$(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N))'$$

est bien défini, et de plus :

1-  $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  nous avons :

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} dx dy$$

2-  $\forall u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  :

$$\left\langle (-\Delta)_p^s u, v \right\rangle \leq [u]_{s,p}^{p-1} [v]_{s,p}$$

Et par suite :

$$\left\| (-\Delta)_p^s u \right\|_* \leq \|u\|_{W^{s,p}}^{p-1}$$

ou  $\|\cdot\|_*$  désigne la norme dual dans  $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$

**Preuve.** 1– comme  $u \in W^{s,p}(\Omega)$ , alors la quantité  $(-\Delta)_p^s u$  existe donc :

$$(-\Delta)_p^s u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dy$$

Par le théorème de Fubini, pour tout  $u, v \in W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  on a :

$$\begin{aligned} \langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle &= 2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} dx v(x) dy \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} v(x) dx dy \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} v(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} v(y) dx dy \end{aligned}$$

Dans le second intégral nous changeons le rôle entre  $x$  et  $y$  i.e:  $x \rightarrow y$  et  $y \rightarrow x$  nous avons alors :

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} v(x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp}} v(x) dx dy \end{aligned}$$

Et par suite :

$$\begin{aligned} &2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) v(x)}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \\ &= 2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \end{aligned}$$

et d'après(1.3.3) nous avons :

$$\langle (-\Delta)_p^s u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} dx dy$$

2-  $\forall u, v \in X^s$  nous avons par l'inégalité de Holder :

$$\begin{aligned}
 \langle A(u), v \rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p-1} (v(x) - v(y))}{|x - y|^{(N+sp)(\frac{p-1}{p})} |x - y|^{(N+sp)(\frac{1}{p})}} dx dy \\
 &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{\left(\frac{p-1}{p}\right)} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v(x) - v(y)|^p}{|x - y|^{N+sp}} dx dy \right)^{\left(\frac{1}{p}\right)} \\
 &= [u]_{s,p}^{p-1} [v]_{s,p}.
 \end{aligned}$$

■

**Proposition 1.3.3** Soit  $s \in ]0, 1[$  et  $p \in ]1, +\infty[$ . Alors :

$$(-\Delta)_p^s : W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N) \rightarrow (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N))'$$

est continue i.e  $(-\Delta)_p^s \in C\left(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N), (W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N))'\right)$ .

**Preuve.** Soit  $u_n \rightarrow u$  dans  $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  montrons que  $(-\Delta)_p^s u_n \rightarrow (-\Delta)_p^s u$  dans  $(W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N))'$ .

En effet nous avons d'après la proposition (1.3.2) :

$$\|(-\Delta)_p^s u_n - (-\Delta)_p^s u\|_* \leq [u_n - u]_{s,p}^{p-1}$$

Alors il suffit de montrer que :  $[u_n - u]_{s,p}^{p-1} \rightarrow 0$  ; nous avons :  $u_n \rightarrow u$  dans  $W_0^{s,p}(\mathbb{R}^N)$  alors  $u_n \rightarrow u$  dans  $L^p(\mathbb{R}^N)$  donc pour une sous suite nous avons :  $\exists g \in L^p(\mathbb{R}^N)$  telle que :

$$u_n(x) \rightarrow u(x) \text{ p.p. } |u_n| \leq g(x)$$

Et d'après théorème de convergence dominée nous obtenons le résultat souhaité. ■

# Chapitre 2

## Espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposant variable

### 2.1 Espaces de Lebesgue à exposant variable $L^{p(x)}$

Dans toute ce que suit,  $\Omega$  désigne un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , et soit l'ensemble  $C_+(\bar{\Omega})$  défini par

$$C_+(\bar{\Omega}) = \{p \in C(\bar{\Omega}), p(x) > 1, \forall x \in \bar{\Omega}\}$$

pour tout  $p \in C_+(\bar{\Omega})$ , on pose :

$$p^+ = \sup_{x \in \Omega} p(x) \text{ et } p^- = \inf_{x \in \Omega} p(x)$$

**Définition 2.1.1** On définit l'espace de Lebesgue à exposant variable  $L^{p(x)}$  par :

$$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{ u; u \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

muni de la norme de type Luxembourg :

$$\|u\|_{p(x)} = \inf \left\{ \mu > 0, \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\mu} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\} \quad (2.1.1)$$

dans le cas où  $p(x) = p \in [1, \infty)$  est une constante alors le choix optimal dans l'expression (2.1.1) est  $\mu = \|u\|_{L^p}$  c.a.d l'espace  $L^{p(x)}$  coïncide avec l'espace classique  $L^p$ .

**Inégalité de type holder :** Soit  $L^{q(x)}(\Omega)$  désigne l'espace conjugué de  $L^{p(x)}(\Omega)$ , où  $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1$ . Si  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$  et  $v \in L^{q(x)}(\Omega)$  alors l'inégalité de Holder suivante est vraie :

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left( \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^-} \right) \|u\|_{p(x)} \|v\|_{q(x)}$$

Soit  $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ , on pose :

$$\rho(u) = \int_{\Omega} |u|^{p(x)} dx$$

Le module  $\rho(\cdot)$  joue un rôle important pour caractériser les propriétés topologiques de  $L^{p(x)}$ .

**Proposition 2.1.1** [19] *On a*

- 1-  $\|u\|_{p(x)} < 1 (= 1; > 1) \Leftrightarrow \rho(u) < 1 (= 1; > 1)$ .
- 2-  $\|u\|_{p(x)} > 1 \Rightarrow |u|_{p(x)^-}^{p^-} \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)^+}^{p^+}$ .
- 3-  $\|u\|_{p(x)} < 1 \Rightarrow |u|_{p(x)^+}^{p^+} \leq \rho(u) \leq |u|_{p(x)^-}^{p^-}$ .

**Proposition 2.1.2** [19] *Si  $u, u_n \in L^{p(x)}(\Omega)$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors les affirmations suivantes sont équivalentes entre elles:*

- 1-  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$ .
- 2-  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n - u) = 0$ .
- 3-  $u_n \rightarrow u$  en mesure dans  $\Omega$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(u_n) = \rho(u)$ .

**Théorème 2.1.1** [19] *Supposons que*

$$1 < q^- = \min_{(x) \in \bar{\Omega}} q(x) \leq q(x) \leq q^+ = \max_{(x) \in \bar{\Omega}} q(x) < \infty \quad (\text{Q})$$

1- Si  $\Omega$  est un ouvert borné,  $(L^{q(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{q(x)})$  est un espace réflexif uniformément convexe et espace séparable.

2- Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ , alors  $C_0^\infty(\Omega)$  est dense dans l'espace  $(L^{q(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{q(x)})$ .

## 2.2 Espaces de Sobolev à exposant variable $W^{1,p(x)}(\Omega)$

**Définition 2.2.1** On définit l'espace de type Sobolev avec un exposant variable comme suit :

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^{p(x)}(\Omega) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N \right\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{1,p(x)} = |u|_{p(x)} + |\nabla u|_{p(x)}$$

On définit  $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$  par l'adhérence dans  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ .

**Proposition 2.2.1** (voir [19])

–  $W^{1,p(x)}(\Omega)$  et  $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$  sont des espaces de Banach réflexifs séparables.

**Inégalité de type Poincaré:** Il existe une constante  $C > 0$ , telle que :

$$|u|_{p(x)} \leq C |\nabla u|_{p(x)} \quad \forall u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

Par Inégalité de type Poincaré, on déduit que  $|u|_{p(x)}$  et  $\|u\|_{1,p(x)}$  sont normes équivalentes sur  $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ .

**Exemple 2.2.1** Soit  $N = 2$ , soit  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ , et soient  $r, s$  avec  $1 < r < s < 2$  et  $\sigma = \frac{2(s-r)}{r}$ .

on pose :

$$A = \left\{ x \in \Omega : \left\{ \begin{array}{l} t = |x| \\ \varphi = \arccos x \end{array} \right\} \text{ avec : } 1 < \varphi < t^\delta \right\}$$

on pose

$$p(x) = \begin{cases} r & \text{si } x \in (\Omega \setminus A) \\ s & \text{si } x \in A \end{cases}$$

Le conjugué de Sobolev est

$$q(x) = \begin{cases} \frac{2r}{2-r} & \text{si } x \in (\Omega \setminus A) \\ \frac{2s}{2-s} & \text{si } x \in A \end{cases}$$

La fonction  $u(x) = |x|^\mu$  avec  $\mu = \frac{s-2}{r}$  appartient à  $W^{1,p(x)}(\Omega)$ , en effet :

$$\begin{aligned}\rho_p(u) &= \int_A |x|^{s\mu} dx + \int_{\Omega \setminus A} |x|^{r\mu} dx \\ &< \int_0^1 t^{s\mu+\sigma+1} dt + 2\pi \int_0^1 t^{r\mu+1} dt \\ &< \infty\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}\rho_p(\nabla u) &= |\mu|^s \int_A |x|^{s(\mu-1)} dx + |\mu|^r \int_{\Omega \setminus A} |x|^{r(\mu-1)} dx \\ &< \int_0^1 t^{s(\mu-1)+\sigma+1} dt + 2\pi \int_0^1 t^{r(\mu-1)+1} dt \\ &< \infty\end{aligned}$$

car  $s\mu + \sigma + 1 > 0$ ,  $\mu r + 1 > 0$ ,  $s(\mu - 1) + \sigma + 1 > -1$ ,  $r(\mu - 1) + 1 > -1$ .

Cependant,

$$\begin{aligned}\rho_q(u) &> 2\pi \int_0^1 t^{\frac{2r\mu}{(2-s)}+\sigma+1} dt \\ &= \infty\end{aligned}$$

parce que  $\frac{2r\mu}{(2-s)} + \sigma + 1 = -1$ , et ainsi,  $u \notin W^{1,q(x)}(\Omega)$ .

**Définition 2.2.2 ( Opérateur  $p(x)$ -laplacien ) :**

Soit  $u \in W^{1,q(x)}(\Omega)$ , on définit l'opérateur  $p(x)$ -laplacien par :

$$\Delta_{p(x)} = \operatorname{div} \left( |\nabla u|^{p(x)-2} \cdot \nabla u \right).$$

# Chapitre 3

## L'espace $W^{s,q(x),p(x,y)}(\Omega)$

### 3.1 Définition et propriétés

Soit  $\Omega$  un ensemble ouvert régulier dans  $\mathbb{R}^N$ . Pour tout réel  $s > 0$  et pour toute fonction  $q(x)$  et  $p(x, y)$ , on veut définir l'espace de Sobolev fractionnaire à exposant variable. On commence par fixer  $0 < s < 1$  et  $q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  et  $p : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  trois fonctions continues.

On suppose que  $p$  est symétrique, et de plus :

$$1 < p^- = \min_{(x,y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} p(x, y) \leq p(x, y) \leq p^+ = \max_{(x,y) \in \overline{\Omega} \times \overline{\Omega}} p(x, y) < \infty,$$

$$p((x, y) - (z, z)) = p(x, y), \forall (x, y), (z, z) \in \Omega \times \Omega, \quad (\text{p}')$$

$$1 < q^- = \min_{(x) \in \overline{\Omega}} q(x) \leq q(x) \leq q^+ = \max_{(x) \in \overline{\Omega}} q(x) < \infty. \quad (\text{Q})$$

**Définition 3.1.1** On définit l'espace de Sobolev fractionnaire avec exposant variable via l'approche de Gagliardo comme suit

$$\begin{aligned} E &= W^{s,q(x),p(x,y)}(\Omega) \\ &= \left\{ u \in L^{q(x)}(\Omega), \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^{p(x,y)}}{\lambda^{p(x,y)} |x - y|^{N+sp(x,y)}} dx dy < \infty, \text{ pour } \lambda > 0 \right\} \end{aligned}$$

Soit

$$[u]^{s,p(x,y)} = \inf \left\{ \lambda > 0, \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^{p(x,y)}}{\lambda^{p(x,y)} |x - y|^{N+sp(x,y)}} dx dy < 1 \right\}$$

la semi normE de Gagliardo correspondent avec exposant variable.

On munit  $E$  par la norm suivant :

$$\|u\|_E = [u]^{s,p(x,y)} + |u|_{q(x)}$$

Alors  $E$  devient un espace de Banach.

Soit  $E_0$  la fermeture de  $C_0^\infty(\Omega)$  en  $E$ . Alors  $E_0$  est un Banach espace à la norme

$$\|u\| = [u]^{s,p(x,y)}.$$

Dans [17], les auteurs prouvent un théorème, qui nous permet de voir un résultat d'injection très important :

**Théorème 3.1.1** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  un ouvert et  $s \in (0, 1)$ . Soit  $q(x), p(x, y)$  deux fonction continues avec  $sp(x, y) < N$  pour tout  $(x, y) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$  et  $q(x) > p(x, x)$  pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ . Soit  $(P)$  et  $(Q)$  sont satisfaits. Supposons que  $r : \bar{\Omega} \rightarrow (1, \infty)$  est une fonction continue telle que*

$$p^*(x) = \frac{Np(x, x)}{N - sp(x, x)} > r(x) \geq r_- > 1; \forall x \in \bar{\Omega}.$$

,

Alors Il existe une constante  $C = C(N, s, p, q, r, \Omega)$  telle que pour tout  $f \in W^{s,q(x),p(x,y)}(\Omega)$ ,

$$|f|_{r(x)} \leq C \|f\|_E.$$

Ainsi, l'espace  $W^{s,q(x),p(x,y)}(\Omega)$  est s'injecte de manière continu dans  $L^{r(x)}(\Omega)$  pour tout  $r \in (1, p^*)$ . De plus, cette injection est compacte.

Voici un résultat racemble quelques propriétés topologiques importants pour l'espace  $E$

**Lemme 3.1.1** *Supposer que  $\mathbb{R}^N$  est un domaine ouvert borné. Supposons que  $(P)$  et  $(Q)$ . Alors  $W^{s,q(x),p(x,y)}(\Omega)$  est un espace réflexive séparable*

**Preuve.** On définit l'opérateur

$$T : W^{s,q(x),p(x,y)}(\Omega) \rightarrow L^{q(x)}(\Omega) \times L^{p(x,y)}(\Omega \times \Omega)$$

par

$$T(u) = \left( u(x), \frac{u(x) - u(y)}{|x - y|^{\frac{N}{p(x,y)} + s}} \right)$$

Facilement de voir que  $T$  est une isométrie. Ensuite, en utilisant le théorème (2.1.1), le reste de la preuve est similaire au théorème 8.1 de [10]. ■

Voici une généralisation de résultat de la densité :

**Lemme 3.1.2** *Soit  $(P)$ ,  $(P')$  et  $(Q)$  être satisfait. Si  $\Omega = \mathbb{R}^N$ , puis l'espace  $C^\infty(\Omega)$  est un sous-espace dense de  $W^{s,q(x),p(x,y)}(\Omega)$ .*

**Preuve.** Soit  $u \in W^{s,q(x),p(x,y)}(\Omega)$  et soit  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$  telle que  $\eta \geq 0$  dans  $\mathbb{R}^N$  et  $\text{supp}(\eta) \subset B_1$ . Nous supposons également que  $\int_{B_1} \eta(x) dx = 1$ . On note par  $u_\varepsilon$  la suite qui définie par :

$$u_\varepsilon(x) = \int \eta_\varepsilon(x-y)u(y)dy; \quad x \in \mathbb{R}^N$$

,avec  $\eta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N}\eta(\frac{x}{\varepsilon})$ . comme  $u \in L^{q(x)}(\Omega)$ , par le théorème (2.1.1), On a

$$|u_\varepsilon - u|_{q(x)} \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.1.1)$$

Par conséquent, à partir de la proposition (2.1.2), il suffit de prouver que

$$\int_{\Omega \times \Omega} |u_\varepsilon(x) - u(x) - u_\varepsilon(y) + u(y)|^{p(x,y)} K(x,y) dx dy \rightarrow 0, \text{ comme } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (3.1.2)$$

où  $K(x;y) = |x-y|^{-N-sp(x,y)}$ . En utilisant l'inégalité de Holder plus ancienne en combinant avec les théorèmes de Tonelli et de Fubini, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \Omega} |u_\varepsilon(x) - u(x) - u_\varepsilon(y) + u(y)|^{p(x,y)} K(x,y) dx dy \\ &= \int_{\Omega \times \Omega} K(x,y) \left[ \int_{\mathbb{R}^N} (u(x-z) - u(y-z)) \eta_\varepsilon(z) dz - u(x) + u(y) \right]^{p(x,y)} dx dy \\ &= \int_{\Omega \times \Omega} K \left[ \int_{B_1} (u(x-\varepsilon z) - u(y-\varepsilon z) - u(x) + u(y)) \eta(z) dz \right]^{p(x,y)} dx dy \\ &\leq |B_1|^{p^-+p^+-1} \int_{\Omega \times \Omega} K \left[ \int_{B_1} |u(x-\varepsilon z) - u(y-\varepsilon z) - u(x) + u(y)|^{p(x,y)} \eta^{p(x,y)}(z) dz \right] dx dy \\ &\leq |B_1|^{p^-+p^+-1} \int_{\Omega \times \Omega \times B_1} |u(x-\varepsilon z) - u(y-\varepsilon z) - u(x) + u(y)|^{p(x,y)} K \eta^{p(x,y)}(z) dx dy dz \\ &\leq |B_1|^{p^-+p^+-1} \int_{\Omega \times \Omega \times B_1} |u(x-\varepsilon z) - u(y-\varepsilon z) - u(x) + u(y)|^{p(x,y)} \times \\ & \quad K(x,y) \left( \eta(z)^{p^+} - \eta(z)^{p^-} \right) dx dy dz \end{aligned}$$

On démontre que :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \times \Omega} |u(x - \varepsilon z) - u(y - \varepsilon z) - u(x) + u(y)|^{p(x,y)} K(x, y) dx dy = 0 \quad (3.1.3)$$

on fixe  $z \in B_1$  et on pose  $w = (z, z) \in \Omega \times \Omega$ . On définit la fonction  $v : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$v(x, y) = (u(x) - u(y)) (K(x, y))^{\frac{1}{p(x,y)}}, \quad \forall (x, y) \in \Omega \times \Omega$$

alors  $v \in L^{p(x,y)}(\Omega \times \Omega)$ , si  $\varepsilon' > 0$ , par le théorème (2.1.1) il existe  $g \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega)$  telle que

$$|v - g|_{p(x,y)} < \frac{\varepsilon'}{3}$$

alors

$$\begin{aligned} & |v(\cdot - \varepsilon w) - v|_{p(x,y)} \\ & \leq |v(\cdot - \varepsilon w) - g(\cdot - \varepsilon w)|_{p(x,y)} + |g(\cdot - \varepsilon w) - g|_{p(x,y)} + |v - g|_{p(x,y)} \\ & \leq \frac{\varepsilon'}{3} + \frac{\varepsilon'}{3} + \frac{\varepsilon'}{3} = \varepsilon', \end{aligned}$$

pour  $\varepsilon$  est assez petit. Cela prouve la relation (3.1.3).

De plus, pour p.p.  $z \in B_1$ , il existe une constante positive  $c$  telle que :

$$\begin{aligned} & \left( \eta(z)^{p^+} - \eta(z)^{p^-} \right) \int_{\Omega \times \Omega} |u(x - \varepsilon z) - u(y - \varepsilon z) - u(x) + u(y)|^{p(x,y)} K dx dy \\ & \leq c \left( \eta(z)^{p^+} - \eta(z)^{p^-} \right) \left( \int_{\Omega \times \Omega} |u(x - \varepsilon z) - u(y - \varepsilon z)|^{p(x,y)} K dx dy \right. \\ & \quad \left. + \int_{\Omega \times \Omega} |u(x) - u(y)|^{p(x,y)} K dx dy \right) \\ & \leq 2c \left( \eta(z)^{p^+} - \eta(z)^{p^-} \right) \left( \int_{\Omega \times \Omega} |u(x) - u(y)|^{p(x,y)} K dx dy \right) \in L^\infty(B_1) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

pour tout  $\varepsilon > 0$ . Par conséquent, en utilisant (3.1.3), (3.1.4) et le théorème de convergence dominée, on déduit que

$$\int_{B_1} \eta(z)^{p(x,y)} \int_{\Omega \times \Omega} |u(x - \varepsilon z) - u(y - \varepsilon z) - u(x) + u(y)|^{p(x,y)} K(x, y) dx dy dz \rightarrow 0,$$

quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Grâce à l'assertion ci-dessus, nous obtenons (3.1.2). En combinant avec (3.1.1), on conclut notre preuve. ■

Comme application du théorème (3.1.1). Les auteurs étudient des solutions pour des problèmes non locaux, pour la on a besoin de définir un opérateur correspondant à l'espace  $E$  comme suit :

**Définition 3.1.2** Soit l'opérateur  $(-\Delta)_{p(x,y)}^s$  définie par :

$$(-\Delta)_{p(x,y)}^s u(x) = pv \int_{\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^{p(x,y)-2} (u(x) - u(y))}{|x - y|^{N+sp(x,y)}} dy$$

### 3.2 Propriétés de l'opérateur fractionnaire $(-\Delta)_{p(x,y)}^s$

Dans cette section, on donne quelques propriétés de bases sur l'opérateur  $(-\Delta)_{p(x,y)}^s$ .

Soit  $(P)$  et  $(Q)$  sont satisfaites. Dans la suite, on note par

$$K(x, y) = |x - y|^{-N-sp(x,y)}.$$

On considérez les fonctionnelles suivantes:

$$I_1(u) = \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y) |x - y|^{N+sp(x,y)}} dx dy; \quad \forall u \in E_0$$

$$I_2(u) = \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y) |x - y|^{N+sp(x,y)}} dx dy + \int_{\Omega} \frac{|u|^{q(x)}}{q(x)} dx; \quad \forall u \in E$$

Et  $L_1 : E_0 \rightarrow E_0^*$ , ou  $E_0^*$  est l'espace dual de  $E_0$ ,

$$\langle L_1 u, \varphi \rangle = \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^{p(x,y)-2} (u(x) - u(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+sp(x,y)}} dx dy$$

De même, nous considérons  $L_2 : E \rightarrow E^*$  telle que

$$\langle L_2 u, \varphi \rangle = \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^{p(x,y)-2} (u(x) - u(y)) (\varphi(x) - \varphi(y))}{|x - y|^{N+sp(x,y)}} dx dy + \int_{\Omega} |u|^{q(x)-2} u \varphi dx, \quad \forall u, \varphi \in E.$$

**Lemme 3.2.1** La fonction  $I_1$  est bien définie sur  $E_0$ . De plus,  $I_1 \in C^1(E_0, \mathbb{R})$  et la dérivé donnée par

$$\langle I_1'(u), \varphi \rangle = \langle L_1(u), \varphi \rangle, \quad \forall u, \varphi \in E_0$$

**Preuve.** On a

$$I_1(u) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y) |x - y|^{N+sp(x,y)}} dx dy$$

Soit  $u, v \in E_0$

$$\begin{aligned} \frac{I_1(u + tv) - I_1(u)}{t} &= \frac{1}{t} \left( \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(u(x) + tv(x)) - (u(y) + tv(y))|^{p(x,y)}}{p(x,y) |x - y|^{N+sp(x,y)}} dx dy \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x) - u(y)|^{p(x,y)}}{p(x,y) |x - y|^{N+sp(x,y)}} dx dy \right) \end{aligned}$$

on considère  $k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$k(\tau) = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(u(x) + \tau v(x)) - (u(y) + \tau v(y))|^{p(x,y)}}{p(x,y) |x - y|^{N+sp(x,y)}} dx dy$$

$k$  est dérivable sur  $]0, 1[$ , alors il existe  $c_t \in ]0, 1[$  :

$$\begin{aligned} k'(t) - k(0) &= k'(c_t) t \\ &= \frac{|(u(x) + c_t u(x)) - (u(y) + c_t u(y))|^{p(x,y)-2} (u(x) + c_t u(x)) - (u(y) + c_t u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp(x,y)}} \\ &\rightarrow \frac{|(u(x) - u(y))|^{p(x,y)-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp(x,y)}} \text{ quand } t \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Soit l'opérateur  $A : E_0 \rightarrow E'_0$  défini par

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(u(x) - u(y))|^{p(x,y)-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp(x,y)}} dx dy$$

Par l'inégalité de Hölder's et le théorème des valeurs intermédiaires, on a

$$\begin{aligned} |\langle Au, v \rangle| &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|(u(x) - u(y))|^{p(x,y)-1} (v(x) - v(y))}{|x - y|^{N+sp(x,y) \frac{p(x,y)-1}{p(x,y)}} |x - y|^{N+sp(x,y) \frac{1}{p(x,y)}}} dx dy + \|V\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{q(x)-1} |v| dx \\ &\leq \left\| \left( \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{N}{p(x,y)} + s}} \right)^{p(x,y)-1} \right\|_{\frac{p(x,y)}{L^{p(x,y)}-1}} \left\| \frac{v(x) - v(y)}{|x - y|^{\frac{N}{p(x,y)} + s}} \right\|_{L^{p(x,y)}} + \|V\|_{L^\infty} \left\| |u|^{q(x)-1} \right\|_{\frac{q(x)}{L^{q(x)}-1}} \|v\|_{L^{p(x)}} \\ &= \left\| \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^{\frac{N}{p(x,y)} + s}} \right\|_{\frac{p(x,y)}{L^{p(x,y)}-1}}^{p(\tau,v)-1} \left\| \frac{v(x) - v(y)}{|x - y|^{\frac{N}{p(x,y)} + s}} \right\|_{L^{p(x,y)}} + \|V\|_{L^\infty} \|u\|_{\frac{q(x)}{L^{q(x)}-1}}^{q(\varepsilon)-1} \|v\|_{L^{p(x)}} \\ &= \left( [u]^{s,p(x,y)} \right)^{p(\tau,v)-1} [u]^{s,p(x,y)} \|u\|_{\frac{q(x)}{L^{q(x)}-1}}^{q(\varepsilon)-1} \|v\|_{L^{p(x)}} \\ &\leq \|u\|_w^{p(\tau,v)-1} \|v\|_w + C \|u\|_w \|v\|_w \end{aligned}$$

Alors,

$$\|Au\|_{w'} \leq \|u\|_w^{p(\tau,v)-1} \|v\|_w$$

ce qui termine la preuve. ■

**Lemme 3.2.2**

1-  $L_1$  est un opérateur borné et strictement monotone. C'est-à-dire pour toutes  $u, v \in E_0$  :

$$\langle L_1 u - L_1 v, u - v \rangle > 0$$

2-  $L_1$  est une cartographie de type  $(S_+)$ , c'est-à-dire si  $u_n \rightarrow u$  dans  $E_0$  et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle L(u_n) - L(u), u_n - u \rangle \leq 0,$$

alors  $u_n \rightarrow u$  dans  $E_0$ .

3-  $L_1 : E_0 \rightarrow E_0^*$  est un homéomorphisme.

**Preuve.** 1- Evidemment,  $L_1$  est un opérateur borné. Rappelons les inégalités premiers de Simon [ 8], ce qui implique la monotonie stricte de  $L_1$ :

$$\begin{cases} |x - y|^2 \leq c_p (|x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y) \times (x - y), & p \geq 2 \\ |x - y|^2 \leq C_p [(|x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y) \times (x - y)]^{\frac{p}{2}} (|x|^p + |y|^p)^{\frac{2-p}{2}}, & 1 < p < 2 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^N$ , où  $c_p = (\frac{1}{2})^{-p}$  et  $C_p = \frac{1}{p-1}$ .

2- Soit  $(u_n) \in E_0$  une suite telle que  $u_n \rightarrow u$  dans  $E_0$  et

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle L(u_n) - L(u), u_n - u \rangle \leq 0.$$

alors, de la monotone de  $L_1$ , on a :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle L(u_n) - L(u), u_n - u \rangle = 0$$

Par le théorème (3.1.1), nous obtenons

$$u_n(x) \rightarrow u(x); \text{ a.e. } x \in \Omega \quad (3.2.2)$$

le lemme de Fatou fourint que :

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \times \Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p(x,y)} K dx dy \\ & \geq \int_{\Omega \times \Omega} |u(x) - u(y)|^{p(x,y)} K dx dy \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

D'autre part, nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle L_1(u_n), u_n - u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle L_1(u_n) - L_1(u), u_n - u \rangle = 0 \quad (3.2.4)$$

Maintenant, en utilisant l'inégalité de Young, il existe une constante positive  $c$  telle que

$$\begin{aligned}
 \langle L_1(u_n), u_n - u \rangle &= \int_{\Omega \times \Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p(x,y)} K(x,y) dx dy & (3.2.5) \\
 &\quad - \int_{\Omega \times \Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p(x,y)-2} (u_n(x) - u_n(y)) (u(x) - u(y)) K dx dy \\
 &\geq \int_{\Omega \times \Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p(x,y)} K(x,y) dx dy \\
 &\quad - \int_{\Omega \times \Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p(x,y)-1} |u(x) - u(y)| K dx dy \\
 &\geq c \int_{\Omega \times \Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p(x,y)} K(x,y) dx dy \\
 &\quad - c \int_{\Omega \times \Omega} |u(x) - u(y)|^{p(x,y)} K(x,y) dx dy
 \end{aligned}$$

En conséquence de (3.2.3), (3.2.4) et (3.2.5), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \times \Omega} |u_n(x) - u_n(y)|^{p(x,y)} K(x,y) dx dy & (3.2.6) \\
 &= \int_{\Omega \times \Omega} |u(x) - u(y)|^{p(x,y)} K(x,y) dx dy
 \end{aligned}$$

Maintenant de (3.2.2), (3.2.6) et du lemme de Brezis-Lieb [9], notre résultat est prouvé.

3– Par l'assertion 1,  $L_1$  est une injection. Au vu de la proposition (2.1.1), nous obtenons

$$\lim_{\|u\| \rightarrow +\infty} \frac{\langle L_1(u), u \rangle}{\|u\|} = +\infty$$

Par conséquent,  $L_1$  est coercitive. Ainsi, à la lumière du théorème de Minty-Browder (voir [7]),  $L_1$  est une surjection. Donc  $L_1$  a une application inverse  $L_1 : E_0^* \rightarrow E_0$ .

Il reste de montrer que  $L_1^{-1}$  est continu. En effet, soit  $(f_n), f \in E_0^*$  telles que  $f_n \rightarrow f$  dans  $E_0^*$ .

Soit  $u_n = L_1^{-1}(f_n), u = L_1^{-1}(f)$ , alors

$$L_1(u_n) = f_n \text{ et } L_1(u) = f.$$

Vu la coercivité de  $L_1$ ,  $(u_n)$  est borné dans  $E_0$ . On peut supposer que  $u_n \rightarrow u_0$  dans  $E_0$ . D'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle L_1(u_n) - L_1(u_0), u_n - u_0 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, u_n - u_0 \rangle = 0$$

En utilisant le fait que  $L_1$  est de type  $(S+)$ , nous concluons que  $u_n \rightarrow u_0$  dans  $E_0$ . Ce conclut la preuve. ■

**Remarque 3.2.1** Les résultats ci-dessus sont toujours valables si on remplace  $L_1$  par  $L_2$ .

### 3.3 Application aux problème fractionnaire non local avec exposant variable

Dans cette section, on travail sous les hypothèses du théorème (3.1.1). On s'apprie sur existence de solutions du problème suivant

$$\begin{cases} (-\Delta)_{p(x,y)}^s u(x) + |u(x)|^{q(x)-1} u(x) = \lambda |u(x)|^{r(x)-1} u(x), & \text{dans } \Omega \\ u(x) = 0 & , \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3.1)$$

où  $\lambda > 0$ ,  $1 < r(x) < p^-$ .

On dit que  $u \in E_0$  est une solution faible du problème (3.3.1) si pour tout  $v \in E_0$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \times \Omega} |u(x) - u(y)|^{p(x,y)-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y)) K(x, y) dx dy \\ & + \int_{\Omega} |u(x)|^{q(x)-1} u(x) v(x) dx - \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^{r(x)-1} u(x) v(x) dx \\ & = 0 \end{aligned}$$

**Théorème 3.3.1** *Pour tout  $\lambda > 0$ , le problème (3.3.1) admet au moins une solution faible non triviale.*

D'abord, on définit la fonctionnelle  $J_\lambda : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$J_\lambda(u) = I_1(u) + \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{q(x)}}{q(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{|u(x)|^{r(x)}}{r(x)} dx; \quad \forall u \in E$$

D'après le lemme (3.2.1),  $J \in C^1(E_0, \mathbb{R})$  et de plus :

$$\begin{aligned} \langle J'_\lambda(u), v \rangle &= \int_{\Omega \times \Omega} |u(x) - u(y)|^{p(x,y)-2} (u(x) - u(y)) (v(x) - v(y)) K(x, y) dx dy \\ &+ \int_{\Omega} |u(x)|^{q(x)-1} u(x) v(x) dx - \lambda \int_{\Omega} |u(x)|^{r(x)-1} u(x) v(x) dx \\ \forall v &\in E_0 \end{aligned}$$

**Définition 3.3.1** *Soit  $X$  un espace de Banach et  $I : X \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ .*

### 3.3. Application aux problème fractionnaire non local avec exposant variable

---

Si  $c \in \mathbb{R}$  on dit que  $I$  vérifie la condition de Palais-Smale (au niveau  $c$ ) si de toute suite  $u_n$  de  $X$  telle que :

$$I(u_n) \rightarrow c \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } I'(u_n) \rightarrow 0 \text{ dans } X'.$$

Alors, on peut extraire une sous suite convergente.

Ce corollaire suggère immédiatement d'utiliser conjointement la condition de Palais-Smale et du lemme d'Ekeland.

**Théorème 3.3.2** *Soit  $J$  une fonctionnelle de classe  $C^1$  sur un espace de Banach  $V$  minorée et satisfaisant la condition de Palais-Smale. Alors  $J$  atteint son minimum.*

**Preuve.** [du théorème (3.3.1)] On montre d'abord que  $J_\lambda$  satisfait la condition Palais-Smale.

Soit  $(u_n) \in E_0$  une suite (PS) de  $J_\lambda$ . Nous prétendons que  $(u_n)$  est borné dans  $E_0$ .

Arguant par contradiction, nous supposons que  $(u_n)$  est illimité dans  $E_0$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\|u_n\| > 1$  pour tout  $n \geq 1$ .

Il existe un positif constante  $c$  telle que

$$\begin{aligned} c &\geq J_\lambda(u_n) = I_1(u_n) + \int_{\Omega} \frac{|u_n(x)|^{q(x)}}{q(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{|u_n(x)|^{r(x)}}{r(x)} dx \\ &\geq I_1(u_n) - \lambda \int_{\Omega} \frac{|u_n(x)|^{r(x)}}{r(x)} dx \\ &\geq \|u_n\|^{p^-} - \frac{c\lambda}{r^-} \|u_n\|^{r^+}. \end{aligned}$$

Dans la dernière inégalité, on utilise la proposition (2.1.1) et le théorème(3.1.1). Au vu de  $r^+ < p^-$ , on déduit que  $(u_n)$  est borné dans  $E_0$ . Ainsi, il existe une sous-suite  $(u_{n_k})$  de  $(u_n)$  et en utilisant le théorème (3.1.1), on a :

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } E_0, u_n \rightarrow u \text{ dans } L^{r(x)}(\Omega) \text{ et } u_n \rightarrow u \text{ dans } L^{q(x)}(\Omega).$$

On montre dans ce qui suit que

$$u_n \rightarrow u \text{ dans } E_0$$

.Comme  $(u_n)$  est une suite de (PS) et en utilisant les assertions ci-dessus, nous obtenons

$$\left\langle J'_\lambda(u_n) - J'_\lambda(u), u_n - u \right\rangle = \langle L_1(u_n) - L_1(u), u_n - u \rangle = 0$$

### 3.3. Application aux problème fractionnaire non local avec exposant variable

---

Maintenant, puisque  $L_1$  est un opérateur de type (S +), nous concluons que  $u_n \rightarrow u$  dans  $E_0$ , qui montre que la condition Palais-Smale est satisfaite.

Ensuite, nous montrons que  $J_\lambda$  est coercitive. En effet, comme nous l'avons observé, pour tout  $\lambda > 0$  et  $u \in E_0$  avec  $\|u\| > 1$ , nous avons

$$J_\lambda(u) \geq \|u\|^{p^-} - \frac{c\lambda}{r^-} \|u\|^{r^+}.$$

Cela implique la coercivité de  $J_\lambda$ . On en déduit que  $J \in C^1(E_0, \mathbb{R})$  est minorée, coercitive et satisfait à la condition Palais-Smale. Ces faits en combinaison avec le principe variationnel d'Ekeland montrent qu'il existe  $u \in E$  un minimum global de  $J_\lambda$ . Reste à prouver que  $u \neq 0$ . Fix  $\Phi \in E_0$ ;  $\Phi \neq 0$  et  $\Phi \geq 0$  dans  $\Omega$ . Ensuite, pour chaque  $t \in (0, 1)$ , on a

$$\begin{aligned} J_\lambda(t\Phi) &= I_1(t\Phi) + \int_{\Omega} \frac{t^{q(x)} |\Phi(x)|^{q(x)}}{q(x)} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{t^{r(x)} |\Phi(x)|^{r(x)}}{r(x)} dx \\ &\geq t^{p^+} I_1(\Phi) + t^{q^+} \int_{\Omega} \frac{|\Phi(x)|^{q(x)}}{q(x)} dx - \lambda t^{r^-} \int_{\Omega} \frac{|\Phi(x)|^{r(x)}}{r(x)} dx. \end{aligned}$$

En prenant en compte  $r^- < p^+$  et  $r^- < q^+$ , pour  $t$  assez petit, on en déduit que

$$J_\lambda(t\Phi) < 0.$$

■

# Bibliographie

- [1] A. Bahrouni, Trudinger-Moser type inequality and existence of solution for perturbed nonlocal elliptic operators with exponential nonlinearity, *Commun. Pure Appl. Anal.*, 16 (2017), 243–252.
- [2] B, Anouar, on a new fractional Sobolev space and application to nonlocal variational problems with variable exponent, *discrete and continuous dynamical systems series S*, 11, Number 3, June 2018, 379–389.
- [3] B, Karim; Le réarrangement relatif et son application aux injections des espaces de Sobolev à exposant variable; mémoire Pour l'obtention du grade de MAGISTER ; l'E.N.S-Kouba ; 2010.
- [4] C. Bucur and E. Valdinoci, *Nonlocal Diffusion and Applications*, Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, 20. Springer, [Cham]; Unione Matematica Italiana, Bologna, 2016.
- [5] G. Autuori and P. Pucci, Elliptic problems involving the fractional Laplacian in  $\mathbb{R}^N$ , *J. Differential Equations*, 255 (2013), 2340–2362.
- [6] E. Di Nezza, G. Palatucci and E. Valdinoci, Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces, *Bull. Sci. Math.*, 136 (2012), 521–573.
- [7] E. Zeidler, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/B: Nonlinear Monotone Operators*, Springer-Verlag, New York, 1990.

- 
- [8] J. Simon, Régularité de la solution d'une équation non linéaire dans  $\mathbb{R}^N$ , *Journées d'Analyse Non Linéaire (Proc. Conf., Besançon, 1977)*, pp. 205–227, *Lecture Notes in Math.*, 665, Springer, Berlin, 1978.
- [9] .H. Brezis and E. H. Lieb, A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88 (1983), 486–490.
- [10] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext. Springer, New York, 2011.
- [11] G. Molica Bisci and V. Rădulescu, Ground state solutions of scalar field fractional Schrödinger equations, *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 54 (2015), 2985–3008.
- [12] G. Molica Bisci, V. Rădulescu and R. Servadei, *Variational Methods for Nonlocal Fractional Problems*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, 162. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [13] S. Dipierro, M. Medina and E. Valdinoci, *Fractional Elliptic Problems with Critical Growth in the Whole of  $\mathbb{R}^N$* , *Lecture Notes*, Scuola Normale Superiore di Pisa, 15. Edizioni della Normale, Pisa, 2017.
- [14] P. Pucci, X. Mingqi and B. Zhang, Existence and multiplicity of entire solutions for fractional  $p$ -Kirchhoff equations, *Adv. Nonlinear Anal.*, 5 (2016), 27–55.
- [15] R. Servadei and E. Valdinoci, Mountain pass solutions for non-local elliptic operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 389 (2012), 887–898.
- [16] S, Mohammed ;  $P$ -laplacien fractionnaire  $(-\Delta)_p^s$ ; mémoire de mastre ; 22 Juin 2017.
- [17] U. Kaufmann, J. D. Rossi and R. Vidal, Fractional Sobolev spaces with variable exponents and fractional  $p(x)$ -Laplacians, preprint.
- [18] W. Orlicz, Über konjugierte Exponentenfolgen, *Studia Math*, 3 (1931), 200–211.
- [19] X. Fan and D. Zhao, On the spaces  $L^{p(x)}(\Omega)$  and  $W^{m,p(x)}(\Omega)$ , *J. Math. Anal. Appl.*, 263(2001), 424–446.

ملخص:

في هذه الدراسة قمنا بدراسة فضاء جديد  $W^{s,q(x),p(x,y)}$  مستوحى من المقال [18] حيث تتركز فكرة إنشاء هذا الفضاء بمزاوجة فضاءين معروفين هما فضاء صوبولوف الكسري وفضاء صوبولوف بأس متغير، ونجد أن له تطبيق مهم في دراسة أصناف جديدة من مسائل حدية والتي تحتوي على مؤثر تفاضلي مرفق بالفضاء  $W^{s,q(x),p(x,y)}$  حيث نجد أن بدوره يعمم مؤثرين معروفين هما: المؤثر الكسري ومؤثر  $p(x)$ -laplacian .

ننهي هذا العمل بدراسة وجود حلول ضعيفة في إطار هذا الفضاء الجديد مستعملين طريقة التغير وعلى سبيل الخصوص نستعمل مبدأ التصغير الناتج من مبدأ EKland الشهير.

**الكلمات المفتاحية:** فضاء صوبولوف - فضاء لوباغ - فضاء صوبولوف بأس متغير - فضاء صوبولوف الكسري.