

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

DILMI MESSAOUDA

Sujet

**La continuité des opérateurs bilinéaires de Hardy
avec poids sur certain espaces de type Herz**

Devant le jury :

Mr. Tallab Abdelhamid	M.C.A. Univ. de M'sila	Président
Mr. Djeriou Aissa	M.C.A. Univ. de M'sila	Rapporteur
Mr. Seghiri Fakhreddine	M.A.A. Univ. de M'sila	Examineur

Promotion : 2021 / 2022

Table des matières

Remerciements	4
Notation	5
Introduction	6
1 Quelques resultats préliminaires	8
1.1 Définition de certains espaces fonctionels	8
1.1.1 L'espace de suites p sommable	8
1.1.2 L'espace de Lebesgue	9
1.1.3 L'espace de Lebesgue localement intégrable	9
1.1.4 L'espace de Lebesgue avec poids.	9
1.1.5 L'espace de Morrey	10
1.1.6 Inégalités élémentaires	11
1.2 Définition des opérateurs de Hardy et de Cesàro avec poids	11
1.2.1 Définition d'opérateur de Hardy avec poids	12
1.2.2 Définition d'opérateur bilinéaire de Hardy avec poids	13
1.2.3 Définition d'opérateur de Cesàro avec poids	13
1.2.4 Définition d'opérateur bilinéaire de Cesàro avec poids	14
2 La continuité des opérateurs de type Hardy sur le produit des espaces de Herz	15
2.1 Définition et quelque propriétés des espace de Herz	15
2.1.1 Définition des espaces de Herz	15
2.1.2 Quelques propriétés de base	16

2.2	La continuité des opérateurs bilinéaires de Hardy et de Cesàro sur le produit des espaces de Herz	17
3	La continuité des opérateurs de type Hardy sur le produit des espaces de Morrey de type de Herz	23
3.1	Définition et quelque propriétés des espaces de Morrey de type de Herz . . .	23
3.1.1	Définition des espaces de Morrey de type de Herz	23
3.1.2	Quelques propriétés de base	24
3.2	La continuité des opérateurs bilinéaires de Hardy et de Cesàro sur le produit des espaces Morrey de type de Herz	25
	Conclusion	33
	Bibliographie	34

Remerciements

Louange à *ALLAH*, et cela suffit et prière
hamed (salut sur lui).

Dieu, soit loué, qui nous aide à terminer ce mode
à Monsieur *DJERIOU Aissa* que dieu le protège.

Je tiens à témoigner ma gratitude à Mr. *TALLAB Abdelhamid* et Mr.
SEGHIRI Fakhreddine d'avoir acce
mémoire.

À me
tendre

À me
encouragement

À me
ment

À toute la famille "*Dilmi*" dieu vous bénisse, à mon cher profe
que dieu lui fasse miséricorde "*Milli Ahmed*", qui était l'un de
profe

À tous le
matique

À tous *MERCI*

Notation

- \mathbb{N} est la collection de tous les nombres naturels.
- \mathbb{Z} est l'ensemble de tout les nombres entiers.
- \mathbb{R}^n est l'espace Euclidien.
- Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$
- $|B|$ la mesure de Lebesgue de $B \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Soient X_1 et X_2 deux espaces. $X_1 \hookrightarrow X_2$ s'il existe $c > 0$, telle que

$$\|f\|_{X_2} \leq c \|f\|_{X_1}, \quad \forall f \in X_1.$$

- $B(x, r)$; La boule de centre x et de rayon r , definit par

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}.$$

- S_{n-1} est la sphère unité de \mathbb{R}^n , la variable générique de S_{n-1} est notée parfois $x', \xi' \dots$ et la mesure canonique de S_{n-1} est notée $dx', d\xi' \dots$

- On a

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{S_{n-1}} f(rx') dx' \right) r^{n-1} dr,$$

pour toute fonction intégrable f .

- La fonction caractéristique χ_E est definit par

$$\chi_E = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{si } x \notin E \end{cases}$$

- Pour tout nombre complexe z tel que $\operatorname{Re}(z) > 0$. La fonction gamma Γ est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

- $B_k := B(0, 2^k)$, $C_k := B_k \setminus B_{k-1}$ et $\chi_k = \chi_{C_k}$, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\tilde{C}_k = C_k$, $\tilde{C}_k = B_0$, and $\tilde{\chi}_k = \chi_{C_k}$, pour $k \in \mathbb{N}$.

- q est l'exposant conjugué de p où $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Introduction

Depuis les années 1920, plusieurs chercheurs ont étudiés la continuité d'opérateur de Hardy sur des espaces de fonctions, comme les espaces de Lebesgue L^p , BMO , Herz et autres. L'inégalité de Hardy et ses diverses généralisations jouent un rôle important dans diverses branches de l'analyse telles que la théorie de l'approximation, les équations aux dérivées partielles, la théorie des espaces de fonctions, etc. Par conséquent, au cours des vingt dernières années une quantité énorme d'articles a été consacrée aux inégalités de Hardy et de type Hardy dans divers espaces. Les principaux résultats et leurs applications sont donnés dans les livres [4, 6, 13, 16] et leurs références.

Dans ce mémoire, on a basée sur le travail du Fu et Ma [7], qu'ils ont étudié la continuité des opérateurs multilinéaires de Hardy et de Cesàro avec poids sur des espaces de type de Herz, tel que'on a étudié le cas bilinéaires.

Le but de ce mémoire est d'étudier la continuité des opérateurs bilinéaires de Hardy et de Cesàro avec poids sur les espaces de Herz et de Morrey de type de Herz, dans lequel on a prouvé que la condition :

$$A = \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1+n/q_1)} \times t_2^{-(\alpha_2+n/q_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty$$

est nécessaire et suffisante pour la continuité des opérateurs bilinéaires de Hardy avec poids sur les espaces $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n) \times \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n)$ et la condition

$$B = \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1+n/q_1-\lambda_1)} \times t_2^{-(\alpha_2+n/q_2-\lambda_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty$$

est nécessaire et suffisante pour la continuité des opérateurs bilinéaires de Hardy avec poids sur les espaces $M\dot{K}_{p_1, q_1}^{\alpha_1, \lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2, q_2}^{\alpha_2, \lambda_2}$, et que la norme de l'opérateur correspondant est exactement A (le cas Herz) et B (le cas Morrey de type de Herz) si $\alpha_i = (1/2)\alpha$, $\lambda_i = \frac{1}{2}\lambda$, $q_i = 2q$, $p_i = 2p$, $i = 1, 2$. La même étude sera effectuée pour l'opérateur bilinéaire de Cesàro sur ses espaces.

Ce travail de recherche est composé de trois chapitres :

Le premier chapitre est sera constitué des notions fondamentales sur quelques espaces fonctionnels et inégalités qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

Dans le deuxième chapitre on donne les définitions des espaces de Herz homogène $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ et non homogène $K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$, quelques propriétés principales de ces espaces qui vont être utilisé et en termine par étudier la continuité des opérateurs bilinéaires de Hardy et de Cesàro avec poids sur ces espaces.

Dans le troisième chapitre on donne les définitions et les propriétés principales des espaces de Morrey de type de Herz homogène $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ et non homogène $MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, dans lequel on a prouvé que la condition :

$$C = \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{\alpha_1 - \lambda_1 - n \left(1 - \frac{1}{q_1}\right)} \times t_2^{\alpha_2 - \lambda_2 - n \left(1 - \frac{1}{q_2}\right)} \right) w(t_1, t_2) d(t_1, t_2) < \infty.$$

est nécessaire et suffisante pour la continuité de l'opérateur bilinéaire de Cesàro avec poids sur les espaces $M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}$, et que la norme de l'opérateur correspondant est exactement C si $\alpha_i = (1/2)\alpha$, $\lambda_i = \frac{1}{2}\lambda$, $q_i = 2q$, $p_i = 2p$, $i = 1, 2$.

Quelques resultats préliminaires

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notation préliminaires fondamentales, nécessaires dans ce mémoire, concernant les espaces fonctionnels et les opérateurs de type Hardy.

1.1 Définition de certains espaces fonctionnels

Nous sommes maintenant en mesure de définir certains espaces fonctionnels.

1.1.1 L'espace de suites p sommable

Définition 1.1

Soit $0 < p \leq \infty$. On appelle $\ell^p(\mathbb{Z})$ l'espaces de suites $\{f_j\}_{j \geq 0}$ à valeurs réelles ou complexes telles que

$$\|\{f_j\}_{j \geq 0}\|_{\ell^p(\mathbb{Z})} = \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{si } 0 < p < \infty$$

et

$$\|\{f_j\}_{j \geq 0}\|_{\ell^\infty(\mathbb{Z})} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} |f_j| < \infty.$$

Remarque 1.1

1. Ces espaces sont des Banach pour $p \geq 1$.
2. Si $0 \leq p \leq q \leq \infty$, alors on a $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$.

1.1.2 L'espace de Lebesgue

Définition 1.2

Soient $0 < p \leq \infty$ et $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, on pose

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty\}$$

avec

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 0 < p < \infty \\ \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $L^p(\mathbb{R}^n) = L^p$.

Remarque 1.2

Les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

1.1.3 L'espace de Lebesgue localement intégrable

Définition 1.3

Soient $0 < p \leq \infty$. L'espace de Lebesgue localement intégrable est défini par

$$L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) = \{f \text{ mesurable} : f\chi_K \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ pour tous les sous-ensembles compacts } K \subset \mathbb{R}^n\}$$

1.1.4 L'espace de Lebesgue avec poids.

Définition 1.4

On dit que ω est une fonction de poids, si est une fonction localement intégrable non négative sur \mathbb{R}^n .

Définition 1.5

Soient $0 < p \leq \infty$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ et ω une fonction de poids, on pose

$$L^p(\mathbb{R}^n, \omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \text{ telle que } f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p(\Omega, \omega)} < \infty\}$$

avec

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \omega)} = \|f\|_{p, \omega} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \omega(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 0 < p < \infty \\ \sup_{x \in \Omega} \omega(x) |f(x)|, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, on pose $L^p(\mathbb{R}^n, \omega) = L^p(\omega)$.

Remarque 1.3

Les espaces $L^p(\Omega, \omega)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$.

1.1.5 L'espace de Morrey

Les espaces de Morrey sont apparus pour la première fois en 1938 dans les travaux de Morrey [14] à propos de certains problèmes d'équations aux dérivées partielles. Pour plus de détails sur ces espaces voir [15, 17].

Définition 1.6

Soit $0 < q \leq p \leq \infty, n \geq 1$ et $0 < \lambda < n$. L'espace de Morrey $\mathcal{M}_q^\lambda(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des fonction $f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n)$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{M}_q^\lambda(\mathbb{R}^n)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n, r > 0} |B(x, r)|^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int_{B(x, r)} |f(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Remarque 1.4

1. Les espaces $\mathcal{M}_q^\lambda(\mathbb{R}^n)$ sont des quasi-Banach pour $0 < q < 1$ et de Banach pour $q \geq 1$.
2. Si $1 < q < \infty$ et $\lambda > n$, on a $\mathcal{M}_q^\lambda(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.
3. Si $0 < q < \infty$, on a

$$\mathcal{M}_q^0(\mathbb{R}^n) = L^q(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_q^n(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

1.1.6 Inégalités élémentaires

Nous rappelons dans cette subsection quelque inégalités classiques, dans les espaces $L^q(\mathbb{R}^n)$ qui sont nécessaires pour la suite de ce mémoire.

Théorème 1.1 (Inégalité de Hölder)

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, avec $1 \leq p, q \leq \infty$ telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ alors

$$f \cdot g \in L^r(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f \cdot g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Proposition 1.1 (Inégalité de Minkowski)

Soient $f, g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $1 \leq q \leq \infty$, alors $f + g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f + g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$$

Définition 1.7 (Inégalité de Minkowski)

Soient $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ et soit $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Si $0 < p \leq q \leq \infty$, alors on a

$$\left(\int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} (f(x, y))^p dy \right)^{\frac{q}{p}} dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_{\Omega_2} \left(\int_{\Omega_1} (f(x, y))^q dx \right)^{\frac{p}{q}} dy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 1.2 (Inégalité de Minkowski généralisée)

Soient $0 < \gamma \leq \beta \leq \infty$ et $\{f_j\}_{j=0}^\infty \subset L_{loc}^\gamma(\mathbb{R}^n)$, alors on a

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f_j(x)|^\gamma dy \right)^{\beta/\gamma} dx \right)^{1/\beta} \leq c \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^\infty |f_j(x)|^\beta dx \right)^{\gamma/\beta} dy \right)^{1/\gamma}.$$

1.2 Définition des opérateurs de Hardy et de Cesàro avec poids

Avec le développement de la théorie de l'analyse, de nombreux types des inégalités de Hardy ont été discutées. Par exemple, un nombre assez important d'articles ont traité

des diverses généralisations, les nombreuses variantes et les applications des inégalités de Hardy au cours des dernières années. Pour les discussions détaillées des inégalités de Hardy, nous choisissons de nous référer à [8, 10].

1.2.1 Définition d'opérateur de Hardy avec poids

En 1984, Carton-Lebrun et Fosset [3] ont donné la définition suivante de l'opérateur de Hardy avec poids \mathcal{H}_w comme suit :

Définition 1.8

Soit $w : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ une fonction mesurable. L'opérateur de Hardy avec poids \mathcal{H}_w est défini sur toutes les fonctions mesurables à valeurs complexes f sur \mathbb{R}^n comme suit

$$\mathcal{H}_w f(x) = \int_0^1 f(tx)w(t)dt.$$

Remarque 1.5

Lorsque $w = 1$, $n = 1$ et f une fonction mesurables non négative sur \mathbb{R}^+ , l'opérateur \mathcal{H}_w se réduit à

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt, \quad x > 0.$$

Maintenant nous allons donner une théorème sur la continuité d'opérateur de Hardy avec poids \mathcal{H}_w sur l'espase $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.3 (Xiao [18, p. 662])

Soit $1 < p < \infty$ et $w : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ une fonction mesurable. Alors, \mathcal{H}_w est bornée sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} w(t)dt < \infty$$

En outre,

$$\|\mathcal{H}_w\|_{L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)} \approx \int_0^1 t^{-\frac{n}{p}} w(t)dt < \infty.$$

1.2.2 Définition d'opérateur bilinéaire de Hardy avec poids

Définition 1.9

Soit $w : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ une fonction intégrable. L'opérateur bilinéaire de Hardy avec poid \mathcal{H}_w^2 est défini par

$$\mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) = \int_0^1 \int_0^1 f_1(t_1x) f_2(t_2x) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où f_1, f_2 sont des fonctions mesurables à valeurs complexes sur \mathbb{R}^n .

1.2.3 Définition d'opérateur de Cesàro avec poids

Définition 1.10

Soit $w : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ une fonction mesurable. L'opérateur de Cesàro avec poids \mathcal{G}_w est défini sur toutes les fonctions mesurables à valeurs complexes f sur \mathbb{R}^n comme suit

$$\mathcal{G}_w f(x) = \int_0^1 f\left(\frac{x}{t}\right) t^{-n} w(t) dt.$$

Remarque 1.6

Lorsque $w = 1$, $n = 1$ et f une fonction mesurables non négative sur \mathbb{R}_+ , l'opérateur \mathcal{G}_w se réduit à l'opérateur classique de Cesàro \mathcal{G}

$$\mathcal{G}f(x) = \begin{cases} \int_x^\infty \frac{f(z)}{z} dz, & x > 0 \\ -\int_{-\infty}^x \frac{\tilde{f}(z)}{z} dz, & x < 0. \end{cases}$$

Remarque 1.7

Il est facile d'obtenir que \mathcal{H}_w et \mathcal{G}_w satisfont

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_w f)(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\mathcal{G}_w g)(x) dx,$$

lorsque $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Cela signifie que \mathcal{H}_w et \mathcal{G}_w satisfont la règle de commutativité $\mathcal{H}_w \mathcal{G}_w = \mathcal{G}_w \mathcal{H}_w$.

1.2.4 Définition d'opérateur bilinéaire de Cesàro avec poids

Définition 1.11

Soit $w : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction intégrable. L'opérateur de Cesàro \mathcal{G}_w^2 est défini par :

$$\mathcal{G}_w^2(f_1, f_2)(x) = \int_0^1 \int_0^1 \left(f_1\left(\frac{x}{t_1}\right) t_1^{-n} \times f_2\left(\frac{x}{t_2}\right) t_2^{-n} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

où f_1, f_2 sont des fonctions mesurables à valeurs complexes sur \mathbb{R}^n .

Remarque 1.8

Notons que \mathcal{H}_w^2 et \mathcal{G}_w^2 ne satisfont pas la règle commutative suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{H}_w^2 f)(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (\mathcal{G}_w^2 g)(x) dx.$$

La continuité des opérateurs de type Hardy sur le produit des espaces de Herz

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques définitions de l'espace de Herz avec quelques propriétés principales et d'étudier la continuité des opérateurs bilinéaires de Hardy et de Cesàro avec poids sur le produit de ses espaces.

2.1 Définition et quelques propriétés des espaces de Herz

L'histoire des espaces de Herz remonte aux auteurs Beurling et Herz dans les années soixante du siècle dernier. En 1964, Beurling [2] a introduit pour la première fois une forme fondamentale des espaces de Herz pour étudier les algèbres de convolution qui sont maintenant appelées algèbres de Beurling. Plus tard, en 1968, Herz [9] a généralisé ces espaces pour étudier la convergence absolue des transformées de Fourier. Ces espaces généralisés de fonctions ne sont que le prototype des espaces de Herz. Depuis lors, la théorie de ces espaces a connu un développement remarquable, en partie dû à son utilité dans les applications à d'autres domaines des mathématiques appliquées. Un compte rendu intéressant avec de nombreuses applications pour les espaces de Herz généralisés dans certains cas particuliers est donné dans [1]. Pour voir d'autres normes équivalentes voir [5].

2.1.1 Définition des espaces de Herz

Nous commençons par définir l'espace de Herz homogène et non homogène.

Définition 2.1

Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < p, q \leq \infty$.

1. On définit l'espace de Herz homogène par :

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

avec

$$\|f\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} \|f \chi_k\|_q^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

2. On définit l'espace de Herz non homogène par :

$$K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{K_q^{\alpha,p}} < \infty \right\}$$

avec

$$\|f\|_{K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} = \left\{ \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|f \tilde{\chi}_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \right\}^{\frac{1}{p}}$$

avec les modifications habituelles faites lorsque $p = \infty$ et /ou $q = \infty$.

Remarque 2.1 ([11])

La relation entre Herz homogène et non homogène est donnée par :

$$K_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n),$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et $0 < p, q \leq \infty$

2.1.2 Quelques propriétés de base

Dans cette sous-section, on va donner certains propriétés des espaces de Herz.

Proposition 2.1 ([11])

1. Les espaces $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces quasi-Banach et si $\min(p, q) \geq 1$, alors $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de Banach.

2. Si $\alpha = 0$ et $0 < p \leq \infty$, alors

$$\dot{K}_p^{0,p}(\mathbb{R}^n) = K_p^{0,p}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n)$$

3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\dot{K}_p^{\alpha/p,p}(\mathbb{R}^n) = K_q^{\alpha/p,q}(\mathbb{R}^n) = L^p(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha)$$

4. Si $p_1 \leq p_2$, alors on a

$$\dot{K}_q^{\alpha,p_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_q^{\alpha,p_2}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad K_q^{\alpha,p_1}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_q^{\alpha,p_2}(\mathbb{R}^n).$$

5. Si $\alpha_2 \leq \alpha_1$, alors on a

$$K_q^{\alpha_1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_q^{\alpha_2,p}(\mathbb{R}^n).$$

6. Si $q_2 \leq q_1$, alors on a

$$\dot{K}_{q_1}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{K}_{q_2}^{\alpha-n\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right),p}(\mathbb{R}^n), \quad K_{q_1}^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow K_{q_2}^{\alpha-n\left(\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\right),p}(\mathbb{R}^n).$$

7. Si $0 < q_1 \leq q < \infty$, $\frac{-n}{q} < \alpha < n(1 - \frac{1}{q})$ et $0 < p < \infty$, alors on a

$$\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \subset L_{Loc}^{q_1}(\mathbb{R}^n).$$

Proposition 2.2 (L'inégalité de Hölder [11])

Si $0 < p_i, q_i \leq \infty, -\infty < \alpha_i < \infty, i = 1, 2, \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, alors

$$\|f \cdot g\|_{\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p_1}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{\dot{K}_{q_2}^{\alpha_2,p_2}(\mathbb{R}^n)}.$$

Démonstration : En utiliser l'inégalité de Hölder dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ et dans $L^q(\mathbb{R}^n)$. ■

2.2 La continuité des opérateurs bilinéaires de Hardy et de Cesàro sur le produit des espaces de Herz

Théorème 2.1 ([7])

Soient $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, 1 < p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 < \infty$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Alors \mathcal{H}_w^2 est continue de $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p_1}(\mathbb{R}^n) \times \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2,p_2}(\mathbb{R}^n)$ à $\dot{K}_q^{\alpha,p}$ si w vérifiant

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1+n/q_1)} \times t_2^{-(\alpha_2+n/q_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty. \tag{2.1}$$

Inversement, si $\alpha_i = (1/2)\alpha, q_i = 2q, p_i = 2p, i = 1, 2$, et \mathcal{H}_w^2 est borné de $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p_1}(\mathbb{R}^n) \times$

$\dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n)$ à $\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$, alors (2.1) est valable. De plus, dans ce cas, on a

$$\left\| \mathcal{H}_w^2 \right\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n) \times \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)} \simeq \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1+n/q_1)} \times t_2^{-(\alpha_2+n/q_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

De même, nous avons le résultat suivant pour le pérateur \mathcal{G}_w^2 .

Théorème 2.2 ([7])

Soient $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, 1 < p, p_1, p_2, q, q_1, q_2 < \infty$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Alors \mathcal{G}_w^2 est continue de $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n) \times \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n)$ à $\dot{K}_q^{\alpha, p}$ si w vérifiant

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{\alpha_1-n(1-1/q_1)} \times t_2^{\alpha_2-n(1-1/q_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty. \quad (2.2)$$

Inversement, si $\alpha_i = (1/2)\alpha, q_i = 2q, p_i = 2p, i = 1, 2$, et \mathcal{G}_w^2 est borné de $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n) \times \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n)$ à $\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$, alors (2.2) est valable. De plus, dans ce cas, on a

$$\left\| \mathcal{G}_w^2 \right\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n) \times \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)} \simeq \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{\alpha_1-n(1-1/q_1)} \times t_2^{\alpha_2-n(1-1/q_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Remarque 2.2

Puisque les preuves des théorèmes 2.1 et 2.2 sont similaires, nous nous contentons de donner la preuve du théorème 2.1.

Démonstration : Puisque $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, par l'inégalité de Hölder et Minkowski, on a

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)_{\chi_k} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &= \left(\int_{c_k} \left| \int_0^1 \int_0^1 f_1(t_1x) f_2(t_2x) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{c_k} |f_1(t_1x) f_2(t_2x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{c_k} |f_1(t_1x)|^{q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \\ &\quad \times \left(\int_{c_k} |f_2(t_2x)|^{q_2} dx \right)^{\frac{1}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

Pour les $t_1, t_2 \in (0, 1)$ arbitraires, on peut trouver $m, l \in \mathbb{Z}$, tel que $2^{m-1} < t_1 \leq 2^m$ et

$2^{l-1} < t_1 \leq 2^l$. Par l'inégalité de Minkowski, on a

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{c_k} |f_1(t_1x)|^{q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \times \left(\int_{c_k} |f_2(t_2x)|^{q_2} dx \right)^{\frac{1}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 & \leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{t_1 c_k} |f_1(x)|^{q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \times \left(\int_{t_2 c_k} |f_2(x)|^{q_2} dx \right)^{\frac{1}{q_2}} t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 & \leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_{2^{k+m-2} < |x| \leq 2^{k+m}} |f_1(x)|^{q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
 & \quad \times \left(\int_{2^{k+l-2} < |x| \leq 2^{k+l}} |f_2(x)|^{q_2} dx \right)^{\frac{1}{q_2}} t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 & \leq \int_0^1 \int_0^1 (\|f_1 \chi_{k+m-1}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} + \|f_1 \chi_{k+m}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}) \\
 & \quad \times (\|f_2 \chi_{k+l-1}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} + \|f_2 \chi_{k+l}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}) t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

Pour $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, l'inégalité de Hölder et Minokowski généralisée donnent :

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) | \dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n) \right\| \\
 & = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) \chi_k | L^q(\mathbb{R}^n) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 & \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} \left(\int_0^1 \int_0^1 (\|f_1 \chi_{k+m-1}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} + \|f_1 \chi_{k+m}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}) \right. \right. \\
 & \quad \times (\|f_2 \chi_{k+l-1}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} + \|f_2 \chi_{k+l}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}) t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \left. \right)^p \left. \right)^{\frac{1}{p}} \\
 & \leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha p} (\|f_1 \chi_{k+m-1}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} + \|f_1 \chi_{k+m}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)})^p \right. \\
 & \quad \times (\|f_2 \chi_{k+l-1}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} + \|f_2 \chi_{k+l}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)})^p \left. \right)^{\frac{1}{p}} t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha_1 p_1} (\|f_1 \chi_{k+m-1}|L^{q_1}\| + \|f_1 \chi_{k+m}|L^{q_1}\|)^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
 &\quad \times \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha_2 p_2} \|f_2 \chi_{k+l-1}|L^{q_2}(\mathbb{R}^n)\| + \|f_2 \chi_{k+l}|L^{q_2}(\mathbb{R}^n)\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} t_1^{\frac{-n}{q_1}} t_2^{\frac{-n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 &\leq \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha_1 p_1} \|f_1 \chi_{k+m-1}|L^{q_1}(\mathbb{R}^n)\|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha_1 p_1} \|f_1 \chi_{k+m}|L^{q_1}(\mathbb{R}^n)\|^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \right\} \\
 &\quad \times \left\{ \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha_2 p_2} \|f_2 \chi_{k+l-1}|L^{q_2}(\mathbb{R}^n)\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k\alpha_2 p_2} \|f_2 \chi_{k+l}|L^{q_2}(\mathbb{R}^n)\|^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \right\} \times t_1^{\frac{-n}{q_1}} t_2^{\frac{-n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 &\leq \|f_1| \dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n)\| \|f_2| \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n)\| \times \int_0^1 \int_0^1 \left(2^{-(m-1)\alpha_1} + 2^{-m\alpha_1} \right) \left(2^{-(l-1)\alpha_2} + 2^{-l\alpha_2} \right) \\
 &\quad \times t_1^{\frac{-n}{q_1}} t_2^{\frac{-n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 &\leq \|f_1| \dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n)\| \|f_2| \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n)\| \times \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\left(\alpha_1 + \frac{n}{q_1}\right)} t_2^{-\left(\alpha_2 + \frac{n}{q_2}\right)} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

D'après l'inégalité ci-dessus, nous avons que la première conclusion du théorème 2.1 est valable.

D'autre part, nous supposons que \mathcal{H}_w^2 est borné de $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n) \times \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n)$ à $\dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)$ et que \mathcal{H}_w^2 a la norme de l'opérateur $\|\mathcal{H}_w^2\|_{\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n) \times \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n)}$. Pour tout $0 < \varepsilon < 1$, soit

$$f_i(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ |x|^{-\alpha_i - \frac{n}{q_i} - \varepsilon}, & |x| > 1 \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, 2 \quad (2.3)$$

Évidemment, $\|f_1 \chi_k|L^{q_1}(\mathbb{R}^n)\| = \|f_2 \chi_k|L^{q_2}(\mathbb{R}^n)\| = 0$, lorsque $k \leq 0$. Alors, pour $\forall k > 0$, on a

$$\begin{aligned}
 \|f_1 \chi_k|L^{q_1}(\mathbb{R}^n)\| &= \left(\int_{2^{k-1} \leq |x| < 2^k} |x|^{(\alpha_1 - \frac{n}{q_1} - \varepsilon)q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
 &= 2^{-(\alpha_1 + \varepsilon)k} \left| \frac{S_n(2^{(\alpha_1 + \varepsilon)q_1} - 1)}{(\alpha_1 + \varepsilon)q_1} \right|^{\frac{1}{q_1}},
 \end{aligned}$$

où $S_n = n\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma(1 + \frac{n}{2})$. Un simple calcul donne

$$\|f_1|\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1,p_1}(\mathbb{R}^n)\| = 2^{-\varepsilon} \left(\frac{1}{1-2^{-\varepsilon p_1}} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left| \frac{S_n(2^{(\alpha_1+\varepsilon)q_1} - 1)}{(\alpha_1+\varepsilon)q_1} \right|^{\frac{1}{q_1}}.$$

De même, nous obtenons

$$\|f_2|\dot{K}_{q_2}^{\alpha_2,p_2}(\mathbb{R}^n)\| = 2^{-\varepsilon} \left(\frac{1}{1-2^{-\varepsilon p_2}} \right)^{\frac{1}{p_2}} \left| \frac{S_n(2^{(\alpha_2+\varepsilon)q_2} - 1)}{(\alpha_2+\varepsilon)q_2} \right|^{\frac{1}{q_2}}$$

Lorsque $|x| \leq 1$ et $t \in [0, 1]$, nous avons $|tx| \leq 1$. Donc, $\mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) = 0$ dans ce cas d'après (2.3). Lorsque $|x| > 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) &= \int \int_{1/|x|}^1 f_1(t_1x) f_2(t_2x) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= |x|^{-(\alpha+(\frac{n}{q})+2\varepsilon)} \int \int_{1/|x|}^1 t_1^{-\alpha_1-\frac{n}{q_1}-\varepsilon} t_2^{-\alpha_2-\frac{n}{q_2}-\varepsilon} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Soit $\delta = \varepsilon^{-1} > 1$. Il est facile de trouver un entier positif l tel que $2^{l-1} \leq \delta < 2^l$. Donc, on a

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)|\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n) \right\|^p \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\alpha p} \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)\chi_k(x)|L^q(\mathbb{R}^n) \right\|^p \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\alpha p} \left\{ \int_{|x|>1} \left(|x|^{-(\alpha+(\frac{n}{q})+2\varepsilon)} \chi_k(x) \times \int \int_{1/|x|}^1 t_1^{-\alpha_1-\frac{n}{q_1}-\varepsilon} t_2^{-\alpha_2-\frac{n}{q_2}-\varepsilon} \times w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^q dx \right\}^{\frac{p}{q}} \\ &\geq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\alpha p} \left(\int_{|x|>\delta} |x|^{-(\alpha+(\frac{n}{q})+2\varepsilon)q} \chi_k(x) dx \right)^{\frac{p}{q}} \\ &\quad \times \left(\int \int_{1/\delta}^1 t_1^{-\alpha_1-\frac{n}{q_1}-\varepsilon} t_2^{-\alpha_2-\frac{n}{q_2}-\varepsilon} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p \\ &\geq S_n^{\frac{p}{q}} \sum_{k=l+1}^{\infty} 2^{k\alpha p} \left(\int_{2^{k-1}}^{2^k} r^{-(\alpha+2\varepsilon)q-1} dr \right)^{\frac{p}{q}} \\ &\quad \times \left(\int \int_{1/\delta}^1 t_1^{-\alpha_1-\frac{n}{q_1}-\varepsilon} t_2^{-\alpha_2-\frac{n}{q_2}-\varepsilon} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p \\ &= S_n^{\frac{p}{q}} \sum_{k=l+1}^{\infty} 2^{-2\varepsilon p k} \left| \frac{2^{(\alpha+2\varepsilon)q} - 1}{(\alpha+2\varepsilon)q} \right|^{\frac{p}{q}} \times \left(\int \int_{1/\delta}^1 t_1^{-\alpha_1-\frac{n}{q_1}-\varepsilon} t_2^{-\alpha_2-\frac{n}{q_2}-\varepsilon} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p \\ &= S_n^{\frac{p}{q}} \frac{2^{-2\varepsilon(l+1)}}{1-2^{-2\varepsilon p}} \left| \frac{2^{(\alpha+2\varepsilon)q} - 1}{(\alpha+2\varepsilon)q} \right|^{\frac{p}{q}} \times \left(\int \int_{1/\delta}^1 t_1^{-\alpha_1-\frac{n}{q_1}-\varepsilon} t_2^{-\alpha_2-\frac{n}{q_2}-\varepsilon} \times w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p \end{aligned}$$

Puisque $q_1 = q_2 = 2q$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ et $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $p_1 = p_2 = 2p$, nous avons.

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) | \dot{K}_q^{\alpha, p}(\mathbb{R}^n) \right\| \\ & \geq S_n^{1/q} 2^{-2\epsilon(l+1)} \left(\frac{1}{1 - 2^{-2\epsilon p}} \right)^{\frac{1}{p}} \left| \frac{2^{(\alpha+2\epsilon)q} - 1}{(\alpha+2\epsilon)q} \right|^{\frac{1}{q}} \times \int \int_{1/\delta}^1 t_1^{-\alpha_1 - \frac{n}{q_1} - \epsilon} t_2^{-\alpha_2 - \frac{n}{q_2} - \epsilon} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ & \geq \epsilon^{2\epsilon} \left\| f_1 | \dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n) \right\| \left\| f_2 | \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n) \right\| \times \int \int_{\epsilon}^1 t_1^{-\alpha_1 - \frac{n}{q_1} - \epsilon} t_2^{-\alpha_2 - \frac{n}{q_2} - \epsilon} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Cela donne

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) | \dot{K}_q^{\alpha, p} \right\| \\ & \geq \epsilon^{2\epsilon} \left\| f_1 | \dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1} \right\| \left\| f_2 | \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2} \right\| \times \int \int_{\epsilon}^1 t_1^{-\alpha_1 - \frac{n}{q_1} - \epsilon} t_2^{-\alpha_2 - \frac{n}{q_2} - \epsilon} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \end{aligned}$$

En utilisant la continuité de \mathcal{H}_w^2 et sa norme d'opérateur, on obtient

$$\epsilon^{2\epsilon} \int \int_{\epsilon}^1 t_1^{-\alpha_1 - \frac{n}{q_1} - \epsilon} t_2^{-\alpha_2 - \frac{n}{q_2} - \epsilon} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \leq \left\| \mathcal{H}_w^2 | \dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1} \times \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2} \rightarrow \dot{K}_q^{\alpha, p} \right\| \quad (2.4)$$

En mettant $\epsilon \rightarrow 0^+$ dans (2.4) on obtient

$$\begin{aligned} & \int \int_0^1 t_1^{-\alpha_1 - \frac{n}{q_1} - \epsilon} t_2^{-\alpha_2 - \frac{n}{q_2} - \epsilon} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ & \leq \left\| \mathcal{H}_w^2 | \dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1} \times \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2} \rightarrow \dot{K}_q^{\alpha, p} \right\|. \end{aligned}$$

Ainsi, (2.1) est valable. ■

La continuité des opérateurs de type Hardy sur le produit des espaces de Morrey de type de Herz

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques définitions de l'espace de Morrey de type de Herz avec quelques propriétés principales et de étudier la continuité des opérateurs bilinéaires de Hardy et de Cesàro avec poids sur le produit de ses espaces.

3.1 Définition et quelques propriétés des espaces de Morrey de type de Herz

La classe des espaces de Morrey de type de Herz $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ est initialement définie par Lu et Xu [12]. Nous notons également que les espaces de Morrey de type de Herz sont des généralisations des espaces de Herz $\dot{K}_q^{\alpha,p}(\mathbb{R}^n)$.

3.1.1 Définition des espaces de Morrey de type de Herz

Nous commençons par définir de l'espace de Morrey de type de Herz homogène et non homogène.

Définition 3.1

Soient $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < p \leq \infty, 0 < q < \infty$ et $\lambda \geq 0$.

i) *On définit l'espace de Morrey de type de Herz homogène par :*

$$M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) : \|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\}$$

avec

$$\|f\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0\lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|f\chi_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

ii) On définit l'espace de Morrey de type de Herz non homogène par :

$$MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} < \infty \right\},$$

avec

$$\|f\|_{MK_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} := \sup_{k_0 \in \mathbb{N}} 2^{-k_0\lambda} \left\{ \sum_{k=0}^{k_0} 2^{k\alpha p} \|f\tilde{\chi}_k\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

3.1.2 Quelques propriétés de base

Proposition 3.1 ([12])

1. Les espaces $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces quasi-Banach et si $\min(p, q) \geq 1$, alors $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ sont des espaces de Banach.
2. Si $\alpha = \lambda = 0$ et $0 < q \leq \infty$, alors

$$M\dot{K}_{q,q}^{0,0}(\mathbb{R}^n) = MK_{q,q}^{0,0}(\mathbb{R}^n) = L^q(\mathbb{R}^n).$$

3. Si $\lambda = 0$, alors on a

$$M\dot{K}_{q,q}^{\alpha,0}(\mathbb{R}^n) = \dot{K}_q^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad MK_{q,q}^{\alpha,0}(\mathbb{R}^n) = K_q^{\alpha,q}(\mathbb{R}^n).$$

4. Si $\lambda = 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$M\dot{K}_{q,q}^{\alpha/q,0}(\mathbb{R}^n) = MK_{q,q}^{\alpha/q,0}(\mathbb{R}^n) = L^q(\mathbb{R}^n, |x|^\alpha).$$

5. Si $\alpha = 0$, alors on a

$$\mathcal{M}_q^\lambda(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow M\dot{K}_{q,q}^{0,\lambda}(\mathbb{R}^n)$$

6. Si $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$, alors on a

$$M\dot{K}_{p_2,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n) \subseteq M\dot{K}_{p_1,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n).$$

Ensuite, nous donnons le théorème suivant, qui est une généralisation de l'inégalité de Hölder dans $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 3.1

Si $1 < p_i, q_i \leq \infty$, $-\infty < \alpha_i < \infty$, et $0 \leq \lambda_i < \infty$ $i = 1, 2$, avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \text{et} \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2,$$

alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ et toute $g \in M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)$, on a $f \cdot g \in M\dot{K}_{q,p}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f \cdot g\|_{M\dot{K}_{q,p}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)}.$$

Démonstration : Par l'inégalité de Hölder dans $\ell^p(\mathbb{Z})$ et dans $L^q(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\begin{aligned} \|f \cdot g\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}(\mathbb{R}^n)} &= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_0} \|2^{k\alpha} f \cdot g \chi_k\|_q^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \sup_{L \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda_1} 2^{-k_0 \lambda_2} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_0} \|2^{k\alpha_1} f \chi_k\|_{q_1}^p \|2^{k\alpha_2} g \chi_k\|_{q_2}^p \right\}^{1/p} \\ &\leq \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda_1} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_0} \|2^{k\alpha_1(\cdot)} f \chi_k\|_{q_1}^{p_1} \right\}^{1/p_1} \\ &\quad \times \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda_2} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k_0} \|2^{k\alpha_2(\cdot)} g \chi_k\|_{q_2}^{p_2} \right\}^{1/p_2} \\ &= \|f\|_{M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

Par conséquent nous obtenons le résultat. ■

3.2 La continuité des opérateurs bilinéaires de Hardy et de Cesàro sur le produit des espaces Morrey de type de Herz

Théorème 3.2 ([7])

Soient $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \lambda, \lambda_i > 0, 1 < p, p_i, q, q_i < \infty, i = 1, 2$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \lambda =$

$\lambda_1 + \lambda_2, \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{q}, \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$. Alors \mathcal{H}_w^2 est continue de $M\dot{K}_{p_1, q_1}^{\alpha_1, \lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2, q_2}^{\alpha_2, \lambda_2}$ à $M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda}$ si w vérifiant

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1 + \frac{n}{q_1} - \lambda_1)} \times t_2^{-(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty. \quad (3.1)$$

Inversement, si $\alpha_i = (1/2)\alpha, \lambda_i = \frac{1}{2}\lambda, q_i = 2q, p_i = 2p, i = 1, 2$, et \mathcal{H}_w^2 est continue de $M\dot{K}_{p_1, q_1}^{\alpha_1, \lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2, q_2}^{\alpha_2, \lambda_2}$ à $M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda}$, alors (3.1) est valable. De plus, dans ce cas, on a

$$\|\mathcal{H}_w^2 | M\dot{K}_{p_1, q_1}^{\alpha_1, \lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2, q_2}^{\alpha_2, \lambda_2} \hookrightarrow M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda} \| \simeq \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1 + \frac{n}{q_1} - \lambda_1)} \times t_2^{-(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Pour l'opérateur \mathcal{G}_w^2 , on a un résultat correspondant.

Théorème 3.3 ([7])

Soient $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \lambda, \lambda_i > 0, 1 < p, p_i, q, q_i < \infty, i = 1, 2$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$. Alors \mathcal{G}_w^2 est continue de $M\dot{K}_{p_1, q_1}^{\alpha_1, \lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2, q_2}^{\alpha_2, \lambda_2}$ à $M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda}$ si w vérifiant

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{\alpha_1 - \lambda_1 - n \left(1 - \frac{1}{q_1}\right)} \times t_2^{\alpha_2 - \lambda_2 - n \left(1 - \frac{1}{q_2}\right)} \right) w(t_1, t_2) d(t_1, t_2) < \infty. \quad (3.2)$$

Inversement, lorsque $\alpha_i = \frac{1}{2}\alpha, \lambda_i = \frac{1}{2}\lambda, q_i = 2q, p_i = 2p, i = 1, 2$, et \mathcal{G}_w^2 est continue de $M\dot{K}_{p_1, q_1}^{\alpha_1, \lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2, q_2}^{\alpha_2, \lambda_2}$ à $M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda}$, alors (3.2) est valable. De plus, dans ce cas, on a

$$\|H_w^2 | M\dot{K}_{p_1, q_2}^{\alpha_1, \lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2, q_2}^{\alpha_2, \lambda_2} \rightarrow M\dot{K}_{p, q}^{\alpha, \lambda} \| \simeq \int_0^1 \int_0^1 t_1^{\alpha_1 - \lambda_1 - n \left(1 - \frac{1}{q_1}\right)} \times t_2^{\alpha_2 - \lambda_2 - n \left(1 - \frac{1}{q_2}\right)} w(t_1, t_2) d(t_1, t_2).$$

Démonstration : D'après la preuve du théorème 2.1, nous savons

$$\begin{aligned} \|\mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)\chi_k | L^q(\mathbb{R}^n)\| &\leq \int_0^1 \int_0^1 (\|f_1\chi_{k+m-1} | L^{q_1}\| + \|f_1\chi_{k+m} | L^{q_1}\|) \\ &\quad \times (\|f_2\chi_{k+l-1} | L^{q_2}\| + \|f_2\chi_{k+l} | L^{q_2}\|) t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

alors par l'inégalité de Minkowski on a

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) |M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}| \right\| \\
 &= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) \chi_k \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left(\int_0^1 \int_0^1 (\|f_1 \chi_{k+m-1}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} + \|f_1 \chi_{k+m}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}) \right. \right. \\
 &\quad \times (\|f_2 \chi_{k+l-1}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} + \|f_2 \chi_{k+l}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}) t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \Big)^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} (\|f_1 \chi_{k+m-1}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} + \|f_1 \chi_{k+m}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)})^p \right. \\
 &\quad \times (\|f_2 \chi_{k+l-1}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} + \|f_2 \chi_{k+l}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)})^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
 &\quad \times t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2
 \end{aligned}$$

Pour $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ et $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, l'inégalité de Hölder donne

$$\begin{aligned}
 &\leq \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \int_0^1 \int_0^1 \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p_1} (\|f_1 \chi_{k+m-1}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} + \|f_1 \chi_{k+m}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)})^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \\
 &\quad \times \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p_2} (\|f_2 \chi_{k+l-1}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)} + \|f_2 \chi_{k+l}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)})^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \\
 &\quad \times t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 &\leq \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda_1} \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p_1} \|f_1 \chi_{k+m-1}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_1 p_1} \|f_1 \chi_{k+m}\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}^{p_1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \right\} \\
 &\quad \times \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda_2} \left\{ \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p_2} \|f_2 \chi_{k+l-1}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} + \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha_2 p_2} \|f_2 \chi_{k+l}\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}^{p_2} \right)^{\frac{1}{p_2}} \right\} \\
 &\quad \times t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} \times w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.
 \end{aligned}$$

Finalement on trouve

$$\begin{aligned}
 \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) \right\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} &\leq \left\| f_1 \right\|_{M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)} \left\| f_2 \right\|_{M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\quad \times \int_0^1 \int_0^1 \left(2^{-(m-1)\alpha_1} + 2^{-m\alpha_1} \right) \left(2^{-(l-1)\alpha_2} + 2^{-l\alpha_2} \right) \\
 &\quad \times t_1^{-\left(\frac{n}{q_1}-\lambda_1\right)} t_2^{-\left(\frac{n}{q_2}-\lambda_2\right)} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 &\leq \left\| f_1 \right\|_{M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}(\mathbb{R}^n)} \left\| f_2 \right\|_{M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)} \\
 &\quad \times \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\left(\alpha_1+\frac{n}{q_1}-\lambda_1\right)} t_2^{-\left(\alpha_2+\frac{n}{q_2}-\lambda_2\right)} \times w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.
 \end{aligned}$$

Cela signifie que \mathcal{H}_w^2 est continue de $M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}$ à $M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$. D'autre part, nous définissons

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= |x|^{-\left(\alpha_1+\frac{n}{q_1}-\lambda_1\right)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\
 f_2(x) &= |x|^{-\left(\alpha_2+\frac{n}{q_2}-\lambda_2\right)}, \quad x \in \mathbb{R}^n.
 \end{aligned}$$

Lorsque $\alpha_1 \neq \lambda_1$ et $\alpha_2 \neq \lambda_2$, on obtient

$$\begin{aligned}
 \|f_1 \chi_k\|_{L^{q_1}} &= \left(\int_{2^{k-1} \leq |x| \leq 2^k} |x|^{-\left(\alpha_1+\frac{n}{q_1}-\lambda_1\right)q_1} dx \right)^{\frac{1}{q_1}} \\
 &= 2^{-(\alpha_1-\lambda_1)k} \left| \frac{S_n \left(2^{(\alpha_1-\lambda_1)q_1} - 1 \right)}{(\alpha_1 - \lambda_1)q_1} \right|^{\frac{1}{q_1}}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\left\| f_1 \right\|_{M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1}} = 2^{\lambda_1} \left(\frac{1}{2^{\lambda_1 p_1} - 1} \right)^{\frac{1}{p_1}} \left| \frac{S_n \left(2^{(\alpha_1-\lambda_1)q_1} - 1 \right)}{(\alpha_1 - \lambda_1)q_1} \right|^{\frac{1}{q_1}}.$$

et

$$\left\| f_2 \right\|_{M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}} = 2^{\lambda_2} \left(\frac{1}{2^{\lambda_2 p_2} - 1} \right)^{\frac{1}{p_2}} \left| \frac{S_n \left(2^{(\alpha_2-\lambda_2)q_2} - 1 \right)}{(\alpha_2 - \lambda_2)q_2} \right|^{\frac{1}{q_2}}.$$

Pour $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$, et $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}$, on a

$$\mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) = |x|^{-\left(\alpha+\frac{n}{q}-\lambda\right)} \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\left(\alpha_1+\frac{n}{q_1}-\lambda_1\right)} t_2^{-\left(\alpha_2+\frac{n}{q_2}-\lambda_2\right)} \times w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Par simple calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) \chi_k \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) \right|^q \chi_k(x) dx \right)^{\frac{p}{q}} \\
 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-(\alpha + \frac{n}{q} - \lambda)q} \chi_k(x) \times \left(\int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\left(\alpha_1 + \frac{n}{q_1} - \lambda_1\right)} t_2^{-\left(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2\right)} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^q dx \right)^{\frac{p}{q}} \\
 &= \left(\int_{2^{k-1} \leq |x| < 2^k} |x|^{-(\alpha + \frac{n}{q} - \lambda)q} dx \right)^{\frac{p}{q}} \times \left(\int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\left(\alpha_1 + \frac{n}{q_1} - \lambda_1\right)} t_2^{-\left(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2\right)} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p \\
 &= 2^{-(\alpha - \lambda)kp} \left| \frac{S_n \left(2^{(\alpha - \lambda)q} - 1 \right)}{(\alpha - \lambda)q} \right|^{\frac{p}{q}} \times \left(\int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\left(\alpha_1 + \frac{n}{q_1} - \lambda_1\right)} t_2^{-\left(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2\right)} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p.
 \end{aligned}$$

Puisque $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, $p_1 = p_2 = 2p$, $q_1 = q_2 = 2q$, et $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda}{2}$ on a

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) \right\|_{M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}} \\
 &= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) \chi_k \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} 2^{-(\alpha - \lambda)kp} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left| \frac{S_n \left(2^{(\alpha - \lambda)q} - 1 \right)}{(\alpha - \lambda)q} \right|^{\frac{1}{q}} \\
 & \quad \times \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\left(\alpha_1 + \frac{n}{q_1} - \lambda_1\right)} t_2^{-\left(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2\right)} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 &= 2^\lambda \left(\frac{1}{2^{2\lambda p} - 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left| \frac{S_n \left(2^{(\alpha - \lambda)q} - 1 \right)}{(\alpha - \lambda)q} \right|^{\frac{1}{q}} \\
 & \quad \times \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\left(\alpha_1 + \frac{n}{q_1} - \lambda_1\right)} t_2^{-\left(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2\right)} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 &= \left\| f_1 \right\|_{M\dot{K}_{p_1, q_1}^{\alpha_1, \lambda_1}} \left\| f_2 \right\|_{M\dot{K}_{p_2, q_2}^{\alpha_2, \lambda_2}} \times \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\left(\alpha_1 + \frac{n}{q_1} - \lambda_1\right)} t_2^{-\left(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2\right)} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.
 \end{aligned}$$

Cela nous indique que (3.1) est également valable dans ce cas.

Lorsque $\alpha_1 = \lambda_1$ et $\alpha_2 = \lambda_2$, il est facile d'obtenir

$$\left\| f_1 \chi_k \right\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)}^{q_1} = \left\| f_2 \chi_k \right\|_{L^{q_2}(\mathbb{R}^n)}^{q_2} = \int_{2^{k-1} \leq |x| < 2^k} |x|^{-n} dx = S_n \ln 2.$$

Nous avons donc

$$\left\| f_1 \right\|_{M\dot{K}_{p_1, q_1}^{\alpha_1, \lambda_1}(\mathbb{R}^n)} = 2^{\lambda_1} \left(\frac{1}{2^{2\lambda_1 p_1} - 1} \right)^{\frac{1}{p_1}} (S_n \ln 2)^{\frac{1}{q_1}},$$

$$\begin{aligned} \|f_2|MK_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2}(\mathbb{R}^n)\| &= 2^{\lambda_2} \left(\frac{1}{2^{\lambda_2 p_2} - 1} \right)^{\frac{1}{p_2}} (S_n \ln 2)^{\frac{1}{q_2}}. \\ \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) &= |x|^{-\frac{n}{q}} \int \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Alors, nous obtenons

$$\left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) \chi_k |L^q(\mathbb{R}^n) \right\| = (S_n \ln 2)^{\frac{1}{q}} \int \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) |MK_{p,q}^{\alpha,\lambda} \right\| \\ &= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k \alpha p} \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) \chi_k |L^q(\mathbb{R}^n) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k \alpha p} (S_n \ln 2)^{\frac{p}{q}} \times \left(\int \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} \times w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k \alpha p} \right)^{\frac{1}{p}} (S_n \ln 2)^{\frac{1}{q}} \times \int \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} \times w(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Puisque $\alpha_1 = \lambda_1$ et $\alpha_2 = \lambda_2$, on obtient $\alpha = \lambda$. Donc

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) |MK_{p,q}^{\alpha,\lambda} \right\| \\ &= 2^\lambda \left(\frac{1}{2^{\lambda p} - 1} \right)^{\frac{1}{p}} (S_n \ln 2)^{\frac{1}{q}} \times \int \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\ &= \left\| f_1 |MK_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1} \right\| \left\| f_2 |MK_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2} \right\| \times \int \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-\frac{n}{q_2}} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Cela nous indique que (3.1) est également valable dans ce cas. De plus, lorsque l'un des $\alpha_1 = \lambda_1$, $\alpha_2 = \lambda_1$ est valable, nous supposons que $\alpha_1 = \lambda_1$ mais que $\alpha_2 \neq \lambda_2$ ici.

D'après le calcul cidessus, nous avons

$$\begin{aligned} \left\| f_1 |MK_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1} \right\| &= 2^{\lambda_1} \left(\frac{1}{2^{\lambda_1 p_1} - 1} \right)^{\frac{1}{p_1}} (S_n \ln 2)^{\frac{1}{q_1}}, \\ \left\| f_2 |MK_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2} \right\| &= 2^{\lambda_2} \left(\frac{1}{2^{\lambda_2 p_2} - 1} \right)^{\frac{1}{p_2}} \left| \frac{S_n \left(2^{(\alpha_2 - \lambda_2) q_2} - 1 \right)}{(\alpha_2 - \lambda_2) q_2} \right|^{\frac{1}{q_2}}. \end{aligned}$$

Il donne

$$\mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) = |x|^{-(\alpha_2 + (\frac{n}{q}) - \lambda_2)} \int \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2)} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}
 & \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) |M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda} \right\| \\
 &= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2) \chi_k |L^q(\mathbb{R}^n) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &= \sup_{k_0 \in \mathbb{Z}} 2^{-k_0 \lambda} \left(\sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^{k\alpha p} 2^{-(\alpha_2 - \lambda_2)kp} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left| \frac{S_n \left(2^{(\alpha_2 - \lambda_2)q} - 1 \right)}{(\alpha_2 - \lambda_2)q} \right|^{\frac{1}{q}} \\
 & \quad \times \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2)} \times w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \\
 &= 2^\lambda \left(\frac{1}{2^{\lambda p} - 1} \right)^{\frac{1}{p}} \left| \frac{S_n \left(2^{(\alpha_2 - \lambda_2)q} - 1 \right)}{(\alpha_2 - \lambda_2)q} \right|^{\frac{1}{q}} \\
 & \quad \times \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2)} w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.
 \end{aligned}$$

Puisque $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, $p_1 = p_2 = 2p$, $q_1 = q_2 = 2q$, et $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{\lambda}{2}$, en utilisant l'expansion de Taylor, on obtient

$$\left| \frac{S_n \left(2^{(\alpha_2 - \lambda_2)q} - 1 \right)}{(\alpha_2 - \lambda_2)q} \right|^{\frac{1}{q}} \geq (S_n \ln 2)^{\frac{1}{q_1}} \left| \frac{S_n \left(2^{(\alpha_2 - \lambda_2)q_2} - 1 \right)}{(\alpha_2 - \lambda_2)q_2} \right|^{\frac{1}{q_2}}.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned}
 \left\| \mathcal{H}_w^2(f_1, f_2)(x) |M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda} \right\| &\geq \left\| f_1 |M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1} \right\| \left\| f_2 |M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2} \right\| \\
 &\quad \times \int_0^1 \int_0^1 t_1^{-\frac{n}{q_1}} t_2^{-(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2)} \times w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.
 \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus donne

$$\left\| H_w^2 |M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2} \hookrightarrow M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda} \right\| \geq \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1 + \frac{n}{q_1} - \lambda_1)} \times t_2^{-(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Puisque H_w^2 est borne de $M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2} \times \rightarrow M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda}$, nous savons que (3.1) tient et

$$\left\| H_w^2 |M\dot{K}_{p_1,q_1}^{\alpha_1,\lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2,q_2}^{\alpha_2,\lambda_2} \hookrightarrow M\dot{K}_{p,q}^{\alpha,\lambda} \right\| \approx \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1 + \frac{n}{q_1} - \lambda_1)} \times t_2^{-(\alpha_2 + \frac{n}{q_2} - \lambda_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

La preuve du théorème est complète. ■

Corollaire 3.1 ([7])

Soit $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $1 < p, p_1, p_2 < \infty$ et $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}$. Alors \mathcal{H}_w^2 est

continue de $L^{p_1}(|x|^{\alpha_1}) \times L^{p_2}(|x|^{\alpha_2})$ à $L^p(|x|^\alpha)$ si w vérifiant

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1+n)/p_1} \times t_2^{-(\alpha_2+n)/p_2} \right) w(t_1, t_2) d(t_1, t_2) < \infty. \quad (3.3)$$

Inversement, si $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$, $p_i = 2p$, $i = 1, 2$, et \mathcal{H}_w^2 est continue de $L^{p_1}(|x|^{\alpha_1}) \times L^{p_2}(|x|^{\alpha_2})$ à $L^p(|x|^\alpha)$, alors (3.3) est valable. De plus, dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{H}_w^2 |L^{p_1}(|x|^{\alpha_1}) \times L^{p_2}(|x|^{\alpha_2}) \rightarrow L^p(|x|^\alpha) \right\| \\ & \approx \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1+n)/p_1} \times t_2^{-(\alpha_2+n)/p_2} \right) w(t_1, t_2) d(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Corollaire 3.2 ([7])

Soit $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $1 < p, p_i < \infty$ et $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$, $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{p}$, $i = 1, 2$. Si w vérifiant

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{(\alpha_1+n)/p_1-n} \times t_2^{(\alpha_2+n)/p_2-n} \right) w(t_1, t_2) d(t_1, t_2) < \infty, \quad (3.4)$$

alors \mathcal{G}_w^2 est continue de $L^{p_1}(|x|^{\alpha_1}) \times L^{p_2}(|x|^{\alpha_2})$ à $L^p(|x|^\alpha)$.

Inversement, si $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}\alpha$, $p_i = 2p$, $i = 1, 2$ et \mathcal{G}_w^2 est borné de $L^{p_1}(|x|^{\alpha_1}) \times L^{p_2}(|x|^{\alpha_2})$ à $L^p(|x|^\alpha)$, alors (3.4) est valable. De plus, dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} & \left\| \mathcal{G}_w^2 |L^{p_1}(|x|^{\alpha_1}) \times L^{p_2}(|x|^{\alpha_2}) \rightarrow L^p(|x|^\alpha) \right\| \\ & \simeq \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{(\alpha_1+n)/p_1-n} \times t_2^{(\alpha_2+n)/p_2-n} \right) w(t_1, t_2) d(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Nous terminons ce mémoire par une conclusion et une liste d'ouvrages qui nous ont servis de bibliographie.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié la continuité de l'opérateur de Hardy avec poids sur le produit des espaces de Herz et le produit des espaces de Morrey de type de Herz , où on a prouvé que la condition

$$A = \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1+n/q_1)} \times t_2^{-(\alpha_2+n/q_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty$$

est nécessaire et suffisante pour la continuité sur les espaces $\dot{K}_{q_1}^{\alpha_1, p_1}(\mathbb{R}^n) \times \dot{K}_{q_2}^{\alpha_2, p_2}(\mathbb{R}^n)$ et la condition

$$B = \int_0^1 \int_0^1 \left(t_1^{-(\alpha_1+n/q_1-\lambda_1)} \times t_2^{-(\alpha_2+n/q_2-\lambda_2)} \right) w(t_1, t_2) dt_1 dt_2 < \infty$$

est nécessaire et suffisante pour la continuité sur les espaces $M\dot{K}_{p_1, q_1}^{\alpha_1, \lambda_1} \times M\dot{K}_{p_2, q_2}^{\alpha_2, \lambda_2}$, et que la norme de l'opérateur correspondant est exactement A (le cas Herz) et B (le cas Morrey de type de Herz) pour $\alpha_i = \frac{\alpha}{2}, \lambda_i = \frac{\lambda}{2}, q_i = 2q, p_i = 2p, i = 1, 2$. Le même étude pour l'opérateur bilinéaires de Cesàro sur ses espaces.

Bibliographie

- [1] A. Baernstein II and E. T. Sawyer, Embedding and multiplier theorems for $H^p(\mathbb{R}^n)$, Mem. Amer. Math. Soc. 1985, **53**(318).
- [2] A. Beurling. Construction and analysis of some convolution algebras. In : Annales de l'institut Fourier. 1964, **14**(2) : 1-32.
- [3] C. Carton-Lebrun and M. Fosset, Moyennes et quotients de Taylor dans BMO (in French). Bull. Soc. Roy. Sci. Liège, 1984, **2** : 85 – 87.
- [4] N. M. Chuong, P. G. Ciarlet, P. Lax, D. Mumford and D. H. Phong, D. H. (eds.), Advances in Deterministic and Stochastic Analysis. World Scientific 2007.
- [5] A. Djeriou, R. Heraiz, Some results concerning localization property of generalized Herz, Herz-type Besov spaces and Herz-type Triebel-Lizorkin spaces. Carpathian Mathematical Publications, 2021, **13**(1) :217-228.
- [6] D. E. Edmunds and W. D. Evans, Hardy Operators, Function Spaces and Embeddings. Springer Monogr. Math. Berlin : Springer 2004.
- [7] S. Gong, Z. Fu and B. Ma, Weighted multilinear Hardy operators on Herz type spaces. The Scientific World Journal, 2014, **2014**.
- [8] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, Inequalities, Cambridge University Press, London, UK, 1934.
- [9] C. Herz, Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms, J. Math. Mech. 1968, **18**(4) : 283–324.
- [10] A. Kufner and L. E. Persson, Weighted Inequalities of Hardy Type, World Scientific, Singapore, 2003.
- [11] S. LU, D. YANG, G. HU. Herz type spaces and their applications. Beijing : Science Press, 2008.

-
- [12] S. Lu and L. Xu, Boundedness of rough singular integral operators on the homogeneous Morrey-Herz spaces,” Hokkaido Mathematical Journal, 2005, **34**(2) :299-314.
- [13] V. G. Maz’ya, Sobolev Spaces. Berlin : Springer 1985.
- [14] C. B. Morrey, On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. Transactions of the American Mathematical Society, 1938, **43**(1) : 126-166.
- [15] J. Peetre, On the theory of $L^{p,\lambda}$ spaces. J. Funct. Anal., (1969), **4**(1) : 71–87.
- [16] L. E. Persson, A. Kufner and N. Samko, Weighted inequalities of Hardy type. World Scientific Publishing Company 2017.
- [17] Y. Sawano, G. Di Fazio and D. F. Hakim, Morrey Spaces : Introduction and Applications to Integral Operators and PDE’s, Volumes I & II, CRC Press 2020.
- [18] J. Xiao, L^p and BMO bounds of weighted Hardy-Littlewood averages. J. Math. Anal. Appl., 2001, **262** (2) : 660-666.

ملخص

في هذه المذكرة، درسنا بعض الشروط اللازمة والكافية لاستمرارية مؤثرات هاردي ثنائية الخطية ذات دالة الثقل ومؤثرات كزاروا ثنائية الخطية ذات دالة الثقل على جداء فضاءات هارز و جداء فضاءات موراي من نمط هارز. تحصلنا على نظائم المكافئة لهذه المؤثرات.

كلمات مفتاحية

مؤثرات هاردي، مؤثرات كزاروا، هارز، فضاءات موراي ذات النمط بيزوف.

Abstract

In this memory, we studied some necessary and sufficient conditions for the continuity of the bilinear weighted Hardy operator and the bilinear weighted Cesàro operator on products of Herz spaces and products of Herz type Morrey. The standards of the corresponding operators are obtained.

Key words :

Hardy operator, Cesàro operator, Herz spaces, Morrey-Herz spaces.

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié certaines conditions nécessaires et suffisantes pour la continuité des opérateurs bilinéaire de Hardy avec poids et de Cesàro avec poids sur les produits des espaces de Herz et de produits des espaces de Morrey de type de Herz. Les normes des opérateurs correspondant sont obtenues.

Mot-clés :

Opéreaeur de Hardy, Opéreaeur de Cesàro, Espaces de Herz, Espaces de Morrey de type de Herz.