UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

MEMOIRE

Présenté à la Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

Pour l'obtention du diplôme de master

Spécialité: Mathématiques

Option: **Mathématiques Fondamentales et Appliquées**

Par:

FERAHTIA fayza

Intitulée:

Propriétés des opérateurs non bornés

Soutenue publiquement le : 09/06/2015, devant le jury :

Rahmoune Azdine	**MCA**	**Université de BBA**	**Président**
Mostefa NADIR	**Prof.**	**Université de M'sila**	**Rapporteur**
MEROINI AbdelbaKi	**MCA**	**Université de BBA**	**Examinateur**
Gagui Bachir	**MCB**	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Promotion 2014/2015

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude à Mr, ***Mostefa NADIR*** *professeur à l'université Mohamed Boudiaf de M'sila qui m'a constamment guidé et m'a encouragé tout au long de ce projet.*

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur ***GAGUI Bachir****, Professeur à université de M'sila. pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury.*

Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les Personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Un merci spécial à tous ceux qui me aidé et mon mari en particulier

LASBET meftah

Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mon frère pour leur soutien tout au long de mes études.

Notations générales

$<,>$ produit scalaire dans la dualité $E^{'}$, E

$\mathcal{L}(E,F)$:espace des opérateurs linéaire de E dans F

$C([a,b])$ Espace des fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$.

$M^{\perp}$: orthogonal de M

$G(A)$: graphe de l'opérateur A

$N(A)$: noyau de l'opérateur A

$R(A)$: image de l'opérateur A

J : injection canonique de E dans $E^{"}$

$D(A)$: domaine de l'opérateur A

$\rho(A)$:ensemble résolvant de l'opérateur A

$\sigma(A)$: spectre de l'opérateur A

$(I-\lambda A)^{-1}$: resolvant de l'opérateur A

A^{*} : l'adjoint d'un opérateur A

A^{-1} Inverse del'opérateur A

I Opérateur d'identité

$\sigma_p(A)$ spectre ponctuel de A.

$\sigma_c(A)$ spectre continu de A.

$\sigma_r(A)$ spectre résiduel de A

Table des matières

Introduction

Parmi tous les opérateurs linéaires dans un espace de normé, on peut distinguer une classe importante d'opérateur, C'est la classe des opérateurs non bornés, les définitionsn et les propriétés et la théorie specrale des opérateurs non borné trés nécéssaire dans analyse fonctionnelle

Les opérateurs non borné dans un espace normés est un application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A)$ [appelé le domaine] de E

La notion d'opérateurs fermé est un borné généralisation de la notion d'opérateur continu à des opérateurs qui ne sont pas partout définis

Le travail de ce mémoire étudie les propriétés et la notion fondamentale des opérateurs borné et des opérateurs non bornés et les théories spectrales de cet opérateur

Notre mémoire est composée de trois chapitres qui sont les suivants :

Dans le chapitre1, on donne aperçu générale sur la continuité des opérateurs linéaires bornés et l'adjoint, et propriété de l'opérateur auto-adjoint

Le deuxième chapitre concerne les opérateurs non borné et tout ce qui s'en suit : comme définition et propriétés des opérateurs non bornés, et théorème l'adjoint et des opérateur auto-adjoint, définition des opérateurs fermé et l'opérateurs fermable

Dans le dernier chapitre j'ai étudié la théorie spectrale des opérateurs bornés et théorie spectrale des opérateurs non bornés, spectre l'adjoint d'un opérateur, théorème spectral des opérateurs bornés et normaux , et théorème spectrale des opérateurs non bornés et normaux, et spectre des opérateurs fermé

Chapitre 1

Rappels sur les opérateurs bornés

1.1 Continuité des opérateurs

Définition 1.1.1

Soit E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la proppriété suivante:
Pour tout suit x_n de G converge vers x_0, la suit $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est-à dire

$$lim_{n\to\infty} A(x_n) = A(\lim_{n\to\infty} x_n) = A(x_0)$$

Remarque 1.1.1

L'opérateur linéaire A est dit cntinu sur G, s'il est continu en chaque piont de l'ensemble G

1.2 Les opérateurs bornés

Dénition 1.2.1

Un opérateur linéaire A défini sur E dnas F est dit borné s'il exist une constante positive $C > 0$, telle que :

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E \quad .... (1)$$

Proposition 1.2.1

La plus petite des constante C verifiant la relation (1) est appellée norme de A notée $\|A\|$ et donne par:

$$\|A\| = \sup \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\|_F$$

1.3 Les opérateurs adjoints

Définition 1.3.1

Soit E et F deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E, F)$, l'unique application linéaire $A^* \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout $x \in E$, $y \in F$
on ait : $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ est appellé adjoint de A

Exemple 1.3.1

Soit un intérvalle fermé borné $[a, b]$, un fonction k continu sur $[a, b] \times [a, b]$ à valeur complexe et A l'opérateur intégral de Fredhom de noyau k défini, par $f \in L^2([a, b])$, par :

$$Af(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)dy$$

C'est un opérateur linéaire borné sur E, pour tout f et g dans E, on a

$$\begin{aligned}
\langle Af, g\rangle &= \int_a^b \left(\int_a^b k(x, y)f(y)dy\right) \overline{g(x)}dx \\
&= \int_a^b f(y) \left(\int_a^b k(x, y)\overline{g(x)}dx\right) dy \\
&= \int_a^b f(y)(\overline{\int_a^b \overline{k(x, y)}g(x)dx})dy \\
&= \langle f, k^*g\rangle
\end{aligned}$$

on en deduit que A^* est l'opérateur intégral de Fredholm denoyau k^* avec

$$k^*(x,y) = \overline{k(y,x)},$$

autrement dit

$$A^* f(x) = \int_a^b \overline{k(x,y)} f(y) dy$$

Proposition 1.3.1

Soit E et F deux espaces de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(E,F)$. alors il existe un unique $A^* \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$, on ait :

$$< A(x), y >=< x, A^*(y) >$$

On a de plus $\|A\| = \|A^*\|$.

Théorème 1.3.1

Soit H un Hilber complexe et soit $A \in \mathcal{L}(H)$ inversible, alors A^* est inversible et on a :

$$\left(A^{-1}\right)^* = \left(A^*\right)^{-1}$$

1.4 Les opérateurs Auto-adjoint

Définition 1.4.1

Un opérateur $A \in \mathcal{L}(E)$ est dit Auto-adjoint (ou parfois hermitien) si, quels que soit x et y dans E, on a :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

Proposition 1.4.1

Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$, un élément A de $\mathcal{L}(E)$ auto-adjoint si et seulement si, pour tout x dans E, $\langle Ax, x \rangle$ est une nombre réel.

Proposition 1.4.2

Soit E un espace de Hilbert sur $\mathbb{C}$ et A dans $\mathcal{L}(E)$,si $\langle Ax, x\rangle = 0$ pour tout $x \in E$, alors : $A = 0$

Théorème 1.4.1

Si A est un opérateur auto-adjoint, alors

$$\|A\| = sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$$

Chapitre 2

Opérateur non borné

2.1 Les opérateur non borné

Définition 2.1.1

Soit E et F deux espaces normés .

Nous disons un opérateur non borné A de E à F une application linéaire définie sur un sous espace vectoriel $D(A)$ de E appelé le domaine de A à F

- $A : D(A) \to F$
- $\varphi \to A(\varphi)$, pour tout $\varphi \in D(A) \subset E$

Exemple 2.1.1

Soit $E = F = C([0,1])$, opérateur A défini par

$$\{A : D(A) \subset E \to F\} \quad \text{tel que} \quad Ax = \frac{dx}{dt}$$
$$D(A) = C^1([0,1])$$

A est linéair mais pas continue .

on considérons : $x_n(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad \|x_n\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} \|x_n(t)\| = \max_{t\in[0,1]} \|t^n\| = 1$

$$\|Ax_n(t)\| = \max_{t\in[0,1]} \|nt^{n-1}\| = n_{n\to\infty} \to \infty$$

donc:$\|Ax_n\|_\infty \nleq c\|x_n\|$ alors l'opérateur A n'est pas borné

Définition 2.1.2 de graphe

Soit A opérateur non borné sur un espace de Hilbert E,

le graphe de A est le sous espace vectoriel noté : $G(A)$ de $E \times F$ définit par:

$$G(A) = \{(x, y) : x \in D(A), y = Ax\}$$

Remarque 2.1.1

Les sous espaces de $E \times F$ n'est pas toujour des graphes des opérateurs

Proposition 2.1.1

Un sous espace $G \subset E \times F$ est un graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0$$

Corrolaire 2.1.1

Soit E et F deux espaces de Banach. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on suppose en autre u bijective de E sur F, alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(E, F)$

Remarque 2.1.2

Soit E un espace de Banach muni de deux normes $\|.\|_1, \|.\|_2$

on suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$\|x\|_2 \leq c\,\|x\|_1 ; \forall x \in E$$

Alors les deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont équivalentes (i.e il existe $c^{'} > 0$ avec $\|x\|_1 \leq c^{'}\,\|x\|_2 , \forall x \in E$)

En effet cela résulte immédiatement :$E = (E, \|.\|_1)$, $F = (E, \|.\|_2)$ et pour u l'identité

Théorème 2.1.1 du graphe fermé

Soit E et F deux espaces de Banach. soit u une application linéaire de E dans F

Alors $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si et seulement si, son graphe

$$G = \{(x, y) \in E \times F;\; y = u(x)\}$$

est fermé dans l'espace produit $E \times F$

Preuve

1. Si u est continue, il est évident que G est fermé

2. Montrons que G fermé entraine $u \in \mathcal{L}(E, F)$

Considérons sur E les deux normes:

$$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|u(x)\|_F$$

$\|x\|_2 = \|x\|_E$

Comme G est fermé, E muni de la norme $\|.\|_1$ est un espace de Banach. par ailleur

$\|x\|_2 \leq \|x\|_1$donc ces deux normes sont équivalentes :il existe une constante $c > 0$ telle que$\|x\|_1 \leq c\,\|x\|_2$ .Donc

$\|u(x)\|_F \leq c^{'}\,\|x\|_E$

Le théorème est valable pour les espaces vectoriels topologique plus généraux que les espaces de Banach

Théorème 2.1.2

Soient G et L deux sous-espaces fermés de X.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $G + L$ n'est pas toujour fermé dans X

(b) $G^{\perp} + L^{\perp}$ est fermé dans $X\prime$

(c) $G + L = (G^{\perp} \cap L^{\perp})^{\perp}$

(d) $G^{\perp} + L^{\perp} = (G \cap L)^{\perp}$

2.2 Opérateur extension

Définition 2.2.1

On dit que $(S, D(S))$ est un extension de $(A, D(A))$ si $D(A) \subset D(S)$

et $Ax = Sx$ pour tout $x \in D(A)$ [Auterment dit $G(A) \subset G(S)$]

2.3 Opérateur fermé

Définition 2.3.1

Soit E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A de E dans F, de domaine $D(A)$ est dit fermé si pour toute suite $(\varphi_n) \subset D(A)$ vérifiant:

$\varphi_n \to \varphi$ dans $A\varphi_n \to \psi$ dans F lorsque $n \to \infty$

alors $\varphi \in D(A)$ et $\psi = A\varphi$

Remarque 2.3.1

•Soit $(A, D(A))$ un opérateur fermé. Alors A est borné si et seulement si $D(A) = E$

•On dit que $(A, D(A))$ est fermé si son graphe $G(A)$ est un fermé de $H \oplus H$

Exemple 2.3.1

Soit A un opérateur non borné défini sur $H^1(]0,1[)$ avec $A = -i\frac{dx}{dt}$

où $H^1(]0,1[)$ est l'espace de sobolev d'indice 1

$$H^1(]0,1[) : \left\{ f \in L^2(]0,1[),\ f' \in L^2(]0,1[) \right\}$$

Alors : A est un opérateur fermé

Théorème 2.3.1

Soit A et B deux opérateurs non borné tel que $AB = BA$ .Si A est inversible

B est fermé et $D(BA^{-1}) \subset D(A)$. donc $A + B$ est fermé sur $D(B)$

Preuve

Notons $D(A + B) = D(A) \cap D(B)$. par:$AB = BA \Rightarrow A^{-1}B \subset BA^{-1} \Rightarrow D(B) = D(A^{-1}B) \subset D(BA^{-1}) \subset D(A)$

car:

$$\left\{ \begin{array}{c} A \text{ inversible} \Rightarrow A^{-1}A \subset AA^{-1} = I \\ A^{-1}AB \subset B \\ A^{-1}BA \subset B(\text{car } AB = BA) \\ \text{donc:} A^{-1}B \subset BA^{-1} \\ D(A^{-1}B) = \{x \in D(B) : Bx \in D(A^{-1})\} \\ = \{x \in D(B) : Bx \in H\} = D(B) \end{array} \right\}$$

donc $D(A + B) = D(B)$

donc A automatiquement fermé. puis on obtient :

$$\begin{aligned} A + B &= A + BAA^{-1} \\ &= A + ABA^{-1} \\ &= A(I + BA^{-1})(\text{car } D(BA^{-1}) \subset D(A)) \end{aligned}$$

puisque A^{-1} est borné (et B est fermé),BA^{-1} est fermé, donc théorème $I + BA^{-1}$ est fermé, donc $A(I + BA^{-1})$ est fermé.

donc $A + B$ est fermé sur $D(B)$

2.4 L'opérateur fermable

Définition 2.4.1

Un opérateur A est dit fermable si A admet une extension fermée

Proposition 2.4.1

La plus petite extension fermée d'un opérateur fermable est appelée la fermeture de A et notée $\overline{A}$

Preuve

$\overline{A}$ est une extension fermée de A. soit B extension fermée de A

$A \subset B, G(A) \subset G(B) \Rightarrow \overline{G(A)} \subset \overline{G(B)} = G(B)$

d'ou $\overline{A} \subset B$

Remarque 2.4.1

Si A est fermable alors :

$$G(\overline{A}) = \overline{G(A)}$$

Exemple 2.4.1

$A = \frac{dx}{dt} : L^2 [-1, 1] \to L^2 [-1, 1]$

$D(A) = C^1([-1, 1])$ n'est pas fermé mais fermable

2.5 L'adjoint d'un opérateur non borné

Définition 2.5.1

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné à domaine dense. on va définir un opérateur non borné

$A^* : D(A^*) \subset F' \to E'$ comme suit. on pose

$D(A^*) = \left\{ v \in F', \exists c \geq 0 \text{ tel que } |\langle v, Au \rangle| \leq c \|u\| \ \forall u \in D(A) \right\}$

il est claire que est un sous-espace vectoriel de F'et vérifiant:

$$\langle v, Au \rangle = \langle A^* v, u \rangle \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*)$$

Proposition 2.5.1

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné à domaine dense.

Alors A^* est fermé, i.e. $G(A^*)$ est fermé dans $F' \times E'$.

Preuve

Soit $v_n \subset D(A^*)$tel que $v_n \to v$ dans $F^{'}$et $A^*v_n \to f$ dans $E^{'}$. il s'agit de prouver que $(a) : v \in D(A^*)$ et $(b) : A^*v = f$. or on a

$< v_n, Au >=< A^*v_n, u > \quad \forall u \in D(A)$.

D'où, à la limite il vient

$< v, Au >=< f, u > \quad \forall u \in D(A)$

Par conséquent $v \in D(A^*)$ (d'après la définition de $D(A^*)$) et $A^*v = f$

Les graphes de A et A^* sont liés par une relation d'orthogonalité très simple. En effet, considérons l'application $J : F^{'} \times E^{'} \to E^{'} \times F^{'}$ déftnie par

$$J([v, f]) = [-f, v].$$

Théorème 2.5.1

Soit A un opérateur non borné, $A : D(A) \subset E \to F$ avec $\overline{D(A)} = E$. Alors on a

$$\boxed{J[G(A^*)] = G(A)^{\perp}}$$

Preuve

En effet, soit $[v, f] \in F^{'} \times E^{'}$, alors

$$[v, f] \in G(A^*) \Leftrightarrow \langle f, u\rangle = \langle v, Au \rangle \quad \forall u \in D(A)$$
$$\Leftrightarrow -\langle f, u\rangle + \langle v, Au\rangle = 0 \quad \forall u \in D(A)$$
$$\Leftrightarrow [-f, v] \in G(A)^{\perp} .$$

il est commode d'introduire l'espace $X = E \times F$ de sorte que $X^{'} = E^{'} \times F^{'}$ et de considérer les sous-espaces $G = G(A)$ et $L = E \times \{0\}$ dans X. on peut décrire $N(A)$, $N(A^*)$, $R(A)$ et $R(A^*)$ en termes de G et L.

On vérifle très facilement que

1. $N(A) \times \{0\} = G \cap L$
2. $E \times R(A) = G + L$
3. $\{0\} \times N(A^*) = G^{\perp} \cap L^{\perp}$
4. $R(A^*) \times F^{'} = G^{\perp} + L^{\perp}$

Corrolaire 2.5.1

Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur non borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$. alors on a

(i) $N(A) = R(A^*)^\perp$

(ii) $N(A^*) = R(A)^\perp$

(iii) $N(A)^\perp \supset \overline{R(A^*)}$

(iv) $N(A^*)^\perp = \overline{R(A).}$

Preuve

(i) D'aprés (4) on a

$R(A^*)^\perp \times \{0\} = (G^\perp + L^\perp)^\perp = G \cap L$ (grace à proposition)

$= N(A) \times \{0\}$ (grace à 1)

(ii) D'aprés (2) on a

$\{0\} \times R(A)^\perp = (G + L)^\perp = G^\perp \cap L^\perp$ (grace à corollaire)

$= \{0\} \times N(A^*)$ (grace à 3)

de (iii) et (iv) utiliser (i) (resp (ii), passer à l'orthogonal et appliquer la proposition $(M^\perp)^\perp = \overline{M}$

Théorème 2.5.2

Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur non borné, fermé, avec $\overline{D(A)} = E$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $D(A) = E$

(ii) A est borné

(iii) $D(A^*) = F\prime$

(iv) A^*est borné.

Dans ces conditions on a:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(E',F')}$$

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Appliquer le théorème du graphe fermé

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Appliquer la défInition de$D(A^*)$.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Appliquer la proposition (2.5.1) et le théorème du graphe fermé.

(iv) $\Longrightarrow$(i) est plus délicat. Notons d'abord que $D(A^*)$ est fermé. En effet soit $V_n \in D(A^*)$, avec $Vn \longrightarrow V$ dans $F\prime$. On a

$$\|A^*(v_n - v_m)\| < c \|v_n - v_m\|$$

par conséquent (A^*v_n) converge vers une limite f Comme A^* est fermé, $v \in D(A^*)$ et $A^*v = f$, Dans l'espace $X = E \times F$, on considère les sous-espaces $G = G(A)$ et $L = \{0\} \times F$ de sorte que

$$G + L = D(A) \times F \text{ et } G^\perp + L^\perp = E' \times D(A*)$$

Par conséquent $G^\perp + L^\perp$ est fermé dans X'. le théorème 2.1.1 permet de conclure que $G + L$ est fermé, donc $D(A)$ est fermé. Comme $D(A) = E$ on en déduit que $D(A) = E$. Prouvons maintenant que $\|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \|A^*\|_{\mathcal{L}(F\prime,E\prime)}$. on a:

$$< v, Au >=< A^*v, u > ,\forall u \in E,\ \forall v \in F\prime.$$

Donc

$$<v, Au> \leqslant \|A^*\| \, \|v\| \, \|u\|$$

et

$$\|Au\| = \underset{\|v\|\leq 1}{Sup} |< v, Au >| \leqslant \|A^*\| \ \|u\|$$

. Par suite $\|A\| \leq \|A^*\|$. Inversement on a:

$\|A^*v\| \overset{def}{=} \underset{\|u\|\leq 1}{Sup} < |A * v, u >| = \underset{\|u\|\leq 1}{Sup} |< v, Au >| \leq \|A\| \, \|v\|$

Par conséquent $\|A^*\| \leq \|A\|$.

Proposition 2.5.2

Soit $(A, D(A))$ un opérateur a domaine dense. alors

$(i) G(A^*) = [JG(A)]^\perp$.

$(ii)\ \overline{G(A)} = [JG(A^*)]^\perp$.

Preuve

(i) On a $(v, u) \in G(A) \Leftrightarrow (v, Az) = (u, z)$, $\forall z \in D(A)$

$$\Leftrightarrow \langle (v, u); (-Az; z) \rangle = 0, \quad \forall z \in D(A)$$
$$\Leftrightarrow (v, u) \in JG(A)^\perp$$

(ii) On a $\overline{G(A)} = (G(A)^\perp)^\perp = (J^2 G(A)^\perp)^\perp = (J \, |JG(A)|^\perp)^\perp = JG(A^*)^\perp$

Théorème 2.5.3

Soit $(A, D(A))$ un opérateur a domaine dense. Alors

- A^* est fermé

- A est fermable si et seulement si $D(A^*)$ est dense.
- Si A est fermable alors $\overline{A} = A^{**}$ et $(\overline{A})^* = A^*$.

Preuve

L'opérateur A^* est fermé puisque son graphe est l'orthogonal d'un sous-espace de $H \oplus H$ d'aprés la Proposition précident (i)

Si A^* est a domaine dense alors par la Proposition on a

$G(T^{**}) = [JG(A^*)]^{\perp} = \overline{G(T)}$

Il en resulte que $\overline{G(A)}$ est le graphe d'un opérateur et donc A est fermable. d'autre part, si $D(A^*)$ n'est pas dense alors il existe $y \neq 0$ appartenant a $D(A^*)^{\perp}$. ainsi, on vériant que $(y, 0) \in G(A^*)^{\perp}$

et que $(0, y) \in \overline{G(A)} = JG(A^*)^{\perp}$. Par conséquence, A n'est pas fermable puisque $\overline{G(T)}$ n'est pas le graphe d'un opérateur vu qu'il contient $(0, y)$ avec $y \neq 0$.

Il en résulte de (2) que $A^{**} = \overline{A}$. En utilisant ceci avec le point (a), on voit que

$$A^* = \overline{A^*} = (A^*)^{**} = (A^{**})^* = (\overline{A})^*$$

Proposition 2.5.3

Soit A un fermable à domaine dense $D(A)$ sur E, alors

$$N(\overline{A})^{\perp} = \overline{R(A^*)} \text{ et } N(A^*) = R(A)^{\perp}$$

$$N(\overline{A}) = R(A^*)^{\perp} \text{ et } N(A^*)^{\perp} = \overline{R(A)}$$

Preuve

$$y \in R(A)^{\perp} \Leftrightarrow (\langle y, Ax\rangle = 0, \forall x \in D(A^*)) \Leftrightarrow (y \in D(\overline{A})) \text{ et } \langle Ay, x\rangle = 0, \forall x \in D(A^*)$$
$$\Leftrightarrow y \in N(\overline{A})$$

$$y \in R(A)^{\perp} \Longleftrightarrow (\langle y, Ax\rangle = 0, \forall x \in D(A)) \Leftrightarrow ((y \in D(A^*)) \text{ et } \langle A^*y, x\rangle = 0, \forall x \in D(A))$$
$$\Leftrightarrow y \in N(A^*)$$

Les deux autres relations s'obtiennent en prenant l'ortogonale et en remarquant que $N(\overline{A})$ est fermé

Théorème 2.5.4

Si A est un opérateur densément définit d'un espace de Hilbert H alors A^* est un opérateur fermé

Preuve

Si $y_n \in D(A^*), y_n \to y$ et $A^* y_n \to z$ puis pour chaque $x \in D(A)$ on obtient

$$\langle Ax, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Ax, y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x, A^* y_n\rangle = \langle x, z\rangle$$

Donc $y \in D(A^*)$ et $A^* y = z$

Théorème 2.5.5

Soit A et B deux opérateurs non borné inversible tel que $AB = BA$.

Si $D(A^*(B^*)^{-1}) \subset D(B^*)$, puis $(A+B)^* = A^* + B^*$

Preuve

Premiérement toujour on obtient $\boxed{A^* + B^* \subset (A+B)^*}$......(1)

deuxièment, on a A et B les deux inversible, par théorème 2.3.1 on obtient:

$AB = BA \to A^*B^* = B^*A^*$

on écrit: $B^{-1}BA + B \subset A + B$ $(AB = BA)$

$(I + B^{-1}A)B \subset A + B$

et donc: $(A+B)^* \subset [(I + B^{-1}A)B]^* = B^*(I + B^{-1}A)^*$

$= B^*\left[I + (B^{-1}A)^*\right]$ (par théoréme 2.5.3)

$= B^*\left[I + A^*(B^{-1})^*\right]$ (tel que B^{-1} est borné)

$= B^* + B^*A^*(B^*)^{-1}(D(A^*(B^*)^{-1}) \subset D(B^*))(\text{de } A^*B^* = B^*A^*)$

$= B^* + A^*B^*(B^*)^{-1}$

$= A^* + B^*$

donc $(A+B)^* \subset A^* + B^*$

alors $(A+B)^* = A^* + B^*$

Théorème 2.5.6

Soit A et B deux opérateur densément définit de l'espace Hilbert H

1. Si $A \subset B$, donc $B^* \subset A^*$

2. Si $D(B^*)$ est dense dans H, donc $B \subset B^{**}$

Preuve

1. notons que $A \subset B$ impliques

   $\langle Ax, y\rangle = \langle x, B^* y\rangle$ pour tout $x \in D(A)$ et tout $y \in D(B^*)$....(a)

d'autre terme ,on obtient

$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ pour tout $x \in D(A)$ et tout $y \in D(A^*)$.....(b)

comparant (a) et (b) on conclusion que $D(B^*) \subset D(A^*)$ et

$A^*(y) = B^*(y)$ pour tout $y \in D(B^*)$

2. observe la condition

$\langle Bx, y\rangle = \langle x, B^*y\rangle$ pour tout $x \in D(B)$ et tout $y \in D(B^*)$,

on peut écrire

$$\langle B^*y, x\rangle = \langle y, Bx\rangle \text{ pour tout } y \in D(B^*) \text{ et tout } x \in D(B).....(c)$$

on a $D(B^*)$ est dense dans H, B^{**} existe et on obtient

$\langle B^*y, x\rangle = \langle y, B^{**}x\rangle$ pour tout $y \in D(B^*)$ et tout $x \in D(B^{**})$.....(d)

de (c) et (d) ensuit'il $D(B) \subset D(B^{**})$ et $B(x) = B^{**}(x)$, pour tout $x \in D(B)$

Proposition 2.5.4

$(A^*, D(A^*))$ définit un opérateur, adjoint maximal de $(A, D(A))$. cet opérateur est appelé simplement adjoint de $(A, D(A))$ et noté A^* si $A \subset S$. alors $S^* \subset A^*$

Preuve

On remarque que dans la formule de la définition précédent, à un vecteur $\varphi \in D(A^*)$ est associé un unique vecteur η car $D(A)$ est dense .

La proposition est alors évidente

2.6 Opérateur auto adjoint

- Dans le cas des opérateur linéaires bornés l'opérateur auto-adjoint et symétrique sont équivalent

- Dans le cas des opérateur non borné tout opérateur auto-adjoint est symétrique par contre un symétrique n'est pas forcément auto-adjoint

2.6.1 L'opérateur symétrique

Définition 2.6.1

Un opérateur A à domaine dense est dit symétrique si $A \subset A^*$ i.e

$$D(A) \subset D(A^*) \ \text{ et } \ Ax = A^*x, \forall x \in D(A)$$

Autrement dit,

$$\forall x \in D(A), \forall y \in D(A) \qquad \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

Proposition 2.6.1

Si A est symétrique et inversible avec range dense, donc A^{-1} est symétrique

2.6.2 L'opérateur auto-adjoint

Définition 2.6.2

On dit qu'un opérateur A à domaine dense est auto-adjoint si $A^* = A$ i.e:
$D(A) = D(A^*)$ et $Ax = A^*x, \forall x \in D(A)$

1. L'opérateur de multiplication: soit (X, μ) un espace mesuré avec μ une mesure positive sur X et α fonction mesurable de X dans $\mathbb{C}$ on définit l'opérateur A sur $L^2(X)$par :

$$A\varphi = \alpha.\varphi$$
$$D(A) = \{\varphi \in L^2(X) / \alpha.\varphi \in L^2(X)\}$$

est symétrique si α est réelle presque partout dans ce cas A est auto-adjoint

Proposition 2.6.2

Un opérateur symétrique A, est fermable, et vérifie

$$A \subset \overline{A} \subset A^*$$

A est auto-adjoint si et seulement si $A = A^* = \overline{A}$

Théorème 2.6.2

Soit $(D(A); A)$ un opérateur non borné dans un espace de Hilbert H du domaine $D(A)$ dense dans H alors :

1. A^* existe et il est un opérateur fermé.

2. A est fermable si est seulment si $D(A^*)$ est dense dans H, dans ce cas on a: $\overline{A} = A^{**}$

3. Si A est fermable alors : $(\overline{A})^* = A^*$

Remarque 2.6.2

$(D(A); A)$ un opérateur non-borné symétrique sur un H alors : A^* est

une extension fermée de A et puisque $D(A) \subset D(A^*)$ et $D(A)$ dense dans H, alors $D(A^*)$ est aussi dense dans H et on a par conséquent A fermable
$\overline{A} = A^{**}$ or $\overline{A}$ est la plus petite extension fermée de A
en particulier si A est symétrique fermé alors : $A = A^{**} \subset A^*$ et
$A = A^{**} \subset A^{***}$ si A auto-adjoint $A^* = A$ alors $A = A^* = A^{**} = A^{***}$
.Si A auto-adjoint alors A est fermé, en deduit alors qu'un opérateur non-borné symétrique fermé est auto-adjoint si seulement si son adjoint est symétrique

Proposition 2.6.3

. Si A est symétrique et fermé, alors A auto-adjoint.
. Si A^* est symétrique fermé alors $\overline{A} = A^{**}$ est une extension de A^*

Définition 2.6.3

Soit $(D(A), A)$ un opérateur non-borné sur H, symétrique de domaine $D(A)$ dense dans H: A est dit essentiellement auto-adjoint si $\overline{A}$ est auto-adjoint ou bien $(\overline{A})^* = \overline{A}$

Remarque 2.6.3

tout opérateur auto-adjoint est essentiellement auto-adjoint mais la réciproque est fausse
• Si A est essentiellement auto-adjoint alors : A^* est la petite extension fermée de A
• Si A est essentiellement auto-adjoint alors : A^* est auto-adjoint

Lemme 2.6.2

si A est essentiellement auto-adjoint, A a une unique extension auto-adjoint $\overline{A}$

Preuve

par défnition, $\overline{A}$ est extension auto-adjoint de A
Soit B une deuxiéme extension auto-adjoint de A
Alors : $A \subset B \Rightarrow \overline{A} \subset B$ et $B^* \subset (\overline{A})^* \Rightarrow B \subset \overline{A^*} = \overline{A}$
donc: $B = \overline{A}$

Théorème 2.6.3

Soit A et B deux opérateurs non borné auto-adjoint tel que B inversible. si $AB = BA$ et $D(AB^{-1}) \subset D(B)$ alors $(A+B)^* = A+B$ sur $D(A)$

Preuve

Premièrement toujour on obtient $\boxed{A+B \subset (A+B)^*}$....(1)

deuxièment, il est clair que:

$D(A) = D(B^{-1}A) \subset D(AB^{-1}) \subset D(B)$,

$$\text{car:}\left\{\begin{array}{c} B^{-1}B \subset BB^{-1} = I \\ B^{-1}BA \subset A \\ B^{-1}AB \subset A \quad (AB = BA) \\ B^{-1}A \subset AB^{-1} \\ D(B^{-1}A) = \{x \in D(A), Ax \in D(B^{-1})\} \\ = \{x \in D(A), Ax \in H\} \\ = D(A) \end{array}\right\}$$

domaine $A+B$ est $D(A)$ .on obtient:

$$B^{-1}BA + B \subset A + B \qquad (AB = BA)$$

et donc $\quad (I + B^{-1}A)B \subset A + B$

et donc : $(A+B)^* \subset [(I+B^{-1}A)B]^* = B^*(I+B^{-1}A)^*$

$$= B^*\left[I + (B^{-1}A)^*\right]$$

$$= B^*\left[I + A^*(B^{-1})^*\right] \quad \text{(tel que } B^{-1} \text{ est borné)}$$

$$= B(I + AB^{-1}) \quad (A \text{ et } B \text{ sont auto-adjoint})$$

$$= B + BAB^{-1}(\text{de } D(AB^{-1}) \subset D(B)$$

$$= B + ABB^{-1}$$

$$= A + B$$

donc $\boxed{(A+B)^* \subset A+B}$....(2)

de 1 et 2 on a:

Alors $(A+B)^* = A+B$

Proposition 2.6.4

Soit A et B deux opérateurs non bornés auto-adjoints, Si $A \subset B$ alors : $A = B$

Preuve

On a :

$A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^* \Rightarrow B \subset A$, d'ou $A = B$

Théorème 2.6.4

Soit $(D(A), A)$ un opérateur non-borné symétrique de domaine $D(A)$
dense dans H Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. A est auto-adjoint

2. A est fermé et $\ker(A^* + i) = \ker(A^* - i) = \{0\}$

3. $\mathrm{Im}(A + i) = \mathrm{Im}(A - i) = H$

Preuve

$1 \Rightarrow 2$

Si A est auto-adjoint alors A est fermé

vérifions que $\ker(A^* + i) = ker(A + i) = ker(A - i) = \{0\}$

Soit x $\in D(A)$, tel que $(A - i)x = 0$, ou bien

$Ax = ix$, ainsi que $\langle Ax, x\rangle = \langle ix, x\rangle = i\left\|x\right\|^2$

d'autre part : $\langle x, A^*x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \langle x, ix\rangle = -i\left\|x\right\|^2$

et $\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle \Rightarrow i\left\|x\right\|^2 = -i\left\|x\right\|^2$

alors $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$

$2 \Rightarrow 3$

on montre que $\mathrm{Im}(A \pm i)$ est dense et fermé dans H

soit $f \in (\mathrm{Im}(A - i))^{\perp}$ alors $\forall x \in D(A), x); \langle (A - x), f\rangle = 0$

donc $\langle Ax, f\rangle = i\langle x, f\rangle$, par conséquent $x \in D(x) \to \langle Ax, f\rangle = i\langle x, f\rangle$ posséde une extension continue à H:

et on a $f \in D(A^*) : \langle x, A^*f\rangle = \langle x, -if\rangle \quad \forall x \in D(A)$

$\langle x, (A^* + i)f\rangle = 0, \forall x \in D(A)$

$(A^* + i)f = 0 \Rightarrow f = 0$

d'où $(\mathrm{Im}(A + i))^{\perp} = 0$

ou bien $\mathrm{Im}(A + i)$ est dense dans H :

la fermeture de l'image.

$\overline{\mathrm{Im}(A - i)} \subset \mathrm{Im}(A - i)$

remarquons : $\forall x \in D(A)$ on a $\left\|(A - i)x\right\|^2 = \left\|Ax\right\|^2 + \left\|x\right\|^2$

où A est symétrique

d'où $\|(A-i)x\| \geq \|x\|$,soit $f \in \overline{\mathrm{Im}(A-i)}$ tel que :

$f_n = (A-i)x_n \quad \forall (x_n) \in D(A)$

$(x_n; f_n)$ est le graphe de $(A-i)$

on a de plus :

$\|f_n - f_m\|^2 = \|Ax_n - Ax_m\|^2 + \|x_n - x_m\|^2 \to 0$

$(x_n)_n$ et $(Ax_n)_n$ sont de cauchy dans H, alors elles convergent respectivement vers x et y dans H:

par la fermeture de A on obtient $x \in D(x)$ et $y = Ax$

par suite $f = Ax_n - ix_n = Ax - ix = (A-i)x \Rightarrow f \in \mathrm{Im}(A-i)$

Par conséquent $\mathrm{Im}(A-i) = H$

$3 \Rightarrow 1$

montrons d'abord que $\ker(A-i) = \{0\}$ et $ker(A^* - i) = \{0\}$

$\ker(A^* - i) = \ker(A+i)* = Im(A+i)^{\perp} = H^{\perp} = \{0\}$

pour vérifier que A auto-adjoint il suffit de voir que $D(A^*) \subset D(A)$

soit $u \in D(A^*)$, alors $(A^* - i)u \in H$:comme $\mathrm{Im}(A-i) = H; \exists v \in D(A)$ tel que :

$(A^* - i)u = (A-i)v$

ou bien $(A^* - i)(u-v) = 0 \Rightarrow u = v \in D(A)$

Théorème 2.6.5

Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné symétrique sur un espace de Hilbert H et de domaine $D(A)$ dense dans H, alors on a l'équivalence de trois propriétés suivantes :

1. A est essentiellement auto-adjoint

2. $\ker(A^* \pm i) = \{0\}$

3. $Im(A \pm i)$ est dense dans H

Preuve

on applique le théoréme précédent a $\overline{A}$, pour cela on obtient les équivalences suivantes Sachant que $\overline{A}$ est aussi symétrique

$\overline{A}$ est auto-adjoint

$\overline{A}$ est essentiellement auto-adjoint

$\ker(\overline{A}^* \pm i) = \{0\} = \ker(A^* \pm i)$

$\mathrm{Im}(\overline{A} \pm i) = H$

ainsi pour montrer ce résultat il suffit d'établir que :

$\mathrm{Im}(\overline{B}) \subset \mathrm{Im}\,\overline{(B)}$,c'est-à-dire on a d'abord

$\mathrm{Im}(\overline{A} \pm i) \subset \overline{\mathrm{Im}(A \pm i)}$

Réciproquement comme A est symétrique $\overline{A}$ est aussi symétrique

Et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ l'image de $(\overline{A} - \lambda I)$ est fermé dans H

Car en notant que $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$ et on a :

$\|(A - \lambda I)x\|^2 = \|(A - \alpha I)x\|^2 + \beta^2 \|x\|^2$

finalement on a :$\mathrm{Im}(\overline{A} - \lambda I) = \overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)}$

Proposition 2.6.5

A symétrique est essentiellement auto-adjoint si et seulement si $\overline{A} = A^*$

Preuve

Si $\overline{A}^* = A$, alors $A^* = \overline{A}$ car $\overline{A}^* = A^*$

Si $A^* = \overline{A}$, alors $\overline{A}^* = A^{**} = \overline{A}$

Remarque 2.6.4

Si A est symétrique les relations suivants sont équivalent:

1. A est essentiellement auto-adjoint
2. A^* est symétrique
3. A^* est auto-adjoint
4. A^{**} est auto-adjoint

Proposition 2.6.6

Si A symétrique et inversible avec range dense dans A^{-1} est symétrique

A est un opérateur linéaire tel que $\overline{D(A)} = E$ et A^{-1} existe tel que :

$\overline{D(A^{-1})} = F$. Alors : $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Preuve

$D(A)$ Dense dans E .Alors:A^* existe et $D(A^{-1})$ dense dans H

Alors:$(A^{-1})^*$ existe , montrons que: $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$. pour $f \in D(A)$ et $g \in D((A^{-1})^*)$.

Alors:

$\langle f, g \rangle = \langle A^{-1}Af, g \rangle = \langle Af, (A^{-1})^* g \rangle$

cette équation montre que:

$$(A^{-1})^* g \in D(A^*) \text{ et } A^*(A^{-1})^* g = g$$

pour $f \in D(A^{-1})$ et $h \in D(A^*)$. Alors :

$$\langle f, h \rangle = \langle AA^{-1}f, h \rangle = \langle A^{-1}f, A^*h \rangle$$

cette équation montre que:

$$A^*h \in D((A^{-1})^*) \text{ et } (A^{-1})^* A^*h = h$$

Donc $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

Définition 2.6.3

Un opérateur symétrique A dans H est dit symétrique maximal

Si A n'admet pas d'extension symétrique propre, c'est-à-dire si les hypothèses

$A \subset B$ et B symétrique

implique que $B = A$

Chapitre 3

Théorie spectrale des opérateurs non bornés

3.1 Spectre d'opérateur borné

Définition 3.1.1

On dit que λ est une **valeur spectrale** de A si $A - \lambda I$ n'est **pas inversible** (ou, de façon équivalente, pas bijectif).

1- Le spectre ponctuel de A, noté $\sigma_p(A)$ est l'ensemble des valeurs propres de A , il est défni comme suit : $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$, *i.e*: si et seulement si $A - \lambda I$ n'est pas injectif.

2- Le spectre continu de A, $\sigma_c(A)$, est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que A est injectif, non surjectif, mais son image est dense dans H,*i.e.*

$$ker(A - \lambda I) = \{0\} \ , \qquad Im(A - \lambda I) \neq H \ , \overline{Im(A - \lambda I)} = H \ .$$

3- Le spectre résiduel, $\sigma_r(A)$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que$A - \lambda I$ est injectif, non surjectif, mais son image n'est pas dense dans H, *i.e.*

$$ker(A - \lambda I) = \{0\}, \qquad (Im(A - \lambda I))^{\perp} \neq \{0\}$$

Définition 3.1.2 (Ensemble résolvant, résolvante).

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit que $\lambda \in \mathbb{C}$, appartient à l'ensemble résolvant de A si $A - \lambda I$ est un isomorphisme de H, ce qui équivaut à dire que $A - \lambda I$ est une bijection de H dans Het que $(A-\lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$.

- L'ensemble résolvant de A est noté $\rho(A)$. L'opérateur $(A-\lambda I)^{-1}$est appelé la résolvante de A et l'on note $R_\lambda(A)$.

Proposition 3.1.1

Le spectre $\sigma(A)$ est la réunion disjointe de $\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$ et $\sigma_r(A)$.

$$i.e. \quad \sigma(A) = \sigma_P(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

- Le rayon spectral est défni comme

$$r(A) = sup\{ \ |\lambda| \ , \ \ \lambda \in \sigma\,(A) \ \}$$

Théorème 3.1.1

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$:

1) $\lambda \in \sigma\,(A) \iff \overline{\lambda} \in \overline{\sigma}\,(A^*)$

2) pour $\lambda \in \sigma\,(A)$, on a $(R_\lambda(A))^* = R_{\overline{\lambda}}(A^*)$

3) $\lambda \in \sigma_r(A) \iff \overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$

4) $\lambda \in \sigma_p\,(A) \iff \overline{\lambda} \in \sigma_p\,(A^*) \cup \sigma_r\,(A^*)$

5) $\lambda \in \sigma_c\,(A) \iff \overline{\lambda} \in \sigma_c\,(A^*)$

Preuve

1) et 2) pour $\lambda \in \mathbb{C}$ on a

$$(A-\lambda I)^* = \left(A^* - \overline{\lambda} I\right)$$

Ce qui montre les deux premiers points

3) On se souvient que pour $S \in \mathcal{L}(H)$, on a

$$H = ker\ S \overset{\perp}{\oplus} \overline{Im\ S^*}$$

Où $\overset{\perp}{\oplus}$ désigne une somme directe orthogonale, autrement dit :

$$(Im\ S^*)^\perp = ker\ S$$

Dire que $\lambda \in \sigma_r(A)$ implique que $Im(A-\lambda I)$ n'est pas dense dans H,

$$i.e : \ker\left(A^* - \overline{\lambda} I\right) = (Im(A-\lambda I))^\perp \neq \{0\}$$

Et donc $\lambda \in \sigma_p\,(A^*)$

4) Soit $\lambda \in \sigma_p\,(A)$, $i.e$ tel que $ker(A-\lambda I) \neq \{0\}$: on utilise la même idée

$$H = ker(A-\lambda I)^\perp \overset{\perp}{\oplus} Im\left(A^* - \overline{\lambda} I\right)$$

d'où $\left(Im\left(A^* - \overline{\lambda} I\right)\right)^\perp = \{0\}$:l'image de $A^* - \lambda I$ n'est pas dense dans H .

Si de plus A est injectif, cela implique $\overline{\lambda} \in \sigma_r\,(A^*)$, sinon on a $\lambda \in \sigma_p\,(A^*)$:

5) Soit $\lambda \in \sigma_c(A)$, On utilise les deux propriétés:

$$H = ker(A - \lambda I) \overset{\perp}{\oplus} \overline{Im(A^* - \lambda I)}$$
$$H = ker(A^* - \lambda I) \overset{\perp}{\oplus} \overline{Im(A - \lambda I)}$$

On a $ker(A - \lambda I) = \{0\}$, doú $Im\left(A^* - \overline{\lambda} I\right)$ est dense dans H . De plus $Im(A - \lambda I)$ est dense dans H, d'où $ker\left(A^* - \overline{\lambda} I\right) = \{0\}$.On a donc $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A^*)$:

On peut faire le même raisonnement en sens inverse.

3.2 Le spectre de l'adjoint d'un opérateur

Commençons par énoncer un résultat général, dont nous ne démontrerons qu'un corollaire.

Théorème 3.2.1(théorème de Phillips)

Soit E un espace de Banach complexe, $A \in \mathcal{L}(E)$ et $A' \in \mathcal{L}(E')$ l'adjoint de A , alors $\sigma(A') = \sigma(A)$ et $\forall \lambda \in \rho(A), R_\lambda(A') = R_\lambda(A)'$.

Ce résultat a comme conséquence immédiate, dans le cas particulier où $E = H$ est un espace de Hilbert complexe

Proposition 3.2.1

Soit H un espace de Hilbert complexe, $A \in \mathcal{L}(H)$ et $A^* \in \mathcal{L}(H)$ l'adjoint hilbertien de A . alors $\sigma(A^*) = \sigma(A)^* = \{\lambda | \lambda \in \sigma(A)\}$ et $\forall \lambda \in \rho(A)$, $R_\lambda(A^*) = R_\lambda(A)^*$.

Démonstration (directe) de la proposition

— Observons d'abord que, $\forall S, T \in \mathcal{L}(H)$, $(TS)^* = S^* T^*$

(simple) et donc que, si A est inversible, alors

$$(A^{-1})^* A^* = (A(A^{-1}))^* = Id^* = Id$$
$$A^*(A^{-1})^* = ((A^{-1})A)^* = Id^* = Id,$$

ce qui signifie que A^* est aussi inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Comme $A \longrightarrow A^*$ est une involution, la réciproque est immédiate, autrement dit : A est inversible ssi A^* est inversible. Donc

$\lambda \in \rho(A) \iff (\lambda - A)$ est inversible $\iff (\lambda - A^*)$ est inversible $\iff \lambda \in \rho(A^*)$.

Et alors $((\lambda - A)^{-1})^* = (\overline{\lambda} - A^*)^{-1}$.

Une autre propriété nous sera utile par la suite :

Proposition 3.2.2

Soit E un espace de Banach complexe et $A \in \mathcal{L}(E)$. alors

(i) Si $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors $Im(\lambda - A')$ n'est pas dense dans E'

(ii) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est tel que $Im(\lambda - A)$ n'est pas dense dans E, alors $\lambda \in \sigma_p(A')$

(iii) Corollaire : si E est réflexif, *i.e.* si $(E')' = E$, alors $\lambda \in \sigma_p(A)$ ssi $Im(\lambda - A')$ n'est pas dense dans E'.

Pour démontrer la proposition (3.2.2), nous utiliserons le résultat suivant (très utile), que nous montrerons à la fin de ce paragraphe :

Lemme 3.2.1

Soit E un espace vectoriel complexe normé et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel complexe. Alors $F \neq E$ ssi il existe une forme linéaire $\Phi \in E\prime$ non nulle telle que $F \subset Ker\ \Phi$.

Démonstration de la proposition 3.2.2

Preuve de (i)

soit $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors $\exists\ x_0 \in E$ non nul tel que

$(\lambda - A)(x_0) = 0$. Cela entraîne en particulier que : $\forall \alpha \in E'$,

$$[(\lambda - A')(\alpha)](x_0) = \alpha((\lambda - A)(x_0)) = \alpha(0) = 0,$$

i.e. $(\lambda - A\prime)(\alpha) \in x_0^{\perp} := \{\beta \in E' | \beta(x_0) = 0\}$.ainsi $Im(\lambda - A') \subset x_0^{\perp}$. Cela implique bien évidemment que $Im(\lambda - A')$ ne peut pas être dense dans E', puisque $x_0^{\perp}$ est fermé et est différent de E'.

Preuve de (ii) : soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $Im(\lambda - A)$ n'est pas dense dans E. d'aprés lemme 3.2.1

il existe $\alpha \in E\prime$ non nulle telle que $Im(\lambda - A) \subset Ker\,(\alpha)$. donc,

$$\begin{aligned} \forall x \in E,\ \alpha[(\lambda - A)(x)] = 0 \iff & \forall x \in E,\ [(\lambda - A')(\alpha)](x) = 0 \\ \iff & (\lambda - A')(\alpha) = 0 \\ \iff & \alpha \in Ker(\lambda - A'). \end{aligned}$$

Donc $\lambda \in \sigma_p(A')$.

Preuve de (iii) : le fait que « $\lambda \in \sigma_p(A)$ implique $Im(\lambda - A')$ n'est pas dense dans E' » a été montré

au (i), la réciproque s'obtient en appliquant le (ii) à A' et en utilisant le fait que $A'' = A$.

3.3 Opérateurs normaux

Définition 3.3.1

H est un espace de Hilbert, on dit que $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur normal si A commute avec son adjoint *i.e* :

$$A^*A = A\ A^*$$

Exemple 3.3.1

La multiplication M_φ par une fonction mesurable bornée φ est un opérateur normal sur $L_2(0,1)$, car

$$(M_\varphi)^* M_\varphi = M_{\overline{\varphi}} M_\varphi = M_{\overline{\varphi}\varphi} = M_\varphi M_{\overline{\varphi}} = M_\varphi (M_\varphi)^*$$

L'opérateur M_φ est hermitien si la fonction φ est réelle.

Théorème 3.3.1

Soient T_1 et T_2 deux opérateurs normaux dans $\mathcal{L}(H)$ sur un espace de Hilbert et soit $A = T_1 + T_2$; A n'est pas nécessairement normal

Preuve

On a T_1 qui est un opérateur normal $\iff T_1^*T_1 = T_1T_1^*$

on a T_2 qui est un opérateur normal $\iff T_2^*T_2 = T_2T_2^*$

et on a $A = T_1 + T_2$ alors

$$\begin{aligned}
< A^*x, y > &= < x, Ay > \\
&= < x, (T_1 + T_2)y > \\
&= < x, T_1y + T_2y > \\
&= < x, T_1y > + < x, T_2y > \\
&= < T_1^*x, y > + < T_2^*x, y > \\
&= < (T_1^* + T_2^*)x, y > \implies A = T_1^* + T_2^*
\end{aligned}$$

Donc

1) $$\begin{aligned} AA^* &= (T_1 + T_2)(T_1 + T_2)^* \\ &= T_1T_1^* + T_1T_2^* + T_2T_1^* + T_2T_2^* \\ &= T_1^*T_1 + T_1T_2^* + T_2T_1^* + T_2^*T_2 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} A^*A &= (T_1 + T_2)^*(T_1 + T_2) \\ &= T_1^*T_1 + T_1^*T_2 + T_2^*T_1 + T_2^*T_2 \end{aligned}$$

Alors

$$AA^* = A^*A \Longrightarrow T_1^*T_1 + T_1T_2^* + T_2T_1^* + T_2^*T_2 = T_1^*T_1 + T_1^*T_2 + T_2^*T_1 + T_2^*T_2$$
$$\Longrightarrow (T_1T_2^* = T_2^*T_1) \quad et \quad (T_2T_1^* = T_1^*T_2)$$
$$\Longrightarrow < T_1^*x, T_2^*y > = < T_2x, T_1y >$$

Théorème 3.3.2

Soit $A_n \in \mathcal{L}(H)$ suite d'opérateurs normaux et A opérateur normal avec

$$A_n \longrightarrow A \quad \text{alors} \quad A_n^* \longrightarrow A^*$$

preuve

On a A_n normal alors $A_nA_n^* = A_n^*A_n$ ie $< A_nx, A_ny > = < A_nx, A_ny >$

et A est normal alors $AA^* = A^*A$ ie $< Ax, Ay > = < Ax, Ay >, \quad \forall x, y \in H$

et on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \quad on\ a \quad A_n \longrightarrow A \quad c, à, d : \|An - A\| < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
< A_n^*x, A_n^*y > - < A^*x, A^*y > &= < A_nx, A_ny > - < Ax, Ay > \\
&= < A_nx, A_ny > - < Ax, Ay > + [< Ax, A_ny > - < Ax, A_ny >] \\
&= < (A_nx - Ax), A_ny > + < Ax, A_ny - Ay > \\
&= < (An - A)x, A_ny > + < Ax, (An - A)y > \\
&\leq \|A_n - A\| \|x\| \|A_ny\| + \|Ax\| \|A_n - A\| \|y\| \\
&\leq \|A_n - A\| (\|x\| \|A_ny\| + \|Ax\| \|y\|) \\
&\leq \varepsilon.C
\end{aligned}$$

Donc

$$< A_n^*x, A_n^*y > - < A^*x, A^*y > = < A_n^*A_nx, y > - < A^*Ax, y >$$

$$= < (A_n^*A_n - A^*A)x, y > \leq \varepsilon.C$$

D'où

$$(A_n^*A_n - A^*A \longrightarrow 0 \quad si \quad n + 1) \Longrightarrow (A_n^*A_n \longrightarrow A^*A \quad si \quad n \longrightarrow +\infty)$$

D'autre part on a

$$\lim_{n\to\infty} (A_n^*A_n) = \lim_{n\to\infty} A_n^* \lim_{n\to\infty} A_n = AA^* \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} A_n = A \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} A_n^* = A^*$$

Alors

$$A_n^* \longrightarrow A^*$$

3.4 Théorie spectrale des opérateurs bornés et normaux

Rappele

Rappelons qu'une algébre est par définition à la fois un anneau et un espace vectoriel dont les lois sont compatibles entre elles. Notre seul but sera d'appliquer ce que va suivre à algébre $B(H)$ des opérateurs bornés. Cette derniére est même une algebre de Banach. ($i.e$ compléte tant qu'espace vectoriel normé). car H est complet.

Définition 3.4.1

Soit X est une espace topologique et soit

$M_\infty(X) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{C}, f$ est fonction mesurable et borné$\}$

On définit

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

pour $f \in M_\infty(X)$ alors $M_\infty(X)$ est un $\mathbb{C}-$algébre

Définition 3.4.2

Soit $N \in B(H)$ normal, et soit $\Psi : M_\infty(\sigma(N)) \longrightarrow B(H)$ le calcul fonctionnel de N.

si $E(N) = \Psi(\varkappa_M)$ avec M sous ensemble mesurable de Borel,

alors on a:

1) $E(M)$ est une projection orthogonal sur H avec: $NE(M) = E(M)N$

2)$N_M = N/_{\mathrm{Im}(E(M))}$

3)$E(M) \neq 0$ si M est un ouvert non nul de $\sigma(N)$

Proposition 3.4.1

Si N est normal et borné, alors il existe une unique mesure spetral E sur $\sigma(N)$ telle que:

$$N = \int_{\sigma(N)} \lambda dE$$

Théorème 3.4.1

Soit $A \in B(H)$, et N un opérateur normal avec une décomposition spectral E, alors:

$AN = NA$ et $AN^* = N^*A$ si et seulement si :$AE(M) = E(M)A$ pour tout ouvert non vide M

Proposition 3.4.2

Si N est borné et normal, et si E est sa mesure spectrale. alors l'opérateur A commute avec N si et seulement si:

$$AE(M) = E(M)A$$

pour tout : M

Proposition 3.4.3

Soit N normal et soit E sa mesure spectral, et soit $\lambda \in \sigma(N)$ alors on a:

(1) λ est une valeur propre ssi : $E(\lambda) \neq 0$

(2) Si λ est une valeur propre de N, alors $E(\lambda)$ est la projection orthogonale de H sur l'espace propre $H_\lambda = \ker(\lambda I - N)$

Théorème 3.4.2

Soit $A \in B(H)$

(1) Si A est inversible alors : $\sigma(A^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda}, \lambda \in \sigma(A)\right\}$

(2) $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$ pour tout P$\in \mathbb{C}[X]$ (spectrel mapping theory)

Preuve

1.Puisque A invesible, alors :0 n'appartient pas a $\sigma(A)$ et $(\sigma(A))^{-1}$ a un sens: on a

$$A^{-1} - \lambda^{-1} = (\lambda - A)\lambda^{-1}A^{-1}$$

$\lambda^{-1} \in \rho(A^{-1}) \iff A^{-1} - \lambda^{-1}$ est inversible $\iff (\lambda - A)\lambda^{-1}A^{-1}$

donc:

$$(\lambda - A) \text{ est inversible}$$

alors:

$$\lambda \in \rho(A)$$

D'ou: $\lambda^{-1} = \frac{1}{\lambda} \in \sigma(A^{-1}) \iff \lambda \in \sigma(A)$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ posons $Q(z) = \lambda - P(z)$, $Q(z)$ est un polynome de degré n car $P(z)$ est polynome. d'aprés le théorème fondamentel de l'algébre $Q(z)$ admet n racines $i.e$:

$$Q(z) = c(z - \mu_1)(z - \mu_2)......(z - \mu_n), c \neq 0, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_n \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}
\lambda \in \rho(A) &\iff \lambda I - P(A) \text{ inversible} \iff Q(z) \text{ inversible} \\
&\iff c(z - \mu_1)(z - \mu_2)......(z - \mu_n) \text{ inversible} \\
&\iff (A - \mu_i) \text{ inversible } \forall i \\
&\iff \mu_i \in \rho(A) \quad \forall i
\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow Q(\mu) \neq 0 \qquad \forall \mu \in \sigma(A)$$
$$\Longleftrightarrow \lambda \neq P(\mu) \qquad \forall \mu \in \sigma(A)$$
$$\Longleftrightarrow \lambda \text{ n'appartient pas à } \quad P(\sigma(A))$$

3.5 Spectre des opérateurs non bornés

Définition 3.5.1

Soit $(D(A), A)$ est opérateur non borné sur (lequel est un $\mathbb{C}-Hilbert$)
on désigne par $\sigma(A)$ le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble résolvant
$\rho(A)$ *et* $\sigma(A)$ est appelé le spectre de l'opérateur A on a:

$$\sigma(A) = \mathbb{C}/\rho(A)$$
$$\mathbb{C} = \sigma(A) \cup \rho(A)$$
$$\sigma(A) \cap \rho(A) = \varnothing$$

$\sigma(A)$ peut être décomposé en trois ensembles deux à deux disjoints notés:
$\sigma_p(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$. il sont définis comme suivant:

$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, (A-\lambda I) \text{ n'est pas invese de } D(A) \text{ dans } Im(A-\lambda I)\}$

σ_p est appelé le spectre ponctuel de A

$\sigma_c(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, Im(A-\lambda I) \text{ invesible de } D(A) \text{ dans } Im(A-\lambda I) \text{ et } Im(A-\lambda I) \text{ dense dans } H\}$

Mais $R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$ n'est pas borné et σ_c est appelé le spectre continu de A

$$\sigma_r(A) = \left\{ \begin{array}{c} \lambda \in \mathbb{C}, (A-\lambda I) \text{ invesible de } D(A) \text{ dans } Im(A-\lambda I) \text{ et } Im(A-\lambda I) \text{ n'est pas} \\ \text{dense dans } H \end{array} \right\}$$

σ_r est appelé le spectre résiduel de A

Définition 3.5.2

Soit $(D(A), A)$ un opérateur non borné sur espace de Hilbert H de domaine $D(A)$ dense dans H. on appelle ensemble résolvant d'un opérateur A l'ensomble $\rho(A)$ de λ complexes telle que:

1. $Im(A-\lambda I)$ est dense dans H
2. $(A-\lambda I)$ est inversible de$D(A)$ sur $Im(A-\lambda I)$ de inverse borné et $Im(A-\lambda I)$ est muni de la topologie induite par H

on note $R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$ pour tout $\lambda \in \rho(A)$

$R_\lambda(A)$ est appelle l'opérateur résolvant de A

Remarque 2.5.1

$R_\lambda(A)$ est borné $Im(A-\lambda I)$ dans $D(A)$ c'est-a-dire

$$\exists C \geq 0 \text{ tq:} \|R_\lambda(A)u\| \leq C\|u\| \quad \forall u \in Im(A-\lambda I)$$

Exemple 3.5.1

$H = L^2(\mathbb{R})$ et A l'opérateur multiplication par la fonction $\varphi(x) = x$

tel que: $A\varphi(x) = x\varphi(x)$ de domaine

$$D(A) = \{\varphi \in L^2(\mathbb{R}), x\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

Alors $D(A)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et A est auto-adjoint

Donc:

$$\begin{cases} \sigma_p(A) = \emptyset \\ \\ \sigma_c(A) = \mathbb{R} \\ \\ \sigma_r(A) = \emptyset \\ \\ \rho = \mathbb{C}/\mathbb{R} \end{cases}$$

Théorème 3.5.1

Soit $(D(A), A)$ est un opérateur fermé sur un Hilber H de domaine dense alors:

1• $\rho(A)$ est un ouvert dans $\mathbb{C}$.

2• l'applicatio $R_\lambda(A)$ de $\rho(A)$ dans $\mathcal{L}(H)$ est holomorph sur $\rho(A)$

3• l'identité de la résolvante : $R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda-\mu).R_\lambda(A).R_\mu(A)$

en effet

$$(A-\lambda I)^{-1} - (A-\mu I)^{-1} = (A-\lambda I)^{-1}\left[I - (A-\lambda I)(A-\mu I)^{-1}\right]$$

$$=R_\lambda(A)\left[(A-\mu I) - (A-\lambda I)\right]R_\mu(A) = (\lambda-\mu)\cdot R_\lambda(A)\cdot R_\mu(A)$$

3.6 Spectre des opérateurs fermés

Définition 3.6.1

. Soit A un opérateur d'un espace de Banach complexe E dans lui même et $\lambda \in \mathbb{C}$, on dit que λ est une valeur régulière de A si A-λId_E est une application linéaire bijectif de $D(A)$ sur E et si l'application linéaire réciproque définit une application linéaire continue de E dans lui même. on appelle spectre de A le complémentaire $\sigma(A)$ dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des valeurs régulières de A.

Soit A un opérateur sur un espace de Banach complexe E , désignons par Ω_T l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ qui sont valeur régulière de A , pour $\lambda \in \Omega_T$, on pose

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$$

et on appelle $R_\lambda(A)$ la résolvante de A.

Seuls les opérateurs fermés sont intéressants pour la théorie spectrale : en effet, si A admet une valeur régulière λ, l'opérateur $(A- \lambda Id_E)^{-1}$ est continu donc à graphe fermé, on en déduit que son inverse $A- \lambda Id_E$ est fermé, et il en résulte facilement que A lui-même est fermé. Autrement dit : si A n'est pas fermé, A n'admet aucune valeur régulière, donc on a toujours $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Soit A un opérateur fermè d'un espace de Banach E dans lui-même, remarquons que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, l'opérateur $A - \lambda Id_E$ est fermé. Si $A - \lambda Id_E$ est bijectif de $D(A)$ sur E, alors λ est une valeur régulière car $(A- \lambda Id_E)^{-1}$ est fermé, donc continu par le théorème du graphe fermé.

Lemme 3.6.1

. Soit A un opérateur injectif fermé d'un espace de Banach E dans lui même et λ une valeur régulière de A non nulle, alors λ^{-1} est une valeur réguliére de A^{-1} et on a

$$R_{\lambda-1}(A^{-1}) = -\lambda A R_\lambda(A)$$

Remarque 3.6.1

Si $(D(A), A)$ est une opérateur fermé sur H, Alors:

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, R_\lambda(A) \text{ existe et est dans } \mathcal{L}(H)\ \}$$

Proposition 3.6.1

Le spectre d'un opérateur fermé A d'un espace de Banach complexe E dans lui même est une partie fermée de $\mathbb{C}$, et l'application $\lambda \longrightarrow R_\lambda(A)$ est continue du complémentaire du spectre dans $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration

Désignons par Ω_A l'ensemble des valeurs régulières pour A, et montrons que cet ensemble est ouvert. Si Ω_A est vide, il est ouvert, sinon, supposons que $\lambda_0 \in \Omega_A$, et montrons que les valeurs voisines de λ_0 sont elles aussi régulières et $\lambda \longrightarrow R_\lambda(A)$ continue dans ce voisinage. en remplaçant A par $A = A - \lambda_0 Id_E$ on se ramène à ¸$\lambda_0 = 0$. on supposera donc que $A = A - 0Id_E$ est une bijection de $D(A)$ sur E, d'inverse $S = R_0(A)$continu, on veut alors montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que λ soit valeur régulière de A quand $|\lambda| < \varepsilon$

Etant donné $y \in E$ quelconque, on veut résoudre en $x \in D(A)$, et avec solution unique, l'équation

$$A(x) - \lambda x = y$$

Posons $z = A(x)$, ce qui équivaut à $x = S(z)$. L'équation précédente devient alors $z - \lambda S(z) = y$, ou encore $(S - \lambda^{-1} \ Id_E)(z) =-\lambda^{-1}y$. Lorsque $|\lambda| < \rho(S)^{-1}$, on sait que $S - \lambda^{-1}IdE$ est inversible, donc z est uniquement défini par

$$z = R_{\lambda^{-1}}(S)(-\lambda^{-1}y)$$

et puisque $x = S(z)$ ceci montre que $R_\lambda(T)$ =-$\lambda^{-1}SR_{\lambda^{-1}}(S)$ existe et est borné, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < \rho(A^{-1})^{-1}$. Si on récrit

$$R_\lambda(A) = -\lambda^{-1}SR_{\lambda^{-1}}(S) = -S(Id_E - \lambda S)^{-1}$$

on voit que $\lambda \longrightarrow R_\lambda(A)$ est continue au voisinage de $\lambda_0 = 0$, mais λ_0 est en fait un point quelconque de Ω_A.

3.7 Théorie spectrale des opérateurs linéaires non bornés et normaux

dans le cas d'un opérateur non borné normal cette méthode est inapplicable. dans cette section on va voir le théorème spectral des opérateurs non borné normaux

Définition 3.7.1

Soit N est un opérateur non borné de domaine dense. on dit N est un opérateur normal si N est fermé et $NN^* = N^*N$

Théorème 3.7.1

Si N est un opérateur non borné normal. alors : il existe une unique mesure spectral E_λ telle que

$a)N = \displaystyle\int \lambda dE_\lambda$

$b)E(\triangle) = 0$ si $\triangle \cap \sigma(N) = \varnothing$

$c)$ Si U est une sous ensemble ouvert de $\mathbb{C}$ et $U \cap \sigma(N) \neq 0$. alors : $E(U) \neq 0$

$d)$ Si $A \in \mathcal{L}(H)$ telle que : $NA \in AN$ et $NA^* \in A^*N$ alors $A\left(\displaystyle\int \phi dE_\lambda\right) \subseteq \left(\displaystyle\int \phi dE\right)A$ pour tout fonction ϕ dans $\mathbb{C}$

Corrolaire 3.7.1

Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ et N est un opérateur normal, A est commute avec N alors A commute avec $E(N)$

Définition 3.7.2

On dit que A commute avec B, A non borné et B est borné si

$$BA = AB$$

Conclusion

La notion d'opérateur fermé est une bonne généralisation de la notion d'opérateur continu à des opérateurs qui ne sont pas partout définis.

Si T est un opérateur fermé de domaine dense, on a :

T est continu et partout défini,

ou bien

T n'est pas continu et n'est pas partout défini.

Dans le premier cas on a $T \in L(H, G)$ et nous dirons que T est borné, dans le second cas on dit que T est non-borné.

Soit T un opérateur linéaire dont le domaine est dense et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Pour l'opérateur

$$S = (T - \lambda Id) : D(T) \longrightarrow H.$$

Si S est bijectif et S^{-1} n'est pas borné, on parle de spectre résiduel de type 2 de T. Mais si l'opérateur bijectif T est fermé ou borné ce type de spectre (spectre résiduel de type 2) est vide car l'opérateur S^{-1} est automatiquement borné.

La question posée est :

Y at-il d'autres relations entre les opérateurs borné et fermé?

Bibliographie

[1] B.Maurey, Analyse fonctionnelle et théorie spectrale, Université Paris 6, 2001

[2] FREDERIC RIESZ ET BELA SZ-NAGY, LECONS D'ANALYS FONCTIONNELLE , parie 1968

[3] J. Bass. Cours d'analyse fonctionnelle.

[4] John B. Conway, A Course in Functional Analysis, Second Edition ,1997

[5] H. Brizis. Analyse fonctionnelle, théorie et application, MASSON, Paris, 1992.

[6] M.THAMBAM NAIR , LINEAR OPERATOR EQUATIONS Approximation and Ruglarization, QA329.2.N35 2009

[7] MICHAEL REED, BARRY SIMON ,METHODS OF MODARN MATHEMATICAl PHYSICS, COPYRIGHT 1980

[8] N. Boccara. Analyse fonctionnelle, une introduction pour physiciens, Edition MARKETING, Paris, 1984.

[9] Pierre lévy-Bruhl, introduction à la théorie spectral, cours et exercices corrigés, paris,2003

[10] PETER D.LAX, FUNCTINAL ANALYSIS,COPYRIGHT 2002

[11] Reinhold Meise, introduction to functional analysis , Edition 1992

[12] SEYMOUR .OLDBERG, Unbounded operator linear theory and applications,1966

[13] Yuli Eidelman, Vitali Milman, Antonis Tsolomitis, Functional Analysis A Introduction,2000

Résumé

Il est clair que dans l'analyse fonctionnelle les propriétés des opérateurs bornés et non bornés très importante, mais ne sont pas généralement les mêmes telle que la théorie spectrale, l'adjoint et la normalité.

Mots clés : Opérateurs bornés, Opérateurs non bornés, Domaines des opérateurs non bornés.

Abstract

In the theory of function analysis of the bounded and unbounded operators avery important proprietes , suth that the spectral thoery, the adjoint and normality.

Keys words: Bounded operators, Unbounded operators, Domain unbounded operators

---

الملخص

من المعروف انه للمؤثرات المحدودة والغير محدودة أهمية بالغة في التحليل الدالي و خاصة منها الخصائص الطيفية و المرافق و الناظم.

الكلمات المفتاحية: المؤثرات المحدودة, المؤثرات غير المحدودة,مجال المؤثرات غير المحدودة