



**UNIVERSITÉ DE M.SILA**

**FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE**

**DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES**

Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de Master

**Domaine:** Mathématiques et Informatiques

**Filière:** Mathématiques

**Option:** Analyse Fonctionnelle et Numérique

Par

**TITRAOUI Zahra**

## Opérateur Intégral de Fredholm

Devant le jury composé de :

- |                  |              |            |
|------------------|--------------|------------|
| 1) NADIR Mostafa | Univ. M'sila | Président  |
| 2) Amina KHIRANI | Univ. M'sila | Promoteur  |
| 3) DJAIDJA Noui  | Univ. M'sila | Examineurs |

Année: 2018/2019

# *Remerciements*

Je tiens à remercier, en premier lieu, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercier **Amina KHIRANI** directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères et ma soeur qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

# NOTATIONS

$A$	: Opérateur intégral compact
$A_n$	: Suite d'approximation de $A$ .
$k(x, y)$	: Noyau de l'opérateur intégral $A$
$A^{-1}$	: Opérateur inverse de $A$
$A^*$	: Opérateur adjoint de $A$
$T$	: Opérateur de Fredholm $I - A$
$f, g$	: Fonction donnée
$u$	: Fonction continue inconnue
$u_n$	: Suite de fonctions

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction à la théorie des opérateurs intégraux</b>	<b>2</b>
1.1 Opérateur intégral linéaire . . . . .	2
1.2 Opérateur non linéaire . . . . .	3
1.3 Opérateur continu . . . . .	3
1.4 Opérateur inverse . . . . .	5
1.5 Opérateurs bornés . . . . .	5
1.6 Opérateur adjoint : . . . . .	5
1.7 Opérateur Compacts . . . . .	6
1.7.1 Ensembles relativement compacts . . . . .	6
1.8 Opérateur à image fermée . . . . .	8
1.9 Opérateur produit . . . . .	8
1.10 noyaux itérés . . . . .	9
1.11 Opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, auto adjoints . . . . .	9
1.12 Types d'opérateur integral . . . . .	10
<b>2 Opérateur de Fredholm</b>	<b>11</b>
2.1 Définition l opérateur de Fredholm . . . . .	11
2.2 Proposition de Fredholm . . . . .	13
2.3 Théorie de Riesz et Alternative de Fredholm . . . . .	14

<b>3</b>	<b>Introduction aux équations intégrales de Fredholm</b>	<b>17</b>
3.0.1	Introduction aux équations intégrales . . . . .	17
3.1	Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale . . . . .	18
3.2	Existence et unicité de la solution de l'équations de Fredholm . . . . .	23
3.2.1	Opérateurs à noyau compact . . . . .	23
3.2.2	Théorème de la série géométrique de Neumann . . . . .	24
3.3	Relation entre l'équation de Fredholm et les équations différentielles . . . . .	26
3.4	Résolution des équations intégrales . . . . .	28
3.5	Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Fredholm . . . . .	30
	<b>Conclusion générale</b>	<b>41</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>44</b>

# Introduction

Dieu créa l'univers et créa sa création et le fit marcher dans une symphonie universelle décorée de couleurs et de mélodies variées. J'ai ouvert l'appétit du monde et le chercheur pour connaître son secret et son processus, et pour le mettre au service des humains. Pour faciliter le travail et la recherche, ils ont modélisé sous forme d'équations mathématiques.

Lorsque les différentes sciences ont été compliquées par les interférences et développées de manière terrible, les scientifiques ont commencé à étudier des phénomènes naturels, qu'ils soient physiques, chimiques, biologiques ou géométriques. Les équations intégratives de divers types ont joué un rôle important dans la recherche de solutions différentes, tant analytiques que numériques. On sait que l'équation de l'intégralité est une équation dans laquelle l'inconnu est sous le signe de la complémentarité et l'inconnu peut également être ajouté en dehors de l'intégration à une extrémité de l'équation et entre ces équations. L'équation de Fredholm est une équation intégrale développée par le monde Erik Alvar Fredholm, un' équation intégrale qui conduit à la solution du coefficient de Fredholm et théorème de Fredholm.

À la fin du XIXe siècle, les concepts qui allaient être rassemblés furent développés sous le nom d'analyse fonctionnelle. Au début du XXe siècle, les définitions des espaces et opérateurs leur forme actuelle.

À la suite des efforts du mathématicien et physicien italien Vito Volta, qui a essayé de développer des méthodes pour étudier des équations complémentaires.

Au début, il a fait référence à la notion d'opérateurs et l'exemple le plus simple est l'opérateur de la dérivation.

En 1896, dans l'une de ses études, Volta a commencé à envisager un opérateur qui transmet chaque fonction contenu  $f$  à une fonction contenu  $u$  et représente une solution à l'équation intégrale  $f(x) = u(x) - \int_a^x k(x, y)u(y)dy$  où  $k(x, y)$  contenu.

Maintenant, par définition,  $Idu = u$  et  $(Tu)(x) = \int_a^x k(x, y)u(y)dy$ , Volta a prouvé que

$$u = (Id - k)^{-1}f = f + Tf + T^2f + \dots$$

où  $T^n f = T(T^{n-1}f)$

Ces efforts ont été complétés par l'athlète suédois Erik Alvar Fredholm et l'athlète allemand David Hilbert au cours de la première décennie du XXe siècle. Il convient de mentionner ici que durant cette étude, Hilbert est dépendant d'équations complémentaire. Il s'intéresse au rôle joué par la suite réelle.

Les équations de Fredholm apparaissent naturellement dans la théorie du traitement du signal, bien connue dans le problème de la concentration spectrale et généralisée par David Salomon. Les problèmes typiques des modèles linéaires et inverses sont généralement montrés. Dans la physique, la solution d'expériences spectrales d'avoir une par exemple, la distribution en masse d'un polymère chez le polymère responsable ou la distribution des temps de relaxation dans les systèmes.

Le but de ce travail est d'étudier l'opérateur de Fredholm puis prendre comme exemple l'opérateur intégrale de Fredholm.

**Le premier chapitre:** On a fait une introduction à la théorie des opérateurs intégraux

**Le deuxième chapitre:** On présente la définition d'opérateur de Fredholm

**Le troisième chapitre:** On traite les équations intégrales de Fredholm

On termine notre mémoire par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Introduction à la théorie des opérateurs intégraux

### Introduction

Dans ce chapitre, nous avons abordé la définition de l'opérateur intégral (linéaire, non linéaire) et défini certaines caractéristiques qui le caractérisent (continuité, compacité, ...), certaines des opérations ont été effectuées comme le produit, et nous avons passé la définition de ses propriétés secondaires (opérateur isométriques, normaux, ...) et nous avons mentionné quelques types (Fredholm, Volterra, ...).

Notons tout d'abord qu'on se place dans la majeure partie des cas dans l'espace  $C[a, b]$  des fonctions continues de l'intervalle  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \int_a^b u(x)v(x)dx$$

et de la norme de convergence uniforme :

$$\|u\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} |u(x)|$$

### 1.1 Opérateur intégral linéaire

([11]) Soit  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur  $C[a, b]$  est défini par la formule suivante :

$$A : u \in C[a, b] \rightarrow Au \in C[a, b]$$

$$(Au)(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy \quad (1.1.1)$$

Dans ce contexte la fonction  $K$  s'appelle noyau de l'opérateur intégral  $A$ .

## 1.2 Opérateur non linéaire

Dans tout ce qui suit  $\Omega$  désigne un ensemble mesurable de l'espace euclidien. L'objet présent est l'étude de l'équation

$$v(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y, v(y))dy \quad (1.2.1)$$

avec  $x, y$  désignant des variables indépendantes. L'équation plus générale

$$u(x) = g(x) + \int_{\Omega} k(x, y)f(y, u(y))dy$$

dans laquelle  $g(x)$  est une fonction connue, se ramène à l'équation (1.2.1) par la substitution

$$v(y) = u(y) - g(y)$$

## 1.3 Opérateur continu

Nous étudierons les applications linéaires continues d'un espace de Hilbert  $H$  dans lui-même. Une grande partie des théorèmes est également valable pour les applications linéaires continues entre deux espaces de Hilbert  $H$  et  $K$ .

**Proposition 1.3.1** *Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $A : H \rightarrow H$  une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $A$  est continu.
2.  $A$  est continu en 0.
3. Il existe  $x \in H$  tel que  $A$  est continu en  $x$ .
4. Il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\|Ah\| \leq c \|h\|$  pour tout  $h \in H$ .

**Définition 1.3.1** On appelle opérateur  $A$  sur  $H$  une application linéaire continue de  $H$  dans  $H$ . On note  $\mathcal{L}(H)$  l'ensemble des opérateurs sur  $H$ . Si  $A \in \mathcal{L}(H)$ , on définit sa norme par

$$\|A\| = \sup \{\|Ah\| : h \in H; \|h\| \leq 1\}$$

**Proposition 1.3.2** Voici quelques propriétés de la norme.

1. Si  $A \in \mathcal{L}(H)$ , alors  $\|A\| = 0$  si et seulement si  $A = 0$ .
2. Si  $A, B \in \mathcal{L}(H)$ , alors  $A + B \in \mathcal{L}(H)$  et  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ .
3. Si  $\alpha \in K$  et  $A \in \mathcal{L}(H)$ , alors  $\alpha A \in \mathcal{L}(H)$  et  $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ .
4. Si  $A, B \in \mathcal{L}(H)$ , alors  $AB \in \mathcal{L}(H)$  et  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$  ( $AB$  désigne la composition  $A \circ B$ ).

Les trois premiers points de la proposition précédente a rament que  $\|\cdot\|$  définit une norme sur  $\mathcal{L}(H)$ .

**Exemple 1.3.1** Soit  $(X, \Omega, \mu)$  un espace mesuré et  $k : X \times X \rightarrow K$  une fonction  $\Omega \otimes \Omega$ -mesurable telle qu'il existe des constantes  $c_1$  et  $c_2$  vérifiant

$$\int_X |k(x, y)| d\mu(y) \leq c_1 \quad \mu - p.p \infty$$

Alors l'application  $A : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  définie par

$$(Af)(x) = \int_X k(x, y)f(y)d\mu(y)$$

définit un opérateur sur  $H = L^2(\Omega)$ , et  $\|A\| \leq \sqrt{c_1 c_2}$ .

Si  $f \in L^2(\Omega)$ , on écrit

$$\begin{aligned} |Af(x)| &\leq \int_X |k(x, y)| |f(y)| d\mu(y) = \int_X |k(x, y)|^{1/2} |k(x, y)|^{1/2} |f(y)| d\mu(y) \\ &\stackrel{CS}{\leq} \left( \int_X |k(x, y)| d\mu(y) \right)^{1/2} \left( \int_X |k(x, y)| |f(y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{c_1} \left( \int_X |k(x, y)| |f(y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_X |Af(x)|^2 d(x) &\leq c_1 \int_X \int_X |k(x, y)| |f(y)|^2 d\mu(x)d\mu(y) = c_1 \int_X |f(y)|^2 \int_X |k(x, y)| d\mu(x)d\mu(y) \\ &\leq c_1 c_2 \|f\|^2 \end{aligned}$$

Ceci montre que  $Af$  est bien défini, que  $Af \in L^2(\Omega)$ , et que  $A$  est un opérateur sur  $L^2(\Omega)$  vérifiant  $\|Af\|^2 \leq c_1 c_2 \|f\|^2$ , donc  $\|A\| \leq \sqrt{c_1 c_2}$ .

L'opérateur  $A$  défini ainsi s'appelle un opérateur intégral et  $k$  s'appelle le noyau de  $A$

## 1.4 Opérateur inverse

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés. Un opérateur  $T : E \rightarrow F$  est dit inversible s'il existe un opérateur borné  $S : F \rightarrow E$  de domaine  $D(S) = F$ , tel que

$$TS = Id_F \text{ et } ST = Id_{D(T)}$$

## 1.5 Opérateurs bornés

Un opérateur linéaire  $A$  défini sur  $E$  dans  $F$  est dit borné s'il existe une constante positive  $C > 0$ , telle que

$$\|A(x)\|_F \leq C \|x\|_E, \text{ pour tout } x \in E$$

## 1.6 Opérateur adjoint :

**Définition 1.6.1** ([11]) Soit  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert, on dit que deux opérateurs  $A : C(X) \rightarrow C(Y)$  et  $B : C(X) \rightarrow C(Y)$  sont adjoints s'ils vérifient

$$\text{pour tout } \langle u, v \rangle \in X^2 : \langle Au, v \rangle = \langle u, Bv \rangle$$

et on note l'adjoint de  $A$  par  $A^*$ .

**Proposition 1.6.1** ([13]) Soit  $A$  un opérateur intégral défini à partir d'un noyau  $K$  continu sur  $[a, b] \times [a, b]$  par la formule suivante

$$\text{pour tout } x \in [a, b], Au(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

Alors, l'opérateur  $A$  admet un unique opérateur adjoint  $A^*$  pour le produit scalaire usuel de  $\mathcal{L}^2$ . Pour tout  $x \in [a, b]$

$$A^*(vx) = \int_a^b K(y, x)v(y)dy$$

**Preuve.** Pour  $u, v$  et deux fonctions de  $C([a, b])$ , on a

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, A^*v \rangle$$

donc

$$\begin{aligned} \int_a^b u(y)A^*(v(y))dy &= \int_a^b Au(x)v(x)dx \\ &= \int_a^b \left( \int_a^b K(x, y)u(y)dy \right) v(x)dx. \end{aligned}$$

En vertu du théorème de Fubini relatif aux intégrales doubles, on établit que

$$\begin{aligned} \langle Au(x), v(x) \rangle &= \int_a^b \int_a^b [K(x, y)v(x)dx]u(y)dy \\ &= \int_a^b u(y) \left[ \int_a^b K(x, y)v(x)dx \right] dy \\ &= \int_a^b u(y)A^*(v)(y)dy \end{aligned}$$

il en résulte que l'adjoint  $A$  est défini pour tout  $x$  dans  $[a, b]$  par

$$A^*v(x) = \int_a^b K(y, x)v(y)dy$$

■

## 1.7 Opérateur Compacts

Soit  $A$  un opérateur linéaire d'un espace normé  $E$  dans un espace normé  $F$ , on dit que  $A$  est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné  $G$  dans  $E$  à un ensemble relativement compact  $A(G)$  dans  $F$ . Autrement dit la fermeture  $\overline{A(G)}$  est compacte.

### 1.7.1 Ensembles relativement compacts

Un ensemble  $G \subset E$  est relativement compact si pour toute suite  $\{u_n\}$  de  $G$ , il existe une sous suite  $\{u_{n_k}\}$  qui converge dans  $F$ .

Soit  $A$  un opérateurs linéaire défini d'un espace normé  $E$  dans un autre  $F$ , on dit que  $A$  est compact si et seulement si pour toute suite bornée  $u_n$  de  $E$ , la suite  $Au_n$  contient une sous suite convergente de  $F$ :

**Théorème 1.7.1** Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes

(a)  $A$  est compact.

(b)  $A^*$  est compact.

(c) Il existe une suite  $(A_n)$  d'opérateurs de rang fini qui converge vers  $A$  (pour la norme opérateur).

**Théorème 1.7.2** ([11]) L'opérateur intégral défini en  $(Au)(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy$  est compact sur  $(C[a, b]; \|\cdot\|_\infty)$ .

**Preuve.** Désignons par  $B$  la boule unité de  $C[a, b]$ , pour montrer que notre opérateur est compact on s'inspire du théorème d'Ascoli, il suffit d'établir que

-  $H = A(B)$  est équicontinu.

- pour tout  $x \in [a, b]$  l'ensemble  $H_x = \{u(x) : u \in H\}$

On remarque en premier que  $K$  est uniformément continue sur  $[a, b] \times [a, b]$ . Pour tout  $u$  de  $B$  et tout  $x, x'$  de  $[a, b]$  on écrit

$$\begin{aligned} |Au(x) - Au(x')| &= \left| \int_a^b (K(x, y) - K(x', y)) u(y) dy \right| \\ &\leq \left| \int_a^b K(x, y) - K(x', y) \right| |u(y)| dy \\ &\leq \|u\|_\infty \left| \int_a^b K(x, y) - K(x', y) dy \right| \\ &\leq \left| \int_a^b K(x, y) - K(x', y) dy \right| \end{aligned}$$

La continuité uniforme de  $K$  sur  $[a, b] \times [a, b]$  permet d'associer à tout réel  $\varepsilon > 0$  et autre réel  $\alpha > 0$  de sorte que

$$|x - x'| \leq \alpha \implies |K(x, y) - K(x', y)| \leq \frac{\varepsilon}{b - a}$$

donc

$$|x - x'| \leq \alpha \implies |Au(x) - Au(x')| \leq \varepsilon, \quad \forall u \in B$$

ce qui signifie que  $H$  est équicontinu. Passons à la seconde condition. Pour que l'ensemble  $H_x = \{g(x) = Au(x) : u \in B\}$  soit relativement compact, il suffit qu'il soit borné calculons à cet effet

$$|Au(x)| = |g(x)| = \int_a^b K(x, y)u(y) dy \leq \|u\|_\infty \int_a^b \sup_{x, y \in [a, b]} |K(x, y)| dy \leq (b - a)M$$

$M = \sup_{x, y \in [a, b]} |K(x, y)|$  : Il apparait ainsi que  $H_x$  est borné, ce qui achève la démonstration

■

## 1.8 Opérateur à image fermée

**Définition 1.8.1** *On dit qu'un opérateur  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est d' image fermée si  $\dim \text{Im}(A) < \infty$ . Il est clair qu'un opérateur continu de rang fini est compact.*

**Corollaire 1.8.1** *Soit  $(A_n)$  une suite d'opérateurs continus d' image fermée de  $E$  dans  $F$  et soit  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  tels que  $\|A_n - A\|_{\mathcal{L}(E, F)} \rightarrow 0$ . Alors  $A$  est un compact.*

**Lemme 1.8.1** *(Lemme de Reisz).*

*Soit  $E$  un e. v. n. et soit  $M \subset E$  un sous-espace fermé tel que  $M \neq E$ . Alors*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists u \in E \text{ tel que } \|u\| = 1 \text{ et } \text{dist}(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

## 1.9 Opérateur produit

Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux opérateurs intégraux sur  $L^p(E)$  avec des noyaux  $K_1$  et  $K_2$  respectivement, l'opérateur produit noté  $A_1A_2$  envoie aussi  $L^p(E)$  dans  $L^p(E)$ , où

$$(A_1A_2)u = A_1(A_2u)$$

Si les noyaux  $K_1$  et  $K_2$  justifient l'inter changement de l'ordre d'intégration alors, on peut déduire le noyau  $K$  du produit  $A_1A_2$  en fonction de  $K_1$  et  $K_2$ .

$$\begin{aligned} A_1A_2u(x) &= \int K_1(x, z)A_2u(z)dz \\ &= \int K_1(x, z)dz \int K_2(z, y)u(y)dy \\ &= \int u(y)dy \int K_1(x, z)K_2(z, y)dz. \end{aligned}$$

D'où l'opérateur  $A_1A_2$  est un opérateur intégral de noyau,

$$K(x, y) = \int K_1(x, z)K_2(z, y)dz.$$

Notons que si, on prend  $A_1 = A_2 = A$ , de noyau  $K_1 = K_2 = K$ , alors l'opérateur  $A_1A_2 = A^2$  admet le noyau  $K_2(x, y)$  donné par

$$K_2(x, y) = \int K(x, z)K_1(z, y)dz,$$

par itération le noyau  $K_n(x, y)$  de  $A^n$  est

$$K_n(x, y) = \int K(x, z)K_{n-1}(z, y)dz.$$

Dans la suite le noyau  $K_n(x, y)$  sera appelé noyau itéré de  $K(x, y)$ .

## 1.10 noyaux itérés

Le noyau  $k_n(x, y)$  de l'opérateur intégral produit  $A^n u(x) = A(A^{n-1}u(x))$  est dit noyau itéré du noyau  $k(x, y)$ , donné par

$$k_n(x, y) = \int k(x, z)k_{n-1}(z, y) dz$$

## 1.11 Opérateurs isométriques, normaux, unitaires, positifs, auto adjoints

**Définition 1.11.1** ([1]) Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Hilbert.

1. Un élément  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est appelé **unitaire** si  $A^*A = Id_E$  et  $AA^* = Id_F$  ( $A$  est inversible  $A^{-1} = A^*$ ).
2. Un élément  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est appelé **isométrique** si  $|A(x)| = |x|$  pour tout  $x \in E$ .
3. Un élément  $N \in \mathcal{L}(E)$  est appelé **normal** si  $N^*N = NN^*$ .
4. Un élément  $S \in \mathcal{L}(E)$  est appelé **hermitien** ou **auto adjoint** si  $S = S^*$ .
5. Un élément  $P \in \mathcal{L}(E)$  est appelé **positif** (notation  $:P \geq 0$ ) si  $P$  est auto adjoint et si pour tout  $x \in E$  :  $\langle P(x), x \rangle \geq 0$ .

## 1.12 Types d'opérateur integral

**Définition 1.12.1** Soient  $I = [a, b]$  un intervalle borné et fermé de  $\mathbb{R}$

L'opérateur intégrale de Fredholm telles que la région d'intégration est finie est:  $Id - \lambda \int_a^b K(x, y, u(y))dy$

L'opérateur intégrale de Volterra est:  $Id - \lambda \int_a^x K(x, y, u(y))dy$

L'opérateur intégral de Wiener-Hopf un opérateur de la forme  $Id - \lambda \int_a^\infty K(x - y)u(y)dy$

L'opérateur intégral de Renwal l'opérateur intégral de la forme  $Id - \lambda \int_a^x K(x - y)u(y)dy$

L'opérateur intégral d'Abel un opérateur de la forme  $Id - \int_a^x \frac{u(y)}{(x-y)^\alpha} dy$

# Chapitre 2

## Opérateur de Fredholm

### Introduction

Ce chapitre est un aperçu sur l'opérateur de Fredholm, puis nous présentons Théorie de Riesz et Alternative de Fredholm comme étant le Proposition de Fredholm.

### 2.1 Définition l opérateur de Fredholm

**Définition 2.1.1** ([1]) Soit  $E$  un espace de Banach et  $T \in \mathcal{L}(E)$  on dit que  $T$  est un opérateur de Fredholm si les 3 conditions suivantes sont satisfaites :

- L'image de  $T$  est fermée.
- Le noyau de  $T$  est de dimension finie.
- L'image de  $T$  est de codimension finie.

On note alors  $Ind(T) := \dim(\ker T) - \text{codim}(Im T)$  et le nombre entier s'appelle l'indice de  $T$

**Lemme 2.1.1** Soit  $E$  un Banach,  $F$  un s.e.v de dimension finie. Alors il existe  $M$  fermé tel que  $E = F \oplus M$ .

**Preuve.** Soit  $F$  de base  $(e_1, \dots, e_n)$ . On définit les coordonnées  $e_i^*$  par  $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$ .

Sur  $F$ , les  $e_i^*$  sont continues donc par Hahn-Banach, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  prolongements continus des  $e_i^*$ .

Soit  $M = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker} \lambda_i$  qui est fermé car les  $\lambda_i$  sont continues. On montre que  $E = F \oplus M$ .

$F \cap M = \{0\}$  car si  $x \in F \cap M$ ,  $\lambda_i(x) = 0$  pour tout  $i$  donc  $x = 0$  car  $x \in F$ .

Soit  $y \in E$ , on pose  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i(y)$  ei. On a  $\lambda_i(x) = \lambda_i(y)$  donc  $y - x \in \text{Ker} \lambda_i$  donc  $y - x \in M$  et  $E \subset F \oplus M$ . ■

**Proposition 2.1.1** ([14]) *Un opérateur de Fredholm, en conséquence on a la formule*

$$\text{ind}(T) = \text{dimker}(T) - \text{dimker}(T^*)$$

**Preuve.** Soit  $T$  un opérateur de Fredholm. Quitte à remplacer  $T$  par  $T|_{\text{ker}(T)^\perp}$ , on peut supposer que  $T$  est injectif. Comme  $\text{Im}T$  est de codimensions finie, il existe  $y_1, \dots, y_n \in H$  tels que  $(\text{Im}(T) + y_1, \dots, \text{Im}(T) + y_n)$  soit une base de  $H/\text{Im}(T)$ . Définissons un opérateur  $T : H \oplus \mathbb{R}^n \rightarrow H$  par

$$T(x, v) = Tx + \sum_{j=1}^n v_j y_j$$

Alors  $T$  est continu et bijectif, et donc inversible par le théorème de l'opérateur inverse. Ainsi il existe une constante  $c > 0$  telle que  $\|T(x, v)\| > c\|(x, v)\|$  pour tous  $x, v$ . En particulier  $\|Tx\| > c\|x\|$  pour tout  $x$ , ce qui implique que  $\text{Im}T$  est fermé. ■

**Théorème 2.1.1** ([1]) *(Alternative de Fredholm)*

Soient  $E$  un espace de Banach,  $A \in \mathcal{L}(E)$  un opérateur compact et  $T = \text{Id}_E - A$ . Alors  $T$  est un opérateur de Fredholm et  $\text{Ind}(T) = 0$ .

**Preuve.** Voir [1] ■

**Remarque 2.1.1** ([2])

a) L'application  $T \rightarrow \text{Ind}T$  est continue

b) Tout opérateur  $T$  de Fredholm est inversible module i.e. il existe  $S \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que  $(T \circ S - \text{Id}_F)$  et  $(S \circ T - \text{Id}_E)$  soient d' image finis.

Inversement si  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  et s'il existe  $S \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que  $T \circ S - \text{Id}_F \in \text{Im}(F)$  et  $S \circ T - \text{Id}_E \in \text{Im}(E)$ , alors  $T$  de Fredholm.

c) Si  $T$  de Fredholm et si  $S \in \mathcal{L}(E, F)$  alors  $T + S$  de Fredholm et  $\text{Ind}(T + S) = \text{Ind}T$ .

d) Si  $T$  de Fredholm et  $S$  de Fredholm alors  $S \circ T$  de Fredholm et  $\text{Ind}(S \circ T) = \text{Ind}(T) + \text{Ind}(S)$ .

**Remarque 2.1.2** L'opérateur intégral défini par  $(\text{Id} - \int_a^b K(x, y)u(y)dy)$  avec  $k(x, y)$  une fonction continue est un opérateur de Fredholm.

## 2.2 Proposition de Fredholm

Comme exemple d'opérateurs de Fredholm citons les opérateurs du type  $(\lambda Id - A)$  avec  $A$  un opérateur compact et  $\lambda \neq 0$ .

Le théorème suivant donne une caractérisation des opérateurs de Fredholm.

**Théorème 2.2.1** ([3])  *$T \in \mathcal{L}(X, Y)$  est Fredholm si et seulement si il existe un opérateur  $S \in \mathcal{L}(Y, X)$  tel que  $(AS - Id)$  et  $(SA - Id)$  sont compacts.*

**Théorème 2.2.2** *Si  $T$  est opérateur de Fredholm et  $S$  est opérateur de Fredholm alors,  $ST$  est opérateur de Fredholm et  $ind(ST) = ind(S) + ind(T)$ .*

La réciproque de ce théorème n'est pas vraie en générale mais si  $S$  et  $T$  commutent ( $ST = TS$ ) on a  $ST$  est Fredholm implique  $S$  et  $T$  sont tous les deux de Fredholm. On trouve par contre le résultat important suivant :

**Théorème 2.2.3** *Soient  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  et  $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$  tel que  $ST$  est opérateur de Fredholm alors  $T$  est opérateur de Fredholm si et seulement si  $S$  est un opérateur de Fredholm.*

**Théorème 2.2.4** ([3]) *Soit  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  si  $\ker(T)$  est fermé alors*

$$\dim(\text{Im}(T^*)) = \text{co dim}(\ker(T)) \quad \text{et} \quad \dim(\text{Im}(T)) = \text{co dim}(\ker(T^*))$$

*Si  $T : X \rightarrow Y$  opérateurs de Fredholm alors son adjoint  $T^* : Y^* \rightarrow X^*$  opérateurs de Fredholm et  $ind(T^*) = -ind(T)$ .*

Une caractérisation de la structure des opérateurs de Fredholm est donnée dans le théorème suivant :

**Théorème 2.2.5** ([3]) *Si  $T : X \rightarrow Y$  opérateurs de Fredholm on a les décompositions  $X = X_0 \oplus X_1$  et  $Y = Y_0 \oplus Y_1$  telles que :*

- (i)  $X_0$  et  $Y_0$  sont des sous-espaces fermés respectivement de  $X$  et  $Y$ ,
- (ii)  $X_1$  et  $Y_1$  sont de dimensions finies ,
- (iii)  $X_1 = \text{Im}(T)$  et  $Y_0 = \ker(T)$ ,
- (iv)  $ind(T) = \dim(X_1) - \dim(Y_1)$ ,

(v)  $T$  a la représentation matricielle suivante :

$$T = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $T_0 : X_0 \rightarrow Y_0$  est bijectif.

## 2.3 Théorie de Riesz et Alternative de Fredholm

**Théorème 2.3.1** ([2]) Soit  $A \in K(E)$ . Alors

- a)  $\ker(Id - A)$  est de dimension finie,
- b)  $\text{Im}(Id - A)$  est fermé, et plus précisément

$$\text{Im}(Id - A) = \ker(Id - A^*)^\perp$$

- c)  $\ker(Id - A) = \{0\} \iff \text{Im}(Id - A) = E$
- d)  $\dim \ker(Id - A) = \dim \ker(Id - A^*)$ .

**Remarque 2.3.1** ([2]) le théorème précédent concerne la résolution de l'équation  $u - Au = f$  elle exprime que :

ou bien pour tout  $f \in E$  l'équation  $u - Au = f$  admet une solution unique, ou bien l'équation homogène  $u - Au = 0$  admet  $n$  solutions linéairement indépendantes et, dans ce cas, l'équation non homogène  $u - Au = f$  est résoluble si et seulement si  $f$  vérifie  $n$  conditions d'orthogonalité (i.e.  $f \in \ker(Id - A^*)^\perp$ ).

**Théorème 2.3.2** ([3])  $A$  défini sur  $\mathcal{L}(X)$  et  $\lambda \neq 0$ , alors on a :

- (i) Soit l'équation homogène a zéro comme solution, dans ce cas  $\lambda$  est spectre de  $A$  et l'équation non homogène a exactement une solution  $f = (\lambda Id - A)^{-1}g$  pour tout  $g \in X$ .
- (ii) Soit l'équation homogène a une solution non nulle, et dans ce cas l'équation non homogène a une solution (non nécessairement unique) si et seulement si  $\langle g, f^* \rangle = 0$  pour toute solution  $f^*$  de l'équation adjointe :  $\lambda f^* = A^* f^*$  (i.e  $g \in N(\lambda Id - A^*)^\perp$ ).

**Théorème 2.3.3** Il existe un unique nombre entier non négative  $r$ , dit le nombre de Riesz de l'opérateur compact  $A$ , tel que:

$$\{0\} = \ker(T^0) \subsetneq \ker(T^1) \subsetneq \dots \subsetneq \ker(T^r) = \ker(T^{r+1}) = \dots,$$

et

$$H = \text{Im } T^0 \supsetneq \text{Im } T^1 \supsetneq \dots \supsetneq \text{Im } T^r = \text{Im } T^{r+1} = \dots$$

En outre, nous avons la somme directe

$$H = \text{Ker}(T^r) \oplus \text{Im}(T^r)$$

i.e., pour chaque  $u \in H$ , il existe un unique  $x \in \text{Ker}(T^r)$  et un unique  $y \in \text{Im}(T^r)$ , tel que,  $u = x + y$ .

**Lemme 2.3.1** Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur compact, et posons  $T = Id - A$ . Soit  $M \subset H$  un sous-espace fermé tel que  $T|_M$  est injectif. Alors il existe  $c > 0$  tel que  $\|Tx\| > c\|x\|$  pour tout  $x$  dans  $M$ , et donc  $T(M)$  est un sous-espace fermé.

**Preuve.** Sinon, il existerait une suite  $(x_n)$  dans  $M$  avec  $\|x_n\| = 1$  et  $T(x_n) \rightarrow 0$ . Comme  $A$  est compact, quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que  $(Ax_n)$  converge, mais comme  $Id = T + A$ , la suite  $(x_n)$  converge aussi, soit  $x \in M$  sa limite. On obtient  $Tx = 0$  ce qui contredit l'hypothèse. Pour démontrer que  $T(M)$  est fermé, soit  $(y_n)$  une suite dans  $M$  telle que  $(Ty_n)$  converge.

L'inégalité démontrée précédemment implique que  $(y_n)$  est aussi de Cauchy, donc converge. Si on note  $y$  sa limite, alors  $\lim Ty_n = Ty \in T(M)$ . ■

**Théorème 2.3.4** ([14]) Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur compact, et  $T = Id - A$ . Alors  $T$  est surjectif si et seulement si il est injectif.

**Preuve.** Supposons  $T$  surjectif et non injectif. Montrons par récurrence que  $\text{ker}(T^n) \neq \text{ker}(T^{n+1})$ . Pour l'étape de récurrence, soit  $x \in \text{ker}(T^{n+1}) \setminus \text{ker}(T^n)$ . Comme  $T$  est surjectif, il existe  $y \in H$  tel que  $x = Ty$ . Alors  $y \in \text{ker}(T^{n+2}) \setminus \text{ker}(T^{n+1})$ .

De même, supposons  $T$  injectif et non surjectif. Montrons par récurrence que  $\text{Im}(T^n) \neq \text{Im}(T^{n+1})$ .

En effet, si  $x \in \text{Im}(T^n) \setminus \text{Im}(T^{n+1})$ , alors  $Tx \in \text{Im}(T^{n+1})$  et  $Tx \notin \text{Im}(T^{n+2})$  (utiliser l'injectivité de  $T$ ).

Dans les deux cas on conclut par le corollaire précédent ■

**Lemme 2.3.2** *Soit  $A \in \mathcal{L}(H)$  un opérateur compact, et  $T = Id - A$ . Alors  $\ker T$  est de dimension finie et  $\text{Im}T$  est fermé.*

**Définition 2.3.1** *Si  $H$  est un espace de Hilbert et  $F \subset H$  un sous-espace vectoriel (non supposé fermé), on appelle codimension de  $F$  la dimension de  $H \setminus F$ . On note  $\text{codim}F = \dim(H \setminus F)$ . Ici  $H \setminus F$  est l'espace vectoriel quotient, qui est une notion purement algébrique et n'utilise pas la structure d'espace de Hilbert.*

*Lorsque  $F$  est fermé, on a la somme directe  $H = F \oplus F^\perp$ , donc  $H \setminus F$  est isomorphe à  $F^\perp$  et  $\text{codim}F = \dim(F^\perp)$ .*

# Chapitre 3

## Introduction aux équations intégrales de Fredholm

### Introduction

Nous présentons dans ce chapitre un aperçu des équations intégrales de Fredholm de type  $Id - A$ . Nous allons étudier l'existence et l'unicité de la solution d'une équation intégrale. Puis on va calculé une approximation par la méthode des trapèzes.

#### 3.0.1 Introduction aux équations intégrales

**Définition 3.0.2** ([11]) *Toute équation fonctionnelle*

$$u(x) + f(x) = \lambda \int_E K(x, y, u) dy, \quad x \in E$$

$$f(x) = \lambda \int_E K(x, y, u) dy, \quad x \in E$$

*est appelée équation intégrale (EI) ou  $u$  est l'inconnue,  $f$  est une fonction donnée,  $E$  est un ensemble fermé borné et mesurable d'un espace euclidien,  $K$  est le noyau,  $\lambda$  un constant a une signification physique sur les propriétés de matière.*

## EQUATIONS INTEGRALES LINEAIRES

**Définition 3.0.3** ([4]) Soient  $I = [a, b]$  un intervalle borné et fermé de  $\mathbb{R}$  équations intégrales de Fredholm telles que la région d'intégration est finie est :

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y, u)dy$$

1) Si  $h(x) = 0$ , l'équation s'écrit

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = 0$$

et elle est dite de première espèce.

2) Si  $h(x) = 1$ , l'équation s'écrit

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

et elle est dite de seconde espèce.

3) Si  $h(x)$  est continue et s'annule en certains points, mais pas en tout point de  $[a, b]$ , elle est dite de troisième espèce.

4) Si  $f(x) = 0$ , l'équation s'écrit

$$u(x) = \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt$$

et elle est dite homogène.

**Remarque 3.0.2** Une équation intégrale est une équation dans laquelle l'inconnu, généralement une fonction d'une ou plusieurs variables, s'apparaît sous le signe intégral. Nous allons s'intéresser beaucoup plus aux équations intégrales non-linéaires dont les formes suivantes

$$u(x) + f(x) = \lambda \int_{\Omega} k(x, t)F(x, t, u(t))dt$$

## 3.1 Existence et unicité de la solution d'une équation intégrale

([12]) Soit l'équation intégrale de second ordre

$$u - Au = f$$

L'unicité et l'existence de la solution peut être donnée par la série de "Neumann" pourvu que l'opérateur  $A$  soit une contraction  $\|A\| \leq 1$

**Lemme 3.1.1** *Soit  $T \in \mathcal{L}(H)$  avec  $\|A - Id\| < 1$ . Alors  $T$  est inversible et on a la formule suivante (dite série de Neumann)*

$$T^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (Id - A)^n$$

**Preuve.** Posons  $S = Id - T$ , et soit  $r := \|S\|$ , on a  $r < 1$ . Puisque  $\|S^n\| \leq \|S\|^n = r^n$ , la série  $\sum \|S^n\|$  converge et donc la série  $R := \sum_{n=0}^{\infty} S^n$  converge normalement. On a

$$(Id + S + S^2 + \dots + S^n)(Id - S) = (Id + S + \dots + S^n)(S + S^2 + \dots + S^{n+1}) = Id - S^{n+1}.$$

Come  $\|S^{n+1}\| \rightarrow 0$ , on a  $R(Id - S) = Id$ . De même, on a  $(Id - S)R = Id$ . Ainsi  $T = Id - S$  est inversible et  $T^{-1} = R$ . ■

**Théorème 3.1.1** ([12]) *Soit  $A$  un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach.  $X$  dans lui même avec  $\|A\| \leq 1$  et soit  $Id$  l'opérateur identique dans  $X$  alors  $Id - A$  admet un opérateur inverse borné donné par la série de Neumann*

$$(Id - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

de plus

$$\|(Id - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

*Approximation successive:*

*Il est a remarquer que la somme partielle  $A^k f$  de la série de Neumann vérifie l'équation*

$$u_{n+1} = Au_n + f$$

**Preuve.** De la relation  $\|A\| \leq 1$ , on a la convergence absolue

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1 - \|A\|}$$

Dans l'espace de Banach  $\mathcal{L}(E)$ , par conséquent la série de Neumann converge en norme et définit un opérateur linéaire borné

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

avec la relation

$$\|S\| \leq (1 - \|A\|)^{-1}$$

de plus  $S$  est l'inverse de  $(Id - A)$ .

En effet, utilisons les notations  $A^0 = Id$  et  $A^k = AA^{k-1}$ , on peut voir que

$$S(Id - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k (Id - A) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Id - A)^{n+1} = Id$$

aussi

$$(Id - A)S = (Id - A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k = \lim_{n \rightarrow \infty} (Id - A^{n+1}) = Id$$

puisque la norme

$$\|A^{n+1}\| \leq \|A\|^{n+1} \rightarrow 0 \quad , \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

■

**Théorème 3.1.2** ([12]) *Soit  $A$  un opérateur linéaire borné d'un espace de Banach  $X$  dans lui-même avec  $\|A\| \leq 1$  et soit l'opérateur  $Id$  l'opérateur identique dans  $X$  alors pour tout  $f \in X$  :*

*L'approximation successive*

$$u_{n+1} = Au_n + f$$

*Avec  $u_0$  un vecteur arbitraire de  $X$  converge vers une unique solution de l'équation*

$$u - Au = f$$

**Preuve.** Il est aisé de voir que de la relation précédente, on a

$$u_0 = f$$

$$u_1 = Au_0 + f = Af + f$$

$$u_2 = Au_1 + f = A^2f + Af + f$$

.

.

.

$$u_{n+1} = Au_n + f = A \sum_{k=0}^n A^k f + f = A^{n+1} f + \sum_{k=0}^n A^k f$$

D'où

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} (A^{n+1}f + \sum_{k=0}^n A^k f) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n A^k f &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k f \\ &= Sf + (Id - A)^{-1}f\end{aligned}$$

On remarque que l'application de ces résultats d'analyse fonctionnelle aux équations intégrales est évidente.

Est à remarquer que

$$\begin{aligned}u_n &= \sum_{k=0}^n A^k f = A^n f + \sum_{k=0}^{n-1} A^k f = A^n u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^k f \\ \lim_{n \rightarrow \infty} u_n &= \sum_{k=0}^{\infty} A^k f = (Id - A)^{-1}f\end{aligned}$$

■

**Corollaire 3.1.1** ([12]) Soit  $K$  un noyau continu vérifiant la relation max

$$\max \int_G |K(x; y)| dy \leq 1$$

Alors pour tout  $f \in X$  l'équation intégrale de seconde espèce

$$u(x) - \int_G |K(x, y)| u(y) dy = f(x)$$

admette une solution unique  $u \in C(G)$  de plus l'approximation successive

$$u_{n+1}(x) = \int_G |K(x, y)| u_n(y) dy + f(x)$$

Converge uniformément vers la solution  $u$  pour tout vecteur arbitraire  $u_0$  de  $C(G)$ .

**Théorème 3.1.3** ([12]) Soit  $A$  un opérateur compact d'un espace normé  $X$  dans lui-même alors pour que l'équation non homogène

$$Tu = u - Au = f$$

admette une solution unique  $u \in X$  pour tout  $f \in X$  il suffit que l'équation homogène

$$Tu = u - Au = 0$$

admette la solution triviale

$$u = 0$$

**Preuve.** ([12]) en effet, supposons que l'équation

$$u - Au = f$$

admette une solution pour tout  $f \in X$  alors veut dire que l'opérateur  $T$  est surjectif et le nombre de Reisz est nul ■

**Théorème 3.1.4** ([12]) (alternative de Fredholm)

Soit  $A$  un opérateur compact défini sur un espace de Hilbert  $X$  a valeurs dans  $X$  et soit l'équation

$$u - Au = f \tag{3.1.1}$$

et sont adjoint

$$v - A^*v = g \tag{3.1.2}$$

Alors l'équation (3.1.1) et (3.1.2) admettent la solution unique pour tout second nombre si l'équation homogène

$$u - Au = 0$$

$$v - A^*v = 0$$

Possède uniquement les solutions triviales  $u = 0$  et  $v = 0$ . Ou bien les équations homogènes Possède le même nombre fini des solutions linéairement indépendantes  $u_1, u_2, \dots, u_n$  et  $v_1, v_2, \dots, v_n$  respectivement et les équations (3.1.1) et (3.1.2) sont solvable si seulement si on a

$$\langle f, v_k \rangle = 0$$

$$\langle g, u_k \rangle = 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

La solution générale de (3.1.1) et donné par

$$u = u_0 + \sum_{k=0}^n \alpha_k u_k$$

Celle de l'équation (3.1.2)

$$v = v_0 + \sum_{k=0}^n \alpha_k v_k$$

Ou  $v_0, u_0$  sont des solutions particulière quelconques des équations (3.1.1) et (3.1.2) respectivement,

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  des constantes arbitraires

## 3.2 Existence et unicité de la solution de l'équations de Fredholm

Pour résoudre une équation avec les méthodes classiques, il faut connaître l'existence de la solution. Le théorème de l'alternative de Fredholm donne des conditions sur l'espace  $X$  et sur l'opérateur linéaire  $A$ , il faut connaître l'unicité de la solution en théorème de Riesz.

$$(Id - A)u = f, \quad u \text{ et } f \in X$$

on rappelle que le problème général est défini par

$$(\lambda Id - A)u = f, \quad \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } u, f \in X$$

### 3.2.1 Opérateurs à noyau compact

L'équation qui va nous intéresser dans la suite de cette section est l'équation de Fredholm du second type

$$\lambda u(x) - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = f(x) \quad \Omega \subset \mathbb{R}$$

On désigne par un ensemble compact inclu dans  $\mathbb{R}$  et soit  $C(\Omega)$  l'espace des fonctions continues on lui associe le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$$

cet espace est muni de la norme uniforme

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in \Omega} |f(x)|$$

On va considérer des équations intégrales, sous la forme d'un opérateur linéaire

**Définition 3.2.1** Soit  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue on appelle opérateur intégrale à noyau  $K(.,.)$  l'opérateur défini par

$$A : u \in C(\Omega) \rightarrow A(u) \in C(\Omega)$$

$$A(u(x)) = \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy$$

Cet opérateur est continu, de norme

$$\|A\|_{\mathcal{L}(C(\Omega), C(\Omega))} = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x, y)| dy$$

### 3.2.2 Théorème de la série géométrique de Neumann

**Théorème 3.2.1** Soit  $X$  un espace de Banach,  $A$  un opérateur linéaire borné,  $A \in \mathcal{L}(X)$  et  $Id$  opérateur identique. Supposons que

$$\|A\| < 1$$

Alors l'opérateur  $(Id - A)$  est inversible dans  $X$  et  $(Id - A)^{-1}$  est borné tel que

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \quad (3.2.1)$$

**Preuve.** Soit  $(M_n)$  la suite définie par

$$M_n = \sum_{i=0}^n A^i \quad n \geq 0$$

On a

$$\|M_{n+p} - M_n\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{n+p} A^i \right\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|A^i\| \leq \sum_{i=n+1}^{n+p} \|A\|^i$$

d'où

$$\|M_{n+p} - M_n\| \leq \frac{\|A\|^{n+1}}{1 - \|A\|}$$

Par conséquent on a

$$\sup_{p \geq 1} \|M_{n+p} - M_n\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

donc la suite  $(M_n)$  est une suite de Cauchy dans l'espace complet  $\mathcal{L}(X)$  donc il existe  $M \in \mathcal{L}(X)$  tel que

$$\|M_n - M\| \rightarrow 0$$

On remarque aussi

$$(Id - A)M_n = M_n(Id - A) = Id - A^{n+1}$$

Si  $n \rightarrow \infty$  on obtain

$$(Id - A)M = M(Id - A) = Id$$

Ce qui permet de dire que l'opérateur  $(Id - A)$  est inversible et on a

$$M = (Id - A)^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n A^i = \sum_{i=0}^{+\infty} A^i$$

Ici  $M = (Id - A)^{-1}$  est la somme de la série de Neumann  $\sum A^i$ . Il reste à montrer (3.2.1) puisque

$$\|M_n\| = \left\| \sum_{i=0}^n A^i \right\| \leq \sum_{i=0}^n \|A\|^i \leq \frac{1}{1 - \|A\|}$$

donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n\| &= \|M\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \\ \|(Id - A)^{-1}\| &\leq \frac{1}{1 - \|A\|} \end{aligned}$$

■

**Remarque 3.2.1** *Sous les hypothèses du théorème précédent pour tout  $f \in X$  l'équation  $(Id - A)u = f$  admet une solution unique dans  $X$  telle que  $u = (Id - A)^{-1} f \in X$*

**Exemple 3.2.1** *Considérons l'équation intégrale de Fredholm du second type*

$$\lambda u(x) - \int_{\Omega} K(x, y)u(y)dy = f(x) \quad \Omega \subset \mathbb{R} \quad (3.2.2)$$

*On suppose que  $\lambda \neq 0$  la fonction  $K : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est continue sur  $\Omega \times \Omega$  de plus  $X = C(\Omega)$  muni de la norme uniforme  $\|\cdot\|_{\infty}$  symboliquement l'équation (3.2.2) s'écrit sous la forme*

$$(\lambda Id - K)u = f$$

*En remarquant que*

$$(Id - A)u = \frac{1}{\lambda}f \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{\lambda}K$$

*et en appliquant le résultat du théorème précédent*

$$\|A\| = \frac{1}{|\lambda|} \|K\| < 1$$

Ou bien

$$\|K\| = \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} |K(x; y)| dy < |\lambda| \quad (3.2.3)$$

dans ce cas l'opérateur  $(\lambda I - K)^{-1}$  existe et on a

$$\|(Id - K)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \|K\|$$

Ainsi sous l'hypothèse (3.2.3) et pour tout  $f \in C(\Omega)$  l'équation intégrale de Fredholm du second type (3.2.2) admet une solution unique  $u \in C(\Omega)$  et on a

$$\|u\|_{\infty} \leq \|(\lambda Id - K)^{-1}\| \cdot \|f\|_{\infty} \leq \frac{\|f\|_{\infty}}{|\lambda| - \|K\|}$$

### 3.3 Relation entre l'équation de Fredholm et les équations différentielles

([15]) Lorsque cette conversion est effectuée, nous devons utiliser le moose de transformation complémentaire suivant dans lequel toute intégration spécifique unique.

$$\int_0^x \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n \dots dx_2 dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

En supposant que l'intégration de l'existant à l'extrémité gauche de la relation précédente est le multiplicateur  $n$ , en utilisant la relation précédente et en mettant  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = t$ , on trouvera par exemple

$$\int_0^x \int_0^t f(t) dt dt = \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

Nous tenterons d'expliquer cette méthode à trouver l'exemple suivant dans lequel nous allons trouver la formule intégrative de Fredholm équivalent au problème de valeurs limites suivant

$$y''(x) + y(x) = x \quad : y(0) = 1, y(\pi) = \pi - 1 \quad (3.3.1)$$

C'est dans ce domaine  $0 < x < \pi$  suppose d'abord due

$$y''(x) = u(x) \quad (3.3.2)$$

en combinant les deux côtés de la relation précédente entre les ligne 0 et  $x$ , nous constatons que.

$$\begin{aligned} \int_0^x y''(t) dt &= \int_0^x u(t) dt \implies y'(x) - y'(0) = \int_0^x u(t) dt \\ \implies y'(x) &= y'(0) + \int_0^x u(t) dt \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Le problème principal ici est de définir la valeur de  $y'(x)$  car elle n'est pas les termes du problème et nous allons ensuite l'assigner à chaque cas en utilisant la condition marginale en position  $x$ .

Et en combinant les deux extrémités de la relation (3.3.3) entre 0 et  $x$ , la recherche

$$\begin{aligned} \int_0^x y'(t) dt &= y'(0)x + \int_0^x \int_0^t u(t) dt dx \implies y(x) - y(0) = y'(0)x + \int_0^x (x-t)u(t) dt \\ \implies y(x) &= 1 + xy'(0) + \int_0^x (x-t)u(t) dt \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

En plaçant  $x = \pi$  dans l'équation précédent, nous trouvons que

$$\begin{aligned} y(\pi) &= 1 + \pi y'(0) + \int_0^\pi (\pi-t)u(t) dt \implies \pi - 1 = 1 + \pi y'(0) + \int_0^\pi (\pi-t)u(t) dt \\ \implies y'(0) &= \frac{1}{\pi} [\pi - 2 - \int_0^\pi (\pi-t)u(t) dt] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Dans les relations de rémunération (3.3.3) et (3.3.4), nous constatons que

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{1}{\pi} \left[ \pi - 2 - \int_0^\pi (\pi-t)u(t) dt \right] + \int_0^x u(t) dt \\ y(x) &= 1 + \frac{x}{\pi} \left[ \pi - 2 - \int_0^\pi (\pi-t)u(t) dt \right] + \int_0^x \int_0^t u(t) dt dx \\ y(x) &= 1 + \frac{x}{\pi} \left[ \pi - 2 - \int_0^\pi (\pi-t)u(t) dt \right] + \int_0^x (x-t)u(t) dt \end{aligned}$$

Et pour compenser ces relations avec relation (3.3.2) dans la question des valeurs marginales données (3.3.1) et constater que

$$u(x) + 1 + \frac{x}{\pi} \left[ \pi - 2 - \int_0^\pi (\pi-t)u(t) dt \right] + \int_0^x (x-t)u(t) dt = x$$

$$\implies u(x) = \frac{2}{\pi}x - 1 + \frac{x}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t) u(t) dt - \int_0^x (x - t) u(t) dt$$

$$\begin{aligned} \implies u(x) &= \frac{2x - \pi}{\pi} + \int_0^\pi \frac{x(\pi - t)}{\pi} u(t) dt - \int_0^x (x - t) u(t) dt \\ &= \frac{2x - \pi}{\pi} + \int_0^x \frac{x(\pi - t)}{\pi} u(t) dt + \int_x^\pi \frac{x(\pi - t)}{\pi} u(t) dt - \int_0^x (x - t) u(t) dt \\ &= \frac{2x - \pi}{\pi} + \int_0^x \frac{t(\pi - x)}{\pi} u(t) dt + \int_x^\pi \frac{x(\pi - t)}{\pi} u(t) dt \end{aligned}$$

$$\implies u(x) = \frac{2x - \pi}{\pi} + \int_0^\pi K(x, t) u(t) dt$$

Où cela

$$K(x, t) = \begin{cases} \frac{t(\pi - x)}{\pi} & ; 0 \leq t \leq x \\ \frac{x(\pi - t)}{\pi} & ; x \leq t \leq \pi \end{cases}$$

### 3.4 Résolution des équations intégrales

On se propose de résoudre l'équation

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) u(y) dy, \quad \lambda \in \mathbb{R}^* \quad (3.4.1)$$

Par la méthode que l'on appelle approximations successives, on cherche la solution sous la forme d'une série

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \lambda^n \quad (3.4.2)$$

après identification des coefficients des deux polynômes de la variable  $\lambda$ , on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \lambda^n = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y) u_0(y) dy + \dots + \lambda^{n+1} \int_a^b K(x, y) u_n(y) dy$$

$$u_0(x) = f(x), \quad u_1(x) = \int_a^b K(x, y) u_0(y) dy = \int_a^b K(x, y) f(y) dy$$

d'une façon générale, on a

$$u_n(x) = \int_a^b K(x, y)u_{n-1}(y)dy = \int_a^b K_n(x, y)f(y)dy, \quad n = 1, 2, \dots$$

Finalement, on écrit la solution (3.4.2) sous une forme plus générale

$$\begin{aligned} u(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\lambda^n = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b K_n(x, y)f(y)\lambda^n dy \\ &= u_0 + \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} K_{n+1}(x, y)f(y)\lambda^{n+1} dy \\ &= u_0 + \lambda \int_a^b \left[ \sum_{n=1}^{\infty} K_{n+1}(x, y)\lambda^n \right] f(y)dy \end{aligned}$$

Comme, on le sait, avec la convergence de la série (3.4.1) sous la condition (3.4.2), on affirme que la solution de l'équation intégrale est donnée par

$$u(x) = f(x) + \int_a^b R(x, y, \lambda)f(y)dy \quad (3.4.3)$$

**Théorème 3.4.1** (*Théorème de Picard*)

Soit l'équation intégrale de Fredholm de première espèce

$$\int_a^b K(x, y)u(y)dy = f(x) \quad (3.4.4)$$

L'équation (3.4.4), admet une seule solution dans la classe  $\mathcal{L}^2(]a, b[)$  si

1. Le noyau  $K(x, y)$  est réel symétrique
2. La série  $\sum_k \lambda_k^2 f_k^2$  est convergente, telles que  $\lambda_k$  sont les nombres caractéristiques du noyau  $K(x, y)$  et  $f_k = \int_a^b f(x)u_k(x) dx$   
où  $u_k$  sont les fonctions propres de  $K(x, y)$  correspondant aux valeurs propres  $\lambda_k$
3. Le système de fonctions propres  $\{u_k\}_k$  est complet sur  $[a, b]$ : La solution de l'équation (3.4.4), s'obtient dans ce cas comme

$$u(x) = \sum_k \lambda_k f_k u_k(x)$$

**Exemple 3.4.1** :

en considérant l'équation intégrale de Fredholm de 2<sup>ème</sup> espèce

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)u(y)dy$$

on obtient la forme de récurrence par le processus itératif

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)u_{n-1}(y)dy$$

Comme cas particulier, si on prend

$$a = 0, b = 1, K(x, y) = xe^y, \lambda = -\frac{1}{2}, f(x) = \frac{1}{2}x$$

alors pour résoudre l'équation intégrale

$$u(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y u(y)dy + \frac{1}{2}x$$

on prend  $u_0(x) = 1$ , et on calcule

$$u_{n+1}(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y u_n(y)dy + \frac{1}{2}x$$

$$u_1(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y u_0(y)dy + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y dy + \frac{1}{2}x = x - \frac{1}{2}xe,$$

$$u_2(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y u_1(y)dy + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y (y - \frac{1}{2}ye)dy + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}xe,$$

$$u_3(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y u_2(y)dy + \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y (\frac{1}{4}ye)dy + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}xe,$$

$$u_4(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y u_3(y)dy + \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}x + \frac{1}{16}xe, \quad u_5(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y u_4(y)dy + \frac{1}{2}x = \frac{3}{8}x - \frac{1}{32}xe,$$

$$u_6(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y u_5(y)dy + \frac{1}{2}x = \frac{5}{16}x + \frac{1}{64}xe, \quad u_7(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 xe^y u_6(y)dy + \frac{1}{2}x = \frac{1}{132}x - \frac{1}{128}xe$$

d'où

$$u_n(x) = \frac{1}{3} \frac{2^{n-2} + (-1)^{n-1}}{2^{n-2}} x + (-1)^n \frac{xe}{2^n}, n = 2, 3, \dots$$

et

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x) = \frac{1}{3}x$$

## 3.5 Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Fredholm

Dans ce paragraphe, on utilise la méthode du trapèze pour trouver une solution approchée à la solution exacte de l'équation intégrale linéaire de Fredholm.

Soit l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)u(y)dy, \quad x \in [a, b] \quad (3.5.1)$$

Ou'  $f(x)$  et  $K(x, y)$  sont des fonctions données, le problème est de trouver la fonction  $u$ . pour ce faire, nous choisissons des points  $x_i, i = 1, \dots, n$  tels que  $a = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$ , une subdivision de l'intervalle  $[a, b]$  avec  $h = x_{i+1} - x_i$  (le pas de la discrétisation).

Supposons que ce système est équidistant c'est-à-dire  $x_j = a + (j - 1)h$ , avec  $j = 2, \dots, n$ .

le terme de l'intégrale (3.5.1) est remplacé par une somme finie donnée par la formule composée de la règle du trapèze

$$\int_a^b K(x, y)u(y)dy \simeq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{2} [K(x, x_i)u(x_i) + K(x, x_{i+1})u(x_{i+1})]$$

Alors

$$u(x) \simeq f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{2} [K(x, x_i)u(x_i) + K(x, x_{i+1})u(x_{i+1})]$$

d'où

$$u(x_j) \simeq f(x_j) + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n-1} [K(x_j, x_i)u(x_i) + K(x_j, x_{i+1})u(x_{i+1})] \quad (3.5.2)$$

Notons par  $u_j = u(x_j)$ ,  $f_j = f(x_j)$  et  $K_{j,i} = K(x_j, x_i)$  alors la formule (3.5.2) devient :

$$u_j \simeq f_j + \frac{h}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (K_{j,i}u_i + K_{j,i+1}u_{i+1})$$

$$u_j - h \sum_{i=2}^{n-1} K_{j,i}u_i - \frac{h}{2}(K_{j,0}u_0 + K_{j,n}u_n) = f_j$$

Cette discrétisation nous a fournie un système d'équations algébriques linéaires de la forme

$$AU = F$$

Ou'  $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)^t$  et  $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^t$ .

**Exemple 3.5.1** :([?])

En considérant l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = e^x - x + x \int_0^1 yu(y)dy$$

Avec  $u = e^x$  solution exacte de cette équation.

avec

On prend  $u_1(x) = 1$ , et on calcule

Nous choisissons des points  $x_i, i = 1, \dots, 5$  tels que  $a = x_1 = 0 \leq x_2 = \frac{1}{4} \leq \dots \leq x_4 = \frac{3}{4} \leq x_5 = 1 = b$ , une subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$  avec  $h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{4}$  (le pas de la discrétisation).

Supposons que ce système est équidistant c'est-à-dire  $x_j = (j - 1)h = \frac{1}{4}(j - 1)$ , avec  $j = 2, \dots, 5$ .

le terme de l'intégrale (3.5.4) est remplacé par une somme finie donnée par la formule composée de la règle du trapèze

$$\int_0^1 xyu(y)dy \simeq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{8}x[x_iu(x_i) + x_{i+1}u(x_{i+1})]$$

Alors

$$u(x) \simeq e^x - x + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{8}x[x_iu(x_i) + x_{i+1}u(x_{i+1})]$$

d'où

$$u(x_j) \simeq e^{x_j} - x_j + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n-1} x_j[x_iu(x_i) + x_{i+1}u(x_{i+1})] \quad (3.5.3)$$

Notons par  $u_j = u(x_j)$  alors la formule (3.5.5) devient :

$$u_j \simeq e^{x_j} - x_j + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n-1} x_j[x_iu_i + x_{i+1}u_{i+1}]$$

$$u_j - \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n-1} x_j[x_iu_i + x_{i+1}u_{i+1}] = e^{x_j} - x_j$$

$$u_j - \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{n-1} x_jx_iu_i + \frac{1}{8}x_j(x_1 + x_n) = e^{x_j} - x_j$$

pour  $j = 2$

$$u_2 - \frac{1}{4} \sum_{i=2}^4 x_2x_iu_i - \frac{1}{8}x_2x_5 = e^{x_2} - x_2 \rightarrow \frac{63}{64}u_2 - \frac{1}{32}u_3 - \frac{3}{64}u_4 - \frac{1}{32}u_5 = e^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4}$$

pour  $j = 3$

$$u_3 - \frac{1}{4} \sum_{i=2}^4 x_3x_iu_i - \frac{1}{8}x_3x_5 = e^{x_3} - x_3 \rightarrow \frac{-1}{32}u_2 + \frac{15}{16}u_3 - \frac{3}{32}u_4 - \frac{1}{16}u_5 = e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$$

pour  $j = 4$

### 3.5. Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Fredholm

$$u_4 - \frac{1}{4} \sum_{i=2}^4 x_4 x_i u_i + \frac{1}{8} x_4 x_5 = e^{x_4} - x_4 \rightarrow \frac{-3}{64} u_2 - \frac{3}{32} u_3 + \frac{55}{64} u_4 - \frac{3}{32} u_5 = e^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}$$

pour  $j = 5$

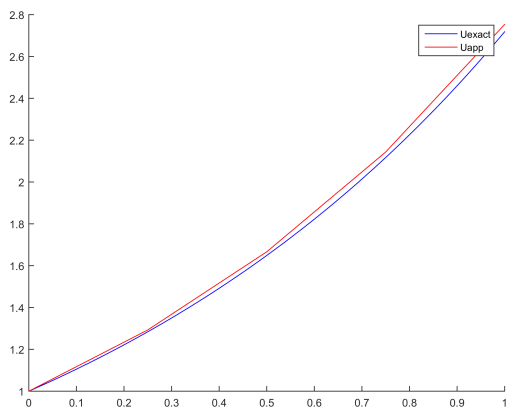
$$u_5 - \frac{1}{4} \sum_{i=2}^4 x_5 x_i u_i + \frac{1}{8} x_5 x_5 = e^{x_5} - x_5 \rightarrow \frac{-1}{16} u_2 - \frac{1}{8} u_3 - \frac{3}{16} u_4 + \frac{7}{8} u_5 = e - 1$$

$$\begin{pmatrix} \frac{63}{64} & \frac{-1}{32} & \frac{-3}{64} & \frac{-1}{32} \\ \frac{-1}{32} & \frac{15}{16} & \frac{-3}{32} & \frac{-1}{16} \\ \frac{-3}{64} & \frac{-3}{32} & \frac{55}{64} & \frac{-3}{32} \\ \frac{-1}{16} & \frac{-1}{8} & \frac{-3}{16} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{4} \\ e^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \\ e^{\frac{3}{4}} - \frac{3}{4} \\ e - 1 \end{pmatrix}$$

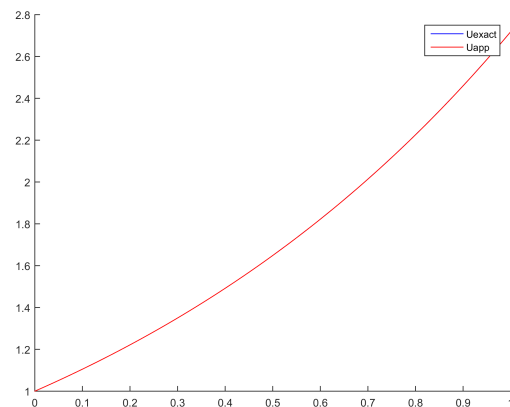
$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9844 & -0.0313 & -0.0469 & -0.0313 \\ -0.0313 & 0.9375 & -0.0938 & -0.0625 \\ -0.0469 & -0.0938 & 0.8594 & -0.0938 \\ -0.0625 & -0.1250 & -0.1875 & 0.8750 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1.0340 \\ 1.1487 \\ 1.3670 \\ 1.7183 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2928 \\ 1.6663 \\ 2.1434 \\ 2.7534 \end{pmatrix}$$

$x$	$u_{app}$	$u_{exact}$	$err$
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	1.2928	1.2840	0.0088
0.5000	1.6662	1.6487	0.0176
0.7500	2.1434	2.1170	0.0264
1.0000	2.7534	2.7183	0.0351

Comparer la solution approximale ( la méthode du trapèze ) avec la solution exact (  $u = e^x$  )



pour  $h = \frac{1}{4}$



pour  $h = \frac{1}{100}$

**Exemple 3.5.2 :**

En considérant l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = -\frac{1}{2} \int_0^1 x e^y u(y) dy + \frac{1}{2} x \quad (3.5.4)$$

Avec  $u = \frac{1}{3}x$  solution exacte de cette équation.

On prend  $u_1(x) = 0$ , et on calcule

Nous choisissons des points  $x_i, i = 1, \dots, 5$  tels que  $a = x_1 = 0 \leq x_2 = \frac{1}{4} \leq \dots \leq x_4 = \frac{3}{4} \leq x_5 = 1 = b$ , une subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$  avec  $h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{4}$  (le pas de la discrétisation).

Supposons que ce système est équidistant c'est-à-dire  $x_j = (j - 1)h = \frac{1}{4}(j - 1)$ , avec  $j = 2, \dots, 5$ .

le terme de l'intégrale (3.5.4) est remplacé par une somme finie donnée par la formule composée de la règle du trapèze

$$\int_0^1 x e^y u(y) dy \simeq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{8} x [e^{x_i} u(x_i) + e^{x_{i+1}} u(x_{i+1})]$$

Alors

$$u(x) \simeq \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{8} x [e^{x_i} u(x_i) + e^{x_{i+1}} u(x_{i+1})]$$

d'où

$$u(x_j) \simeq \frac{1}{2} x_j - \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{n-1} x_j [e^{x_i} u(x_i) + e^{x_{i+1}} u(x_{i+1})] \quad (3.5.5)$$

Notons par  $u_j = u(x_j)$  alors la formule (3.5.5) devient :

$$u_j \simeq \frac{1}{2} x_j - \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{n-1} x_j [e^{x_i} u_i + e^{x_{i+1}} u_{i+1}]$$

$$2u_j + \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{n-1} x_j [e^{x_i} u_i + e^{x_{i+1}} u_{i+1}] = x_j$$

$$2u_j + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{n-1} x_j e^{x_i} u_i + \frac{1}{8} x_j e^{x_n} u_n = x_j$$

pour  $j = 2$

### 3.5. Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Fredholm

$$2u_2 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^4 x_2 e^{x_i} u_i + \frac{1}{8} x_2 e^{x_5} u_5 = x_2 \rightarrow 8u_2 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^4 e^{x_i} u_i + e u_5 = 1 \rightarrow 8u_2 + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} u_2 + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} u_3 + \frac{1}{4} e^{\frac{3}{4}} u_4 + \frac{1}{8} e u_5 = 1$$

$$\rightarrow (8 + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}}) u_2 + \frac{1}{4} (e^{\frac{1}{2}} u_3 + e^{\frac{3}{4}} u_4) + \frac{1}{8} e u_5 = 1$$

pour  $j = 3$

$$2u_3 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^4 x_3 e^{x_i} u_i + \frac{1}{8} x_3 e^{x_5} u_5 = x_3 \rightarrow 4u_3 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^4 e^{x_i} u_i + \frac{1}{8} e u_5 = 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} u_2 + (4 + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}}) u_3 + \frac{1}{4} e^{\frac{3}{4}} u_4 + \frac{1}{8} e u_5 = 1$$

pour  $j = 4$

$$2u_4 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^4 x_4 e^{x_i} u_i + \frac{1}{8} x_4 e^{x_5} u_5 = x_4 \rightarrow \frac{8}{3} u_3 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^4 e^{x_i} u_i + \frac{1}{8} e^{x_5} u_5 = 1$$

$$\rightarrow \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} u_2 + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} u_3 + (\frac{8}{3} + \frac{1}{4} e^{\frac{3}{4}}) u_4 + \frac{1}{8} e u_5 = 1$$

pour  $j = 5$

$$2u_5 + \frac{1}{4} \sum_{i=2}^4 x_5 e^{x_i} u_i + \frac{1}{8} x_5 e u_5 = x_5 \rightarrow \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} u_2 + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} u_3 + \frac{1}{4} e^{\frac{3}{4}} u_4 + (2 + \frac{1}{8} e) u_5 = 1$$

Cette discrétisation nous a fournie un système d'équations algébriques linéaires de la forme

$$\begin{pmatrix} 8 + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} & \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} e^{\frac{3}{4}} & \frac{1}{8} e \\ \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} & 4 + \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} e^{\frac{3}{4}} & \frac{1}{8} e \\ \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} & \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} & \frac{8}{3} + \frac{1}{4} e^{\frac{3}{4}} & \frac{1}{8} e \\ \frac{1}{4} e^{\frac{1}{4}} & \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} e^{\frac{3}{4}} & 2 + \frac{1}{8} e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

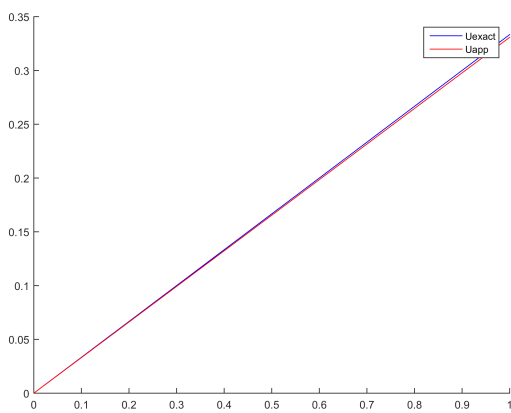
$$\begin{pmatrix} 8.3210 & 0.4122 & 0.5293 & 0.3398 \\ 0.3210 & 4.4122 & 0.5293 & 0.3398 \\ 0.3210 & 0.4122 & 3.1959 & 0.3398 \\ 0.3210 & 0.4122 & 0.5293 & 2.3398 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc

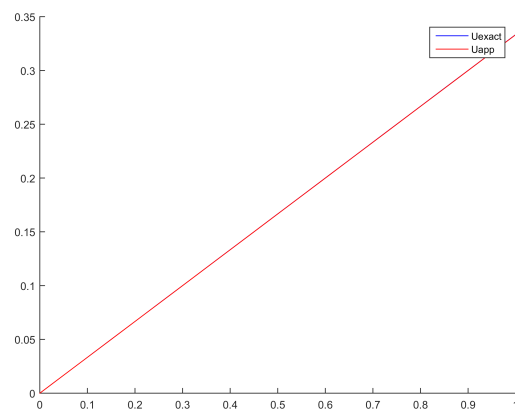
$$\begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8.3210 & 0.4122 & 0.5293 & 0.3398 \\ 0.3210 & 4.4122 & 0.5293 & 0.3398 \\ 0.3210 & 0.4122 & 3.1959 & 0.3398 \\ 0.3210 & 0.4122 & 0.5293 & 2.3398 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0.875 \\ 0.875 \\ 0.875 \\ 0.875 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0827 \\ 0.1654 \\ 0.2481 \\ 0.3308 \end{pmatrix}$$

$x$	$u_{app}$	$u_{exact}$	$err$
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.2500	0.0827	0.0833	0.0006
0.5000	0.1654	0.1667	0.0013
0.7500	0.2481	0.2500	0.0019
1.0000	0.3308	0.3333	0.0025

Comparez la solution approximale ( la méthode du trapèze ) avec une solution exact (  $u = \frac{1}{3}x$  )



pur  $h=\frac{1}{4}$  et  $u_0=0$



pur  $h=\frac{1}{20}$  et  $u_0=0$

**Exemple 3.5.3 :**([?])

En considérant l'équation intégrale de Fredholm

$$u(x) = x + e^x + \int_0^1 yu(y)dy \tag{3.5.6}$$

Avec  $u = x + e^x$  solution exate de cette équation.

On prend  $u_1(x) = 1$ , et on calcule

Nous choisissons des points  $x_i, i = 1, \dots, 5$  tels que  $a = x_1 = 0 \leq x_2 = \frac{1}{4} \leq \dots \leq x_4 = \frac{3}{4} \leq x_5 = 1 = b$ , une subdivision de l'intervalle  $[0, 1]$  avec  $h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{4}$  (le pas de la discrétisation ).

Supposons que ce système est équidistant c'est-à-dire  $x_j = (j - 1)h = \frac{1}{4}(j - 1)$ , avec  $j = 2, \dots, 5$ .

### 3.5. Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Fredholm

le terme de l'intégrale (3.5.4) est remplacé par une somme finie donnée par la formule composée de la règle du trapèze

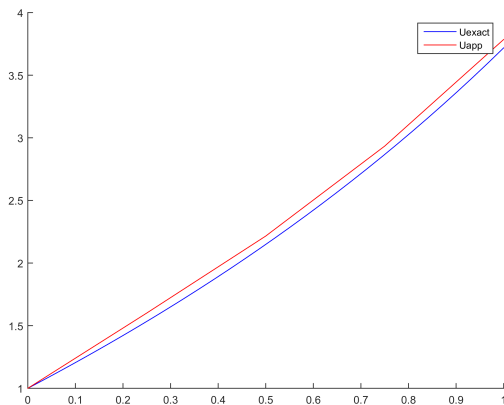
$$\int_0^1 yu(y)dy \simeq \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{8} x_i [u(x_i) + u(x_{i+1})]$$

$$u_j - \frac{1}{4} \sum_{i=2}^{n-1} x_i u_i + \frac{1}{8} x_n u_n = x_j + e^{x_j} - \frac{4}{3}$$

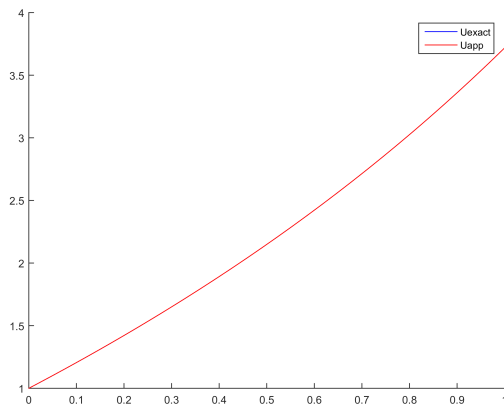
$$\begin{pmatrix} 0.9375 & -0.1250 & -0.1875 & -0.1250 \\ -0.0625 & 0.8750 & -0.1875 & -0.1250 \\ -0.0625 & -0.1250 & 0.8125 & -0.1250 \\ -0.0625 & -0.1250 & -0.1875 & 0.8750 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2007 \\ 0.8154 \\ 1.5337 \\ 2.3849 \end{pmatrix}$$

$x$	$u_{app}$	$u_{exact}$	$err$
0.0000	1.0000	1.0000	0.0000
0.250000	1.6009	1.5340	0.0669
0.500000	2.2157	2.1487	0.0669
0.750000	2.9339	2.8670	0.0669
1.000000	3.7852	3.7183	0.0669

Comparer la solution approximale ( la méthode du trapèze ) avec la solution exact (  $u = x + e^x$  )



pur  $h=\frac{1}{4}$



pur  $h=\frac{1}{80}$

Résolution en Matlab

```

clc
clf
clear all
% Le problème est de trouver la fonction u pour la méthode du trapèze
%trouver une solution approchée de l'équation intégrale de Fredholm de 2 espèce
%u(x) = w * int(k(x,y) * u(y))dy + f(x)
%un système d'équations linéaires de la forme Au=F
%-----
a=input('donne le premier nombre de définition de l'intervalle a=');
b=input('donne le deuxième nombre de définition de l'intervalle b=');
n=input('donne le nombre n=');
h=(b-a)/n;
x=a:h:b;y=x;
k=@(x,y) (1/2).*x.*exp(y);
f=@(x) (1/2).*x;
uexa=@(x) (1/3).*x;
u(1)=input('donne u(1)=');
A=zeros(n);
for j=2:n+1
    F(j-1)=f(x(j))-(h/2)*u(1)*k(x(j),x(1));
    for i=2:n+1
        if i==j
            A(j-1,i-1)=(1+h*k(x(j),y(i)));
        else
            A(j-1,i-1)=h*k(x(j),y(i));
        end
        A(j-1,n)=(h/2)*k(x(j),y(n+1));
    end
end
end

```

```

end
disp('la vecter F');
disp(F)
disp('la Matres A');
disp(A)
u(2:n+1)=inv(A)*F';
for i=1:n+1
    err(i)=abs(u(i)-uexa(x(i)));
end
disp('la solution approchée u(x)');
disp('-----');
fprintf(' | x | uapp | uexa | err |\n');
disp('-----');
for i=1:n+1
fprintf(' | %f | %f | %f | %f |',x(i),u(i),uexa(x(i)),err(i));
fprintf('\n');
end
disp('-----');
hold on
fplot('(1/3). * x', [0, 1], 'b')
plot(x,u, 'r')
legend('Uexact', 'Uapp')
print('-dpng', '-r300', 'fe.png');
hold off

```

## Affichage

```

donne le premier nombre de définition de l'intervalle a=0
donne le deuxième nombre de définition de l'intervalle b=1

```

```

    donne le nombre n=4

```

```

        donne u(1)=0

```

```

        la vecter F

```

```

    0.1250  0.2500  0.3750  0.5000

```

```

        la Matres A

```

```

    1.0401  0.0515  0.0662  0.0425

```

```

    0.0803  1.1030  0.1323  0.0849

```

```

    0.1204  0.1546  1.1985  0.1274

```

```

    0.1605  0.2061  0.2646  1.1699

```

```

        la solution approchée u(x)

```

```

-----
|   x   | uapp | uexa |  err  |
-----
| 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 0.25000 | 0.082698 | 0.083333 | 0.000636 |
| 0.50000 | 0.165395 | 0.166667 | 0.001272 |
| 0.75000 | 0.248093 | 0.250000 | 0.001907 |
| 1.00000 | 0.330790 | 0.333333 | 0.002543 |
-----

```

```

    >>

```

## Conclusion générale

L'influence de Fredholm joue un rôle de premier plan dans bon nombre des questions de physique étudiées, ainsi que dans les équations d'importance en mathématiques, car elles sont liées à l'analyse fonctionnelle et à la théorie des opérateurs. Nous avons essayé dans ce travail de présenter le concept d'opérateur intégral et ses caractéristiques en raison de son importance dans les équations de Fredholm. Ainsi, dans le premier chapitre, puis dans le deuxième chapitre du concept de opérateur de Fredholm et de l'étudier théoriquement car c'est la structure de base des équations de Fredholm, Nous avons inclus dans le troisième chapitre de cette note la définition d'équations linéaire, de Fredholm et a pendant que nous discutons l'existence de la solution.

## **Résumé et plan de travail :**

Le but de ce travail est d'étudier l'opérateur de Fredholm dans un espace de Banach prenant comme exemple les équations intégrales en particulier celles de Fredholm avec les conditions sous lesquelles l'opérateur intégral soit un opérateur continu ou compact d'un espace fonctionnel  $E$  dans un espace fonctionnel  $F$ .

## **Summary and work plan:**

The goal of this work is study Fredholm operator at Banach space with taking for that the integral equations of Fredholm a example, with condition are being the integral operator. It is continue and compact operator of a functional space  $E$  in a functional space  $F$ .

### **ملخص و خطة العمل**

الهدف من هذا العمل هو دراسة مؤثر فريدهولم في فضاء بناخ مع الأخذ كمثال على ذلك المعادلات التكاملية للفريدهولم مع الظروف التي يكون المؤثر الأساسي فيها مؤثر مستمر و متراص من الفضاء الدالي  $E$  إلى الفضاء الدالي  $F$

### **Mots clés :**

Opérateur de Fredholm

Théorie de Riesz et Alternative de Fredholm

Opérateurs intégrales de Fredholm