



المسيلة في: 2024/01/21

## شهادة موافقة علمية على مطبوعة بيداغوجية

للأستاذ بن دراجي رزيق - أستاذ محاضر أ -

يشهد رئيس المجلس العلمي لكلية العلوم بجامعة محمد بوضياف بالمسيلة، أنه بعد الإطلاع على تقارير الخبرة الواردة من طرف الخبراء من صف الأستاذية:

- السيد نبيلة احدادن ، أستاذ التعليم العالي بجامعة محمد بوضياف- المسيلة.

- السيد بغيجة عبد الهادي أستاذ التعليم العالي بجامعة قسنطينة 1 .

والمعنيين طرف المجلس العلمي لكلية العلوم في الاجتماع المنعقد في دورته العادية يوم 2023/12/05 لإجراء الخبرة للمطبوعة البيداغوجية الخاصة بالأستاذ بن دراجي رزيق - أستاذ محاضر- أ- بقسم الفيزياء والمتعلقة بخبرة للمطبوعة البيداغوجية للمادة المعنونة بـ: «Transferts Thermiques et travaux pratiques» والمقررة في برنامج التكوين ماستر ، تخصص: «M1 Physique énergétique» و المفتوح بقسم الفيزياء، تمت الموافقة عليها شكلا ومضمونا.

رئيس المجلس العلمي لكلية العلوم



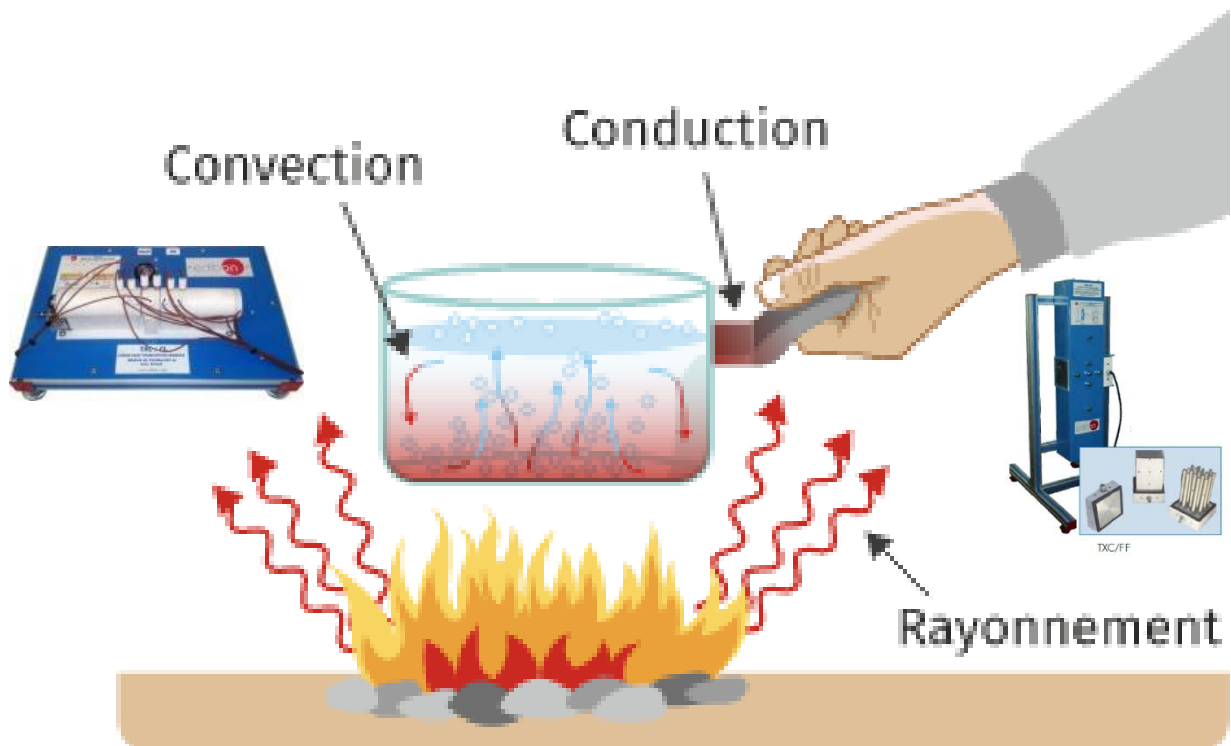
أ. د. بعزیز حليم

**POLYCOPIÉ DE COURS TRANSFERTS THERMIQUE  
Et TRAVAUX PRATIQUES**

Destiné aux étudiants 1<sup>ers</sup> Année Master et 3<sup>èmes</sup> Année Licence LMD : Physique  
Énergétique et Énergies Renouvelables

Préparés par :

Dr : BENDERRADJI Razik



Année universitaire 2023 /2024

## Sommaire

<i>Chapitre 1 : Généralités</i>	<b>01</b>
<i>1.1 Introduction</i>	<b>01</b>
<i>1.2 Notion de chaleur</i>	<b>02</b>
<i>1.3 Notion de température</i>	<b>02</b>
<i>1.4 Mesures de température</i>	<b>03</b>
<i>1.5 Échelles de température</i>	<b>05</b>
<i>1.6 Unités de chaleur</i>	<b>05</b>
<i>1.7 Notion de capacité thermique massique</i>	<b>06</b>
<i>1.8 Notion d'enthalpie</i>	<b>07</b>
<i>1.9 Chaleur latente de changement d'état</i>	<b>08</b>
<i>1.10 Flux de chaleur</i>	<b>09</b>
<i>1.11 Transferts de chaleur</i>	<b>09</b>
<i>Chapitre 2 : Transferts thermiques par conduction</i>	<b>11</b>
<i>2.1 Introduction</i>	<b>11</b>
<i>2.2 Concepts fondamentaux</i>	<b>13</b>
<i>2.2.1 Champs thermiques</i>	<b>13</b>
<i>2.2.2 Loi de Fourier (1822)</i>	<b>14</b>
<i>2.2.3 Orthogonalité du gradient et de l'isotherme</i>	<b>15</b>
<i>2.3 Conduction en régime permanent</i>	<b>16</b>
<i>2.3.1 Mur simple à faces isothermes</i>	<b>17</b>
<i>2.3.2 Paroi en contact avec deux fluides</i>	<b>18</b>
<i>2.3.4 Paroi multicouches en contact avec deux fluides</i>	<b>21</b>
<i>2.4 Cas général : Équation de la chaleur</i>	<b>23</b>
<i>2.4.1 Bilan énergétique</i>	<b>23</b>
<i>2.4.2 Équation de la chaleur en milieu homogène et isotrope</i>	<b>24</b>

<i>2.4.3 Différentes formes de l'équation de la chaleur</i>	25
<i>2.5 Conditions aux limites spatio-temporelles</i>	26
2.6 Récapitulation des principales grandeurs thermiques	27

*Chapitre 3 : Méthodes de résolution de l'équation de la chaleur* 28

<i>3.1 Introduction</i>	28
3.2 Régime permanent	
	28
<i>3.2.1 Cas monodirectionnel</i>	29
<i>3.2.2 Géométries en 2D ou 3D</i>	29
<i>3.2.3 Analogie électrique</i>	29
<i>3.2.4 Codes de calcul 2D ou 3D-axisymétrique stationnaires</i>	31
<i>3.2.5 Un code de calcul 1D stationnaire</i>	32
<i>3.2.5.1 Modélisation physique du problème</i>	33
<i>3.2.5.4 Algorithme de résolution</i>	41

*Chapitre 4 : Transferts de chaleur par rayonnement* 46

<i>4.1 Introduction</i>	46
<i>4.2 Le rayonnement électromagnétique</i>	47
<i>4.3 Rayonnement des corps opaques</i>	49
<i>4.3.1 Flux d'une source</i>	49
<i>4.3.2 Admittance</i>	49
<i>4.3.3 Intensité d'une source dans une direction Ox</i>	50
<i>4.3.4 Luminance d'une source dans une direction Ox</i>	50
<i>4.3.5 Loi de Lambert</i>	51
<i>4.4 Corps opaques récepteurs de rayonnement</i>	52
<i>4.4.1 Éclairement</i>	53

<i>4.4.2 Réflexion, absorption et transmission</i>	<b>53</b>
<i>4.4.3 Grandeurs monochromatiques directionnelles</i>	<b>54</b>
<i>4.4.4 Notion de corps noir</i>	<b>56</b>
<i>4.5 Loi de PLANCK</i>	<b>56</b>
<i>4.6 Lois de WIEN</i>	<b>58</b>
<i>4.6.1 1ère loi de WIEN, ou loi du déplacement</i>	<b>58</b>
<i>4.6.2 2ème loi de WIEN</i>	<b>58</b>
<i>4.7 Loi de STEFAN-BOLTZMANN</i>	<b>59</b>
<i>4.8 Rayonnement des corps réels</i>	<b>60</b>
<i>4.9 Notion de corps gris</i>	<b>61</b>
<i>4.10 Loi de KIRCHHOFF</i>	<b>62</b>
<i>4.11 Exemples de récapitulation</i>	<b>64</b>
<i>4.11.1 Énergie solaire reçue sur la terre</i>	<b>64</b>
<i>4.11.2 Capteur solaire plan. Effet de serre.</i>	<b>67</b>
<i>Chapitre 5 : Transferts de chaleur par convection</i>	<b>73</b>
<i>5.1 Introduction</i>	<b>73</b>
<i>5.2 Coefficient d'échange de chaleur par convection</i>	<b>74</b>
<i>5.3 Transfert de chaleur par convection forcée sans changement d'état</i>	<b>75</b>
<i>5.3.1 Analyse dimensionnelle</i>	<b>75</b>
<i>5.3.2 Corrélations expérimentales</i>	<b>81</b>
<i>5.3.2.1 Écoulement dans un tube</i>	<b>82</b>
<i>5.3.2.2 Écoulement autour d'un tube</i>	<b>85</b>
<i>5.3.2.3 Écoulement autour d'un faisceau de tubes</i>	<b>87</b>
<i>5.3.2.4 Écoulement le long d'une plaque plane</i>	<b>88</b>
<i>5.4 Transfert de chaleur par convection naturelle sans changement d'état</i>	<b>91</b>
<i>5.4.1 Couche limite de convection naturelle</i>	<b>91</b>
<i>5.4.2 Résultats de l'analyse dimensionnelle</i>	<b>92</b>

<i>5.4.4 Convection naturelle turbulente</i>	<b>94</b>
<i>5.4.5 Corrélations expérimentales</i>	<b>95</b>
<i>5.4.5 Application pratique</i>	<b>96</b>

## ***Travaux Pratiques : Transfert Thermique***

	<b>98</b>
<i>TP1 : Conduction</i>	<b>104</b>
<i>TP 2 : Convection naturelle et Convection forcée dans des surfaces planes</i>	<b>111</b>
<i>TP 3 : Rayonnement</i>	<b>118</b>
<i>TP 4 : Moteur STIRLING</i>	<b>123</b>

## **Préface:**

Bienvenue dans ce polycopié de cours sur les transferts thermiques et les travaux pratiques associés. Ce document a été conçu pour accompagner votre apprentissage dans le domaine fascinant et crucial du transfert de chaleur. Il vise à fournir une base solide de connaissances théoriques ainsi que des applications pratiques pour renforcer votre compréhension.

## **Objectifs du Polycopié:**

1. **Compréhension Théorique :** Ce polycopié présente les concepts fondamentaux du transfert de chaleur, couvrant les modes de conduction, convection et rayonnement. Les principes théoriques sont expliqués de manière claire et concise pour faciliter votre compréhension.
2. **Applications Pratiques :** Les travaux pratiques inclus dans ce document offrent l'opportunité d'appliquer les connaissances théoriques à des situations réelles. Ces exercices visent à renforcer vos compétences pratiques dans l'analyse et la résolution de problèmes liés au transfert de chaleur.
3. **Guides d'Étude :** Vous trouverez des directives et des conseils pour maximiser votre apprentissage. Les travaux pratiques sont accompagnés d'instructions détaillées pour vous guider tout au long du processus.

Bonne lecture et succès dans vos études !

Benderradji razik

## **Notes aux étudiants**

Il faut préparer soigneusement à l'avance chaque manipulation. L'étudiant doit consulter ses cours et son polycopié de travaux pratiques de façon à savoir ce que l'on est sensé observer et étudier avant d'entrer dans la salle.

L'étudiant une fois en salle de travaux pratiques doit être en mesure de répondre à trois questions importantes : i) le but de la manipulation, ii) les grandeurs à mesurer et les grandeurs recherchées, iii) l'aspect théorique introduit pour expliquer ou exploiter les résultats expérimentaux.

A la fin de chaque séance de travaux pratiques, chaque groupe doit remettre un compte rendu présentant proprement les résultats. Le jugement sera fait non seulement sur la précision et l'exactitude des résultats, mais aussi sur la pertinence des remarques et sur la clarté et la propreté de la présentation du rapport.

L'étudiant est appelé à préserver le matériel mis à sa disposition.

# Chapitre 1

## Généralités

### 1.1 Introduction

À côté et en complément de la mécanique des fluides, la thermique est la discipline qui permet à l'ingénieur de comprendre et de décrire le fonctionnement d'un grand nombre d'équipements industriels qui ont comme caractéristique commune de mettre en œuvre des échanges de chaleur. Notre civilisation industrielle, née au XVII<sup>ème</sup> siècle, a été d'abord dominée par la vapeur, si bien que de nos jours, le thermicien est encore souvent défini dans l'industrie, comme « celui qui s'occupe des chaudières et des réseaux de vapeur ».

Pour se convaincre que l'aspect thermique des sciences et des techniques concerne réellement notre vie de tous les jours, il suffit de parcourir la liste des grandes inventions s'appuyant sur des échanges de chaleur, de 1600 à 1950, présentée dans le tableau ci-dessous :

DATE	INVENTION	INVENTEUR	NATIONALITÉ
1629	turbine à vapeur	Giovanni Branca	italien
1687	principe d'une machine à vapeur à piston	Denis Papin	français
1712	machine à vapeur	Thomas Newcomen	britannique
1714	thermomètre à mercure	Daniel Gabriel Fahrenheit	allemand
1791	turbine à gaz	John Barber	britannique
1814	locomotive	George Stephenson	britannique
1855	brûleur à gaz	Robert Wilhelm Bunsen	allemand
1860	moteur à gaz	Etienne Lenoir	français
1861	four électrique	Wilhelm Siemens	britannique
1877	moteur à combustion interne (quatre-temps)	Nikolaus August Otto	allemand
1877	camion frigorifique	G.F. Swift	américain
1884	turbine à vapeur	Charles Algernon Parsons	britannique
1892	bouteille Thermos (vase Dewar)	James Dewar	britannique
1911	air conditionné	W.H. Carrier	américain
1925	congélation des aliments	Clarence Birdseye	américain
1942	réacteur nucléaire	Enrico Fermi	américain
1947	four à micro-ondes	Percy L. Spencer	américain

Tableau I - Liste des grandes inventions de 1600 à 1950, qui s'appuient sur des échanges de chaleur

On constate dans ce tableau que les domaines d'application de la thermique sont très variés, et concernent principalement :

- l'énergie (machines à vapeur, turbines à gaz et à vapeur, réacteurs nucléaires)
- le chauffage, le séchage, la cuisson (fours électriques, à gaz, micro-ondes)
- l'industrie du froid
- la construction (chauffage, climatisation)

Mais de plus, les questions étudiées sont-elles - mêmes très variées, et s'étendent du plus petit phénomène élémentaire (la solidification d'une goutte de métal en fusion, l'échauffement d'un circuit intégré) au plus vaste ensemble industriel (le bilan énergétique d'une usine).

### ***1.2 Notion de chaleur***

En physique, on appelle *chaleur* une forme particulière de l'énergie. Cette équivalence de la chaleur et du travail constitue *le premier principe de la thermodynamique*. Il en résulte qu'énergie, travail et quantité de chaleur ont une même unité : le joule.

A la base de l'étude des transferts thermiques se trouvent les concepts de *quantité de chaleur* et de *différence de température*.

Le transfert de chaleur d'une partie d'une substance à une autre partie, ou d'un corps à un autre corps, s'effectue sous forme d'énergie cinétique d'agitation moléculaire désordonnée.

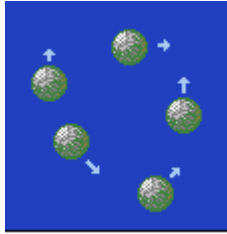
Ce transfert est le fait d'une différence de température entre les deux corps. La chaleur se propage spontanément du corps ayant la température la plus élevée vers celui ayant la température la plus basse, élevant ainsi la température de ce dernier, tout en abaissant la température du premier, dans la mesure où le volume des deux corps reste constant. Ceci constitue *le second principe de la thermodynamique*.

Ce second principe met en évidence la notion d'*irréversibilité* : La chaleur ne pourra pas se propager d'un corps froid vers un corps chaud, sauf si on fournit un travail.

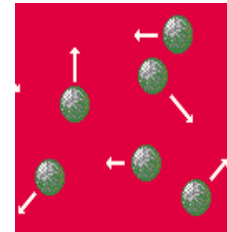
### ***1.3 Notion de température***

On appelle température la grandeur physique qui mesure le degré de chaleur d'un corps ou d'un milieu.

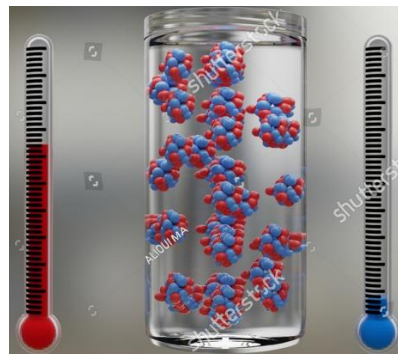
Lorsque deux corps sont placés dans une enceinte adiabatique, le corps le plus chaud cède de la chaleur au corps le plus froid, jusqu'à ce que les deux corps aient la même température. On dit alors qu'on a atteint l'équilibre thermique. (Figure 1)



Gaz à basse température  
Il a une faible énergie cinétique moyenne



Gaz à température élevée  
Il a une faible énergie cinétique moyenne importante



Mélange des gaz ont : les deux gaz ont désormais la même énergie cinétique moyenne et la même température (Équilibre cinétique et thermique)

Figure 1 - Illustration des notions de transfert de chaleur, de température et d'équilibre thermique

La température est une propriété thermodynamique du corps et mesure l'agitation microscopique de la matière. Selon la théorie cinétique, la température d'un corps est fonction de l'énergie cinétique moyenne de translation de ses molécules. (Figure 1). L'énergie cinétique d'un corps est nulle à une température appelée zéro absolu.

#### 1.4 Mesures de température

On peut mesurer la température d'un corps en observant le changement de l'une de ses propriétés spécifiques, telle que la résistivité électrique ou bien le volume spécifique. Ainsi, le

thermomètre à mercure mesure la dilatation d'une colonne de mercure dans un capillaire en verre, la variation de la longueur de la colonne étant reliée à la température.

La résistance électrique d'un conducteur ou d'un semi-conducteur augmente avec la température. Ce phénomène est à la base du thermomètre à résistance, dans lequel une tension constante, ou potentiel électrique, est appliquée à la thermistance, partie sensible du capteur. Pour une thermistance de composition donnée, la mesure d'une température donnée induit une résistance spécifique pour la thermistance. Cette résistance peut se mesurer à l'aide d'un galvanomètre et donne une mesure de la température.

Diverses thermistances faites d'oxydes de nickel, de manganèse ou de cobalt sont utilisées pour mesurer des températures entre - 46°C et 150°C. De même, des thermistances utilisant d'autres métaux ou alliages peuvent être employées à des températures plus élevées : le platine, par exemple (jusqu'à 930°C). Avec des circuits de transformation du signal adéquats, la mesure du courant peut être convertie en mesure numérique directe de la température.

Des mesures de température très précises peuvent être faites avec des thermocouples dans lesquels une faible différence de tension (se mesurant en millivolts) apparaît lorsque deux fils de métaux différents sont réunis pour former une boucle dont les deux liaisons sont portées à des températures différentes. Suivant le type de thermocouple, on peut mesurer des températures allant de - 200°C à 2 300°C. Pour les températures très élevées, et pour des milieux agressifs, le thermocouple doit être protégé dans une gaine d'alumine. Pour accroître le signal de tension, plusieurs thermocouples peuvent être connectés en série pour former une thermopile. La tension dépendant de la différence entre les températures des liaisons, l'une de ces liaisons doit être maintenue à une température de référence connue, sinon, un circuit de compensation électronique doit être intégré au système pour mesurer la température réelle du capteur.

Les thermistances et les thermocouples ont souvent des capteurs d'une taille inférieure à 3 cm, ce qui leur permet de répondre rapidement aux variations de température et en fait des systèmes idéaux pour de nombreuses applications en biologie et en ingénierie.

Le pyromètre optique est utilisé pour mesurer les températures d'objets solides au-delà de 700°C. À de telles températures, les objets solides émettent suffisamment d'énergie dans la gamme visuelle pour permettre une mesure optique en exploitant le phénomène de température apparente de la couleur d'incandescence, la couleur émise par les objets incandescents allant du rouge sombre au jaune puis au blanc vers 1 300°C. Le pyromètre contient un filament analogue à celui d'une ampoule électrique, commandé par un rhéostat calibré, de façon que les couleurs du filament incandescent correspondent à des températures précises. Ainsi, la température d'un

objet incandescent peut être mesurée en regardant cet objet à travers le pyromètre et en réglant le rhéostat jusqu'à ce que le filament devienne invisible sur le fond de l'objet : alors les températures du filament et de l'objet sont égales et peuvent être lues sur l'échelle du rhéostat.

Un autre appareillage de mesure de température, utilisé principalement dans les thermostats, se base sur la dilatation thermique différentielle de deux lames ou disques faits de métaux différents et reliés ou soudés à leurs extrémités.

### ***1.5 Échelles de température***

On utilise plusieurs échelles de température ; parmi celles-ci, l'échelle Celsius, l'échelle Fahrenheit (dans les pays anglo-saxons), l'échelle de température thermodynamique.

L'échelle Celsius, qui fixe la température de congélation de l'eau à 0°C et sa température d'ébullition à 100°C, est utilisée dans le monde entier.

Dans l'échelle Fahrenheit, utilisée dans les pays anglophones pour la vie courante, la température de congélation de l'eau est fixée à 32°F et sa température d'ébullition à 212°F.

Dans le système international SI, l'unité thermique de base est le kelvin (K), unité de température thermodynamique. Jusqu'en 1954, l'échelle de température était définie à partir de l'écart de 100 degrés entre les points de congélation et d'ébullition de l'eau. Cette définition, peu précise, a été remplacée en 1967 par la définition actuelle, qui utilise un point fixe fondamental : le point triple de l'eau. Ainsi, le kelvin est égal à  $1/273,16$  de la température thermodynamique du point triple de l'eau. Ce point décrit les conditions de pression et température d'équilibre de l'eau sous ses trois états : liquide, solide et gaz.

La température absolue coïncide avec la température de l'échelle thermodynamique. En cryogénie, où l'on cherche à obtenir des températures aussi basses que 0,00001 K, on utilise la démagnétisation de matériaux paramagnétiques. À l'autre extrémité de l'échelle, des températures momentanées supérieures à 100 millions de K ont été observées lors d'explosions nucléaires.

### ***1.6 Unités de chaleur***

On a vu qu'en physique, la quantité de chaleur est exprimée dans les mêmes unités que l'énergie et le travail, à savoir en joules (J).

On utilise également la calorie (Cal), définie comme la quantité de chaleur nécessaire pour élever la température de 1 g d'eau de 14,5 °C à 15,5 °C sous une pression de 1 atm.

L'énergie mécanique peut être convertie en chaleur par frottement, et le travail mécanique nécessaire pour produire une calorie s'appelle «l'équivalent mécanique de la calorie».

On a :

$$4,1855 \text{ J} = 1 \text{ Cal}$$

Selon la loi de conservation de l'énergie, tout le travail mécanique effectué pour produire de la chaleur par frottement est converti en énergie dans les corps impliqués dans ce travail. Ce fait fut démontré pour la première fois de manière concluante par Joule, qui chauffa de l'eau dans un récipient clos avec des roues à aubes et prouva ainsi que l'élévation de la température de l'eau était proportionnelle au travail exercé en tournant les roues. Dans un moteur à combustion interne, où de la chaleur est transformée en énergie mécanique, la loi de conservation de l'énergie s'applique également. Cependant, une partie de l'énergie est toujours perdue ou dissipée sous forme de chaleur, car aucun moteur n'a un rendement égal à 100 %.

À partir de la calorie, on introduit parfois d'autres unités de quantité de chaleur:

La kilocalorie (kcal) est égale à 1000 calories.

La thermie est égale à 1000 kcal.

Le kilowattheure (kWh) est l'énergie fournie en 3600 secondes par une source d'énergie de puissance égale à 1 kW, soit 1000 J/s. Comme 1 joule équivaut à 0,2389 calories, 1 kWh représente 3.600.000 joules, soit encore 860.112 calories.

**En définitive :**  $1 \text{ kWh} = 0,86 \text{ thermie}$

### ***1.7 Notion de capacité thermique massique***

On appelle capacité thermique massique **C** la quantité de chaleur qu'il faut appliquer à 1 kg de matière pour élever sa température de 1 K.

D'après la loi formulée par les chimistes français Pierre Louis Dulong et Alexis Thérèse Petit, les capacités thermiques massiques des éléments solides sont inversement proportionnelles à leurs masses atomiques. Ainsi, le produit de la capacité thermique massique par la masse atomique est constant pour tous les éléments solides.

Du fait qu'un gaz chauffé se dilate, des calories supplémentaires sont nécessaires pour augmenter sa température, puisqu'une partie de cette énergie est utilisée pour la dilatation du gaz. C'est la raison pour laquelle, dans le cas d'un gaz, il faudra distinguer la capacité thermique massique à pression constante  $C_p$  et la capacité thermique massique à volume constant  $C_v$ . La capacité thermique massique à pression constante sera toujours supérieure à la capacité thermique massique à volume constant. Dans le système international d'unités, la capacité thermique massique est exprimée en  $J/(kg \cdot K)$ .

La capacité thermique massique est parfois exprimée en  $Cal/(g \cdot ^\circ C)$ . La capacité thermique massique de l'eau est de  $1 Cal/(g \cdot ^\circ C)$ ; cela signifie qu'il faut apporter  $1 Cal$  à  $1 g$  d'eau pour augmenter sa température de  $1^\circ C$ . Le tableau II ci-dessous donne les valeurs mesurées à  $25^\circ C$  de quelques substances usuelles.

COMPOSÉ	Cal/ (g. °C)	kJ/(kg.K)
Air	0,24	1,01
Aluminium	0,22	0,90
Argent	0,06	0,24
Acier inoxydable	0,12	0,51
Eau (liquide)	1,00	4,18
Bois	0,42	1,76

Tableau II - Capacités thermiques massiques à  $25^\circ C$  de diverses substances.

### 1.8 Notion d'enthalpie

On appelle enthalpie, en thermodynamique, la fonction d'état d'un système, définie par la relation :

$$H = U + pV$$

$U$  étant l'énergie interne du système par unité de masse,

$p$  et  $V$  étant respectivement la pression et le volume du système.

L'enthalpie s'exprime en Joules par kg ( $J/kg$ ).

Lors d'une transformation à pression constante, la chaleur reçue par le système correspond à la variation de son enthalpie :

Considérons ainsi un système de volume  $V$  dans un état initial caractérisé par sa pression  $p$ , sa température  $T_0$  et son enthalpie  $H_0$

En lui apportant une quantité de chaleur  $\Delta Q$ , faisons passer ce système dans un état final qui sera caractérisé par la même pression  $p$ , le même volume  $V$ , sa température finale  $T_f$  et son enthalpie  $H_f$

L'enthalpie de ce système a subi une variation : 
$$\Delta H = H_0 - H_f = \frac{\Delta Q}{m} = C_p \Delta T$$

Pour un thermicien, l'enthalpie n'est pas autre chose que la chaleur contenue par unité de masse dans un corps solide, ou par Nm<sup>3</sup> dans un gaz.

### 1.9 Chaleur latente de changement d'état

Certains changements physiques sont associés aux changements de température d'un corps. Presque tous les corps se dilatent lorsqu'ils sont chauffés et se contractent en se refroidissant.

La phase d'un corps pur est l'état, solide, liquide ou gazeux qu'il prend selon des conditions de température et de pression. Le passage d'un corps de l'état solide à l'état gazeux est appelé sublimation, de l'état solide à l'état liquide, fusion et de l'état liquide à l'état de vapeur, vaporisation. Si la pression est constante, ces processus ont lieu à une température constante. Une certaine quantité de chaleur est requise pour réaliser ces trois changements d'état. Elle est appelée chaleur latente. Ainsi il existe des chaleurs latentes de sublimation, de fusion et de vaporisation.

Lorsque l'on fait bouillir de l'eau dans un récipient ouvert à la pression atmosphérique, la température ne dépasse pas 100°C, même si l'on augmente la quantité de chaleur. La chaleur absorbée par l'eau sans changement de température est la chaleur latente ; elle est utilisée pour transformer l'eau en vapeur. Elle est récupérée quand la vapeur est condensée pour donner de l'eau.

D'une manière similaire, si un mélange d'eau et de glace est chauffé dans un verre, sa température ne change pas tant que toute la glace n'a pas fondu. La chaleur absorbée est utilisée pour faire fondre la glace.

### 1.10 Flux de chaleur

On appelle flux de chaleur  $\Phi$ , la quantité de chaleur  $\Delta Q$  transférée par unité de temps :

$$\Phi = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$\Phi$  Est un débit de chaleur, et s'exprime en joules par seconde, c'est-à-dire en watt.

Les transferts de chaleur sont mesurés par des flux, et ont les mêmes dimensions qu'une puissance, par exemple électrique. Pour ce qui concerne les unités d'énergie (ou de chaleur), on a vu précédemment les équivalences :

$$1 \text{ kWh} = 0,86 \text{ thermie} = 0,86 \cdot 1000 \text{ kcal}$$

Pour les unités de puissance (ou de flux de chaleur), il leur correspond les équivalences :

$$1 \text{ W} = 0,86 \text{ kcal/h}$$

### 1.11 Transferts de chaleur

Le transfert de chaleur est le processus par lequel l'énergie thermique se déplace d'une région à une autre en raison d'une différence de température. Ce phénomène est fondamental dans de nombreuses applications, allant du refroidissement des composants électroniques à la conception de systèmes de chauffage et de climatisation, en passant par des phénomènes naturels tels que la régulation de la température de la Terre. Le transfert de chaleur est une discipline cruciale pour diverses applications technologiques. Son étude approfondie permet une meilleure gestion de l'énergie thermique, contribuant ainsi à l'efficacité et à la durabilité des systèmes et des processus. Le transfert de chaleur peut se produire selon trois modes principaux : la conduction, la convection et le rayonnement.

1. **Conduction** : Elle se produit à travers un matériau solide ou entre des matériaux en contact direct. Les particules plus chaudes transfèrent leur énergie aux particules plus froides par des collisions successives.

2. **Convection** : Ce mode de transfert a lieu dans les fluides (liquides et gaz) et implique le déplacement des particules chauffées. Cela peut se produire naturellement (convection libre) ou être induit par des moyens mécaniques (convection forcée).
  3. **Rayonnement** : Contrairement à la conduction et à la convection, le rayonnement n'exige pas de support matériel. Il s'agit du transfert d'énergie thermique sous forme d'ondes électromagnétiques, telles que la lumière et la chaleur infrarouge.
- **Importance du transfert de chaleur dans l'ingénierie** : Comprendre le transfert de chaleur est crucial pour concevoir des systèmes énergétiques efficaces, optimiser le refroidissement des équipements électroniques, concevoir des bâtiments éco-énergétiques et aborder des phénomènes naturels tels que le climat.
- **Objectifs des études sur le transfert de chaleur** : L'étude du transfert de chaleur vise à :
- Comprendre les mécanismes fondamentaux derrière chaque mode de transfert.
  - Analyser les propriétés thermiques des matériaux.
  - Développer des modèles mathématiques pour prédire le comportement thermique des systèmes.
  - Concevoir des dispositifs thermiques efficaces.

# Chapitre 2

## Transferts thermiques par conduction.

### 2.1 Introduction

On a vu au chapitre 1 que la conduction thermique <sup>1</sup> est un mode de transmission de la chaleur dans la matière. La conduction concerne principalement les solides. En effet, bien que présente également dans les liquides et les gaz, elle y est le plus souvent négligeable par rapport à la convection et au rayonnement.

Nous allons introduire les questions essentielles à traiter dans un problème de conduction thermique, en nous appuyant sur l'exemple du système de chauffage de locaux par plancher chauffant électrique direct. Dans ce mode de chauffage, l'émission de chaleur est produite par effet Joule dans un câble chauffant.

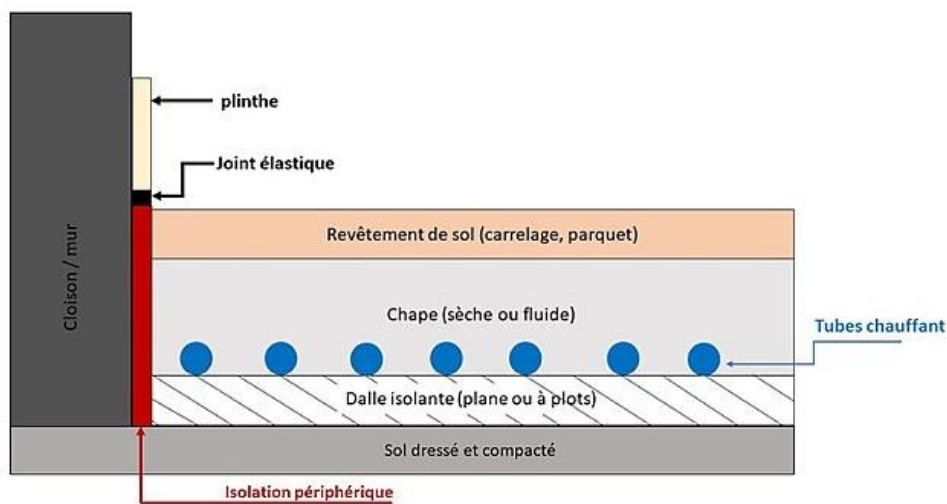


Figure 2.1 - Coupe d'un plancher chauffant électrique direct.

Ce câble chauffant est disposé dans une chape d'enrobage, elle-même placée au-dessus d'une couche de matériau isolant. Le rôle de cet isolant est très important, puisqu'il conditionnera la bonne répartition des flux de chaleur émis par le câble chauffant.

Le problème fondamental de la conduction est de trouver la température en tout point de l'épaisseur du plancher, ainsi que la puissance thermique échangée à travers sa surface, afin de résoudre les problèmes de dimensionnement suivants :

- a) Connaissant la puissance  $P$  à évacuer, déterminer les caractéristiques de la couche isolante pour qu'au moins 90% du flux de chaleur soit ascendant.
- b) Vérifier que la température de surface du plancher ne dépasse pas une limite réglementaire  $T_{\max}$  correspondant au confort optimal.

Ces deux problèmes concernent le régime permanent, dans lequel la température en chaque point du plancher est indépendante du temps, ce qui signifie que l'équilibre thermique entre l'énergie fournie au système et les déperditions est atteint. Mais, il est parfois nécessaire de résoudre des problèmes thermocinétiques, c'est-à-dire en régime variable.

- c) On pourra par exemple être amené à vérifier que le temps de mise en température de confort d'un local déterminé n'excède pas une certaine durée contractuelle.

Pour résoudre ces problèmes, il est nécessaire de connaître le mécanisme local du phénomène. Nous verrons que ce mécanisme sera décrit par une équation, dite équation de la chaleur, liant entre elles les différentes grandeurs intervenant (la température  $T$ , le temps  $t$ , les variables d'espace  $x, y, z$ ).

Parmi toute une famille de solutions possibles de l'équation précédente, il faudra retenir celle qui sera compatible avec le respect des conditions existantes aux limites du domaine étudié. Par exemple, la température de surface du câble chauffant doit demeurer constante et égale à une valeur spécifiée par le constructeur du câble.

De même, la répartition initiale de température dans le milieu étudié intervient également sur l'évolution ultérieure des températures dans ce milieu.

## 2.2 Concepts fondamentaux

### 2.2.1 Champs thermiques.

Nous venons de considérer un premier champ thermique, qui est un champ scalaire, celui des températures  $T(M, t)$ , où  $M(x, y, z)$  désigne un point quelconque du plancher chauffant considéré. On a vu que ce champ de températures peut être permanent ou variable.

On appellera surface isotherme, le lieu des points  $M$  ayant la même température à un instant  $t$ .

Supposons que le câble chauffant de l'exemple précédent apporte au plancher une quantité de chaleur  $dQ$  pendant le temps  $dt$ .

Le flux thermique qui va se propager vers le local à chauffer est :

$$\Phi = dQ / dt \quad (2.1)$$

(Ce flux est une puissance exprimée en Watt).

Si on suppose la structure du plancher chauffant parfaitement uniforme, on peut se contenter de raisonner sur une surface de plancher unité, et ensuite les résultats obtenus pourront être étendus à toute la surface  $S$  de ce plancher.

On appellera densité de flux thermique, la puissance échangée par surface unité, c'est-à-dire la grandeur :

$$\varphi = dQ / S dt = \Phi / S \quad (2.2)$$

(Cette densité de flux thermique s'exprime en Watt/m<sup>2</sup>).

Mais notre hypothèse d'uniformité du plancher est sans doute trop simpliste. Aussi renoncerons nous, à considérer une seule densité de flux thermique,  $\varphi$  valable en tout point de la surface  $S$  du plancher. Il est nécessaire de passer à une description locale. Pour ce faire, introduisons un champ de vecteurs  $\vec{\varphi}(M, t)$  représentant la densité *locale* du flux thermique en chaque point  $M(x, y, z)$  du plancher chauffant.

Ce vecteur  $\vec{\varphi}(M, t)$  caractérise en chaque point du milieu, la direction, le sens et l'intensité du flux de chaleur provoqué par la présence de la source interne. Le module d'un tel vecteur a la dimension d'une puissance par unité de surface, et s'exprime en Watt/m<sup>2</sup>.

Dans l'exemple qui nous sert de support de raisonnement, la direction du flux de chaleur ne fait guère de doute, parce que la géométrie étudiée n'est qu'à 2 dimensions. Mais il sera souvent nécessaire au thermicien de se pencher sur des problèmes en 3D. La direction du flux thermique en un point  $M(x, y, z)$  sera alors en général quelconque.

Si alors, on envisage une surface élémentaire  $dS$  entourant le point  $M(x, y, z)$ , orienté par sa normale unitaire  $\vec{n}$ , la direction du flux de chaleur fera un angle  $\alpha$  avec la normale  $\vec{n}$ , et le flux élémentaire de chaleur  $d\Phi$  à travers la surface  $dS$  sera donné par l'expression :

$$d\Phi = \left| \vec{\varphi}(M, t) \right| \cos \alpha \, dS$$

Cette quantité représente une énergie par unité de temps, et s'exprime donc en Watt.

On peut faire un parallèle entre le champ de vecteurs *densité de flux* en thermique, et le champ de *vitesses* en mécanique des fluides. Pour chacun de ces deux champs de vecteurs, on peut définir des lignes de courant, qui sont les enveloppes des vecteurs considérés.

Dans chacune des deux disciplines, la mécanique des fluides et la thermique, l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé constitue un tube de courant.

### 2.2.2 Loi de Fourier (1822)

Il existe une relation linéaire entre l'effet auquel on s'intéresse, c'est-à-dire la densité de flux thermique  $\vec{\varphi}(M, t)$  et sa cause, qui est l'existence d'un gradient de température  $\vec{\text{grad}} T$ . En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique **instantanée est** proportionnelle au gradient de température, ce qui s'écrit :

$$\vec{\varphi}(M, t) = -\lambda \vec{\text{grad}} T \quad (2.3)$$

Le coefficient de proportionnalité  $\lambda$  s'appelle la conductivité thermique du milieu.

Pour un milieu isotrope et homogène,  $\lambda$  ne dépend que de la température  $T$ . Dans de nombreux cas pratiques, lorsque les écarts de température ne sont pas trop élevés, on peut considérer, avec une précision suffisante,  $\lambda$  comme une constante pour un milieu donné.

Par convention,  $\vec{\varphi}(M, t)$  est compté positivement dans le sens d'écoulement de la chaleur, c'est-à-dire vers les températures décroissantes.  $\vec{grad} T$  Est un vecteur porté par le même axe, mais de sens contraire à  $\vec{\varphi}(M, t)$ , d'où le signe moins de la loi de Fourier.

$\vec{\varphi}(M, t)$  et  $\lambda \vec{grad} T$  s'expriment en  $W/m^2$ . Il en résulte que la conductivité thermique  $\lambda$  s'exprimera en Watt/ (m. °C)

### 2.2.3 Orthogonalité du gradient et de l'isotherme

En un point quelconque M du milieu, on a à tout instant :

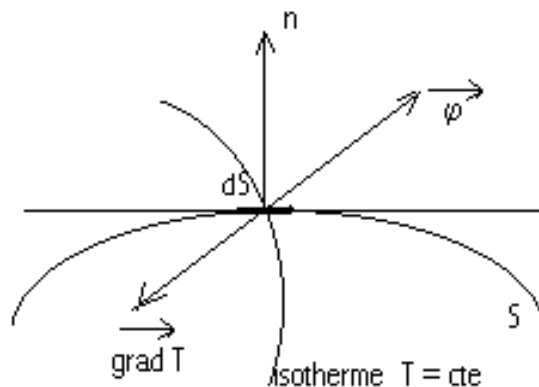
$$dT = \vec{grad} T \cdot \vec{dM}$$

Si on considère un déplacement élémentaire  $dM$  sur l'isotherme passant par M, le long de cette isotherme, on a :

$$dT = 0 = \vec{grad} T \cdot \vec{dM}$$

Les vecteurs  $\vec{grad} T$  et  $\vec{dM}$  sont donc orthogonaux

$$\vec{grad} T \cdot \vec{dM}$$



Le gradient de température en chaque point est normal à la surface isotherme passant par ce point. Il en résulte que les lignes de courant, auxquelles les vecteurs 'densité de flux thermique' sont tangents, sont également normales aux surfaces isothermes.

Les parois d'un tube de courant sont par conséquent normales aux isothermes. Aucun flux ne les traverse donc. Ces parois sont dites adiabatiques. Ainsi, en régime permanent, le flux thermique est conservatif dans un tube de courant. Cette propriété est l'exacte analogie de la constance du débit dans un tube de courant en mécanique des fluides.

### 2.3 Conduction en régime permanent

Nous commencerons par raisonner, pour plus de clarté, dans le cadre d'un problème à une seule dimension. Un tel problème unidimensionnel est connu sous le nom de problème du mur, c'est-à-dire d'un milieu limité par deux plans parallèles, dans lequel la chaleur se propage uniquement suivant la normale à ces plans. Le gradient de température est par conséquent porté par cette normale. Les isothermes sont des plans parallèles aux faces.

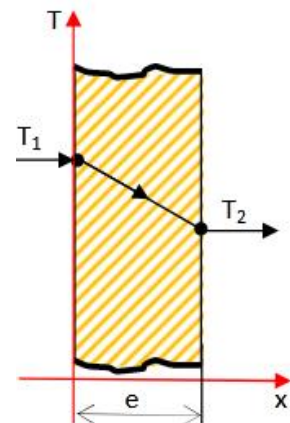
Un tel champ thermique est unidirectionnel. Dans ce cas, la température  $T$  n'est fonction que de l'abscisse  $x$ .

Considérons une paroi d'épaisseur  $e$  séparant deux domaines où règnent des températures respectives  $T_1$  et  $T_2$ , avec  $T_1$  supérieure à  $T_2$ .

Si le phénomène considéré est en régime permanent, les températures n'évoluent plus. C'est donc que l'on a atteint un régime d'équilibre entre l'apport de chaleur à travers la face chaude de la paroi, et la déperdition de chaleur à travers la face froide :

$$S \cdot \varphi_1 = S \cdot \varphi_2$$

Flux entrant = Flux sortant



Dans l'hypothèse d'un déséquilibre, si :

$$S \cdot \varphi_1 - S \cdot \varphi_2 = S \Delta \varphi > 0$$

La quantité de chaleur excédentaire  $S \Delta \varphi$  accumulée chaque seconde dans la paroi, est liée aux caractéristiques physiques de cette paroi par l'expression

$$S \Delta \varphi = \frac{m C_p \Delta T}{\Delta t} \tag{2.4}$$

et c'est cette accumulation de chaleur qui entraîne une augmentation de température de la paroi.

Par contre, en régime permanent, on a :  $m C_p \frac{\Delta T}{\Delta t} = 0$

ce qui s'intègre immédiatement, pour donner le profil de température dans le mur, qui varie linéairement en fonction de  $x$  :

$$m C_p T(x) = ax + b$$

Pour déterminer les valeurs des constantes  $a$  et  $b$  qui définiront une solution particulière, on peut envisager plusieurs types de conditions de surface appliquées à ce mur, selon la nature du problème physique à résoudre.

### 2.3.1 Mur simple à faces isothermes

L'une des configurations possibles est d'imaginer que chacune des parois est maintenue à une température constante et connue. Ce sera par exemple le cas pour une maison qu'on désire chauffer à une température intérieure  $T_1$  pendant qu'il règne une température extérieure  $T_2$ .

Pour  $x = 0$ , on aura :  $m C_p T_1 = b$

et pour  $x = e$  :  $m C_p T_2 = a e + b$

d'où on tire:  $m C_p (T_2 - T_1) = a e$  et  $a = m C_p (T_2 - T_1) / e$

Le profil de température dans la paroi a en définitive pour expression :

$$m C_p T(x) = m C_p x (T_2 - T_1) / e + m C_p T_1$$

$$\varphi = - \lambda dT / dx$$

Le gradient étant constant, ce débit de chaleur a une valeur constante quelle que soit l'abscisse  $x$  dans la paroi. La température ne variera donc pas en fonction du temps. C'est le régime permanent.

$$\varphi = - \lambda (T_1 - T_2) / (x_1 - x_2)$$

Soit :

$$\varphi = \lambda (T_1 - T_2) / e \quad (\text{en } W/m^2) \quad (2.6)$$

Le flux thermique transmis par conduction à travers la paroi est donc :

$$\Phi = S \varphi = \lambda S (T_1 - T_2) / e \quad (\text{en } W) \quad (2.7)$$

On voit qu'il existe une relation de proportionnalité entre le flux thermique transmis par conduction à travers la paroi et la différence de température  $T_1 - T_2$  :

$$T_1 - T_2 = \frac{e}{\lambda S} \Phi = R \Phi \quad (2.8)$$

$$\text{avec: } R = \frac{e}{\lambda S} = \frac{\frac{1}{\lambda} e}{S} \quad (2.9)$$

La forme du coefficient de proportionnalité R rappelle l'expression donnant la résistance R d'un conducteur électrique de longueur e, de section S et de résistivité  $\rho = 1/\lambda$ .

(L'inverse de la conductivité est la résistivité)

De même l'expression  $T_1 - T_2 = R \Phi$  suggère un rapprochement avec la loi d'Ohm  $U_1 - U_2 = R I$

Pour ces deux raisons, le coefficient R de la relation  $T_1 - T_2 = R \Phi$  est appelé **la résistance thermique** de la paroi considérée. La résistance thermique s'exprime en Kelvin/Watt ( K/W) ou en °C/W

### 2.3.2 Paroi en contact avec deux fluides

Pour déterminer les valeurs des constantes a et b qui définiront une solution particulière, on a vu que l'on pouvait envisager plusieurs types de conditions de surface appliquées au mur.

Considérons maintenant une paroi d'épaisseur e en contact avec deux fluides de températures constantes  $T_{\infty_1}$  et  $T_{\infty_2}$ . Entre chacun des fluides et la paroi, il s'établit un échange convectif, les températures respectives de chacune des deux faces de la paroi étant  $T_1$  et  $T_2$ .

Il s'agit alors d'un problème dit mixte, combinant deux modes de transmission de la chaleur : la convection et la conduction. Le problème étant unidimensionnel, la conservation du flux thermique (stationnarité du problème), se traduit par l'égalité des flux :

- $\Phi_1$ , cédé par le fluide chaud à la paroi (convection)
- $\Phi$ , traversant la paroi (conduction)
- $\Phi_2$ , cédé par la paroi au fluide froid (convection)

On a :

$$\Phi_1 = h_1 S (T_{\infty_1} - T_1) \quad (2.10)$$

$$\Phi_2 = h_2 S (T_2 - T_{\infty_2}) \quad (2.11)$$

où  $h_1$  et  $h_2$  sont deux coefficients d'échange s'exprimant en  $W / (m^2 \cdot ^\circ C)$ .

Quant au flux dans la paroi elle-même, on a déjà montré qu'il était égal à :

$$\Phi = \lambda S (T_1 - T_2) / e$$

On a donc :

$$\Phi = \frac{T_{\infty_1} - T_1}{1 / h_1 S} = \frac{T_1 - T_2}{e / \lambda S} = \frac{T_2 - T_{\infty_2}}{1 / h_2 S} \quad (2.12)$$

Ces expressions suggèrent de définir des résistances thermiques convectives :

$$R_{c1} = 1 / h_1 S \quad (2.13)$$

$$R_{c2} = 1 / h_2 S \quad (2.14)$$

Qui s'expriment en  $^\circ C/W$  comme la résistance thermique de conduction  $R = e / \lambda S$  définie au § 2.3.1. L'équation (2.12) permet d'exprimer le flux échangé entre les fluides repérés par les indices (1) et (2) en fonction des températures de ces fluides, des caractéristiques de la paroi qui les sépare, et de deux coefficients d'échange convectif :

$$\Phi = \frac{T_{\infty_1} - T_{\infty_2}}{R_{c1} + R + R_{c2}} \quad (2.15)$$

Cette relation traduit la loi (2.8) :

$$T_1 - T_2 = R \cdot \Phi$$

Pour les trois résistances  $R_{c1}$ ,  $R$  et  $R_{c2}$  en série.

Par analogie avec les relations (2.10) et (2.11) qui expriment le flux transmis en fonction de l'écart de température :

$$\Phi_1 = h_1 S (T_{\infty 1} - T_1)$$

$$\Phi_2 = h_2 S (T_2 - T_{\infty 2})$$

on peut exprimer la relation (2.15) sous la forme :

$$\Phi = k S (T_{\infty 1} - T_{\infty 2})$$

dans laquelle k désigne un coefficient global d'échange entre les deux fluides, coefficient k qui a pour expression :

$$k = \frac{1}{(R_{c1} + R + R_{c2}) S} \quad (2.16)$$

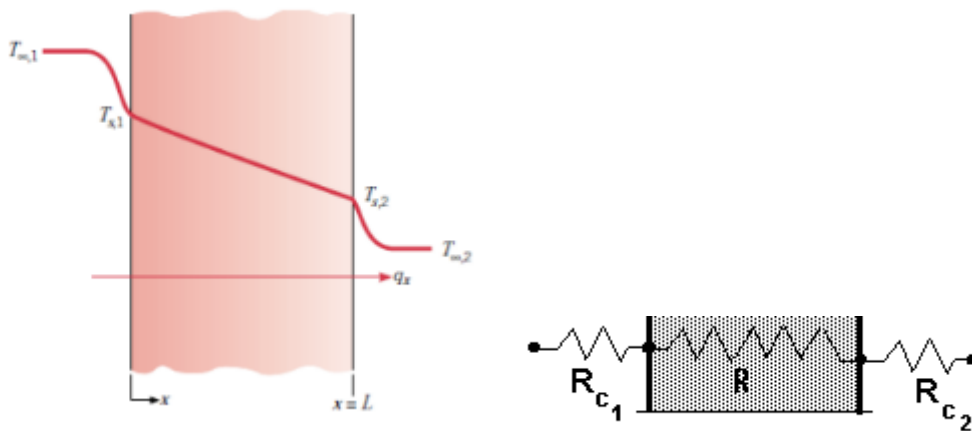


Figure 2.2 - Transfert de chaleur entre deux fluides de part et d'autre d'une paroi.

La température en un point d'abscisse x (voir figure 4) est donnée par la relation :

$$T_{\infty 1} - T(x) = [R_{c1} + R(x)] \Phi$$

où:

$$R(x) = x / \lambda S$$

En remplaçant  $\Phi$  par l'expression (2.15), il vient :

$$T(x) = T_{\infty_1} - \left[ R_{c1} + \frac{x}{\lambda S} \right] \frac{T_{\infty_1} - T_{\infty_2}}{R_{c1} + R + R_{c2}} \quad (2.16)$$

### 2.3.4 Paroi multicouches en contact avec deux fluides

Ce sera par exemple le cas d'une paroi de four composée de deux couches. Nous nous appuyerons sur un exemple concret, afin de donner une idée des ordres de grandeurs. La première couche est un garnissage en briques réfractaires (épaisseur  $e_1 = 0,20$  m, conductivité  $\lambda_1 = 1,38$  W/(m . °C)), la seconde est un isolant fibreux (épaisseur  $e_2 = 0,10$  m, conductivité  $\lambda_1 = 0,17$  W/ (m. °C)).

Nous supposerons que le contact est parfait entre les deux couches.

Par un raisonnement identique au précédent, on obtient de même:

$$\Phi = \frac{T_{\infty_1} - T_{\infty_2}}{R_{c1} + \sum_{i=1}^{i=n} R_i + R_{c2}} \quad (2.17)$$

avec:

$$R_i = e_i / \lambda_i S$$

et:

$$T(x) = T_{\infty_1} - \left[ R_{c1} + \sum_{i=1}^{i=n-1} R_i + \frac{x_i}{\lambda_i S} \right] \frac{T_{\infty_1} - T_{\infty_2}}{R_{c1} + \sum_{i=1}^{i=n} R_i + R_{c2}} \quad (2.18)$$

Appliquons ces résultats au four de traitement thermique dont les caractéristiques des parois ont été données au début de ce paragraphe. La température de traitement à l'intérieur du four,  $T_{\infty_1}$ , est de 1 650 °C, et le coefficient  $h_1$  d'échange sur la face intérieure vaut 70 W / (m<sup>2</sup> . °C). La température de l'air ambiant,  $T_{\infty_2}$ , est de 25°C, et le coefficient  $h_2$  d'échange sur la face extérieure vaut 10 W / (m<sup>2</sup> . °C).

Calculer les pertes de chaleur par m<sup>2</sup> de surface de paroi, les températures des faces intérieures et extérieures, et celle de l'interface entre le briquetage et l'isolant.

Les pertes sont données par la relation (2.17) :

$$\varphi = \frac{\Phi}{S} = \frac{T_{\infty_1} - T_{\infty_2}}{[R_{c1} + R_1 + R_2 + R_{c2}] S}$$

Avec :

$$R_{c1} = 1/h_1 = 0,0143 \text{ m}^2 \cdot \text{°C/W}$$

$$R_1 = e_1/\lambda_1 = 0,1449 \text{ m}^2 \cdot \text{°C/W}$$

$$R_2 = e_2/\lambda_2 = 0,5882 \text{ m}^2 \cdot \text{°C/W}$$

$$R_{c2} = 1/h_2 = 0,100 \text{ m}^2 \cdot \text{°C/W}$$

Soit  $\varphi = 1916 \text{ W/m}^2$

La température de la paroi interne est fournie par la relation :

$$T_{\infty_1} - T_1 = (1/h_1) \varphi = 0,0143 \cdot 1916 = 27,4 \text{ °C} \text{ d'où } T_1 = 1622,6 \text{ °C}$$

Cette température est peu différente de celle de l'atmosphère interne du four de traitement.

La température de l'interface entre les deux couches est obtenue de la même manière :

$$T_1 - T' = (e_1/\lambda_1) \varphi \text{ soit } T' = 1344,6 \text{ °C}$$

La température de la face externe de la paroi du four vaut :

$$T_2 = T_{\infty_2} + (1/h_2) \varphi = 216,6 \text{ °C}$$

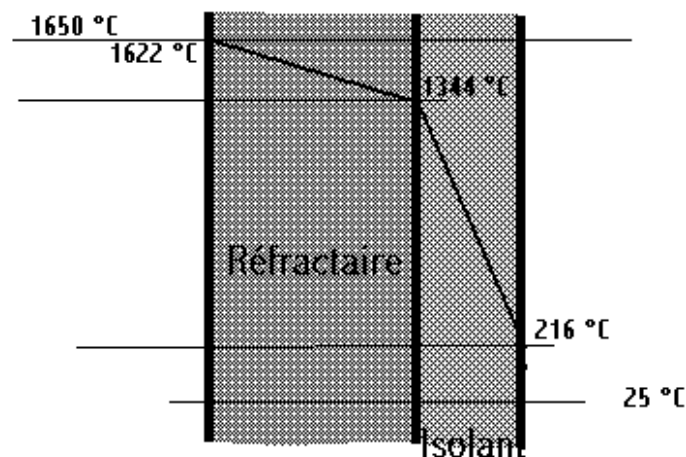


Figure 2.3 - Évolution de la température dans la paroi d'un four

## 2.4 Cas général : Équation de la chaleur

### 2.4.1 Bilan énergétique

Après avoir commencé par traiter le cas unidimensionnel en régime permanent, nous allons maintenant établir le bilan thermique d'une quantité de matière à l'état solide, contenue dans un volume fini  $v$ , délimité par une surface  $s$ , appartenant à un milieu en trois dimensions. La substance considérée a des caractéristiques thermiques décrites par sa capacité thermique massique  $c$  et sa conductivité thermique  $\lambda$ . Nous supposerons que les grandeurs  $c$  et  $\lambda$  ne dépendent ni de l'espace (substance homogène), ni de la température (approximation valable tant que les écarts de température ne sont pas trop importants).

Nous supposerons en outre que le volume  $v$  contient des sources internes dégageant de la chaleur avec une puissance volumique  $p$  (par effet Joule par exemple).

Si le phénomène considéré n'est pas en régime permanent, mais en régime variable, cela signifie que l'échange de chaleur à travers la surface  $s$  provoque une variation de la quantité de chaleur accumulée dans le volume  $v$ .

La puissance thermique reçue (algébriquement) par le volume  $v$  a pour expression :

$$\Phi = -\iint \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, ds \quad (2.19)$$

Il faut y ajouter la puissance dégagée dans le volume  $v$  par les sources internes, soit :

$$\iiint p \, dv \quad (2.20)$$

Pendant l'intervalle de temps  $dt$ , la substance contenue dans le volume  $v$  emmagasine donc une quantité de chaleur  $\Phi \, dt$ , qui va provoquer une variation de température  $\partial T$ , dépendant de capacité thermique massique  $c$ .

Comme on raisonne sur l'unité de volume, il est nécessaire d'introduire la capacité thermique volumique égale à  $\rho c$ .

On aura donc : 
$$\Phi dt = \iiint \rho c \partial T \, dv$$

Soit en tenant compte des expressions (2.19) et (2.20) :

$$-\iint \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, ds + \iiint p \, dv = \iiint \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \, dv \quad (2.21)$$

La formule d'Ostrogradski permet de transformer l'intégrale de surface en une intégrale de volume :

$$\iint \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint \operatorname{div}(\vec{\varphi}) \, dv \quad (2.22)$$

En combinant les équations (2.21) et (2.22), on obtient alors :

$$\iiint \left[ -\operatorname{div} \vec{\varphi} + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dv = 0$$

Le volume v considéré étant arbitraire, le bilan thermique instantané s'exprime localement en chaque point M du volume considéré par :

$$-\operatorname{div} \vec{\varphi} + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.23)$$

### 2.4.2 Équation de la chaleur en milieu homogène et isotrope

Si on tient maintenant compte de la Loi de Fourier (2.3) :

$$\vec{\varphi}(M, t) = -\lambda \operatorname{grad} T$$

le bilan (2.23) devient :

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) + p - \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

C'est-à-dire finalement :

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} - \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.24)$$

qui constitue l'équation de la chaleur.

On écrit souvent cette équation sous la forme :

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2.25)$$

en introduisant le paramètre :

$$a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (2.26)$$

a est la *diffusivité thermique* de la substance considérée.

Cette définition conduit à l'équation aux dimensions suivantes:  $[a] = \frac{[\lambda]}{[\rho][c]}$

soit:

$$[a] = \frac{[ML^2T^{-3} L^{-1}\Theta^{-1}]}{[ML^{-3}][ML^2T^{-2} M^{-1}\Theta^{-1}]}$$

c'est-à-dire:

$$[a] = L^2T^{-1}$$

La diffusivité thermique d'un solide s'exprime en m<sup>2</sup>/s, comme la viscosité cinématique d'un fluide.

### 2.4.3 Différentes formes de l'équation de la chaleur

Selon la nature des problèmes examinés, l'équation de la chaleur prend des formes différentes.

#### (a) Cas d'un milieu sans sources internes, en régime permanent.

L'équation de la chaleur (2.24) se réduit alors à:

$$\Delta T = 0 \tag{2.27}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial T^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T^2}{\partial y^2} + \frac{\partial T^2}{\partial z^2} = 0 \tag{2.28}$$

C'est l'équation de Laplace.

#### (b) Cas d'un milieu avec sources internes, en régime permanent.

L'équation de la chaleur (2.24) se réduit alors à :

$$\Delta T + \frac{P}{\lambda} = 0 \tag{2.29}$$

C'est l'équation de Poisson.

#### (c) Cas d'un milieu sans sources internes, en régime variable.

L'équation de la chaleur (2.24) se réduit alors à :

$$\Delta T = \frac{\rho c}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.30}$$

C'est l'équation de Fourier.

## 2.5 Conditions aux limites spatio-temporelles

Chacune des formes (2.28), (2.29) et (2.30) de l'équation de la chaleur traduit, par une relation entre les variables  $x, y, z, t$  et la température  $T$ , le mécanisme de transport de la chaleur par conduction, en tout point de coordonnées  $x, y, z$  et à tout instant  $t$ . Cette équation aux dérivées partielles, linéaire et du second ordre, admet en principe une infinité de solutions, faisant intervenir des constantes arbitraires.

Mais parmi ces solutions mathématiques, il n'y en aura qu'une seule qui présentera un sens physique, dès lors que l'on aura posé correctement un problème de thermique déterminé. Ceci supposera :

- (1) que l'on ait défini la géométrie du corps solide à travers lequel on désire étudier le phénomène de transmission de chaleur par conduction.
- (2) que l'on connaisse la distribution initiale des températures à l'intérieur du solide et sur sa surface, à l'instant  $t = 0$ .

En effet, l'équation de la chaleur décrivant un phénomène *irréversible*, ceci implique que le milieu considéré a été soumis, à l'instant initial, à une rupture de son équilibre thermique. L'évolution ultérieure du phénomène étant causée par ces conditions initiales, il est nécessaire de les connaître pour prévoir cette évolution.

- (3) que l'on puisse traduire sous une forme mathématique stylisée, les conditions physiques réelles qui règnent à la surface du solide.

(3 - a) Il peut s'agir d'une température imposée :  $T_P = f(M_P, t)$

Si la température de paroi  $T_P$  est une constante, on parle de condition d'isotherme.

(3 - b) Il peut s'agir d'une densité de flux imposée :  $\varphi = -\lambda (\delta T / \delta n)_P = f(M_P, t)$

- Si le corps est thermiquement isolé, le flux est nul en tout point de sa surface. On dira qu'il s'agit d'un corps adiabatique.
- Si le corps est chauffé ou refroidi par un fluide, le transfert de chaleur s'effectue par convection. La densité de flux traversant la surface frontière est alors proportionnelle à l'écart de température entre la paroi et le fluide environnant :

$$\varphi = h ( T_P - T_\infty )$$

$h$  est une constante appelée coefficient d'échange, et  $T_\infty$  désigne la température du fluide loin de la paroi. C'est la condition de transfert de chaleur par convection dite loi de Newton. En utilisant la loi de Fourier, cette condition s'écrit :

$$-\lambda \left( \frac{\delta T}{\delta n} \right)_P = h ( T_P - T_\infty ) \quad (2.31)$$

ou encore:  $T_P + \alpha \left( \frac{\delta T}{\delta n} \right)_P = f( M_P, t )$  avec  $\alpha = \lambda/h$

- Enfin, le corps solide considéré échangera par rayonnement avec son environnement extérieur, une certaine quantité de chaleur. La densité de flux thermique échangée par rayonnement sera étudiée plus loin dans ce cours, mais il est important de réaliser que ce mode de transfert par rayonnement peut éventuellement constituer une condition de surface importante à exprimer, afin de pouvoir résoudre le problème de conduction.

D'une manière générale, les différents types de conditions de surface peuvent être superposés. Ainsi, la chaleur traversant une plaque métallique est transmise au milieu environnant, à la fois par convection et rayonnement.

## 2.6 Récapitulation des principales grandeurs thermiques

Les caractéristiques thermiques élémentaires des solides que l'on a définies dans l'exposé qui précède, sont :

- la capacité thermique massique, ( ou chaleur massique)  $C$
- la conductivité thermique  $\lambda$
- la diffusivité thermique  $a = \lambda / \rho c$

# Chapitre 3

## Méthodes de résolution de l'équation de la chaleur.

### 3.1 Introduction

Nous considérerons uniquement dans ce qui suit, des milieux isotropes, homogènes, de caractéristiques thermiques  $\lambda$  et  $a$  constantes, et où la puissance thermique par unité de volume  $p$  des sources internes est indépendante de la température. Résoudre l'équation de la chaleur dans un tel milieu, limité à un volume  $V$  par une surface  $S$ , c'est déterminer la fonction température  $T(M, t)$  qui satisfera à chacune des 3 conditions suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta T - \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{p(M, t)}{\lambda} &= 0 & , M \text{ dans } V, t > 0 \\ T(M, 0) &= T_0(M) & , M \text{ dans } V \text{ ou sur } S, t = 0 \\ T + \alpha \frac{\partial T}{\partial n} &= f(M, t) & , M \text{ sur } S, t > 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

La première est l'équation de la chaleur elle-même.

La seconde est la condition initiale imposant la connaissance de l'état thermique du milieu étudié à l'instant  $t = 0$ .

La troisième exprime la condition de transfert de chaleur convectif régnant sur la limite  $S$  du milieu.

Le système d'équations ci-dessus étant linéaire, il est possible de ramener sa résolution à celle de problèmes élémentaires plus simples, en séparant conditions initiales et conditions aux limites, puis en superposant linéairement les solutions partielles obtenues.

### 3.2 Régime permanent

En régime permanent, la température en chaque point du milieu est indépendante du temps.

L'équation générale se réduit à l'équation de Laplace (2.28) pour un milieu sans sources, et à l'équation de Poisson (2.29), lorsque le milieu comporte des sources internes.

### 3.2.1 Cas monodirectionnel

Lorsque le problème est à une seule dimension, il existe généralement une solution analytique assez simple. Nous avons ainsi développé au chapitre précédent les cas élémentaires des murs simples ou multicouches.

Bien que très schématique, ce modèle a de nombreuses applications pratiques :

- perte thermique à travers les parois d'un four ;
- bilan thermique approché d'un bâtiment ;
- mesure de la conductivité thermique ;

### 3.2.2 Géométries en 2D ou 3D

Dès que l'on abandonne le cas unidirectionnel, la moindre tentative de résolution analytique devient vite inextricable. En fait, les calculs théoriques qui ont été les seuls disponibles pendant de nombreuses années ont cédé la place aux méthodes numériques qui détiennent aujourd'hui un quasi-monopole. Des codes de calcul spécialisés sont même disponibles sur micro-ordinateurs, dans des versions d'emploi accessible et convivial.

Une seule technique fait peut-être exception, du fait de ses mérites en termes d'élégance et de pédagogie : c'est l'analogie électrique. Son domaine d'application est toutefois limité aux problèmes bidimensionnels avec des conditions de surface relativement simples : température imposée, flux nul, condition mixte.

### 3.2.3 Analogie électrique

Nous avons déjà défini une grandeur thermique analogue à une grandeur électrique : la résistance thermique. Plus généralement, lorsque deux phénomènes physiques sont régis par des équations identiques et que l'un d'eux est facilement accessible aux mesures, on peut avec profit utiliser ces mesures pour étudier l'autre phénomène. Ainsi, les équations de Laplace (2.28), Poisson (2.29) et Fourier (2.30) sont communes à la thermique et à l'électricité. Le réseau des équipotentielles,  $E = \text{Constante}$ , correspond au réseau des isothermes  $T = \text{Constante}$ .

Le tableau 3.1 résume l'identité formelle entre les équations et les grandeurs qui régissent les phénomènes de conduction thermique et électrique.

<i>Équations et Grandeurs en régime permanent</i>	<i>Phénomène thermique</i>	<i>Phénomène électrique</i>
<i>grandeur étudiée</i>	température T	potentiel E
<i>Equation générale</i>	$\Delta T = 0$	$\Delta E = 0$
<i>densité de flux ou de courant</i>	$\varphi = -\lambda \text{ grad } T$	$i = -\gamma \text{ grad } E$
<i>flux ou courant</i>	$\Phi = \varphi S$	$I = i S$
<i>conductivité</i>	$\lambda$	$\gamma$
<i>résistance</i>	$R_t = L / (\lambda S)$	$R_e = L / (\gamma S)$
<i>loi d'Ohm</i>	$T_2 - T_1 = R_t \Phi$	$E_2 - E_1 = R_e I$

Tableau 3.1 - Analogie entre conduction thermique et conduction électrique

Les problèmes mono et bidirectionnels se traitent très simplement en réalisant des modèles électriques à l'aide de feuilles conductrices telles que le papier conducteur Télédeltos. À titre d'exemple, nous allons étudier la répartition des températures dans l'enveloppe d'un four présentant, en régime permanent, les caractéristiques de fonctionnement suivantes :

- la température de la paroi interne  $S_1$  est une fonction connue de l'abscisse suivant l'axe du four :  $T_{P1} = f(x)$
- la paroi latérale externe  $S_2$  est à une température uniforme  $T_{P2} = 50^\circ\text{C}$
- le flux de fuite à travers les sections droite est négligeable

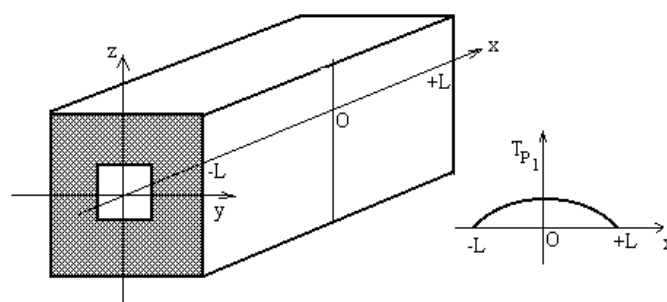


Figure 3.1 - Four de traitement thermique axisymétrique

Ce problème 3D peut être ramené en 2D en étudiant des tranches successives d'épaisseur  $\Delta x$ , pour lesquelles la condition de température sur le contour externe est uniforme. On peut ainsi étudier la tranche  $x = 0$  pour laquelle  $T_{P1} = 1150^\circ\text{C}$ , à l'aide d'un modèle électrique en papier conducteur à l'échelle convenable. La disposition générale est celle illustrée par la figure 3.2.

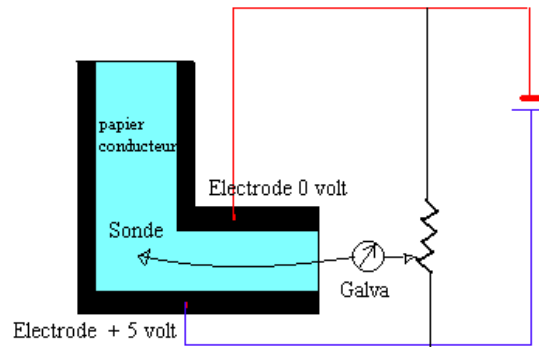


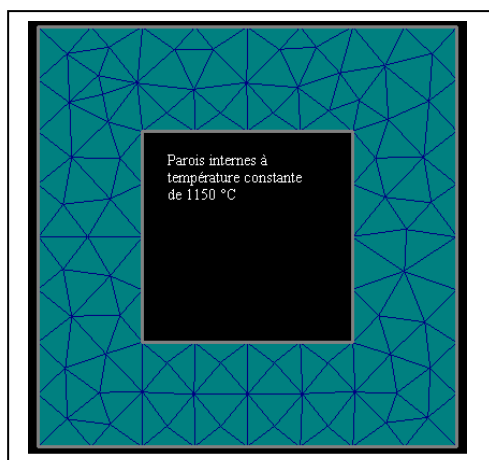
Figure 3.2 - Modèle analogue du four à températures de parois imposées

Les distributions de températures recherchées se déduisent directement du potentiel électrique mesuré en chaque point du modèle.

### 3.2.4 Codes de calcul 2D ou 3D-axisymétrique stationnaires

De telles méthodes analogiques restent cependant, il faut le reconnaître, des curiosités de laboratoire. Dans l'industrie, les seuls outils qui ont droit de cité sont aujourd'hui les codes numériques. Le principe des méthodes de résolution numérique appliquées dans les codes de calcul est de transformer l'équation de la chaleur et les conditions aux limites en un système d'équations aux différences finies ou aux éléments finis. À titre d'exemple, nous allons appliquer un code de calcul aux éléments finis, disponible sur micro-ordinateur dans une version 2D stationnaire, à la résolution du problème précédent du four à températures de parois imposées. Le maillage utilisé est représenté sur la figure 3.3 ci-dessous :

Parois externes à température constante de 50 °C



Nombre de milieux :	2
Nombre de frontières :	2
Nombre de nœuds-frontière :	48
Nombre de nœuds :	112
Nombre d'éléments finis :	176

Figure 3.3 - Maillage utilisé pour le problème du four à températures de parois imposées

La figure 3.4 et 3.5 représentent respectivement :

- une carte de températures étagées en 10 tranches de valeurs ;
- une répartition de la température dans la paroi, le long d'un plan de Coupe a – a

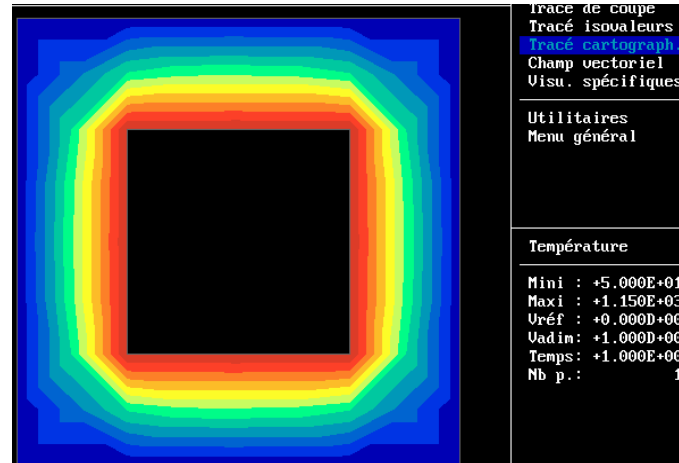


Figure 3.4 - Carte de températures dans la paroi du four

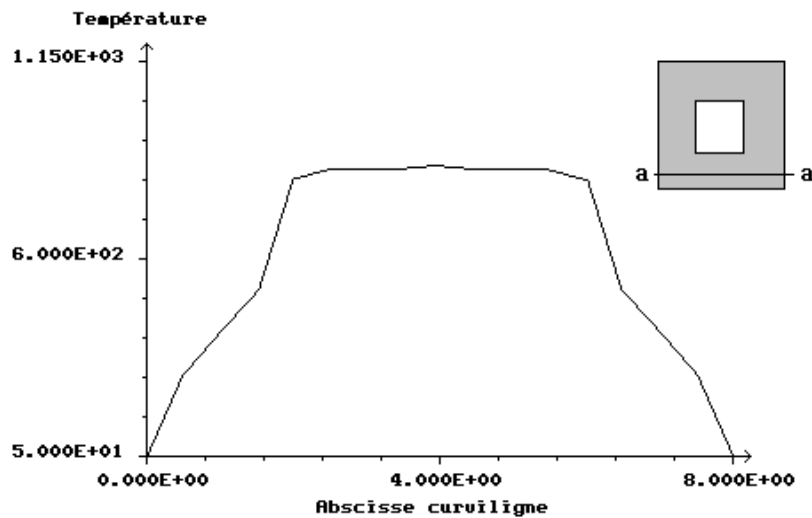


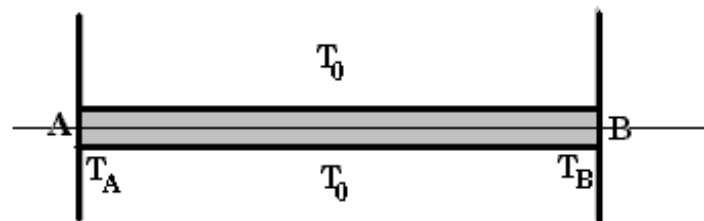
Figure 3.5 Température le long de la coupe a – a

### 3.2.5 Un code de calcul 1D stationnaire

Afin d'illustrer d'une manière concrète les méthodes de résolution numérique des problèmes de conduction de la chaleur, nous allons traiter entièrement un cas simple, mais néanmoins impossible à résoudre par une méthode non numérique.

Il s'agit du problème type de conduction dans un solide, avec échange latéral vers le milieu extérieur, généralement constitué d'un fluide au repos (échange par convection naturelle) ou en mouvement (échange par convection forcée).

Considérons une barre de section constante et de longueur très supérieure à ses dimensions transversales, constituée d'un matériau homogène bon conducteur de la chaleur. On chauffe la barre en permanence, à chacune de ses deux extrémités, ce qui revient à maintenir l'extrémité A à une température constante  $T_A$  et l'autre extrémité B à une température constante  $T_B$ .



La chaleur se propage selon l'axe de la barre, et radialement, pour s'écouler dans le milieu ambiant à travers la surface latérale de la barre. On se propose de calculer, en supposant qu'un équilibre de régime permanent est atteint, la répartition de température le long de la barre.

### 3.2.5.1 Modélisation physique du problème

Nous allons préciser le problème en considérant une barre cylindrique, de diamètre  $d$  et de longueur  $L$ , grande devant  $d$ . La densité de flux radial est :  $\varphi_r = -\lambda \frac{\partial T}{\partial r}$ .

La barre étant constituée d'un matériau bon conducteur de la chaleur, la dissipation radiale n'exige que de faibles gradients  $\frac{\partial T}{\partial r}$ .

Comme les dimensions transversales sont petites, les variations transversales de la température seront donc négligeables, et on peut considérer qu'une section droite d'abscisse  $x$  est isotherme. Le problème est donc devenu unidimensionnel, l'objet de ce problème étant de calculer la répartition de température  $T(x)$  le long de la barre.

On s'intéresse uniquement au régime permanent. L'équilibre thermique qui caractérise ce régime stationnaire se traduit nécessairement par une somme algébrique nulle des flux thermiques entrants et sortants d'une tranche quelconque de la barre, comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ .

Désignons par  $\Phi_x$  le flux thermique traversant la section droite d'aire  $S$  et d'abscisse  $x$  et par  $\Phi_L$  le flux thermique échangé par la surface latérale  $\pi d dx$  avec l'air ambiant. Le bilan énergétique de la tranche est nul en régime permanent

$$\Phi_x - \Phi_{x+dx} - \Phi_L = 0 \tag{3.2.1}$$

$\Phi_x$  est donné par la Loi de Fourier

$$\Phi_x = -\lambda \left[ \frac{dT}{dx} \right]_x \tag{3.2.2}$$

Quant à  $\Phi_L$  le flux thermique échangé par la surface latérale, il faut pour le calculer, introduire un coefficient d'échange thermique par convection. Considérons sur la surface d'un corps solide un élément d'aire  $dS$  à la température  $T_p$ . Si le corps est au contact d'un milieu fluide en mouvement caractérisé par une température

$T_\infty$ , la quantité de chaleur qui traverse  $dS$  pendant le temps  $dt$  peut s'écrire :

$$d^2 Q = h (T_p - T_\infty) dS dt \tag{3.2.3}$$

Le coefficient  $h$  est la conductance thermique de convection, ou coefficient d'échange thermique par convection.  $h$  s'exprime en  $W/(m^2 \cdot ^\circ C)$



Tout calcul d'échange thermique par convection nécessite la détermination du coefficient  $h$ , ce qui est toujours une affaire compliquée, car le transfert de chaleur par convection est un phénomène complexe.

Pour les gaz, les coefficients de transfert par convection naturelle  $h$  sont toujours de l'ordre de 1 à 10 W/(m<sup>2</sup>.K). Aussi, nous contenterons nous d'une schématisation sommaire pour prendre en compte le transfert convectif qui va en augmentant à mesure que l'on s'éloigne des 2 extrémités chauffées. Nous supposerons une valeur minimale égale à 2 W/(m<sup>2</sup>.K) en A et B, et une valeur maximale double au milieu de la barre, d'où la modélisation simple suivante pour le coefficient de transfert  $h(x)$ , modélisation dans laquelle on a adopté une loi de variation parabolique :

$$h(x) = 2 - 8x(x-1) \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)} \quad (3.2.4)$$

On adoptera donc pour  $\Phi_L$  l'expression :

$$\Phi_L = h(x)[T(x) - T_0] \pi d dx \quad (3.2.5)$$

Finalement, le bilan énergétique d'une tranche d'épaisseur  $dx$  peut s'écrire :

$$\lambda \left\{ \left[ \frac{dT}{dx} \right]_{x+dx} - \left[ \frac{dT}{dx} \right]_x \right\} \frac{\pi d^2}{4} - h(x)[T(x) - T_0] \pi d dx = 0 \quad (3.2.6)$$

ou encore :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - (T - T_0) \alpha^2(x) = 0 \quad (3.2.8)$$

en posant:

$$\alpha^2(x) = \frac{4h(x)}{\lambda d} \quad (3.2.9)$$

$\alpha$ , qui a la dimension inverse d'une longueur, caractérise la rapidité avec laquelle l'échauffement communiqué à la barre s'estompe le long de cette barre.

### 3.2.5.2 Discrétisation par différences finies

L'équation différentielle ci-dessus est de la forme :

$$-\frac{d^2 T(x)}{dx^2} + \alpha^2(x)T(x) = T_0 \alpha^2(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad (3.2.10)$$

La température  $T(x)$  de la barre assimilée à un segment de droite AB de longueur unité, est solution du problème aux limites :

$$-\frac{d^2 T(x)}{dx^2} + \alpha^2(x)T(x) = T_0 \alpha^2(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad (3.2.11)$$

$$T(0)=T_A, \quad T(1)=T_B \quad (3.2.12)$$

On peut démontrer que ce problème admet une solution et une seule. Mais cette solution n'est pas calculable explicitement. Il faudrait pour cela que le coefficient  $\alpha^2$  soit constant, au lieu de dépendre de  $x$ .

On devra donc calculer une solution approchée la plus précise possible, à l'aide d'une discrétisation permettant de remplacer tous les opérateurs continus de dérivation par des quotients différentiels. Nous allons à présent étudier quelques opérateurs discrets, puis en déduire une approximation du problème monodimensionnel (3.2.11), (3.2.12). Nous raisonnerons dans un espace à une dimension, mais tout ce qui suit est généralisable en 2D et 3D.

Considérons une fonction  $f(\mathbf{x})$ , continue et dérivable sur l'ensemble des réels  $\mathfrak{R}$ . À l'aide d'un développement en série de Taylor, on peut exprimer la valeur prise par cette fonction en  $\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$ , en fonction de sa valeur en  $\mathbf{x}_0$ , et des valeurs prises par les dérivées successives  $f'(\mathbf{x})$ ,  $f''(\mathbf{x})$ , etc... en  $\mathbf{x}_0$  :

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + f''(x_0)\frac{\Delta x^2}{2!} + f'''(x_0)\frac{\Delta x^3}{3!} + \dots \quad (3.2.13)$$

Plus on ajoute de termes à la série de Taylor, plus la précision de l'estimation de  $f(\mathbf{x})$  en  $\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$  est grande. Sur le plan pratique, il faut bien néanmoins tronquer le développement après un nombre fini de termes. Si on s'arrête ainsi après le  $n^{\text{ième}}$  terme, l'erreur commise dans l'approximation de  $f(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x})$  sera inférieure à :

$$\frac{\left| f^{n+1} \right|_{\max} \Delta x^{n+1}}{(n+1)!} \quad (3.2.14)$$

expression dans laquelle  $|f^{n+1}|_{\max}$  est la plus grande valeur absolue prise par la dérivée d'ordre  $n+1$  de  $f(x)$  sur l'intervalle  $\Delta x$ . Mais, il n'est pas possible de connaître cette majorant  $|f^{n+1}|_{\max}$ . Tout ce que nous pouvons dire, c'est que l'ordre de grandeur de l'erreur commise lors de la troncature, varie comme  $\Delta x^{n+1}$ .

Nous dirons ainsi que l'erreur commise en ne gardant que n termes du développement (3.2.13) est du même ordre de grandeur que  $\Delta x^{n+1}$ , et nous désignerons cette erreur par la notation  $O(\Delta x^{n+1})$ . Convenons encore que le point d'abscisse  $x_0$  sera celui de rang i, et celui d'abscisse  $x_0 + \Delta x$  celui de rang i+1.

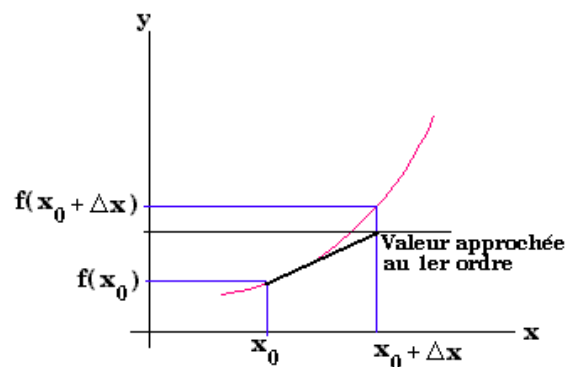
En ne conservant que le terme du 1<sup>er</sup> ordre, le développement s'écrit alors :

$$f_{i+1} = f_i + f'_i \Delta x + O(\Delta x^2) \quad (3.2.15)$$

En résolvant cette équation en  $f'_i$ , on obtient :

$$f'_i(x) = \frac{f_{i+1}(x) - f_i(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.2.16)$$

Cette approximation au 1<sup>er</sup> ordre de la dérivée revient à approximer la courbe représentative de la fonction  $f(x)$  entre  $x_0$  et  $x_0 + \Delta x$ , par un segment de droite.



La relation (3.2.16) est ce que l'on appelle un *opérateur décentré avancé*.

On aurait également pu calculer une variation de la fonction dans le sens des x négatifs, ce qui aurait alors conduit à l'estimation suivante de la dérivée première :

$$f'_i(x) = \frac{f_i(x) - f_{i-1}(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.2.17)$$

La relation (3.2.17) est ce que l'on appelle un *opérateur décentré retardé*

Selon que l'on a recours à l'un ou à l'autre de ces opérateurs pour exprimer la dérivée, on sera conduit à un schéma explicite ou implicite pour discrétiser une équation différentielle à l'aide de différences finies.

Considérons un instant l'équation différentielle ordinaire du premier ordre :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (3.2.18)$$

Avec la condition à la limite :  $y = y_0$  pour  $x = x_0$

En utilisant l'opérateur décentré avancé (2.4.7), on peut écrire cette équation différentielle sous forme de différence finie de la manière suivante :

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = f(x_i, y_i)$$

soit encore:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x [f(x_i, y_i)] \quad (3.2.19)$$

Cette expression est une formulation explicite. En effet, la valeur  $y_{i+1}$  de  $y$  au pas  $i+1$  se calcule directement à partir de sa valeur  $y_i$  au pas  $i$ .

La résolution numérique de l'équation différentielle est alors simple. Il suffit de partir de la condition initiale  $y_0$  pour  $x_0$ , et d'appliquer pas à pas l'algorithme (3.2.19) jusqu'à ce que l'intervalle désiré en  $x$  soit couvert. Cette approche est connue sous le nom de méthode d'Euler.

Par contre, en utilisant l'opérateur décentré retardé (3.2.17), l'équation différentielle se met sous forme de différence finie de la manière suivante :

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} = f(x_i, y_i)$$

soit encore:

$$y_i - \Delta x [f(x_i, y_i)] = y_{i-1} \quad (3.2.20)$$

Cette fois,  $y_{i-1}$  est connu, à partir du pas de calcul précédent ou de la condition à la limite, et on doit résoudre l'équation (3.2.20) pour calculer  $y_i$ . C'est ce que l'on appelle un schéma de résolution implicite.

Les deux opérateurs décentrés, en avant ou en arrière, ont la même précision pour estimer les dérivées. L'erreur y est du premier ordre.

On peut préférer le schéma explicite en raison de sa simplicité. Mais nous verrons que le choix de pas de calcul  $\Delta x$  trop grands peut conduire à l'apparition d'oscillations numériques sans signification physique. L'obtention de la stabilité du calcul conduira donc à augmenter le temps d'exécution de ce calcul. Par contre, le schéma implicite ne présente pas ces problèmes de stabilité. La précision restera cependant faible, si on se contente de pas  $\Delta x$  trop grands.

Il est possible d'améliorer la précision de l'approximation par des différences finies, en introduisant *un opérateur centré*. Les développements en série de la fonction  $f(x)$  entre  $x_0$  et  $x_0 + \Delta x$  d'une part, et entre  $x_0$  et  $x_0 - \Delta x$ , d'autre part, s'écrivent :

$$f_{i+1}(x) = f_i(x) + f_i'(x)\Delta x + f_i''(x)\frac{\Delta x^2}{2!} + f_i'''(x)\frac{\Delta x^3}{3!} + f_i^{iv}(x)\frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

$$f_{i-1}(x) = f_i(x) - f_i'(x)\Delta x + f_i''(x)\frac{\Delta x^2}{2!} - f_i'''(x)\frac{\Delta x^3}{3!} + f_i^{iv}(x)\frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

En soustrayant membre-à-membre, on obtient :

$$f_{i+1}(x) - f_{i-1}(x) = 2f_i'(x)\Delta x + f_i'''(x)\frac{\Delta x^3}{3} + \dots \quad (3.2.21)$$

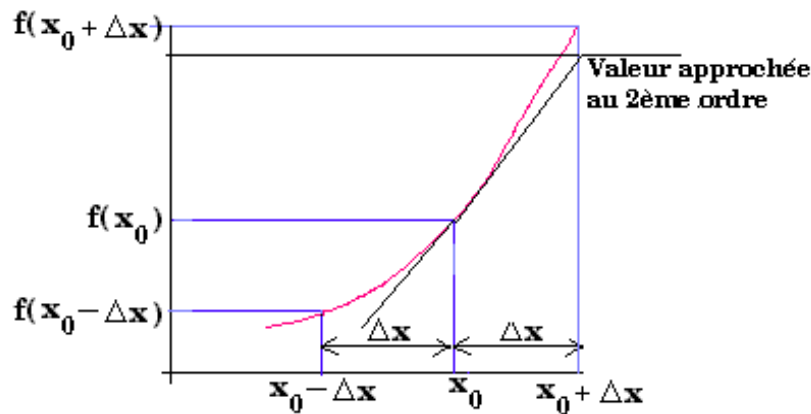
et en résolvant en  $f'(x)$ :

$$f_i'(x) = \frac{f_{i+1}(x) - f_{i-1}(x)}{2\Delta x} - f_i'''(x)\frac{\Delta x^3}{3} + \dots$$

C'est-à-dire en définitive :

$$f_i'(x) = \frac{f_{i+1}(x) - f_{i-1}(x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (3.2.22)$$

Cet opérateur est dit *centré*. On voit que l'erreur que l'on commet avec cette discrétisation n'est plus que du second ordre, alors qu'elle était du premier ordre avec les opérateurs décentrés.



L'approximation réalisée consiste cette fois à remplacer la portion de courbe représentative de  $f(x)$  entre  $x_0$  et  $x_0 + \Delta x$ , par la tangente au point d'abscisse  $x_0$ , à la parabole qui passe par les 3 points d'abscisses  $x_0 - \Delta x$ ,  $x_0$ , et  $x_0 + \Delta x$ . La même approche peut être utilisée pour obtenir une approximation des dérivées secondes par des différences finies.

Considérons à nouveau les développements en série de la fonction  $f(x)$  entre  $x_0$  et  $x_0 + \Delta x$  d'une part, et entre  $x_0$  et  $x_0 - \Delta x$ , d'autre part :

$$f_{i+1}(x) = f_i(x) + f_i'(x)\Delta x + f_i''(x)\frac{\Delta x^2}{2!} + f_i'''(x)\frac{\Delta x^3}{3!} + f_i^{iv}(x)\frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

$$f_{i-1}(x) = f_i(x) - f_i'(x)\Delta x + f_i''(x)\frac{\Delta x^2}{2!} - f_i'''(x)\frac{\Delta x^3}{3!} + f_i^{iv}(x)\frac{\Delta x^4}{4!} + \dots$$

En les ajoutant membre-à-membre cette fois, on obtient :

$$f_{i+1}(x) - f_{i-1}(x) - 2f_i(x) = f_i''(x)\Delta x^2 + f_i^{iv}(x)\frac{\Delta x^4}{12} + \dots \tag{3.2.23}$$

et en résolvant en  $f''(x)$  :

$$f_i''(x) = \frac{f_{i+1}(x) - 2f_i(x) + f_{i-1}(x)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2) \tag{3.2.24}$$

### 3.2.5.3 Application à la discrétisation du problème

La barre AB considérée a une longueur L que l'on représentera par le segment  $[0,1]$  de l'axe Ox. On partage le segment  $[0,1]$  en  $N+1$  intervalles de longueur  $\Delta x = 1/(N+1)$ .

Les  $N+2$  points de subdivision nécessaires( extrémités A et B comprises), ou nœuds  $x_i$  de ce maillage seront alors définis comme suit:

$$x_i = i \Delta x, \quad i \in \{0, \dots, N + 1\} \quad (3.2.25)$$

Le problème discret va consister à trouver une approximation  $\Psi_i$  de la température  $\mathbf{T}(\mathbf{x}_i)$  en chacun des nœuds internes (i.e.  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ ) du maillage, la solution étant imposée aux bornes  $x_0 = 0$  et  $x_{N+1} = 1$  de l'intervalle.

Ces différentes valeurs  $\Psi_i$  sont solutions du problème discret :

$$-\frac{1}{(\Delta x)^2} [\Psi_{i+1} - 2\Psi_i + \Psi_{i-1}] + \alpha^2(x_i)\Psi_i = T_0 \alpha^2(x_i) \quad , \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.2.26)$$

$$\Psi_0 = T_A \quad , \quad \Psi_{N+1} = T_B \quad (3.2.27)$$

Ce schéma aux différences finies se substitue au problème physique modélisé précédemment par les équations suivantes :

$$-\frac{d^2 T(x)}{dx^2} + \alpha^2(x)T(x) = T_0 \alpha^2(x) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad (3.2.11)$$

$$T(0) = T_A \quad , \quad T(1) = T_B \quad (3.2.12)$$

#### 3.2.5.4 Algorithme de résolution

En réordonnant les termes de l'équation (3.2.26), on met en évidence un système linéaire de N équations à N inconnues :

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \left\{ -\Psi_{i+1} + [2 + (\Delta x)^2 \alpha^2(x_i)]\Psi_i - \Psi_{i-1} \right\} = T_0 \alpha^2(x_i) \quad , \quad i = 1, N$$

La première équation prend en compte la condition imposée à l'extrémité A de la barre. En y faisant  $i = 1$ , on fait apparaître l'influence exercée sur le premier nœud interne par la condition d'extrémité  $\Psi_0 = T_A$  en  $i = 0$ :

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \left\{ [2 + (\Delta x)^2 \alpha^2(x_1)]\Psi_1 - \Psi_2 \right\} = T_0 \alpha^2(x_1) + \frac{1}{(\Delta x)^2} T_A$$

De même, pour  $i = N$ , la dernière équation prend en compte la condition imposée à l'extrémité B de la barre:  $\Psi_{N+1} = T_B$ , de sorte que cette N<sup>ième</sup> équation s'écrit:

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} \left\{ -\Psi_{N-1} + \left[ 2 + (\Delta x)^2 \alpha^2(x_N) \right] \Psi_N \right\} = T_0 \alpha^2(x_N) + \frac{1}{(\Delta x)^2} T_B$$

On peut écrire sous forme matricielle le problème décrit par le système linéaire précédent, en désignant par  $\Psi_{\Delta x}$  le vecteur colonne inconnu :

$$\Psi_{\Delta x} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \dots \\ \Psi_i \\ \dots \\ \Psi_{N-1} \\ \Psi_N \end{pmatrix} \quad (3.2.28)$$

En introduisant la matrice  $A_{\Delta x}$  :

$$A_{\Delta x} = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} 2 + (\Delta x)^2 \alpha^2(x_1) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 + (\Delta x)^2 \alpha^2(x_2) & -1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 2 + (\Delta x)^2 \alpha^2(x_{N-1}) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 + (\Delta x)^2 \alpha^2(x_N) \end{pmatrix} \quad (3.2.29)$$

et le vecteur second membre  $b_{\Delta x}$  :

$$b_{\Delta x} = \begin{pmatrix} T_0 \alpha^2(x_1) + \frac{1}{(\Delta x)^2} T_A \\ T_0 \alpha^2(x_2) \\ \dots \\ T_0 \alpha^2(x_{N-1}) \\ T_0 \alpha^2(x_N) + \frac{1}{(\Delta x)^2} T_B \end{pmatrix} \quad (3.2.30)$$

Le système linéaire à résoudre s'écrit matriciellement :

$$A_{\Delta x} \Psi_{\Delta x} = b_{\Delta x} \quad (3.2.31)$$

La matrice  $A_{\Delta x}$  précédente ne contient des termes non nuls que sur sa diagonale principale et les deux diagonales adjacentes. Pour cette raison, on dit qu'elle est tri diagonale.

La forme générale de l'équation aux différences finies est dans ce cas la suivante:

$$a_i \Psi_{i-1} + b_i \Psi_i + c_i \Psi_{i+1} = d_i \quad (3.2.32)$$

avec:

$$\begin{aligned} a_i &= -1/(\Delta x)^2 \\ b_i &= 2/(\Delta x)^2 + \alpha^2(x_i) \\ c_i &= -1/(\Delta x)^2 \\ d_i &= T_0 \alpha^2(x_i) \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

Une méthode de résolution, appelée algorithme de la matrice tridiagonale, ou algorithme AMTD, consiste à rechercher une relation de récurrence de la forme:

$$\Psi_{i-1} = e_i \Psi_i + f_i \quad (3.2.34)$$

En reportant cette relation dans (3.2.32), il vient alors :

$$(a_i e_i + b_i) \Psi_i + c_i \Psi_{i+1} = d_i - a_i f_i \quad (3.2.35)$$

d'où on tire:

$$\Psi_i = \frac{-c_i \Psi_{i+1} + d_i - a_i f_i}{a_i e_i + b_i} \quad (3.2.36)$$

Mais la récurrence (3.2.34) s'écrit aux rangs  $i, i+1$  :

$$\Psi_i = e_{i+1} \Psi_{i+1} + f_{i+1} \quad (3.2.37)$$

En identifiant les relations (3.2.36) et (3.2.37), on obtient les deux récurrences suivantes, pour les coefficients  $e$  et  $f$ :

$$\begin{aligned} e_{i+1} &= \frac{-c_i}{a_i e_i + b_i} \\ f_{i+1} &= \frac{d_i - a_i f_i}{a_i e_i + b_i} \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

Ceci signifie que si on connaît les coefficients  $e_i$  et  $f_i$  au rang  $i$ , on peut calculer ceux au rang suivant  $i+1$  à l'aide de ces 2 relations (3.2.38). Il suffit donc de connaître les valeurs initiales de  $e_i$  et  $f_i$  pour en déduire toutes les autres valeurs. Ces valeurs initiales sont fournies par la première équation du système à résoudre ( $i = 1$ ).

Cette relation s'écrit en effet :

$$a_1 \Psi_0 + b_1 \Psi_1 + c_1 \Psi_2 = d_1$$

où la valeur  $\Psi_0$  est connue et égale à  $T_A$ . On a donc :

$$\Psi_1 = \frac{-c_1}{b_1} \Psi_2 + \frac{d_1 - a_1 T_A}{b_1} \quad (3.2.39)$$

relation qui n'est autre que (3.2.34) pour  $i = 2$ :

$$\Psi_1 = e_2 \Psi_2 + f_2 \quad (3.2.40)$$

En rapprochant ces 2 relations, on obtient les valeurs initiales  $e_2$  et  $f_2$  de  $e_i$  et  $f_i$  permettant de calculer les valeurs de tous les autres  $e_i$  et  $f_i$  à partir de la relation (3.2.38):

$$\begin{aligned} e_2 &= \frac{-c_1}{b_1} \\ f_2 &= \frac{d_1 - a_1 T_A}{b_1} \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

Une fois que l'on connaît toutes les valeurs d' $e_i$  et  $f_i$ , la relation :

$$\Psi_{i-1} = e_i \Psi_i + f_i \quad (3.2.34)$$

permet d'obtenir les solutions cherchées  $\Psi_i$ .

Pour ce faire, on partira de la température  $T_B$  imposée à l'extrémité B de la barre, qui correspond au nœud d'indice  $N+1$ . Il faudra donc calculer les valeurs des  $e_i$  et  $f_i$  jusqu'au rang  $i = N+1$ .

Mais cette dernière équation du système linéaire, correspondant à l'indice  $N$  dans la forme linéaire générale :

$$a_i \Psi_{i-1} + b_i \Psi_i + c_i \Psi_{i+1} = d_i \quad (3.2.32)$$

a une forme particulière :

$$a_N \Psi_{N-1} + b_N \Psi_N + 0 = d_N \quad , \quad (c_N = 0) \quad (3.2.41)$$

La récurrence :

$$e_{i+1} = \frac{-c_i}{a_i e_i + b_i} \quad (3.2.38)$$

$$f_{i+1} = \frac{d_i - a_i f_i}{a_i e_i + b_i}$$

impose donc:

$$e_{N+1} = 0 \quad (3.2.42)$$

$$f_{N+1} = \frac{d_N - a_N f_N}{a_N e_N + b_N}$$

ce qui signifie en définitive que la condition de température imposée à l'extrémité B de la barre, détermine la température au dernier nœud interne  $i = N$ , de la manière suivante :

$$\Psi_N = e_{N+1} \Psi_{N+1} + f_{N+1} = 0. \Psi_{N+1} + f_{N+1} = f_{N+1} \quad (3.2.43)$$

Quant aux températures aux autres nœuds internes, elles sont calculées successivement à partir de  $\Psi_N$ , à l'aide de la récurrence (3.2.38):

$$\Psi_{i-1} = e_i \Psi_i + f_i \quad (3.2.38)$$

# Chapitre 4

## Transferts de chaleur par rayonnement.

### 4.1 Introduction

Les chapitres 2 et 3 ont été consacrés à l'analyse du mécanisme d'un mode de transfert d'énergie thermique qui requiert la présence d'un milieu matériel solide: c'est la conduction. Dans ce phénomène de conduction, et d'une manière analogue à ce qui se passe en conduction électrique, le mécanisme responsable est un mouvement à l'échelle atomique.

Par ailleurs, nous avons vu (ou nous verrons) dans le cours de mécanique des fluides que lorsqu'un liquide ou un gaz est en mouvement, il apparaît un mode de transport des quantités de mouvement que l'on appelle le transport convectif. C'est ce même phénomène de convection qui intervient dans les échanges thermiques entre une paroi et un fluide en mouvement. Cette fois, ce sont les mouvements macroscopiques du fluide qui réalisent le transport de la chaleur. Nous consacrerons le chapitre 5 à l'étude des transferts convectifs de chaleur.

Mais il existe également un mode de transfert d'énergie thermique qui, contrairement à la conduction ou à la convection, ne nécessite la présence d'aucun support matériel solide ou fluide. La manifestation la plus commune de ce phénomène est celle du rayonnement solaire qui nous parvient sur la terre après avoir parcouru une distance considérable dans le vide spatial.

Ce transfert d'énergie fait intervenir un mécanisme physique qui est le rayonnement électromagnétique, dont la propagation est quasi instantanée, du moins à l'échelle des distances terrestres.

## 4.2 Le rayonnement électromagnétique

Tous les corps solides, liquides ou gazeux émettent un rayonnement de nature électromagnétique. Cette émission d'énergie s'effectue au détriment de leur énergie interne. Pour le thermicien, il s'agit d'un flux de chaleur émis par le corps considéré. Ce rayonnement thermique n'est pas une onde monochromatique. Il est composé de radiations de longueurs d'onde différentes, comprises entre 0,1  $\mu\text{m}$  et 100  $\mu\text{m}$ , donnant des spectres continus dans le cas des solides, ou des spectres de bandes dans le cas de certains gaz.

Cette gamme de 0,1  $\mu\text{m}$  à 100  $\mu\text{m}$  ne représente qu'une toute petite portion du spectre des ondes électromagnétiques, qui s'étend de  $10^{-8}$   $\mu\text{m}$  pour les rayons cosmiques jusqu'à plusieurs km pour les ondes hertziennes.

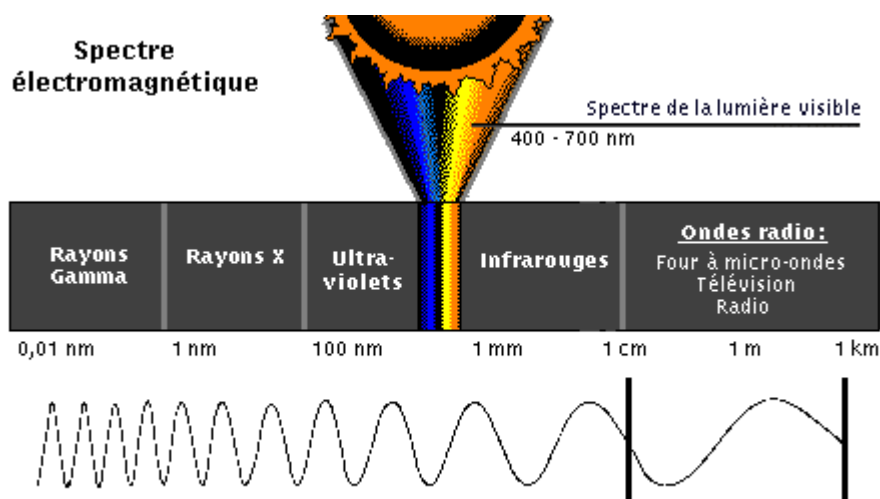


Figure 4.1 - le spectre électromagnétique

Dans ce domaine de 0,1  $\mu\text{m}$  à 100  $\mu\text{m}$ , nos sens sont capables de percevoir le rayonnement thermique sous la forme d'une sensation de chaleur. A l'intérieur d'une bande encore plus étroite comprise entre 0,4  $\mu\text{m}$  et 0,8  $\mu\text{m}$ , appelée spectre visible, le rayonnement devient sensible à la rétine de notre œil. Nous réserverons le nom de lumière exclusivement à cette partie visible du rayonnement thermique.

Le rayonnement thermique dans la partie non visible du spectre porte le nom d'ultraviolet (U.V) du côté des courtes longueurs d'onde ( de 0,1 à 0,4  $\mu\text{m}$ ), et d'infrarouge (IR) du côté des grandes longueurs d'onde ( de 0,8 à 100  $\mu\text{m}$ ).

La propagation du rayonnement thermique s'effectue dans le vide en ligne droite, et à la vitesse de la lumière, sans aucune diminution de l'énergie transportée. On dit, de ce fait, que le vide est un milieu parfaitement transparent. La plupart des gaz simples ( $\text{O}_2$ ,  $\text{H}_2$ ,  $\text{N}_2$ ) sont également des milieux parfaitement transparents.

Par contre, certains gaz composés ( en particulier  $\text{CO}_2$ ,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}$ ), sont en revanche dits partiellement transparents, car la propagation s'y accompagne d'une diminution de l'énergie transportée, ce qui accroît d'autant l'énergie interne du gaz traversé. Certains liquides et solides (plastiques, verres) entrent également dans cette catégorie.

La grande majorité des liquides et solides sont au contraire dits opaques, car ils arrêtent la propagation de tout rayonnement dès leur surface. Un rayonnement incident  $\Phi_i$  qui arrive sur un corps opaque, est en partie réfléchi ( $\Phi_r$ ), tandis que le reste est absorbé ( $\Phi_a$ ) sous forme de chaleur au voisinage de l'impact.

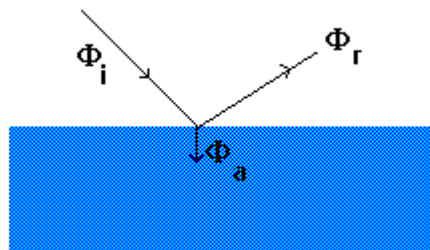


Figure 4.2 - Interaction d'un rayonnement thermique et d'un corps opaque

Comme en optique, la réflexion peut être diffuse ( $\Phi_r$  dans toutes les directions), spéculaire ( $\Phi_r$  dans la direction symétrique de  $\Phi_i$ ), ou quelconque.

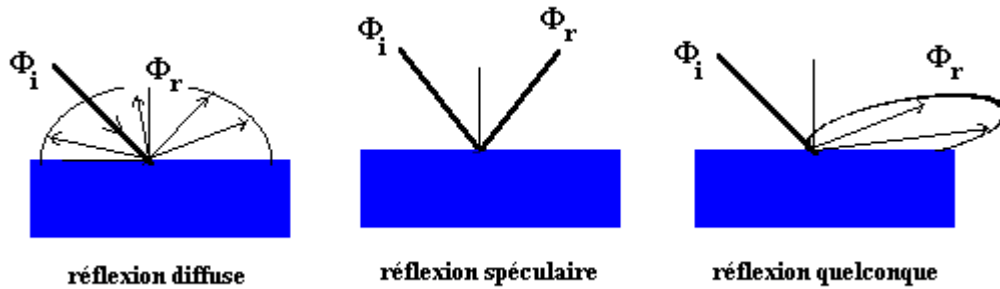


Figure 4.3 - Divers types de réflexions

Lorsque l'on étudiera l'équilibre thermique d'un système, tout corps composant ce système devra être considéré d'un double point de vue:

- comme *émetteur*, car il sera toujours la source d'un rayonnement dépendant de sa température (sauf si ce corps est parfaitement transparent).
- comme *récepteur*, car il recevra des rayonnements émis, réfléchis ou diffusés par les corps qui l'entourent. Une partie du flux reçu sera absorbée, et le reste sera réfléchi ou diffusé.

### 4.3 Rayonnement des corps opaques

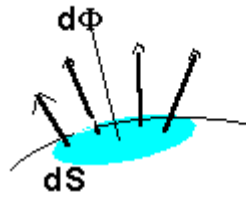
Il est nécessaire d'introduire la définition d'un certain nombre de grandeurs intervenant dans l'étude des corps opaques considérés en tant qu'émetteurs de rayonnement.

#### 4.3.1 Flux d'une source

On désigne ainsi la puissance thermique émise par une source dans tout l'espace où elle peut rayonner. Ce flux sera noté  $\Phi$  et exprimé en Watt.

#### 4.3.2 Emittance

C'est le flux total émis par unité de surface de la source. On considère globalement la puissance  $d\Phi$  émise par un élément de surface  $dS$  dans l'ensemble des directions où il peut rayonner (c'est-à-dire dans un hémisphère de  $2\pi$  stéradian limité par le plan tangent à  $dS$  en son centre), et on divise ce flux par l'aire de  $dS$ . L'émittance est notée  $M$ . Son unité est le Watt/m<sup>2</sup>

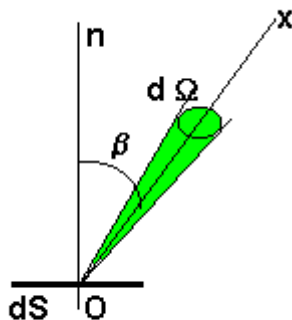


$$\text{Emittance } M = \frac{d\Phi}{dS}$$

Figure 4.4 - Emittance d'une source, en Watt/m<sup>2</sup>

### 4.3.3 Intensité d'une source dans une direction Ox

Considérons de nouveau un élément de surface dS d'une source S, et une direction quelconque Ox par rapport à cet élément dS, l'axe Ox étant repéré par l'angle β qu'il fait avec la normale On à dS.



Considérons également un angle solide élémentaire dΩ entourant la direction Ox.

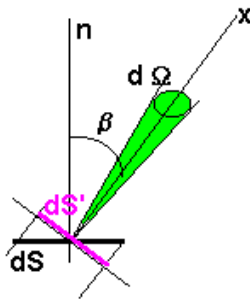
Si le flux de la source dans tout l'espace hémisphérique où elle rayonne est Φ, on notera dΦ<sub>Ox</sub> la portion de ce flux rayonnée dans l'angle solide dΩ. Par définition, on appellera **intensité de la source dans la direction Ox** la quantité:

$$I_{Ox} = \frac{d\Phi_{Ox}}{d\Omega} \tag{4.1}$$

Cette intensité I<sub>Ox</sub> s'exprime en Watt/stéradian ( W/sr).

### 4.3.4 Luminance d'une source dans une direction Ox

On définit la luminance L<sub>Ox</sub> d'une source d'aire dS, dans la direction Ox, comme le quotient de l'intensité I<sub>Ox</sub> de la source dans cette direction, par l'aire apparente dS' de la source dans la même direction:



$$L_{Ox} = \frac{I_{Ox}}{dS'} = \frac{I_{Ox}}{dS \cos \beta}$$

En effet, vu de la direction Ox, tout se passe comme si le flux était émis par la surface projetée  $dS' = dS \cos \beta$ . En introduisant la définition (4.1) de l'intensité  $I_{Ox}$ , la luminance s'exprime par la relation:

$$L_{Ox} = \frac{\frac{d\Phi_{Ox}}{d\Omega}}{dS \cos \beta} = \frac{d^2\Phi_{Ox}}{d\Omega dS \cos \beta} \quad (4.2)$$

La luminance apparaît donc comme la puissance rayonnée par unité d'angle solide entourant la direction Ox, et par unité de surface projetée perpendiculairement à cette direction. Elle s'exprime en Watt par m<sup>2</sup> et par stéradian ( W/(m<sup>2</sup>.sr) )

Cette notion de luminance permet de comparer la puissance rayonnée dans une direction donnée par des sources d'étendues différentes ou d'orientations différentes par rapport à cette direction. Le flux élémentaire émis par un élément de surface dS dans un angle solide dΩ entourant une direction Ox, inclinée d'un angle β sur la normale à cette surface, a donc pour expression:

$$d^2\Phi_{Ox} = L_{Ox} dS \cos \beta d\Omega \quad (4.3)$$

#### 4.3.5 Loi de Lambert

Les sources dont la luminance est indépendante de la direction sont dites des sources diffuses, régies par la Loi de Lambert:

$$L_{Ox} = L \quad (4.4)$$

Cela veut dire que l'on voit ces surfaces diffuses avec la même intensité lumineuse quelle que soit la direction d'observation. Ce sera le cas de pratiquement toutes les surfaces émissives qui nous concernent, et pour lesquelles la luminance L ne dépendra que de la température T de la surface. Nous pouvons alors recalculer le flux total dΦ en intégrant le flux élémentaire d<sup>2</sup>Φ<sub>Ox</sub> donné par la relation (4.3) modifiée par (4.4):

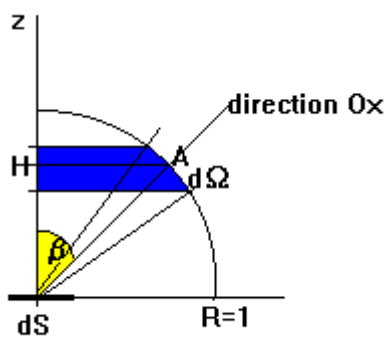
$$d^2\Phi_{Ox} = L \, dS \cos\beta \, d\Omega$$

Intégrons cette expression dans le demi-espace de  $2\pi$  stéradian au-dessus de  $dS$ .

$$d\Phi = L \, dS \iiint_{2\pi \text{ sr}} \cos \beta \, d\Omega$$

L'émittance  $M$ , telle qu'on l'a définie au § 4.3.2, d'une source diffuse est donc donnée par:

$$M = \frac{d\Phi}{dS} = L \iint_{2\pi \text{ sr}} \cos \beta \, d\Omega \tag{4.5}$$



Pour calculer l'intégrale triple ci-dessus, on commence par garder l'angle  $\beta$  constant:

$$M = L \int_0^{\pi/2} \cos \beta \, \iint_{2\pi \text{ sr}} d\Omega$$

L'intégration de l'élément d'angle solide  $d\Omega$  autour de  $Oz$  conduit à la surface de la couronne sphérique engendrée par la rotation autour de  $Oz$  du segment  $AH$

. Cette aire a pour valeur:  $2\pi \, AH \, R \, d\beta$ , c'est-à-dire, compte-tenu que  $R=1$ ,  $2\pi \sin \beta \, d\beta$

Il vient donc:

$$M = 2 \pi L \int_0^{\pi/2} \cos \beta \, \sin \beta \, d\beta$$

$$= \pi L \int_0^{\pi/2} \sin 2\beta \, d\beta$$

c'est-à-dire:

$$M = \pi L \tag{4.6}$$

relation entre l'émittance  $M$  et la luminance  $L$  d'une surface émissive diffuse, dite encore Lambertienne, c'est-à-dire respectant la Loi de Lambert.

#### 4.4 Corps opaques récepteurs de rayonnement

De même que l'on a introduit la définition d'un certain nombre de grandeurs intervenant dans l'étude des corps opaques considérés en tant qu'émetteurs de rayonnement, on va maintenant définir d'autres grandeurs intervenant dans l'analyse de l'éclairement d'un corps opaque par un rayonnement incident.

#### 4.4.1 Éclairement

On désigne ainsi le flux total reçu par l'unité de surface réceptrice:

$$E = \frac{d\Phi}{dS} \quad (4.7)$$

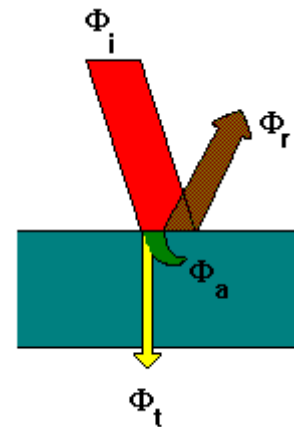
L'éclairement E s'exprime en W/m<sup>2</sup>

C'est donc la densité de flux de chaleur arrivant sur l'unité de surface réceptrice dS, en provenance du demi-espace visible depuis cette surface.

#### 4.4.2 Réflexion, absorption et transmission

Une fraction  $\rho$  de cette *puissance totale incidente*  $\Phi_i$  sera *réfléchi*e par le corps, c'est-à-dire renvoyée sans avoir pénétré dans le matériau.

Une autre fraction  $\alpha$  sera *absorbée* dans la masse du récepteur, constituant un apport énergétique pour ce dernier.



Enfin, une troisième et dernière fraction  $\tau$  peut éventuellement traverser entièrement le corps récepteur et ressortir de l'autre côté. On dit alors qu'elle est *transmise*.

Si  $\Phi_i$  désigne le flux total incident,

$\Phi_r$  le flux total réfléchi,

$\Phi_a$  le flux total absorbé,

$\Phi_t$  le flux total transmis,

la conservation de l'énergie s'exprime par la relation:

$$\Phi_i = \Phi_r + \Phi_a + \Phi_t \quad (4.8)$$

On désignera sous les noms de:

Coefficient de réflexion, le rapport  $\rho = \frac{\Phi_r}{\Phi_i}$

Coefficient d'absorption, le rapport  $\alpha = \frac{\Phi_a}{\Phi_i}$

Coefficient de transmission, le rapport  $\tau = \frac{\Phi_t}{\Phi_i}$

La relation (4.8) se traduit alors par:

$$\rho + \alpha + \tau = 1 \tag{4.9}$$

Ces paramètres caractérisent d'une manière globale le comportement d'un corps vis-à-vis du rayonnement thermique qu'il reçoit. Ce sont des grandeurs totales hémisphériques, ce qui signifie qu'elles ne rentrent pas dans le détail des longueurs d'onde du rayonnement, ni des directions de propagation.

#### 4.4.3 Grandeurs monochromatiques directionnelles

Cependant, dans bien des cas, les propriétés radiatives des corps varient avec la longueur d'onde et la direction du rayonnement. Pour en rendre compte, on peut introduire des grandeurs analogues à toutes celles que nous avons vu jusqu'ici, mais monochromatiques ou directionnelles, et éventuellement les deux à la fois.

Dans le tableau de la page 100 ci-contre, nous mettrons en vis-à-vis, dans la colonne de gauche la grandeur globale concernant l'ensemble du spectre rayonné, et dans la colonne de droite, la grandeur monochromatique correspondante, mais ne concernant qu'une longueur d'onde unique  $\lambda$ .

Si les flux incident, réfléchi, absorbé et transmis considérés plus haut, au lieu d'être des grandeurs globales pour l'ensemble des longueurs d'ondes rayonnées et des directions du rayonnement, sont maintenant des grandeurs monochromatiques directionnelles:

$(\Phi_{Ox,\lambda})_i$ pour le flux incident	$(\Phi_{Ox,\lambda})_r$ pour le flux réfléchi
$(\Phi_{Ox,\lambda})_a$ pour le flux absorbé	$(\Phi_{Ox,\lambda})_t$ pour le flux transmis

on définira de la même manière que précédemment des coefficients monochromatiques directionnels qui respecterons une condition analogue à la condition (4.9) :

$$\rho_{Ox,\lambda} + \alpha_{Ox,\lambda} + \tau_{Ox,\lambda} = 1 \tag{4.10}$$

<b>Grandeurs hémisphériques, caractérisant un rayonnement émis dans l'ensemble des directions de l'espace environnant la source considérée</b>		
<b>Grandeur</b>	<b>Grandeur totale, concernant l'ensemble du spectre rayonné</b>	<b>Grandeur monochromatique concernant une longueur d'onde unique <math>\lambda</math></b>
Flux d'une source ( cf. § 4.3.1)	Flux total $\Phi$ en W	Flux monochromatique $\Phi_\lambda = \left( \frac{d\Phi}{d\lambda} \right)_\lambda$ en W/m
Emittance d'une source (cf. § 4.3.2)	Emittance totale $M = \frac{d\Phi}{dS}$ en W/m <sup>2</sup>	Emittance monochromatique $M_\lambda = \left( \frac{dM}{d\lambda} \right)_\lambda = \left( \frac{d^2\Phi}{dS d\lambda} \right)_\lambda$ en W/m <sup>3</sup>
<b>Grandeurs directionnelles, caractérisant un rayonnement émis dans une direction particulière <math>Ox</math></b>		
Intensité d'une source (cf. § 4.3.3)	Intensité totale dans la direction $Ox$ $I_{Ox} = \frac{d\Phi_{Ox}}{d\Omega}$ en W/sr	Intensité monochromatique dans la direction $Ox$ $I_{Ox, \lambda} = \left( \frac{dI_{Ox}}{d\lambda} \right)_\lambda = \left( \frac{d^2\Phi_{Ox}}{d\Omega d\lambda} \right)_\lambda$ en W/(m.sr)
Luminance d'une source (cf. § 4.3.4)	Luminance totale dans la direction $Ox$ $L_{Ox} = \frac{I_{Ox}}{dS \cos \beta} = \frac{d^2\Phi_{Ox}}{d\Omega dS \cos \beta}$ en W/(m <sup>2</sup> .sr)	Luminance monochromatique dans la direction $Ox$ $L_{Ox, \lambda} = \left( \frac{dL_{Ox}}{d\lambda} \right)_\lambda = \frac{d^2\Phi_{Ox, \lambda}}{d\Omega dS \cos \beta}$ en W/(m <sup>3</sup> .sr)

Tableau 4.1 - Récapitulation des principales définitions

#### 4.4.4 Notion de corps noir

On appelle corps noir, un corps pour lequel:

$$\rho_{0x,\lambda} = 0, \quad \tau_{0x,\lambda} = 0, \quad \alpha_{0x,\lambda} = 1$$

Un corps noir est donc un corps qui absorbera **tout** rayonnement incident le frappant, sans en réfléchir ni laisser échapper aucune fraction, et ceci quelques soient les longueurs d'onde et les directions de propagation. De la même manière, un corps noir sera capable de rayonner dans chaque longueur d'onde **le maximum** d'énergie calorifique stockable théoriquement dans cette bande de fréquence à un niveau de température T déterminé.

Un tel corps, thermiquement idéal, n'existe pas dans la nature, pas plus que n'existe le fluide parfait totalement exempt de dissipation interne d'énergie lors de son mouvement. Mais le concept va servir d'étalon de rayonnement. A partir de considérations thermodynamiques, il est possible de prévoir théoriquement le maximum d'énergie calorifique pouvant être rayonnée par la matière à chaque température de cette matière, et dans chaque longueur d'onde.

Pour chaque corps réel auquel s'intéresse l'ingénieur thermicien, on évaluera l'énergie qu'il peut rayonner, *relativement à celle qu'émettrait un corps noir dans les mêmes conditions*, à l'aide de coefficients appelés **émissivités**. Dans tout ce qui suit, les grandeurs relatives au corps noir seront affectées d'un indice supérieur « ° ». Ainsi, par exemple, l'émittance monochromatique du corps noir à la longueur d'onde  $\lambda$  sera notée  $M_{\lambda}^0$

#### 4.5 Loi de PLANCK

Cette loi relie l'émittance monochromatique du corps noir à la longueur d'onde  $\lambda$ ,  $M_{\lambda}^0$ , à la longueur d'onde  $\lambda$  et à sa température absolue T.

Elle s'exprime sous la forme:

$$M_{\lambda}^0 = \frac{2 \pi h C^2 \lambda^{-5}}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1} \quad (4.11)$$

relation dans laquelle:

- C est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques dans le milieu où se propage le rayonnement. C est donnée par la relation:  $C = C_0 / n$  avec: n l'indice de réfraction du milieu, et  $C_0 = 2,9979 \cdot 10^8$  m/s
- h est la constante de PLANCK,  $h = 6,6255 \cdot 10^{-34}$  J.s
- k est la constante de BOLTZMANN,  $k = 1,3805 \cdot 10^{-23}$  J/K

Lorsque le rayonnement se propage dans un milieu dont l'indice de réfraction est égal à l'unité, ce qui est le cas en toute rigueur pour le vide, et pour l'air en première approximation, la loi de PLANCK peut se mettre sous la forme simplifiée suivante, qui est celle qui sera utilisée dans la pratique courante:

$$M_{\lambda}^0 = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} \tag{4.12}$$

C<sub>1</sub> et C<sub>2</sub> sont deux constantes physiques dont les valeurs sont données, en unités S.I, dans le tableau suivant:

T	λ	$C_1 = 2 \pi h C_0^2$	$C_2 = \frac{h C_0}{k}$	$M_{\lambda}^0$
K	m	$3,741 \cdot 10^{-16}$ W.m <sup>2</sup>	0,014388 m.K	W/m <sup>3</sup>
K	μm	$3,741 \cdot 10^8$ W. μm <sup>4</sup> /m <sup>2</sup>	14.388 μm.K	W/(m <sup>2</sup> . μm)

La figure 4.5 ci-dessous représente les courbes de variation de l'émittance monochromatique d'un corps noir, calculées à l'aide de la relation (4.12), pour les valeurs suivantes de la température absolue de ce corps noir:

300 K (ambiante), 500 K, 750 K, 1000 K, 2500 K, 5800 K (soleil)

Chaque courbe présente pour une certaine abscisse λ<sub>m</sub> un maximum d'autant plus prononcé que la température T est plus élevée. On constate que pour  $\lambda < 0,5 \lambda_m$ , il n'y a pratiquement plus d'énergie rayonnée (moins de 1%), alors qu'il faut atteindre  $\lambda > 4,5 \lambda_m$  pour obtenir le même résultat dans l'infrarouge.

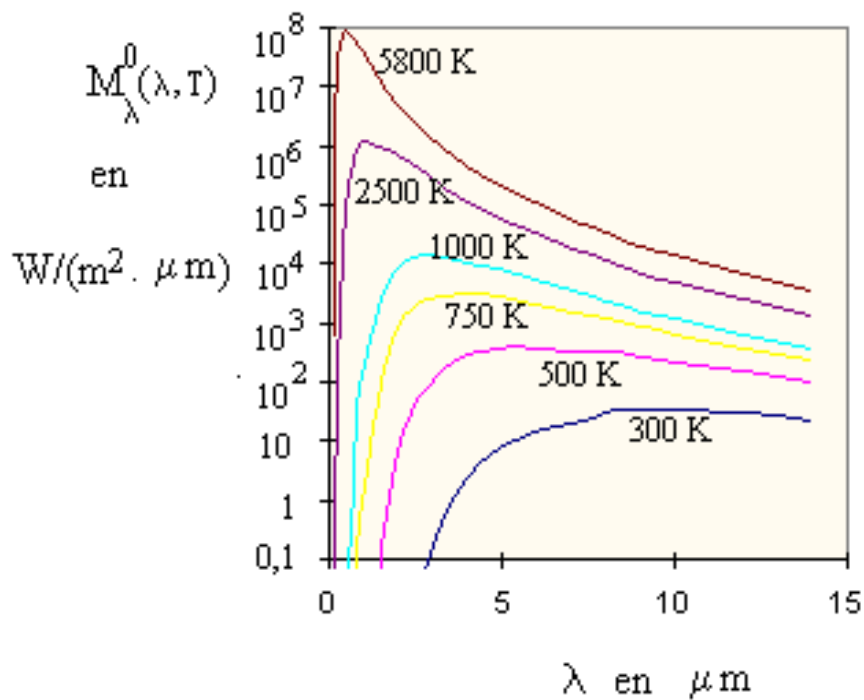


Figure 4.5 - Emittance monochromatique du corps noir

#### 4.6 Lois de WIEN

Deux lois fournissent respectivement l'abscisse  $\lambda_m$  et l'ordonnée du maximum d'émission monochromatique du corps noir à chaque température.

##### 4.6.1 1ère loi de WIEN, ou loi du déplacement

L'abscisse  $\lambda_m$  du maximum de  $M_{\lambda}^0$ , se déplace vers les courtes longueurs d'onde lorsque la température croît. C'est ce qu'exprime la « loi du déplacement » de WIEN:

$$\lambda_m T = 2898 \mu\text{m.K} \quad (4.13)$$

##### 4.6.2 2ème loi de WIEN

Cette loi fournit la valeur du maximum  $M_{\lambda_m}^0$  en fonction de T. Elle s'exprime sous la forme suivante:

$$M_{\lambda_m}^0 = B T^5 \quad (4.14)$$

La constante B est donnée dans le tableau suivant:

T	$\lambda$	B	$M_{\lambda m}^0$
K	m	$1,287 \cdot 10^{-5} \text{ W}/(\text{m}^3 \cdot \text{K}^5)$	$\text{W}/\text{m}^3$
K	$\mu\text{m}$	$1,287 \cdot 10^{-11} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m} \cdot \text{K}^5)$	$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \mu\text{m})$

A la température ambiante (300 K), le maximum de rayonnement thermique se produit dans le proche infrarouge, à 10  $\mu\text{m}$ .

Le rayonnement solaire, qui correspond à une température de 5800 K, a son maximum dans le spectre visible, à 0,5  $\mu\text{m}$ . Lorsqu'un corps s'échauffe, il n'émet d'abord que des radiations non visibles dans l'infrarouge, puis il commence à rougir lorsque son spectre d'émission vient empiéter sur le domaine du visible. Finalement, pour une température suffisamment élevée, le spectre d'émission du corps recouvre tout le domaine du visible, ce qui correspond à une émission de lumière blanche, d'où l'expression « chauffé à blanc ».

Une dernière remarque peut être déduite de ce qui précède:

Il n'y a pratiquement pas de recouvrement entre la partie utile du spectre du rayonnement solaire ( approximativement de 0,2 à 2,5  $\mu\text{m}$ ), et celle du spectre d'un corps de température peu supérieure à l'ambiante ( en gros, de 3 à 50  $\mu\text{m}$ ). Cette propriété sera exploitée dans de nombreuses applications telles que les serres ou les capteurs solaires à basse température utilisés dans l'habitat.

#### 4.7 Loi de STEFAN-BOLTZMANN

Cette loi fournit l'émittance totale du rayonnement du corps noir dans le vide, en fonction de sa température absolue. On peut l'établir en intégrant sur l'ensemble du spectre, la relation (4.11) exprimant la loi de PLANCK.

La loi de STEFAN-BOLTZMANN s'exprime par la relation:

$$M^0 = \sigma T^4 \tag{4.15}$$

$\sigma$  est la constante de STEFAN-BOLTZMANN, dont l'expression et la valeur numérique sont données dans le tableau suivant:

$\sigma = \frac{2 \pi^5}{15} \frac{k^4}{C_0^2 h^3}$	T	M <sup>0</sup>
5,67 . 10 <sup>-8</sup> W/(m <sup>2</sup> .K <sup>4</sup> )	K	W/m <sup>2</sup>

#### 4.8 Rayonnement des corps réels

Les lois physiques que nous venons d'étudier fournissent les émittances totales M<sup>0</sup> ou monochromatique M<sup>0</sup><sub>λ</sub> du corps noir. Ce sont des grandeurs hémisphériques, car un corps noir ne privilégie aucune direction de propagation.

Ces lois décrivent donc un rayonnement diffus, obéissant à la loi de Lambert. On passe donc des émittances du corps noir à ses luminances (grandeurs directionnelles) par les relations:

$$L^0 = \frac{M^0}{\pi} \quad \text{et} \quad L^0_{\lambda} = \frac{M^0_{\lambda}}{\pi} \quad (4.16)$$

directement déduites de la relation (4.6) établie au § 4.3.5

L'évaluation des propriétés émissives des substances réelles se fait *par rapport à celles d'un corps noir placé dans les mêmes conditions de température et de longueur d'onde*, à l'aide de coefficients appelés émissivités, totales ou monochromatiques, hémisphériques ou directionnelles. Ainsi, les émittances totale et monochromatique d'une surface réelle déterminée, seront fournies par des relations du type:

$$M = \varepsilon M^0 \quad \text{et} \quad M_{\lambda} = \varepsilon_{\lambda} M^0_{\lambda} \quad (4.17)$$

relations dans lesquelles ε est l'émissivité hémisphérique du corps, et ε<sub>λ</sub> son émissivité monochromatique à la longueur d'onde λ.

Quant aux luminances L et L<sub>λ</sub> du corps, elles seront liées à celles du corps noir par les relations:

$$L_{Ox} = \varepsilon_{Ox} L^0 = \varepsilon_{Ox} \frac{M^0}{\pi} \quad \text{et} \quad L_{Ox, \lambda} = \varepsilon_{Ox, \lambda} \frac{M^0_{\lambda}}{\pi} \quad (4.18)$$

dans lesquelles ε<sub>Ox</sub> est l'émissivité directionnelle totale du corps, et ε<sub>Ox, λ</sub> son émissivité directionnelle monochromatique. L'émissivité des substances naturelles dépend, d'une manière générale, de leur nature physico-chimique, de leur état de surface géométrique (défauts de planéité, rugosité), et varie avec la longueur d'onde, la direction d'émission et la température de surface.

Dans la pratique, le thermicien confronté à un problème d'échanges radiatifs n'a guère que deux possibilités:

- Faire procéder, sur échantillons, à des mesures d'émissivités, par un laboratoire spécialisé. C'est une solution longue, coûteuse et délicate.
- Rechercher des valeurs pour les paramètres définis ci-dessus dans les tables compilées dans des ouvrages spécialisés sur le rayonnement. Ces tables donnent généralement l'émissivité totale dans la direction normale à la surface, et l'émissivité totale hémisphérique, mais rarement l'émissivité monochromatique, et presque jamais l'émissivité directionnelle.

#### 4.9 Notion de corps gris

Au niveau limité de ce cours d'initiation à la thermique, nous nous contenterons d'une hypothèse simplificatrice selon laquelle *toutes les surfaces en présence auront une émissivité indépendante de la direction d'émission et de la longueur d'onde*, tout comme un corps noir, mais à des niveaux d'énergie moindres.

De tels corps pourront alors être qualifiés de **gris**, et seront caractérisés du point de vue de leurs propriétés radiatives par les relations suivantes:

$$\epsilon_{Ox} = \epsilon_{Ox,\lambda} = \epsilon = \text{Constante}$$

L'émittance totale d'un corps gris sera alors déduite celle du corps noir donnée par la loi de STEFAN-BOLTZMANN:

$$M^0 = \epsilon \sigma T^4 \quad \text{en W / m}^2 \quad (4.19)$$

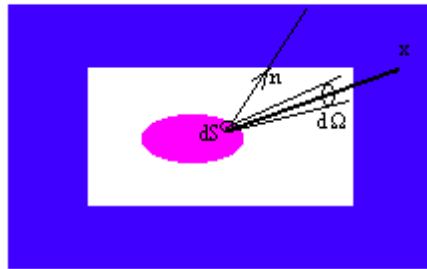
Le tableau suivant donne quelques valeurs d'émissivités  $\epsilon$

<i>Nature de la substance</i>	<i>émissivité <math>\epsilon</math></i>
<i>réfractaire</i>	0,8
<i>peinture réfléchissante</i>	0,3
<i>fer poli</i>	0,15 (à 20°C) à 0,35 (à 900°C)
<i>aluminium poli</i>	0,05
<i>aluminium oxydé</i>	0,15

Tableau 4.2 - Emissivités  $\epsilon$  de quelques substances

### 4.10 Loi de KIRCHHOFF

Cette loi établit un rapport entre les propriétés émissives et absorbantes d'un corps. Pour la démontrer, on considère un corps placé dans une enceinte fermée dont les parois possèdent les propriétés d'un corps noir. Tout le système est en équilibre thermique à une température uniforme T, et le corps considéré n'enregistre donc ni gain ni perte thermique.



Dans ces conditions, un élément de surface dS du corps émet dans un angle solide élémentaire dΩ entourant une direction Ox inclinée d'un angle β sur la normale On à dS, un flux monochromatique qui s'exprime par une relation tout-à-fait analogue à la relation (4.3) qui avait été introduite au § 4.3.4 pour définir la luminance d'une source dans une direction Ox. La seule différence est qu'on considère maintenant une émission monochromatique (à une seule longueur d'onde λ), et qu'au lieu d'une luminance totale, on doit donc exprimer une luminance monochromatique dans la direction Ox, que l'on rapportera à la luminance monochromatique du corps noir, par l'intermédiaire d'une émissivité ε<sub>Ox, λ</sub> telle qu'introduite dans la relation (4.18). On aura donc:

$$\left[ d^2\Phi_{Ox, \lambda} \right]_{\text{émis}} = \epsilon_{Ox, \lambda} L_{\lambda}^0 dS \cos\theta d\Omega \quad \text{en W / (m}^3 \cdot \text{sr)} \quad (4.20)$$

Simultanément, la surface dS reçoit dans le même angle solide dΩ, et à la même longueur d'onde λ, un flux émis par l'enceinte noire qui a pour valeur  $L_{\lambda}^0 dS \cos\theta d\Omega$ .

Le corps considéré en absorbera donc une partie:

$$\left[ d^2\Phi_{Ox, \lambda} \right]_{\text{absorbé}} = \alpha_{Ox, \lambda} L_{\lambda}^0 dS \cos\theta d\Omega \quad \text{en W / (m}^3 \cdot \text{sr)} \quad (4.21)$$

L'équilibre thermique du corps implique l'égalité des flux émis et absorbé, d'où la relation (4.22) suivante qui exprime la Loi de KIRCHHOFF:

$$\epsilon_{Ox, \lambda} = \alpha_{Ox, \lambda} \quad (4.22)$$

Dans le cas où les rayonnements émis et reçus par le corps sont parfaitement répartis sur l'ensemble des directions de l'espace hémisphérique (cas d'une émission et d'un éclairage diffus), la loi de KIRCHHOFF précédente est également applicable aux propriétés monochromatiques hémisphériques:

$$\varepsilon_{\lambda} = \alpha_{\lambda} \quad (4.23)$$

Il n'est généralement pas possible d'étendre la loi de KIRCHHOFF au rayonnement total émis et absorbé par un corps quelconque, et donc de considérer que  $\alpha = \varepsilon$ .

En effet, l'émissivité totale  $\varepsilon(T)$  d'un corps est définie par la relation:

$$\varepsilon(T) = \frac{M(T)}{M^0(T)} = \frac{\int_0^{\infty} \varepsilon_{\lambda} M_{\lambda}^0(T) d\lambda}{\sigma T^4} \quad (4.24)$$

Cette fonction  $\varepsilon(T)$  est une propriété caractéristique du seul corps émetteur, dépendant de son émissivité monochromatique  $\varepsilon_{\lambda}$ , et variant avec sa température  $T$ . Par contre, le coefficient d'absorption total de ce même corps est la fraction  $\alpha$  absorbée par le corps, sur l'ensemble des longueurs d'ondes incidentes. Si  $E_{\lambda}$  est l'éclairage monochromatique tombant sur le corps, on a:

$$\alpha = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda} E_{\lambda} d\lambda}{\int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda} = \frac{\int_0^{\infty} \alpha_{\lambda} E_{\lambda} d\lambda}{E} \quad (4.25)$$

Le coefficient d'absorption  $\alpha$  dépend donc lui aussi du corps considéré, par l'intermédiaire des  $\alpha_{\lambda}$ , mais aussi de la composition spectrale  $E_{\lambda}$  du rayonnement reçu, et donc en définitive de la nature et de la température du corps qui a émis le rayonnement absorbé. C'est pourquoi le coefficient d'absorption total  $\alpha$  ne saurait être une caractéristique intrinsèque d'un corps, comme l'est son émissivité totale  $\varepsilon(T)$ .

D'une manière générale, on aura donc:  $\alpha \neq \varepsilon$

Il y a deux exceptions importantes à cette situation:

- Le corps noir, défini par les propriétés:

$$\varepsilon_{\lambda} = 1 \text{ et } \alpha_{\lambda} = 1 \text{ quelque soit } \lambda$$

$$\text{Il en résulte immédiatement que: } \varepsilon = \alpha$$

- Les corps gris, définis par la propriété:

$$\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda \text{ quelque soit } \lambda$$

La relation (4.23):  $\varepsilon_\lambda = \alpha_\lambda$  entraîne donc:  $\alpha_\lambda = \varepsilon$  quelque soit  $\lambda$ ,

c'est-à-dire encore:  $\varepsilon = \alpha$

### 4.11 Exemples de récapitulation

#### 4.11.1 Energie solaire reçue sur la terre

En supposant que le soleil rayonne comme un corps noir à la température de 5800 K, on se propose de calculer l'éclairement solaire E reçu par m<sup>2</sup> de surface de la terre. On supposera que le soleil est au zénith de l'endroit considéré de la terre. On donne les grandeurs géométriques suivantes:

- rayon du soleil:  $R = 696.000 \text{ km}$
- distance terre-soleil:  $D = 149.637.000 \text{ km}$

On supposera que le coefficient de transmission  $\tau$  de l'atmosphère est égal à 0,75. Considérons un élément de surface  $dS$  quelconque à la surface du soleil, et évaluons sa contribution à l'éclairement de l'élément de surface  $dS'$  considéré sur la terre.

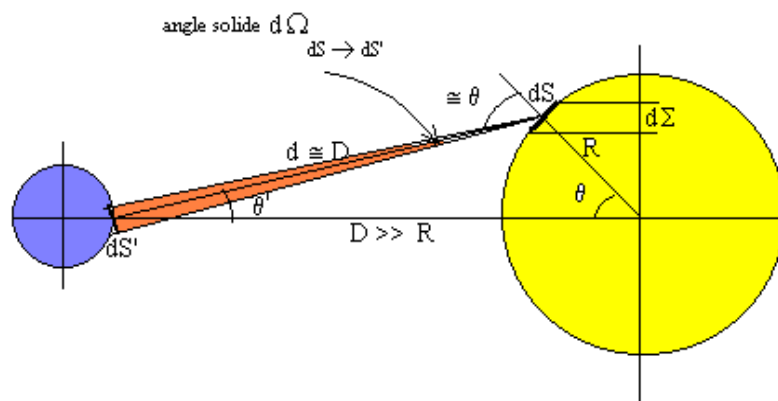


Figure 4.7 - Angle solide sous lequel on voit l'élément  $dS'$  de la terre, depuis  $dS$  sur le soleil

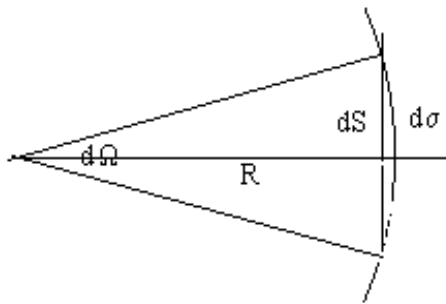
Le flux élémentaire émis par l'élément  $dS$  de la surface du soleil dans un angle solide  $d\Omega$  entourant la direction de  $dS$  vers un élément  $dS'$  de la surface de la terre, a été exprimé au § 4.3.4 par la relation (4.3). Il est donné par:

$$d^2\Phi_{dS \rightarrow dS'} = L_T^0 dS \cos\theta d\Omega_{dS \rightarrow dS'} \tag{4.26}$$

relation dans laquelle la luminance  $L_T^0$  du soleil peut être exprimée en fonction de son émittance par la relation (4.6) :

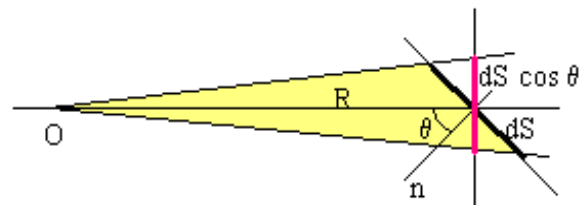
$$L_T^0 = \frac{M_T^0}{\pi} \tag{4.6}$$

Evaluons maintenant l'angle solide  $d\Omega_{dS \rightarrow dS'}$  sous lequel on voit  $dS'$  depuis  $dS$ .



En raison même de la définition de l'angle solide  $d\Omega$ , la surface conique qui découpe l'aire  $d\Omega$  sur la sphère de rayon unité, intercepte sur une sphère de rayon  $R$  une surface  $d\sigma = R^2 d\Omega$ . La surface plane  $dS$  qui sous-tend la surface sphérique  $d\sigma$  peut être assimilée à  $d\sigma$  lorsque  $R$  est grand devant les dimensions de  $d\sigma$ . Il s'en suit que l'on a:  $dS = R^2 d\Omega$ .

Considérons maintenant un point  $O$  situé à une distance moyenne  $R$  d'une petite surface  $dS$ , la normale à  $dS$  étant orientée de manière quelconque par rapport à la direction de  $O$ .



Il résulte de ce qui précède que l'angle solide  $d\Omega$  sous lequel on voit d'un point  $O$  le contour d'une petite surface  $dS$  (assimilée à une surface plane), et orientée d'une manière quelconque, est donné par la relation:

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{R^2} \tag{4.27}$$

L'angle solide  $d\Omega_{dS \rightarrow dS'}$  sous lequel on voit  $dS'$  depuis  $dS$  a donc comme expression:

$$d\Omega_{dS \rightarrow dS'} = \frac{dS' \cos \theta'}{d^2} \tag{4.28}$$

Si on tient maintenant compte des expressions (4.6) et (4.28), la relation (4.26) s'écrit alors:

$$d^2\Phi_{dS \rightarrow dS'} = \frac{M_T^0}{\pi} \frac{dS \cos\theta dS' \cos\theta'}{d^2} \quad (4.29)$$

Il faut maintenant intégrer à toute la surface du soleil:

$$d\Phi_{S \rightarrow dS'} = \int_S d^2\Phi_{dS \rightarrow dS'} = \frac{M_T^0}{\pi} \int_S \frac{dS' \cos\theta'}{d^2} \cos\theta dS$$

La distance D étant de l'ordre de 150 fois le rayon R, il en résulte que d et D sont sensiblement égaux, tandis que l'angle  $\theta'$  est négligeable, quelque soit la position de l'élément dS sur le soleil.

La relation précédente se simplifie donc pour s'écrire:

$$d\Phi_{S \rightarrow dS'} = \frac{M_T^0}{\pi} \frac{dS'}{D^2} \int_S \cos\theta dS$$

Mais  $\cos\theta dS$  est la projection de l'élément dS sur le plan diamétral du soleil. D'où:

$$\int_S \cos\theta dS = \int_{\Sigma} d\Sigma = \Sigma = \pi R^2$$

et:

$$d\Phi_{S \rightarrow dS'} = M_T^0 \left(\frac{R}{D}\right)^2 dS' \quad (4.30)$$

(R/D est le demi-diamètre angulaire du soleil)

En définitive, l'éclairement solaire de la terre est donné par la relation:

$$E = \frac{d\Phi_{S \rightarrow dS'}}{dS'} = M_T^0 \left(\frac{R}{D}\right)^2 \quad (4.31)$$

$M_T^0$  est donnée par la loi de STEFAN-BOLTZMANN (4.15), d'où finalement:

$$E = \sigma T^4 \left(\frac{R}{D}\right)^2 \quad (4.32)$$

Avec les valeurs numériques adoptées:

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4),$$

$$T = 5.800 \text{ K}$$

$$R = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m},$$

$$D = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

on obtient:  $E = 1402 \text{ W}/\text{m}^2$

Si on tient compte de surcroît que l'atmosphère ne transmet qu'une fraction du rayonnement solaire qui l'atteint, on ne recevra plus au sol que:

$$\tau E = 0,75 E = 1052 \text{ W/m}^2$$

Cet exemple est fort simplifié. Les valeurs de l'éclairement solaire que l'on mesure réellement sont un peu inférieures au résultat ci-dessus, car elles dépendent également d'autres paramètres dont on n'a pas tenu compte ici.

#### 4.11.2 Capteur solaire plan. Effet de serre.

Un capteur solaire plan destiné au chauffage des habitations ou à la production d'eau chaude sanitaire, est essentiellement constitué:

- d'un panneau « noir » appelé *absorbeur*, pourvu d'un réseau de tubulures dans lesquelles circule un fluide caloporteur ayant pour fonction d'évacuer la chaleur captée vers la partie utilisation de l'installation.
- d'une face avant constituée d'une *plaque de verre*, destinée à réduire les pertes par rayonnement, du fait d'un mécanisme appelé effet de serre, que nous allons analyser.
- d'un boîtier contenant le tout, calorifugé de manière à réduire les pertes vers l'arrière et les côtés.

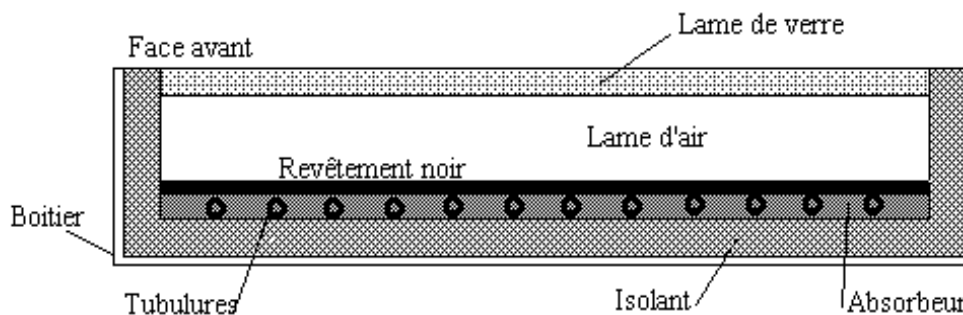


Figure 4.8 - Coupe schématique d'un capteur solaire plan

On se propose d'évaluer les températures d'équilibre qu'atteindront l'absorbeur et le vitrage, lorsque la circulation du fluide caloporteur est interrompue. On admettra les hypothèses simplificatrices suivantes:

- On néglige tous les échanges par conduction, pour ne considérer que les seuls échanges radiatifs.
- On suppose qu'il n'y a aucune perte thermique par le fond du boîtier.

Les données physiques nécessaires à la résolution du problème sont les suivantes:

- L'éclairement solaire E du vitrage est de 1.000 W/m<sup>2</sup>.

- On connaît les propriétés radiatives moyennes du vitrage dans deux bandes spectrales différentes: celle du rayonnement solaire ( $\lambda$  entre 0,2 et 2,5  $\mu\text{m}$ ) et celle des rayonnements thermiques dits de basse température ( $\lambda > 2,5 \mu\text{m}$ ). Ces données sont représentées sur la figure 4.9 suivante:

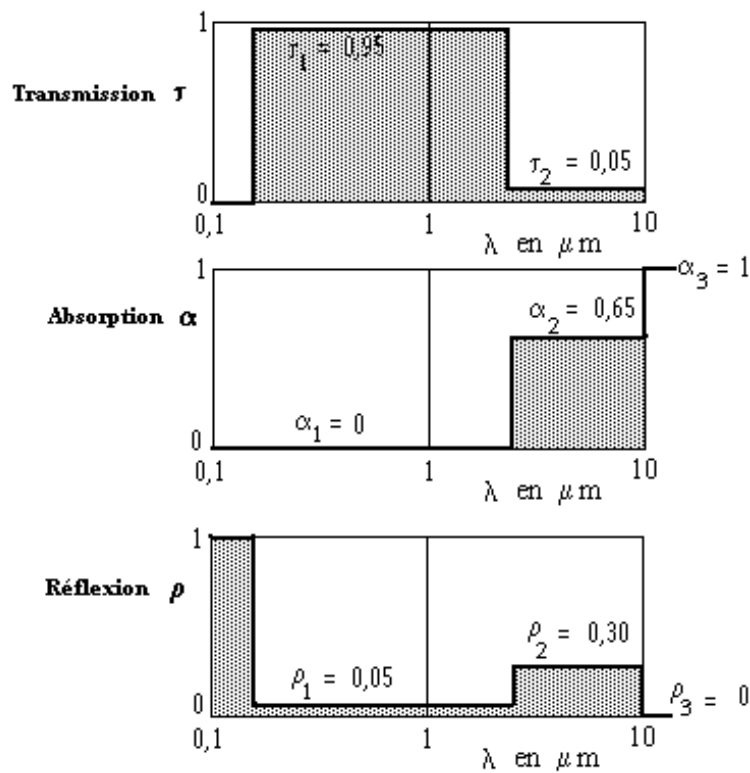


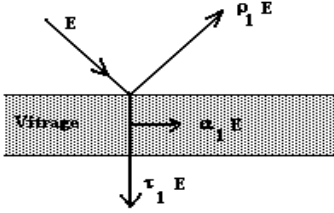
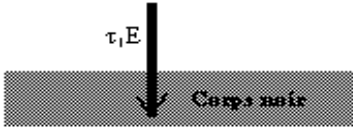
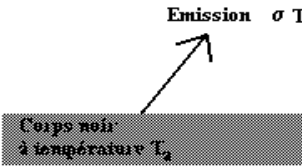
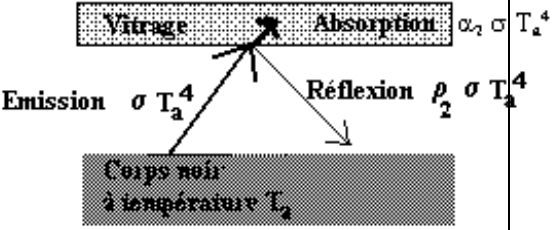
Figure 4.9 - Caractéristiques radiatives moyennes du verre utilisé

L'effet de serre repose sur les propriétés de la courbe de transmission du verre. Ce matériau est pratiquement transparent pour le rayonnement solaire ( $\tau_1 = 0,95$ ), mais transmet peu de rayonnement au delà de 2,5  $\mu\text{m}$  ( $\tau_2 = 0,05$ ). En outre, il absorbe pratiquement tout le rayonnement de température ambiante, dont le maximum se situe autour de 10  $\mu\text{m}$  de longueur d'onde ( $\alpha_3 = 1$ ).

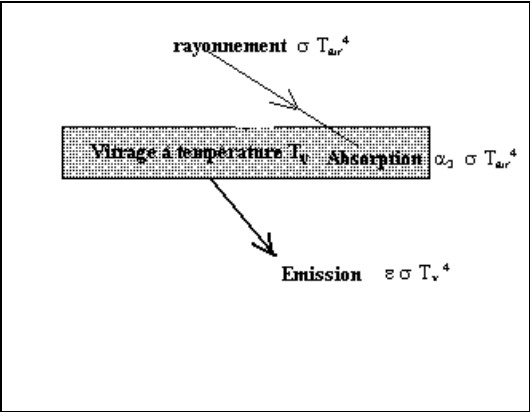
Nous désignerons par  $T_a$  et  $T_v$  les températures respectives de l'absorbeur et du vitrage, à l'équilibre thermique, lorsque la circulation de fluide caloporteur est stoppée.

En établissant des bilans thermiques en régime permanent, sur l'absorbeur d'une part, et sur le vitrage d'autre part, nous allons obtenir un système d'équations dont la résolution fournira les valeurs de  $T_a$  et  $T_v$ . Ces bilans porteront sur l'unité de surface ( $S = 1 \text{ m}^2$ ).

Avant d'établir ces bilans, commençons par décrire les différents phénomènes radiatifs qui interviennent:

<p>1) L'éclairement solaire incident <math>E</math> frappe le vitrage. Une fraction <math>\rho_1 E</math> est réfléchiée, une fraction <math>\alpha_1 E</math> est absorbée par le verre, tandis que la fraction restante du flux incident, <math>\tau_1 E</math>, traverse le vitrage.</p>	
<p>2) Tout le rayonnement <math>\tau_1 E</math> transmis par le vitrage est absorbé par la surface noire de l'absorbeur.</p>	
<p>3) L'absorbeur, à la température <math>T_a</math>, émet un rayonnement dont l'émittance est fournie par la loi de STEFAN-BOLTZMANN, soit: <math>\sigma T_a^4</math></p>	
<p>4) Le rayonnement de l'absorbeur frappe le vitrage. Une fraction <math>\rho_2 \sigma T_a^4</math> est réfléchiée et revient donc vers l'absorbeur. Une autre fraction <math>\alpha_2 \sigma T_a^4</math> est absorbée</p>	

5) Le vitrage, en équilibre thermique à la température  $T_v$ , émet un rayonnement,  $\varepsilon \sigma T_v^4$ , qui sera absorbé par le corps noir en vis-à-vis (dont c'est la fonction).  
 En même temps, il absorbe une fraction  $\alpha_3 \sigma T_{air}^4$  du rayonnement ambiant émanant de l'environnement à la température  $T_{air}$



**a) Bilan au niveau de l'absorbeur**

Il absorbe:  $\tau_1 E$ , la fraction de l'éclairement solaire  $E$  que transmet le vitrage.  
 $\rho_2 \sigma T_a^4$ , la fraction du rayonnement de la surface noire réfléchié par le vitrage.  
 $\varepsilon \sigma T_v^4$ , le rayonnement émis par le vitrage.

Il émet:  $\sigma T_a^4$

L'équilibre thermique de l'absorbeur s'exprime donc par l'équation:

$$\sigma T_a^4 = \tau_1 E + \rho_2 \sigma T_a^4 + \varepsilon \sigma T_v^4 \tag{4.33}$$

**b) Bilan au niveau du vitrage**

Il absorbe:  $\alpha_1 E$ , une fraction du rayonnement solaire.  
 $\alpha_2 \sigma T_a^4$ , une fraction du rayonnement de l'absorbeur  
 $\alpha_3 \sigma T_{air}^4$ , fraction du rayonnement de l'environnement à une température  $T_{air}$

Il émet:  $2 \varepsilon \sigma T_v^4$ , le rayonnement émis par ses deux faces.

L'équilibre thermique du vitrage s'exprime donc par l'équation:

$$2 \varepsilon \sigma T_v^4 = \alpha_1 E + \alpha_2 \sigma T_a^4 + \alpha_3 \sigma T_{air}^4 \tag{4.34}$$

En combinant avec le premier bilan:

$$\sigma T_a^4 = \tau_1 E + \rho_2 \sigma T_a^4 + \varepsilon \sigma T_v^4 \tag{4.33}$$

on obtient:

$$\sigma T_a^4 = \tau_1 E + \rho_2 \sigma T_a^4 + \frac{\alpha_1 E + \alpha_2 \sigma T_a^4 + \alpha_3 \sigma T_{air}^4}{2}$$

soit en réarrangeant les termes:

$$\sigma T_a^4 \left( 1 - \frac{\alpha_2 + 2 \rho_2}{2} \right) = \frac{(\alpha_1 + 2 \tau_1) E + \alpha_3 \sigma T_{\text{air}}^4}{2}$$

que l'on résout en:

$$T_a^4 = \frac{(\alpha_1 + 2 \tau_1) E + \alpha_3 \sigma T_{\text{air}}^4}{(2 - \alpha_2 - 2 \rho_2) \sigma}$$

pour en tirer finalement:

$$T_a = \sqrt[4]{\left( \frac{\alpha_1 + 2 \tau_1}{2 - \alpha_2 - 2 \rho_2} \frac{E}{\sigma} + \frac{\alpha_3}{2 - \alpha_2 - 2 \rho_2} T_{\text{air}}^4 \right)} \quad (4.34)$$

Dans cette relation:  $\alpha_1 = 0$        $\alpha_2 = 0,65$        $\alpha_3 = 1$   
 $\tau_1 = 0,95$        $\rho_2 = 0,30$

En appliquant la relation (4.34), on obtient:  $T_a = 483 \text{ K} = 210 \text{ }^\circ\text{C}$

Quant à la température du vitrage, on la tire de la relation:

$$2 \varepsilon \sigma T_v^4 = \alpha_1 E + \alpha_2 \sigma T_a^4 + \alpha_3 \sigma T_{\text{air}}^4 \quad (4.34)$$

ce qui, en adoptant comme valeur de l'émissivité du verre:  $\varepsilon = 0,88$

conduit à la valeur:  $T_v = 394 \text{ K} = 121 \text{ }^\circ\text{C}$

Les valeurs obtenues ne constituent qu'une approximation, car nous n'avons donné ici qu'un traitement très simplifié du problème, en négligeant notamment la convection au sein de la lame d'air séparant le vitrage de l'absorbeur.

# Chapitre 5

## Transferts de chaleur par convection.

### 5.1 Introduction

Ce cours a pour objet l'étude des transferts d'énergie thermique au sein des substances physiques solides, liquides ou gazeuses. Il est évident a priori que les interactions d'un flux d'énergie avec cette matière vont dépendre de l'état sous lequel elle se trouve. Nous avons déjà décrit deux mécanismes fondamentalement différents de transfert de la chaleur:

- Le rayonnement, qui ne nécessite la présence d'aucun support matériel solide ou fluide, puisqu'il s'agit d'un phénomène ondulatoire de type électromagnétique. Les corps solides ou fluides se révèlent seulement plus ou moins opaques ou transparents à ces rayonnements, en fonction des caractéristiques spectrales et directionnelles de ceux-ci.
- La conduction, qui nécessite la présence d'un milieu matériel. Nous avons vu que du point de vue thermique, les solides se répartissent en bon conducteurs de la chaleur et en isolants, avec de grandes différences de leurs constantes physiques caractéristiques à cet égard:

<i>Nature du corps</i>	<i>Conductivité <math>\lambda</math> en W/(m.k)</i>
<i>Argent</i>	418
<i>Cuivre</i>	389
<i>Polystyrène expansé</i>	0,025
<i>Laine de verre</i>	0,040

Les liquides quant à eux, et encore plus les gaz, se révèlent de très mauvais conducteurs de la chaleur:

<i>Nature du corps</i>	<i>Conductivité <math>\lambda</math> en W/(m.k)</i>
<i>Eau liquide à 20°C</i>	0,60
<i>Huile de graissage SAE50 à 80 °C</i>	0,14
<i>Air à 23 °C (300 K)</i>	0,026
<i>Vapeur d'eau à 100°C et 1 atmosphère</i>	0,025

Ce mécanisme de conduction, quoique de médiocre efficacité, est cependant la seule cause de transfert de chaleur dans un fluide immobile, par exemple parce qu'il est emprisonné dans un petit espace, ou bien encore dans un fluide en écoulement laminaire, parce qu'alors les filets de fluide restent parallèles entre eux, sans induire aucun mélange de matière.

Mais les fluides se caractérisant par la propriété d'acquérir une vitesse de déformation non nulle dès qu'on leur applique une contrainte tangentielle aussi faible soit-elle, ils ne restent jamais longtemps immobiles, ce qui va faire apparaître un nouveau mode de transfert de la chaleur.

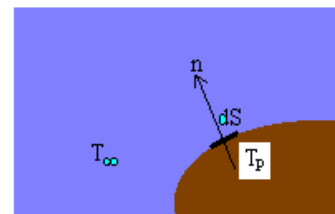
En effet, la moindre différence de température entre deux points d'un liquide ou d'un gaz immobile va provoquer une différence de masse volumique entre ces deux points, et du fait de l'existence de la pesanteur, apparition d'une poussée d'Archimède qui mettra le fluide en mouvement. Ce mouvement de brassage, dans lequel les parties les plus chaudes du fluide ont tendance à s'élever et les parties froides et denses à descendre, est appelé *convection naturelle*. Les mouvements du fluide y sont dus uniquement à des différences de température. On peut également réaliser une *convection forcée*, que l'on obtient en soumettant le fluide à une différence de pression, le mouvement se déclenchant alors selon les lois de la mécanique des fluides. La convection explique également les mouvements des grandes masses d'air autour de la Terre, l'action des vents, la formation des nuages, et les courants océaniques.

### 5.2 Coefficient d'échange de chaleur par convection

Considérons sur la surface d'un corps solide un élément d'aire  $dS$  à la température  $T_p$ . Si le corps est au contact d'un milieu fluide en mouvement caractérisé par une température convection, ou coefficient d'échange thermique par convection. Il s'exprime en  $W/(m^2.K)$ .

$T_\infty$ , la quantité de chaleur  $dQ$  qui traverse  $dS$  pendant le temps  $dt$  peut s'écrire:

$$d^2Q = h(T_p - T_\infty)dS dt \quad (5.1)$$



Dans la relation (5.1), ci-dessus,  $dQ$  s'exprime en Joules, et  $\frac{d}{dt}(dQ)$  en Watts.

Tout calcul d'échange thermique par convection nécessite la détermination du coefficient  $h$ , ce qui est toujours une affaire compliquée, car le transfert de chaleur par convection est complexe. Il résulte de la superposition de deux phénomènes différents:

- conduction entre les particules de fluide qui se rencontrent;
- mélange de ces particules par suite du mouvement d'ensemble du fluide.

De plus, l'échange de chaleur peut être accompagné d'un changement de phase (condensation ou évaporation). On est donc amené à distinguer au moins trois types de problèmes que nous étudierons successivement:

- L'échange thermique monophasique en convection forcée.
- L'échange thermique monophasique en convection naturelle.
- L'échange thermique accompagné d'ébullition ou de condensation.

Selon les cas, on peut faire appel à une ou plusieurs des méthodes d'étude suivantes:

- L'analyse dimensionnelle combinée avec des résultats expérimentaux;
- La recherche de solutions analytiques (dans le cas relativement simple du régime laminaire) ou numériques (dans le cas général) des équations générales de conservation;
- La formulation d'analogies entre le transfert de quantité de chaleur et le transfert de quantité de mouvement (essentiellement dans le cas du régime turbulent).

Dans le cadre de ce cours d'initiation aux transferts thermiques, nous nous limiterons à la première de ces trois approches, qui permet de traiter la plupart des problèmes pratiques qui peuvent se poser à un non spécialiste en matière d'échanges convectifs.

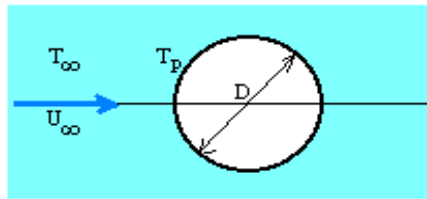
### **5.3 Transfert de chaleur par convection forcée sans changement d'état**

Ce cas se rencontre très fréquemment en pratique industrielle dans les échangeurs thermiques de tous genres.

#### **5.3.1 Analyse dimensionnelle**

Nous introduirons les notions essentielles concernant la convection forcée en analysant le cas particulier de l'échange de chaleur entre une conduite cylindrique à section circulaire de diamètre  $D$  supposée infiniment longue (un tuyau), et un fluide extérieur à température constante  $T_\infty$  arrivant à vitesse constante  $U_\infty$  perpendiculairement à l'axe du tuyau. Le problème con-

siste à préciser l'expression du flux thermique  $\Phi$  échangé entre le fluide extérieur à la température  $T_\infty$  et une longueur unité de la surface du tuyau à la température  $T_p$ .



De fait, on recherche une formulation pour le coefficient d'échange thermique par convection  $h$ , auquel le flux thermique échangé  $\Phi$  est lié par la relation introduite en (5.1) et qu'on peut écrire dans le cas présent:

$$\Phi = h (T_p - T_\infty) \pi D \tag{5.2}$$

L'analyse dimensionnelle de ce problème a comme point de départ l'inventaire exhaustif des grandeurs physiques mises en jeu, qui sont récapitulées dans le tableau ci-dessous:

<i>Grandeurs</i>	<i>Symbole</i>	<i>Unité S.I.</i>	<i>Équation aux dimensions</i>
<i>Diamètre du tuyau</i>	D	m	L
<i>Vitesse du fluide</i>	$U_\infty$	m/s	$LT^{-1}$
<i>Masse volumique du fluide</i>	$\rho$	$kg/m^3$	$ML^{-3}$
<i>Viscosité dynamique du fluide 1</i>	$\mu$	$kg/(m.s)$	$ML^{-1}T^{-1}$

<i>Conductivité thermique du fluide 2</i>	$\lambda$	$W/(m.K)$	$MLT^{-3}\theta^{-1}$
<i>Capacité thermique massique du fluide i</i>	C	$J/(kg.K)$	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$
<i>Coefficient d'échange convectif</i>	h	$W/(m^2.K)$	$MT^{-3}\theta^{-1}$
<i>Écart de température</i>	$T_p - T_\infty$	K	$\theta$

Ce problème met en jeu 8 grandeurs physiques et 4 dimensions.

Le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM permet donc de prévoir que la forme la plus générale de la loi physique décrivant le phénomène étudié s'écrira:

$$F(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = 0 \tag{5.3}$$

relation dans laquelle  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$  désignent 4 produits sans dimension pouvant être constitués au moyen des 8 grandeurs physiques considérées.

Recherchons ces groupements en posant:

$$\pi = D^a \lambda^b U_\infty^c \rho^d \mu^e C^f h^g (T_p - T_\infty)^i \tag{5.4}$$

relation dans laquelle a, b, c, d, e, f, g, i sont 8 coefficients arbitraires.

L'équations aux dimensions d'un groupement  $\pi$  s'écrit:

$$[\pi] = [M]^{b+d+e+g} [L]^{a+b+c-3d-e+2f} [T]^{-3b-c-e-2f-3g} [\theta]^{-b-f-g+i}$$

Le groupement  $\pi$  devant être sans dimension, on doit donc respecter les 4 conditions exprimées par le système des 4 équations linéaires à 8 inconnues suivantes:

$$\begin{aligned} b + d + e + g &= 0 \\ a + b + c - 3d - e + 2f &= 0 \\ -3b - c - e - 2f - 3g &= 0 \\ -b - f - g + i &= 0 \end{aligned}$$

Toute solution de ces équations est une série d'exposants donnant un produit sans dimension  $\pi$ . Le système linéaire ci-dessus possède 4 solutions linéairement indépendantes (à condition que la matrice des coefficients soit bien de rang 4), qui correspondent aux 4 produits sans dimension prévus par le théorème de VASCHY-BUCKINGHAM.

En choisissant arbitrairement 4 des 8 coefficients, les 4 autres seront alors fournis par la résolution du système ci-dessus, ce qui conduira à *un groupement  $\pi$  sans dimension*. En fixant par exemple de manière parfaitement arbitraire:

$$c = 0 \quad d = 0 \quad g = 1 \quad i = 0$$

le système précédent se réduit à:

$$\begin{aligned} b + e &= -1 \\ a + b - e + 2f &= 0 \\ -3b - e - 2f &= 3 \\ -b - f &= 1 \end{aligned}$$

qui admet la solution:

$$a = 1 \quad b = -1 \quad e = 0 \quad f = 0$$

Cette solution met en évidence le groupement sans dimension:

$$\pi_1 = \frac{h D}{\lambda} \quad (5.5)$$

Ce nombre sans dimension est appelé **le Nombre de Nusselt**. On le note  $N_u$

Trois autres combinaisons arbitraires de coefficients sont encore possibles, conduisant de même à introduire les groupements sans dimensions:

$$\pi_2 = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \quad (5.6)$$

On reconnaît le **Nombre de Reynolds**  $R_e$  introduit dans le Cours de Mécanique des Fluides.

Le suivant se présente sous la forme:

$$\pi_3 = \frac{\mu C}{\lambda} \quad (5.7)$$

Ce nombre sans dimension est appelé **le Nombre de Prandtl**. On le note  $P_r$

Enfin, le dernier groupement possible s'écrit:

$$\pi_4 = \frac{U_\infty^2}{C \Delta T} \quad (5.8)$$

Ce dernier nombre sans dimension est appelé **le Nombre d'Eckert**. On le note  $E_c$

La forme la plus générale de la loi physique décrivant le problème de convection forcée étudié s'écrit donc en définitive:

$$N_u = f (R_e, P_r, E_c) \quad (5.9)$$

avec:

$$N_u = \frac{h D}{\lambda} \quad R_e = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \quad P_r = \frac{\mu C}{\lambda} \quad E_c = \frac{U_\infty^2}{C \Delta T} \quad (5.10)$$

Le Nombre de Nusselt  $N_u$  n'est autre que le coefficient d'échange thermique par convection  $h$  mis sous forme adimensionnelle. C'est le rapport du flux thermique  $\Phi$  transmis par convection:

$$\Phi = h (T_p - T_\infty) S$$

à un flux thermique de référence  $\Phi_r$ , qui est pris égal au flux de chaleur qui serait transmis par conduction à travers le fluide, avec un gradient de température  $(T_p - T_\infty)/D$ . Un tel flux de chaleur conduit serait donné par la loi de Fourier:

$$\Phi_r = \varphi S = - \lambda S \text{grad} \bar{T} = \lambda S \frac{(T_p - T_\infty)}{D}$$

Le rapport de ces deux flux de chaleur conduit alors à:

$$N_u = \frac{h (T_p - T_\infty) S}{\lambda S \frac{(T_p - T_\infty)}{D}} = \frac{hD}{\lambda} \quad (5.10.a)$$

L'interprétation du Nombre de Reynolds  $R_e$  est développée dans le Cours de Mécanique des Fluides.  $R_e$  est le rapport des forces d'inertie aux forces de viscosité, dans l'écoulement considéré. En effet, on peut toujours représenter la vitesse du fluide en un point de l'écoulement sous la forme  $U_\infty u(y)$ ,  $u(y)$  étant une fonction sans dimensions. L'accélération du fluide est alors proportionnelle à  $U_\infty^2 \frac{\partial u}{\partial y}$  et les forces d'inertie au produit  $\rho D^3 U_\infty^2 \frac{\partial u}{\partial y}$ .

De même, les forces de viscosité sont proportionnelles à  $D^2 \mu U_\infty \frac{\partial u}{\partial y}$ , de sorte que le

Nombre de Reynolds  $R_e$  est le rapport suivant:

$$R_e = \frac{\rho D^3 U_\infty^2 \frac{\partial u}{\partial y}}{D^2 \mu U_\infty \frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\rho U_\infty D}{\mu} \quad (5.10.b)$$

Le Nombre de Prandtl est le rapport de la viscosité cinématique  $\mu/\rho$  à la diffusivité thermique  $a = \lambda / \rho C$ :

$$P_r = \frac{\mu/\rho}{\lambda/\rho C} = \frac{\mu C}{\lambda} \quad (5.10.c)$$

Ce nombre de Prandtl caractérise les propriétés thermiques du fluide, en mettant en rapport la distribution de vitesses (gouvernée par la viscosité cinématique) et la distribution de températures (gouvernée par la diffusivité thermique).

Le dernier groupement sans dimension révélé par l'analyse dimensionnelle ci-dessus est le Nombre d'Eckert. On peut montrer que ce Nombre caractérise la dégradation d'énergie mécanique en chaleur, et que tant que les vitesses du fluide demeurent faibles devant la vitesse du son, son importance demeure négligeable.

### 5.3.2 Corrélations expérimentales

Nous venons de voir que la forme la plus générale de la loi physique décrivant un problème de convection forcée s'écrivait:

$$Nu = f(Re, Pr, Ec) \quad (5.9)$$

En fait, compte tenu de la remarque concernant le Nombre d'Eckert, on adoptera le plus généralement une relation de la forme:

$$Nu = f(Re, Pr) \quad (5.11)$$

Cependant, connaître l'existence d'une telle relation fonctionnelle ne nous permet guère encore de résoudre un problème concret.

Revenons donc sur ce qui doit préoccuper l'ingénieur thermicien en pratique.

D'une façon générale, un problème d'échange de chaleur par convection entre une paroi solide et un fluide adjacent se trouve complètement défini par la connaissance de données de 5 types différents:

1. Une configuration géométrique déterminant les formes, mais pas les dimensions.
2. Une dimension caractéristique, notée  $L$ , servant d'échelle de longueur.
3. L'écart  $T_p - T_\infty$  entre une température de paroi solide  $T_p$  et une température du fluide  $T_\infty$
4. La vitesse  $U_\infty$  du fluide loin des parois solides.
5. Les propriétés physiques du fluide:  $\rho, \mu, C, \lambda$

Il s'agit alors de calculer la quantité de chaleur  $Q$  traversant une aire  $S$  de la paroi solide pendant un intervalle de temps  $\Delta t$ .

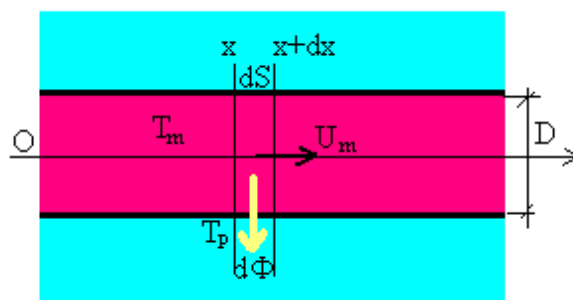
On a introduit une représentation adimensionnelle de cette quantité physique  $Q$ . C'est le Nombre de Nusselt  $N_u$ . On sait en outre que ce Nombre de Nusselt  $N_u$  est fonction du Nombre de Reynolds  $R_e$  de l'écoulement considéré, et du Nombre de Prandtl  $P_r$  caractérisant les propriétés thermiques du fluide.

Une telle relation fonctionnelle  $N_u = f(R_e, P_r)$  ne peut pas être établie théoriquement, mais doit être déterminée expérimentalement. De nombreux résultats ont été compilés dans la littérature spécialisée. Ils sont généralement désignés sous l'appellation de « corrélations expérimentales ».

Chaque corrélation expérimentale n'est applicable que pour une configuration géométrique bien déterminée (données de type 1.), pour un fluide donné (données de type 5.), et dans un domaine de variation de température (données de type 3.), et de vitesses du fluide également précisé (données de type 4.) .On trouvera dans les pages qui suivent, une présentation des corrélations expérimentales les plus usuelles en convection forcée.

### 5.3.2.1 Écoulement dans un tube

Un fluide s'écoule en régime permanent dans une conduite cylindrique circulaire de diamètre intérieur  $D$ . Dans une section droite, à l'abscisse  $x$  par rapport à l'entrée de la conduite, la vitesse moyenne du fluide est  $U_m$ , sa température moyenne  $T_m$ , et la température de la paroi  $T_p$ .



La corrélation expérimentale indiquée permet de calculer le flux de chaleur  $d\Phi$  échangé à travers l'aire latérale de paroi  $dS$  comprise entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ :

$$d\Phi = h (T_m - T_p) \pi D dx \quad (5.12)$$

**a) Régime turbulent:**

Dans le domaine de Nombres de Reynolds défini par:  $10^4 < Re < 1,2 \cdot 10^5$

on applique la formule de Colburn:

$$N_u = 0,023 P_r^{1/3} R_e^{0,8} \quad (5.13)$$

Il existe deux restrictions au domaine de validité de cette corrélation:

- Le régime d'écoulement dans le tube doit être parfaitement établi, ce qui n'est garanti que si:  $x/D > 60$
- Le fluide doit être tel que son Nombre de Prandtl soit compris entre 0,7 et 100.

**b) Régime d'entrée des tubes**

Dans le cas où:  $x/D < 60$ , la corrélation de Colburn doit être corrigée de la manière suivante pour tenir compte de ce que le profil de vitesses du fluide dans le tube ne peut pas encore être complètement établi:

$$N_u = 0,023 P_r^{1/3} R_e^{0,8} \left[ 1 + \left( \frac{D}{x} \right)^{0,7} \right] \quad (5.14)$$

**c) Régime laminaire**

Dans le domaine  $Re < 2000$ , on peut appliquer les corrélations expérimentales de Lévêque,

exprimées en fonction du paramètre:  $A = \frac{1}{Re P_r} \frac{x}{D}$

ces corrélations ont pour expressions:

$$\begin{aligned} N_u &= 3,66 \quad \text{pour } A > 0,05 \\ N_u &= 1,06 A^{-0,4} \quad \text{pour } A < 0,05 \end{aligned} \quad (5.15)$$

*Exemple pratique:*

Un tuyau de diamètre  $D = 20$  mm transporte un débit  $Q = 0,5$  l/s d'eau à  $50^\circ\text{C}$ .

Déterminer le flux thermique transmis par convection du fluide vers la paroi, par mètre linéaire de conduite, dans le cadre des hypothèses suivantes:

- l'alimentation en eau chaude est telle que la température de celle-ci demeure constante;
- la paroi du tube est suffisamment mince pour qu'on puisse y négliger tout phénomène de conduction;
- la température extérieure du milieu environnant le tube est de  $15^\circ\text{C}$ ;

- l'écoulement est parfaitement établi ( cas du régime permanent dans un tube de grande longueur).

On adoptera les valeurs suivantes pour les propriétés physiques de l'eau:

Masse volumique à 50°C:	$\rho = 988 \text{ kg/m}^3$
Viscosité dynamique à 50°C:	$\mu = 0,55 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$
Conductivité thermique à 50°C:	$\lambda = 0,639 \text{ W/(m.}^\circ\text{C)}$
Capacité thermique massique à 50°C:	$C = 4.184 \text{ J/(kg.}^\circ\text{C)}$

La vitesse moyenne de cet écoulement est:  $U_m = \frac{Q}{\pi D^2/4} = \frac{0,0005}{0,000314} = 1,59 \text{ m/s}$

Le Nombre de Reynolds a donc pour valeur:  $Re = \frac{\rho U_m D}{\mu} = \frac{988 \cdot 1,59 \cdot 0,02}{0,55 \cdot 10^{-3}} = 57.124$

Calculons le Nombre de Prandtl du fluide:  $Pr = \frac{\mu C}{\lambda} = \frac{0,55 \cdot 10^{-3} \cdot 4184}{0,639} = 3,60$

L'écoulement est turbulent, et les conditions telles qu'on peut appliquer la formule de Colburn:

$$Nu_u = 0,023 Pr^{1/3} Re^{0,8} \tag{5.13}$$

Le résultat obtenu est:

$$Nu_u = 224 = \frac{h D}{\lambda}$$

ce qui permet de calculer le coefficient d'échange thermique par convection h:

$$h = \frac{\lambda Nu_u}{D} = \frac{0,639 \cdot 224}{0,02} = 7.156 \text{ W/(m}^2 \cdot ^\circ\text{C)}$$

La relation de définition du coefficient h:

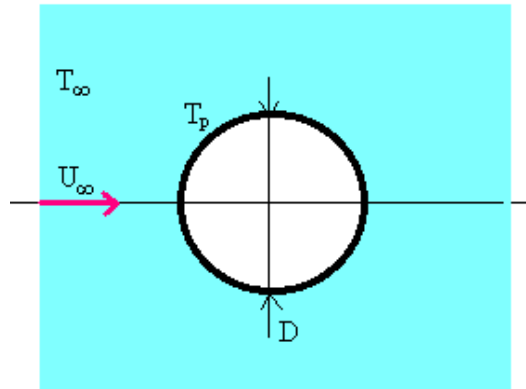
$$d\Phi = h (T_m - T_p) \pi D dx \tag{5.12}$$

permet alors de déduire la puissance thermique transférée du fluide vers le milieu extérieur, à travers chaque mètre linéaire de tuyau, grandeur exprimée en W/m:

$$W = \frac{d\Phi}{dx} = h (T_m - T_p) \pi D = 15,7 \text{ kW}$$

### 5.3.2.2 Ecoulement autour d'un tube

On considère un tube de diamètre *extérieur*  $D$ . Il est baigné dans l'écoulement extérieur d'un fluide circulant perpendiculairement à l'axe du tube. Cet écoulement extérieur est caractérisé à l'infini amont par une vitesse  $U_\infty$  et une température  $T_\infty$ .



Comme il se forme un sillage en aval de l'écoulement, le coefficient de convection  $h$  ne sera pas constant sur toute la périphérie du tube. On déterminera donc un *coefficient de convection moyen* pour l'ensemble du tube, dont la paroi prend une température d'équilibre  $T_p$ .

a) Cas d'un gaz

Une corrélation expérimentale a été proposée pour ce type de problème par Hilpert. Elle s'écrit:	$R_e$	$A$	$m$
$N_u = A (R_e)^m$ (5.16)	$1 < R_e < 4$	0,891	0,330
	$4 < R_e < 40$	0,821	0,385
Les valeurs du coefficient $A$ et l'exposant $m$ varient	$40 < R_e < 4 \cdot 10^3$	0,615	0,466
avec le Nombre de Reynolds et sont données	$4 \cdot 10^3 < R_e < 4 \cdot 10^4$	0,174	0,618
dans le tableau ci-contre.	$4 \cdot 10^4 < R_e < 4 \cdot 10^5$	0,024	0,805

Si le Nombre de Prandtl ne figure pas dans cette corrélation uniquement applicable au cas des gaz, c'est que pour tous les gaz usuels, le Nombre de Prandtl a une valeur sensiblement constante et voisine de 0,75.

b) Cas d'un liquide

La corrélation à appliquer s'écrit alors:

$$N_u = 1,11 A (R_e)^m (P_r)^{0,31} \tag{5.17}$$

$A$  et  $m$  étant également les valeurs données dans le tableau précédent.

*Application:*

Dans une expérience de physique nucléaire, on irradie un barreau de cuivre de 1 cm de diamètre et de 10 cm de long, en le plaçant dans une pile.

On refroidit ce barreau en le balayant par un courant d'hélium, refroidi préalablement à 77 K, et qui le frappe perpendiculairement avec une vitesse moyenne d'écoulement de 54 m/s. La température de paroi du barreau de cuivre s'établit alors à 80 K.

Déduire de cette mesure de température le dégagement de chaleur (en W/g ) qui se produit dans le barreau de cuivre irradié.

On donne les caractéristiques suivantes de l'hélium, à la température considérée:

$$\rho = 0,65 \text{ kg/m}^3$$

$$\mu = 8,5 \cdot 10^{-6} \text{ kg/(m.s)}$$

$$\lambda = 0,06 \text{ W/(m.K)}$$

$$C = 5300 \text{ J/(kg.K)}$$

Le cuivre a une masse volumique de 8940 kg/m<sup>3</sup>

Nous allons utiliser la corrélation (5.16) :  $N_u = A (R_e)^m$ , pour calculer le coefficient de transfert convectif h.

Commençons par calculer le Nombre de Reynolds de l'écoulement d'hélium:

$$R_e = \frac{\rho U D}{\mu} = \frac{0,65 \cdot 54 \cdot 0,01}{8,5 \cdot 10^{-6}} = 41.294$$

Dans le tableau indiqué précédemment, on lit les valeurs de A et m indiquées pour  $R_e < 40000$  et pour  $R_e > 40000$ . Comme on est pratiquement à cette valeur frontière de 40000, on calculera les 2 Nombres de Nusselt possibles, et on prendra la moyenne.

$R_e$	A	m	$N_u = A (R_e)^m$
$4 \cdot 10^3 < R_e < 4 \cdot 10^4$	0,174	0,618	123,9
$4 \cdot 10^4 < R_e < 4 \cdot 10^5$	0,024	0,805	124,7

Nous aurons donc  $Nu = 124,3 = hD/\lambda$ , d'où on tire la valeur du coefficient h caractérisant le transfert de chaleur convectif du barreau de cuivre vers l'hélium:

$$h = \frac{\lambda N_u}{D} = \frac{0,06 \cdot 124,3}{0,01} = 746 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$$

Le flux de chaleur transféré par convection à l'hélium est donc:

$$\Phi = h S (T_p - T_\infty) = h \pi D L (T_p - T_\infty) = 746 \cdot 3,14 \cdot 0,01 \cdot 0,10 \cdot (80 - 77) = 7,02 \text{ W}$$

Le barreau de cuivre ayant atteint son équilibre thermique, cette puissance thermique  $\Phi$  extraite correspond exactement à la puissance thermique dégagée dans la masse M de cuivre, masse qui a pour valeur:

$$M = \rho_{\text{cu}} \frac{\pi D^2}{4} L = 8940 \frac{3,14 \cdot 0,0001}{4} 0,10 = 0,070 \text{ kg} = 70 \text{ g}$$

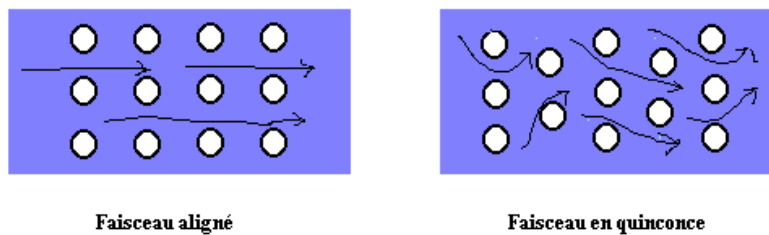
L'irradiation du cuivre dans la pile dégage donc une puissance thermique massique égale à:

$$\frac{7,02 \text{ W}}{70 \text{ g}} = 0,1 \text{ W / g}$$

### 5.3.2.3 Écoulement autour d'un faisceau de tubes

De nombreux appareils industriels tels que les réchauffeurs d'air, les échangeurs thermiques, sont constitués de rangées de tubes parallèles, plongés dans un écoulement de fluide dirigé perpendiculairement à leur axe.

Les tubes peuvent être disposés en ligne ou en quinconce, comme l'indique la figure suivante:



L'expérience montre que la disposition en quinconce est le siège d'une plus grande turbulence, et conduit alors à un coefficient de convection plus élevé que la disposition alignée.

On utilisera la corrélation suivante:

$$N_u = B (R_e)^{0,6} (P_r)^{0,33} \tag{5.18}$$

avec:  $B = 0,26$  pour un faisceau aligné;  $B = 0,33$  pour un faisceau en quinconce.

### 5.3.2.4 Écoulement le long d'une plaque plane

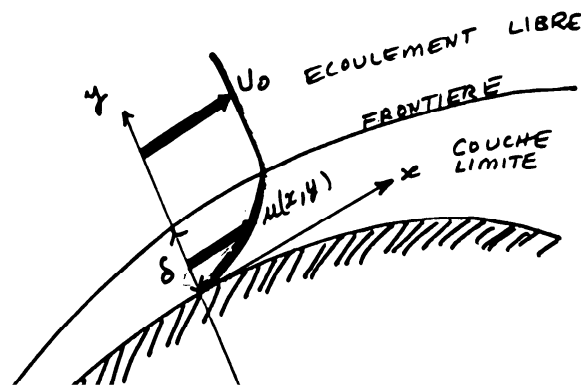
Les corrélations expérimentales présentées jusqu'à maintenant ont une fonction pleinement opérationnelle (un ingénieur de bureau d'études peut, à l'aide de ces outils, élaborer des projets parfaitement valides), mais cette approche est cependant quelque peu frustrante, car elle n'offre pas le moindre accès à la compréhension des phénomènes physiques dont il est question. Au moment d'aborder par cette méthode le calcul du transfert thermique entre une plaque plane et un fluide, deux remarques importantes doivent être faites:

(1) Il est impossible de dissocier l'analyse du transfert thermique entre un corps solide et un fluide en mouvement dans lequel cet obstacle est plongé, de l'analyse de la perturbation de l'écoulement du fluide provoquée par la présence de l'obstacle.

(2) L'analyse de l'écoulement d'un fluide au voisinage d'une plaque plane permet de développer des concepts plus généraux qui conduisent à distinguer plusieurs régions très différentes dans ces types d'écoulements perturbés par la présence d'un obstacle:

- la sous-couche laminaire, dans laquelle l'écoulement ne dépend que de la viscosité  $\mu$  du fluide, et est caractérisé par un profil de vitesse variant linéairement avec la distance à la paroi;
- la couche limite turbulente, régie par des conditions de paroi, et dans laquelle le profil de vitesse est exponentiel;
- la zone turbulente externe, complètement mélangée, avec un profil de vitesse logarithmique pratiquement plat.

Entre la paroi et la sous-couche laminaire, l'échange thermique dans la direction normale à la paroi ne pourra s'effectuer que par conduction. La conductivité  $\lambda$  des fluides étant faible par rapport à celle des solides, la sous-couche laminaire oppose une résistance importante au passage de la chaleur.



Il en résulte dans cette région une variation ra-pide de la température, qui devra passer d'une valeur  $T_{op}$  à la paroi, à une valeur  $T_{\infty}$  dans la zone mélangée. Un tel transfert par conduction est régi par la loi de Fourier (2.3):

$$\frac{d\Phi}{dS} = \frac{d^2Q}{dS dt} = - \lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} \quad (5.19)$$

expression de la densité de flux thermique à la paroi.

Cette quantité élémentaire de chaleur  $d^2Q$  cédée par la paroi sera ensuite transportée par convection dans le fluide, selon la loi générale:

$$d^2Q = h (T_p - T_{\infty}) dS dt \quad (5.20)$$

ce qui met en évidence la relation qui existe entre le coefficient d'échange thermique par convection  $h$ , et le gradient de température à la paroi:

$$h = - \frac{\lambda}{T_p - T_{\infty}} \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=0} \quad (5.21)$$

Si on considère une surface pariétale finie  $S$ , le flux de chaleur à travers cette surface sera de la forme:

$$\Phi = \frac{dQ}{dt} = h (T_p - T_{\infty}) S$$

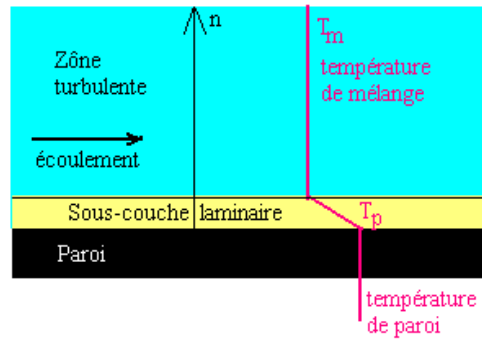
que l'on peut encore écrire sous la forme:

$$\Phi = \frac{T_p - T_{\infty}}{R_{T_p - T_{\infty}}} \quad (5.22)$$

$$R_{T_p - T_{\infty}} = \frac{1}{hS} \quad (5.23)$$

étant la résistance thermique introduite au § 2.3.1, et qui s'exprime en °C/W

A l'extérieur de la sous-couche laminaire, les particules fluides des zones turbulentes vont venir (de manière aléatoire) au voisinage de cette sous-couche visqueuse, s'y échaufferont (dans l'hypothèse où  $T_p > T_{\infty}$ , par exemple) puis, se déplaçant vers l'extérieur, se mélangeront avec le fluide plus froid. Il en résulte un transfert thermique important et une égalisation rapide des températures, le fluide hors de la zone pariétale prenant une température  $T_m$  appelée température de mélange.



Le phénomène que nous venons de décrire qualitativement est une couche limite thermique. Les propriétés de cette couche limite thermique sont de même nature que celles de la couche limite cinématique introduite en mécanique des fluides.

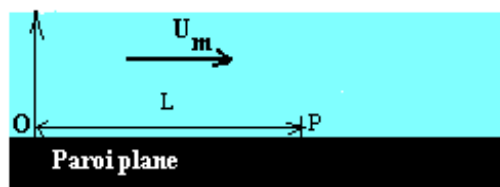
Dans le cadre de ce cours d'initiation aux transferts thermiques, nous n'irons pas plus avant dans les développements théoriques qui permettent de modéliser mathématiquement les couches limites thermiques, d'une manière tout-à-fait analogue à ce que nous n'avons fait qu'esquisser rapidement dans le Cours de mécanique des Fluides. Nous nous contenterons donc, et cela sera suffisant pour la résolution des problèmes pratiques, de recourir à la méthode des corrélations expérimentales.

a) Régime laminaire sur une plaque plane

La plaque peut être indifféremment verticale, horizontale ou oblique. La vitesse moyenne de l'écoulement est désignée par  $U_m$ .

Si on considère une distance  $L = OP$  parcourue par le fluide le long de la plaque, on peut

l'utiliser pour calculer un Nombre de Reynolds:  $R_{eL} = \frac{\rho U_m L}{\mu}$



On va caractériser le transfert convectif *moyen* entre l'origine  $O$  et l'abscisse  $L = OP$  par un coefficient de convection moyen  $\bar{h}$  défini comme la moyenne du coefficient  $h$  entre

$$x = 0 \text{ et } x = L.$$

Le Nombre de Nusselt moyen  $\bar{N}_{uL} = \frac{\bar{h} L}{\lambda}$  sera alors calculé par la corrélation suivante:

$$\bar{N}_{uL} = \frac{2}{3} (R_{eL})^{0,5} (Pr)^{0,33} \quad (5.24)$$

Cette corrélation est valable tant que:  $R_{eL} < 2000$

b) Régime turbulent sur une plaque plane

Si  $R_{eL} > 2000$ , l'écoulement devient turbulent. La corrélation qu'il convient d'appliquer pour calculer le transfert convectif s'écrit alors:

$$\bar{N}_{uL} = 0,036 (R_{eL})^{0,8} (Pr)^{0,33} \quad (5.25)$$

## 5.4 Transfert de chaleur par convection naturelle sans changement d'état

La convection naturelle est la forme d'échange convectif la plus couramment observée. Au contact d'un corps chaud, la température de l'air augmente, donc sa masse volumique décroît. L'air ambiant, de masse volumique plus élevée, exerce une poussée d'Archimède vers le haut, et la masse d'air chaude s'élève en enlevant de la chaleur au corps. Elle est remplacée par une masse d'air froid qui, au contact du corps s'échauffe, et ainsi de suite.

Ces échanges jouent un grand rôle en pratique. On citera en particulier:

- le chauffage domestique
- le calcul des pertes par les parois dans les installations industrielles

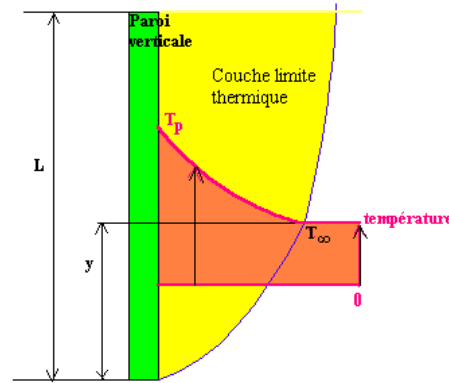
Comme les vitesses en convection naturelle demeurent faibles, les échanges sont nettement moins intenses qu'en convection forcée. Il en résulte qu'échanges en convection naturelle et échanges par rayonnement sont souvent du même ordre de grandeur.

### 5.4.1 Couche limite de convection naturelle

Considérons une plaque plane verticale chaude, de température de paroi  $T_p$ , au contact d'un fluide froid dont la température au loin est  $T_\infty$ .

Au voisinage de la plaque, existe une zone perturbée appelée couche limite de convection naturelle.

L'épaisseur  $\delta$  de cette couche limite et la densité du flux thermique varient avec la cote  $y$ .



On définit un coefficient moyen de convection naturelle  $h$  permettant d'exprimer le flux de chaleur échangé sur toute la surface  $S$  de la plaque sous la forme:

$$\Phi = h S (T_p - T_\infty) \quad (5.26)$$

### 5.4.2 Résultats de l'analyse dimensionnelle

Des considérations d'analyse dimensionnelle semblables à celles exposées au § 5.3.1 amènent à définir un nouveau groupement adimensionnel appelé Nombre de Grashof:

$$G_r = \frac{\alpha g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad (5.27)$$

expression dans laquelle:

- $L$  est une dimension linéaire permettant de calculer la surface d'échange, par exemple la hauteur de la plaque dans l'exemple précédent.
- $\Delta T$  est la différence de température entre la paroi chauffante et le fluide.
- $\alpha$  est le coefficient de dilatation volumique du fluide à pression constante:

Par définition, si l'unité de masse d'un corps occupe à la température  $T$  le volume  $v$ , son coefficient de dilatation volumique  $\alpha$  a pour expression:

$$\alpha = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p = cte} \quad (5.28)$$

Dans le cas d'un gaz parfait, l'équation d'état de ce gaz s'écrira pour une masse unité

$$m = 1 :$$

$$p v = R T$$

d'où en différentiant à pression  $p$  constante:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_{p = cte} = \frac{1}{p} R$$

ce qui permet d'obtenir immédiatement l'expression du coefficient  $\alpha$  de dilatation volumique à pression constante, dans le cas d'un gaz, considéré comme parfait:

$$\alpha = \frac{1}{p v} R = \frac{1}{T} \tag{5.29}$$

Dans l'expression (5.28), on prendra bien garde que la température T du gaz est sa température absolue, en Kelvin.

Pour les liquides, on ne pourra bien entendu plus utiliser de relation du type de l'équation (5.28) ci-dessus.

Dans le cas de l'eau,  $\alpha$  est donné dans la table ci-dessous:

T en °C	10	20	30	40	50	60	70	80	90
10 <sup>3</sup> . $\alpha$	0,08	0,20	0,30	0,38	0,45	0,53	0,58	0,64	0,67

### 5.4.3 Interprétation physique du Nombre de Grashof

Le fluide au contact de la paroi chaude de température Tp se trouve lui à une température T<sub>∞</sub>. Sa masse volumique à cette température est :

$$\rho_{\infty} = \frac{1}{v_{\infty}} \tag{5.30}$$

v<sub>∞</sub> désignant le volume occupé à cette température par une unité de masse.

A cette température T<sub>∞</sub>, le volume v<sub>∞</sub> contient un poids g de fluide.

Lorsque la masse unité de fluide occupant ce volume v<sub>∞</sub> s'échauffe au contact de la paroi et prend la température Tp, sa masse volumique devient:

$$\rho = \rho_{\infty} + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p dT \tag{5.31}$$

Comme on peut écrire:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{\partial \rho}{\partial v_{\infty}} \right)_p \left( \frac{\partial v_{\infty}}{\partial T} \right)_p = \left( \frac{-1}{v_{\infty}^2} \right) (\alpha v_{\infty}) = - \frac{\alpha}{v_{\infty}} = - \alpha \rho_{\infty}$$

La relation (5.31) s'écrit donc:

$$\rho = \rho_{\infty} (1 - \alpha dT)$$

Le volume v<sub>∞</sub> considéré ci-dessus contient maintenant un fluide moins dense, dont le poids est devenu:

$$\rho g v_{\infty} = \rho_{\infty} g (1 - \alpha dT) v_{\infty} = g - \alpha g dT$$

ce qui veut dire que le fluide considéré subit une poussée vers le haut d'intensité  $\alpha g \Delta T$   
 Le Nombre de Grashof défini par la relation (5.27) peut se présenter sous la forme du rapport suivant:

$$G_r = \frac{\alpha g \Delta T}{\left(\frac{\mu}{\rho}\right)^2 \frac{1}{L^3}} \quad (5.27)$$

On reconnaît au numérateur la poussée d'Archimède subie par unité de masse, dont la dimension est  $LT^{-2}$ , et au dénominateur une force de viscosité par unité de masse également. Le Nombre de Grashof est donc le rapport des forces de pesanteur qui agissent pour mettre en mouvement le fluide, aux forces de viscosité qui tendent à amortir ce mouvement.

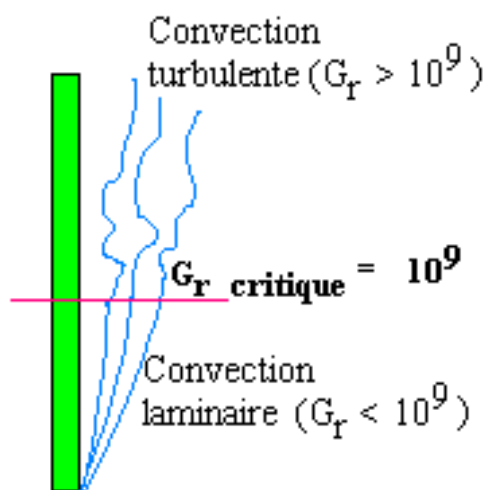
Plus  $G_r$  est grand, plus la convection naturelle sera intense.

#### 5.4.4 Convection naturelle turbulente

Si on reprend l'exemple du § 5.4.1, on constate que plus la hauteur de la plaque augmente, plus le Nombre de Grashof augmente également. On doit donc observer une augmentation de l'intensité du mouvement de convection naturelle lorsqu'on s'élève vers le haut de la plaque.

L'expérience montre que l'écoulement en convection naturelle est d'abord laminaire, puis devient turbulent dans la partie supérieure, la transition ayant lieu à une cote correspondant à un Nombre de Grashof de l'ordre de  $10^9$ .

L'écoulement de convection naturelle créé par une cigarette illustre très bien ce phénomène.



### 5.4.5 Corrélations expérimentales

Les relations rendant compte des études expérimentales de transfert thermique en convection naturelle sont généralement de la forme:

$$N_u = C (G_r \cdot P_r)^n \quad (5.32)$$

Les grandeurs physiques intervenant dans les Nombres de Grashof et de Prandtl doivent être calculées pour la température moyenne  $\frac{T_p - T_\infty}{2}$ .

L'exposant  $n$  prendra les valeurs suivantes:

- $n = 1/4$  lorsque la convection est laminaire;
- $n = 1/3$  lorsque la convection est turbulente.

La valeur du coefficient  $C$  dépend du régime de convection ainsi que de la géométrie et de l'inclinaison de la paroi. Cette valeur est donnée dans le tableau suivant:

<b>Géométrie et orientation de la paroi</b>	<b>Dimension caractéristique <math>L</math></b>	<b><math>C</math> en convection laminaire</b>	<b><math>C</math> en convection turbulente</b>
<b>Plaque verticale</b>	Hauteur	0,59 ( $10^4 < G_r \cdot P_r < 10^9$ )	0,13 ( $10^9 < G_r \cdot P_r < 10^{13}$ )
<b>Cylindre horizontal</b>	Diamètre extérieur	0,53 ( $10^3 < G_r \cdot P_r < 10^9$ )	0,10 ( $10^9 < G_r \cdot P_r < 10^{13}$ )
<b>Plaque horizontale chauffant vers le haut</b>	Largeur	0,54 ( $10^5 < G_r \cdot P_r < 2 \cdot 10^7$ )	0,14 ( $2 \cdot 10^7 < G_r \cdot P_r < 3 \cdot 10^{10}$ )
<b>Plaque horizontale chauffant vers le bas</b>	Largeur	0,27 ( $3 \cdot 10^5 < G_r \cdot P_r < 3 \cdot 10^{10}$ )	0,07 ( $3 \cdot 10^{10} < G_r \cdot P_r < 10^{13}$ )

### 5.4.5 Application pratique

Le mur d'un bâtiment a 6 m de haut et 10 m de long. Sous l'échauffement dû au soleil, sa température extérieure atteint 40°C. La température ambiante extérieure étant de 20°C, calculer la puissance thermique échangée par convection entre le mur et l'extérieur.

On donne les propriétés physiques suivantes de l'air, à la température de 30°C:

Masse volumique $\rho$ :	1,149 kg/m <sup>3</sup>
Conductivité thermique $\lambda$ :	0,0258 W/(m.K)
Viscosité dynamique $\mu$ :	18,4.10 <sup>-6</sup> Pa.s
Capacité thermique massique $C_p$ :	1006 J/(kg.K)

On a vu qu'un tel échange pouvait se calculer par une corrélation expérimentale du type décrit par l'équation (5.32):

$$N_u = C (G_r \cdot P_r)^n \quad (5.32)$$

Il faut commencer par calculer les Nombres de Grashof et de Prandtl.

Le Nombre de Grashof est donné par la relation:

$$G_r = \frac{\alpha g \Delta T \rho^2 L^3}{\mu^2} \quad (5.27)$$

avec:

$$\alpha = 1/T = 1/(30 + 273) = 0,0033 \text{ K}^{-1}$$

$$g = 9,81 \text{ m/s}^2$$

$$\Delta T = 20 \text{ °C}$$

$$\rho = 1,149 \text{ kg/m}^3$$

$$L = 6 \text{ m}$$

$$\mu = 18,4.10^{-6} \text{ Pa.s}$$

$$\text{On obtient donc: } G_r = \frac{0,0033 \cdot 9,81 \cdot 20 \cdot (1,149)^2 \cdot (6)^3}{(18,4.10^{-6})^2} = 5,45 \cdot 10^{11}$$

Le Nombre de Prandtl est donné par la relation:

$$P_r = \frac{\frac{\mu}{\rho}}{\frac{\lambda}{\rho C}} = \frac{\mu C}{\lambda} \quad (5.10.c)$$

soit:

$$P_r = \frac{18,6 \cdot 10^{-6} \cdot 1006}{0,0258} = 0,725$$

On peut alors calculer le produit  $G_r \cdot P_r$  qui est utilisé comme critère de transition entre le régime de convection naturelle laminaire et celui de convection naturelle turbulente, la valeur critique étant de  $10^9$ . Ce produit  $G_r \cdot P_r$  est appelé le Nombre de Rayleigh  $R_a$ :

$$R_a = G_r \cdot P_r = 5,45 \cdot 10^{11} \cdot 0,725 = 3,95 \cdot 10^{11}$$

On est donc nettement en régime de convection naturelle turbulente, et on devra donc donner aux coefficients  $C$  et  $n$  de la corrélation (5.32) les valeurs:

$$C = 0,13 \text{ et } n = 1/3$$

d'où la valeur du Nombre de Nusselt de cet écoulement de convection naturelle:

$$N_u = \frac{h L}{\lambda} = C (G_r \cdot P_r)^n = 0,13 (3,95 \cdot 10^{11})^{0,33} = 954$$

On en déduit alors le coefficient d'échange convectif  $h$ :

$$h = \frac{\lambda N_u}{L} = \frac{0,0258 \cdot 954}{6} = 4,10 \text{ W / (m}^2 \cdot \text{K)}$$

d'où le flux de chaleur échangé sur toute la surface  $S$ :

$$\Phi = h S (T_p - T_\infty) \quad (5.26)$$

La puissance thermique échangée par convection entre le mur et l'extérieur a donc pour valeur:

$$\Phi = 4,10 \cdot 6 \cdot 10 \cdot (40 - 20) = 4922 \text{ W}$$

*Remarque:*

Le résultat du calcul précédent a fourni la valeur  $h = 4,10 \text{ W / (m}^2 \cdot \text{K)}$

Pour les gaz, les coefficients de transfert par convection naturelle  $h$  sont toujours de l'ordre de 1 à 10  $\text{W / (m}^2 \cdot \text{K)}$ .

Dans le cas des liquides,  $h$  sera par contre toujours compris entre 10 et 1000  $\text{W / (m}^2 \cdot \text{K)}$

# Travaux Pratiques

## Transfert Thermique

### Notes aux étudiants

Il faut préparer soigneusement à l'avance chaque manipulation. L'étudiant doit consulter ses cours et son polycopié de travaux pratiques de façon à savoir ce que l'on est sensé observer et étudier avant d'entrer dans la salle.

L'étudiant une fois en salle de travaux pratiques doit être en mesure de répondre à trois questions importantes : i) le but de la manipulation, ii) les grandeurs à mesurer et les grandeurs recherchées, iii) l'aspect théorique introduit pour expliquer ou exploiter les résultats expérimentaux.

À la fin de chaque séance de travaux pratiques, chaque groupe doit remettre un compte rendu présentant proprement les résultats. Le jugement sera fait non seulement sur la précision et l'exactitude des résultats, mais aussi sur la pertinence des remarques et sur la clarté et la propreté de la présentation du rapport.

L'étudiant est appelé à préserver le matériel mis à sa disposition.

## **1- Introduction sur le transfert thermique**

Les procédés utilisés dans l'industrie sont très souvent le siège d'échanges de chaleur (fours, échangeurs de chaleur, induction, refroidissement, chauffage). Les phénomènes de transfert thermique et en particulier de la chaleur, ont une importance décisive pour l'étude et le fonctionnement des appareils tels que ; les générateurs de vapeur, les fours, les échangeurs de chaleur, les condenseurs, ....etc. En raison de développement rapide de l'industrie et l'accroissement de la demande et du prix de l'énergie, l'utilisation efficace d'une installation (d'échange de chaleur) pour une dépense d'énergie minimale est le but recherché dans tous les cas.

Le transfert thermique est la science qui tente à prédire le transfert d'énergie entre les molécules ou les particules de la matière à différentes températures. Le but est d'expliquer la manière et de prédire le taux d'échange de la chaleur sous certaines conditions spécifiques. Il complète les deux premiers principes de la thermodynamique par des lois expérimentales additionnels afin d'établir les proportions de transfert d'énergie.

Le transfert de chaleur est une science qui contient plusieurs concepts pratiques de base utilisés dans de nombreuses applications industriels. Le transfert de chaleur peut s'effectuer au moyen de trois mécanismes différents, la conduction, la convection et le rayonnement. Les connaissances de base dans ce domaine, sont donc indispensables pour comprendre et maîtriser l'utilisation pratique de ces phénomènes.

Le transfert de chaleur peut être défini comme étant la transmission de l'énergie d'une région à une autre une fois la différence de température entre elles établi. Il est régi par une combinaison de lois physiques et de relations empiriques déduites de l'expérimentation. Dans la littérature relative à cette discipline, on reconnaît généralement trois modes distincts de transmission de la chaleur : la conduction, la convection et le rayonnement.

## **2- Modes du transfert de la chaleur**

### **a) La conduction**

La conduction est définie comme étant le mode de transmission de la chaleur au sein d'un milieu opaque (solide, liquide ou gazeux), sans déplacement de la matière, en présence d'un gradient de température. Elle s'effectue selon deux mécanismes différents: une transmission par vibration des molécules ou atomes et une transmission par les électrons libres. Ce mode se produit au sein d'une même phase au repos ou mobile, en présence d'un gradient de température. Dans ce cas, le transfert de chaleur résulte d'un transfert

d'énergie cinétique d'une molécule à une autre molécule adjacente. Ce mode de transfert est le seul à exister dans un solide opaque (qui absorbe tous les rayons). Pour les solides transparents, une partie de l'énergie peut être transmise par rayonnement. Avec les fluides (gaz ou liquides), la convection et le rayonnement peuvent se superposer à la conduction.

### **b) La convection**

La convection consiste essentiellement en la transmission de l'énergie par le mouvement ou le déplacement macroscopique d'une parcelle (grand nombre de molécules), généralement d'un fluide d'une région à autre. Ce mécanisme est accompagné toujours par le transfert d'énergie dû au mouvement moléculaire et qui représente le côté conductif de ce mode. On distingue deux types de convection ; la convection naturelle (convection libre) où le mouvement des particules est dû aux différences de température qui sont imposées au fluide. La différence de température implique une différence de masses volumiques (déplacement des particules, dilatation), exemple (chauffage de l'air pour une montgolfière, chauffage de l'eau dans un récipient). La convection forcée où le mouvement des particules résulte de la pression appliquée au fluide par l'intermédiaire des moyens mécaniques, (d'une pompe par exemple). Le transfert de la chaleur par convection, se produit entre deux phases dont l'une est généralement au repos et l'autre en mouvement, en présence d'un gradient de température. Le mouvement du fluide peut résulter de la différence de masses volumiques ( $\rho$ ) due aux différences de températures.

### **c) Le rayonnement**

Le rayonnement est le transfert d'énergie électromagnétique d'un milieu à haute température vers un autre milieu à basse température sans aucun support matériel (il peut s'effectuer dans le vide). En général, tout corps opaque ou partiellement opaque porté à une température supérieure à zéro Kelvin rayonne de l'énergie dans toutes les directions. Cette énergie est transportée sous forme d'une onde électromagnétique dont la propagation n'exige pas de support matériel. Ce type de transport de chaleur est analogue à la propagation de la lumière et il ne nécessite aucun support matériel, contrairement aux écoulements. Les gaz, les liquides et les solides sont capables d'émettre et d'absorber les rayonnements thermiques.

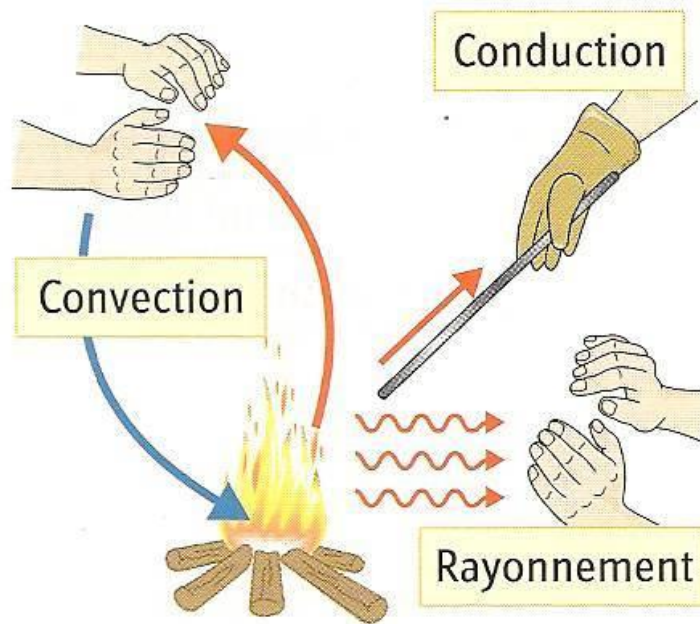


Figure.1: illustration des trois modes du transfert de la chaleur

### 3- Lois fondamentales du transfert de la chaleur

#### 3-1 Loi fondamentale de la conduction (loi de J.Fourier)

La loi fondamentale de la transmission de la chaleur par conduction, a été proposée par le mathématicien et physicien Français, Jean Baptiste Joseph Fourier en 1822.

- Considérons une plaque plane (D), de surface (S) et d'épaisseur (e) (voir Figure.2);
- Soit  $dQ$ , la quantité de chaleur échangée entre la plaque et l'air ambiant pendant le temps  $dt$  ;
- On définit le flux de chaleur (flux thermique,  $\phi$ ) comme la puissance échangée entre la surface S de la plaque et le milieu extérieur.

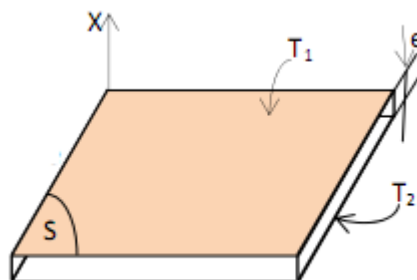


Figure.2 : plaque plane.

$$\Phi = \frac{dQ[J]}{dt [s]} [W] \quad (1)$$

On définit la densité de flux thermique comme la puissance échangée par unité de surface de la plaque :

$$\varphi = \frac{dQ[J]}{S dt [m^2.s]} ; \left[ \frac{W}{m^2} \right] \quad (2)$$

- Les principes fondamentaux de la thermodynamique nous font savoir que :
  - ❖ L'énergie est conservée en l'absence d'une source de chaleur ;
  - ❖ La chaleur transmise passe toujours du corps chaud vers le corps froid (dans notre cas :  $T_1 > T_2$ ).

On peut vérifier expérimentalement que :

$$Q = \lambda \cdot S/e \cdot (T_1 - T_2) \quad (3)$$

Tels que ;

Q : la quantité de chaleur échangée à travers la surface (S);

$\lambda$  : le facteur de proportionnalité appelé conductivité thermique qui est une caractéristique du matériau, son unité de mesure est [W/m.K] ou [kcal/h.m.C];

Pour un élément infinitésimal, ds, la relation (3) s'écrit:

$$dQ = d= - \lambda \cdot ds \cdot \frac{dT}{dx} \quad (4)$$

Le signe (-) : pour tenir compte du sens de flux thermique, le gradient qui va de la plus grande grandeur à la plus petite est négative (voir interprétation mathématique ci-après).

L'équation (4) est attribuée au mathématicien et physicien Français J. B. Fourier qui en 1822 énonça sa loi et qui peut se traduire comme suit : (En tout point d'un milieu isotrope, la densité de flux thermique instantané, est proportionnelle à la conductivité thermique du milieu et au gradient de température).

La forme vectorielle de cette loi qui exprime la densité de flux thermique est définie comme étant la quantité de chaleur transmise par unité de surface, soit :

$$\vec{\varphi} = \lambda \cdot \overrightarrow{grad} T \quad (5)$$

### 3-2 Loi fondamentale de la convection (loi de I. Newton)

La loi fondamentale de la convection est la loi d'Isaac Newton (1643-1727), traduite par la relation expérimentale de flux de chaleur échangé par convection entre un fluide et une paroi solide.

$$\Phi = h \cdot S (T_{chaud} - T_{froid}) \quad (6)$$

$$h = k_{fluide} / \delta \quad \text{Tells que;}$$

$\delta$  : représente l'épaisseur d'un film mince du fluide adhérent à la paroi solide;

$k_{fluide}$  : la conductivité thermique du fluide

$h$  : représente le coefficient du transfert de chaleur par convection ; [ $W/m^2.K$ ] ou [ $kcal/h.m^2.C$ ]

### 3-3 Loi fondamentale du rayonnement (loi de Stefan-Boltzmann)

Le flux de chaleur rayonné par un milieu de surface (S) et de température (T) s'exprime grâce à la loi de Joseph Stefan (1835-1893) et Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906)

$$\Phi_{émis} = \varepsilon \cdot \sigma \cdot S \cdot T^4 \quad (7)$$

Tells que ;

$\sigma$  : Constante de Stefan-Boltzmann,  $\sigma = 4.92 \cdot 10^{-8} \text{ kcal/h.m}^2.K$

$\varepsilon$  : l'émissivité de la surface sans unité et  $T$  en [K]

#### Remarques générales :

$$\Phi = \frac{(T_1 - T_2)}{e/k.s} \quad , \quad \text{tel que ;}$$

$R_{th} = e/k.s$  représente la résistance thermique que le matériau oppose à l'écoulement de la chaleur par conduction.

L'inverse de la résistance thermique représente la conductance thermique et désignée par :

$$K_{th} = k.s/e$$

$k/e$  : représente la conductance thermique par unité de surface et est appelé l'unité de conductance thermique pour l'écoulement de la chaleur par conduction.

En convection, la résistance thermique de transfert de chaleur, et qui représente l'inverse de la conductance thermique par convection est donnée par :

$$R_{th} = 1/h.s$$

$h$  : représente aussi, l'unité de conductance thermique moyenne de convection, le coefficient superficiel de transmission de la chaleur par convection ou le coefficient d'échange de chaleur par convection.

# TP1 : Conduction

## Conduction linéaire

### Introduction

La conduction thermique est un mode de la Transfert de chaleur quia lieu dans un matériel. C'est le transfert de chaleur au sein d'un milieu opaque, sans déplacement de matière, sous l'influence d'une différence de température. La propagation de la chaleur par conduction à l'intérieur d'un corps s'effectue selon deux mécanismes distincts : une transmission par les vibrations des atomes ou molécules et une transmission par les électrons libres. La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier : la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\phi = -\lambda S \frac{\Delta T}{\Delta x}$$

Avec :  $\phi$  : Flux de chaleur transmis par conduction (W)

$\lambda$  : Conductivité thermique du milieu (W m<sup>-1</sup> °C<sup>-1</sup>)

$x$  : Variable d'espace dans la direction du flux (m)

$S$  : Aire de la section de passage du flux de chaleur (m<sup>2</sup>)

**Objectifs** : Les objectifs du TP sont multiples :

1. La démonstration expérimentale de la loi de Fourier ;
2. Détermination de la conductivité thermique ;
3. Détermination de la résistance thermique.

### Description de l'appareillage :

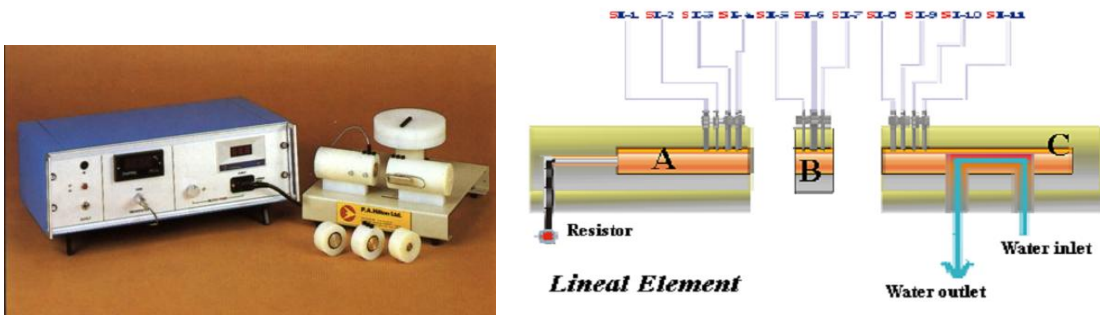
L'appareil se compose d'une console électrique et de deux modules distincts, chauffés électriquement et montés sur un support. Un des modules contient un ensemble de barreaux cylindriques métalliques servant à une série d'expériences sur la conduction linéaire axiale (problème du mur) ; l'autre module comprend un disque cylindrique utilisé pour l'étude de la conduction radiale. Ces deux modules sont équipés respectivement de 9 et 6 sondes de température. Une circulation d'eau de refroidissement, prélevée sur un robinet de distribution et munie d'un régulateur de débit et d'un débitmètre de contrôle, est reliée à l'extrémité du barreau linéaire refroidi ou à la périphérie du disque cylindrique, de manière à maintenir dans les modules un gradient de température constant.

La console électrique permet une mesure précise des températures à l'aide de sondes à thermistances, à réponse rapide, avec une résolution de 0,1 °C (affichage numérique). Le circuit de commande de l'alimentation du chauffage fournit une puissance de sortie variable de 0 à 100 Watts, à réglage progressif et affichage numérique. Les modules d'essai sont conçus pour minimiser les erreurs dues au transfert réel en trois dimensions, ainsi que les phénomènes de convection et de radiation. Les barreaux et le disque sont entourés d'un manchon de nylon isolant qui définit un matelas d'air autour de chaque module.

Le barreau servant aux essais linéaires comprend une série de sections intermédiaires interchangeables de diverses matières conductrices. Les faces extrêmes des sections métalliques sont bien finies de manière à assurer un bon contact thermique. Cependant, en vue de réduire encore la résistance thermique de contact, on peut appliquer une fine couche de produit conducteur.

L'unité ou l'appareil est développée par EDIBON est constituée de deux modules d'échange de chaleur

- **Le module de conduction linéaire** : constitué par deux barres cylindriques à sections multiples, en laiton, alignées et isolées. Une barre est chauffée électriquement tandis que l'autre est refroidie à l'eau. Une section intermédiaire de 30 mm peut être insérée entre les deux barres. Chaque barre est munie de trois points de mesure de température le long de son axe installé à des intervalles de 10 mm.
- **Le module de conduction radiale** : constitué d'un disque isolé en laiton d'épaisseur 3mm chauffé en son centre par une résistance électronique et refroidi sur sa périphérie ce disque est équipé de six prises de température positionnées radialement.



**Figure 1 : Dispositif expérimental (Module de conduction linéaire)**

## Consignes pour la réalisation du montage

- Brancher la prise de l'élément chauffant du module linéaire sur la face avant de la console électrique.
- Mettre l'interrupteur électrique mural sur ON.
- Mettre l'interrupteur de la console électrique sur ON.
- Tourner la commande de l'élément chauffant située sur la console électrique dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour l'amener en butée vers la gauche. La valeur affichée sur le wattmètre est alors égale à zéro.
- Ouvrir le robinet d'alimentation en eau de refroidissement. Régler le débit à une valeur moyenne, constante au cours de l'expérience.

## Mesures à réaliser

1) Régler la commande de chauffage du module de façon à ce que le flux thermique affiché soit égal à  $\phi_A = 20W$  et déclencher le chronomètre. A l'aide du commutateur de mesures des températures, relever  $T_1$  et  $T_9$  toutes les 5 minutes pendant 45 minutes environ.

Tracer les courbes d'évolution de  $T_1$  et  $T_9$  en fonction du temps. Noter le temps au bout duquel le régime permanent est atteint. Relever alors les températures  $T_1, T_2, \dots, T_9$  ainsi que  $\phi_A$ .

2) Modifier la puissance de chauffage pour obtenir  $\phi_B = 35W$ . Chronométrer à nouveau pendant 45 minutes puis relever les températures d'équilibre des 9 sondes.

3) Modifier à nouveau la puissance de chauffage pour obtenir  $\phi_C = 50W$ . Chronométrer pendant 45 minutes puis relever les températures d'équilibre des 9 sondes.

Ramener la puissance de chauffage à zéro dès que les mesures sont achevées. Enlever la section 7 et laisser en attente.

## Exploitation des résultats

Remplir le tableau ci-dessous :

	$\phi_w$	$T(min)$	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$	$T_7$	$T_8$	$T_9$	$\frac{dT}{dX}$	$\lambda$	$\bar{T}$
Essai A			45											
Essai B			45											
Essai C			45											

Tracer les variations de température  $T$  en fonction de la distance  $x$  à l'élément chauffant pour les essais A, B et C. Conclusions.

Pour chaque essai, calculer le gradient de température  $\frac{dT}{dx}$ . En déduire la conductivité thermique du laiton  $\lambda(\bar{T})$  sur l'intervalle (T1,T9). On admettra que la valeur obtenue pour  $\bar{T}$  correspond à une température = T5.

Tracer la courbe expérimentale de variation de  $\lambda$  avec  $\bar{T}$  pour les différents flux. Conclusion.

## Conduction Radiale

### Introduction

Dans le cas de cette deuxième manipulation, on s'intéressera à la conduction radiale à travers un cylindre. On considère un cylindre creux de conductivité thermique  $\lambda$ , de rayon intérieur  $R_1$ , de rayon extérieur  $R_2$ , de longueur  $L$ , les températures des faces internes et externes étant respectivement  $T_1$  et  $T_2$ . On suppose que le gradient longitudinal de température est négligeable devant le gradient radial.

De la même manière, La loi de Fourier stipule: la densité de flux est proportionnelle au gradient de température est donnée par la formule :

$$\Phi = -\lambda S \frac{dT}{dr}, \quad \text{Avec :}$$

$\Phi$  Flux de chaleur transmis par conduction (W)

$\lambda$  Conductivité thermique du milieu (W m<sup>-1</sup> °C<sup>-1</sup>)

$r$  Variable radiale (rayon) dans la direction de propagation du flux de chaleur (m)

$S$  Aire de la section de passage du flux de chaleur (m<sup>2</sup>)

Cette écriture n'est valable que si le régime est permanent et que la conductivité est constante au cours du processus de conduction ou de diffusion.

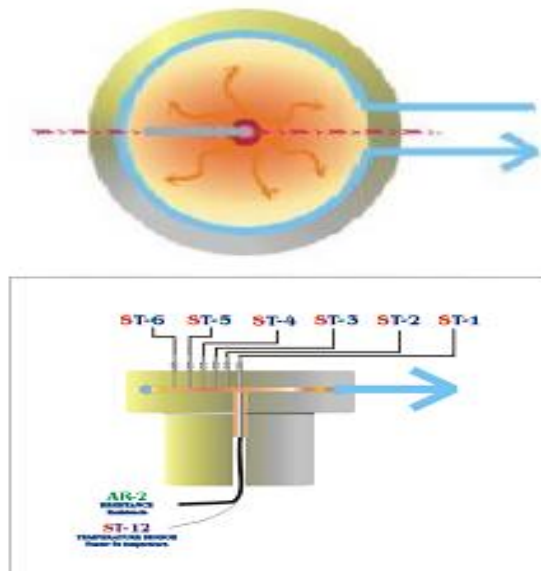
### Objectif

Les objectifs du TP sont multiples :

Examiner le profil de température et déterminer le flux de transfert de chaleur résultant de la conduction à travers les parois d'un cylindre.

### Description de l'appareillage :

Le module de conduction radiale est constitué d'un disque isolé en laiton d'épaisseur 3mm chauffé en son centre par une résistance électronique et refroidi sur sa périphérie ce disque est équipé de six prises de température positionnées radialement.



**Figure 1 : Dispositif expérimental (*Module de conduction radial*)**

### **Consignes pour la réalisatio du montage**

- Débrancher la prise de l'élément chauffant du module linéaire et brancher à sa place celle du module radial.
- Débrancher délicatement les sondes T1, T2, T3, T4, T5, T6 du module linéaire et les installer sur les broches du module radial, la sonde T1 étant située au centre du module.
- Remettre l'interrupteur de la console électrique sur ON.

### Mesures à réaliser

- 1) Régler la commande de chauffage du module de façon à ce que le flux thermique affiché soit égal à  $\phi_A = 10w$  et déclencher le chronomètre.
- 2) Relever T1 et T6 toutes les 5 minutes pendant 45 minutes environ.
- 3) Tracer les courbes d'évolution de T1 et T6 en fonction du temps.
- 4) Noter le temps au bout duquel le régime permanent est atteint. Relever alors les températures T1 à T6 ainsi que  $\phi_A$ .
- 5) En fin de séance, ramener la puissance de chauffage à zéro. Couper la console électrique. Fermer l'interrupteur mural et couper la circulation d'eau de refroidissement.

### Exploitation des résultats

Remplir le tableau ci-dessous :

	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	$T_5$	$T_6$
Essai A		20	45			

Tracer les variations de température T en fonction du rayon r du cylindre pour  $0 \leq r \leq R_f$  sachant que le rayon intérieur du cylindre est  $R_i = 4$ mm et que le rayon externe est  $R_f = 55$  mm. Conclusion.

Déterminer graphiquement les températures limites  $T_i$  pour  $r = R_i$  et  $T_f$  pour  $r = R_f$ . En déduire la résistance thermique  $\mathfrak{R}$  du disque.

Tracer la courbe  $T = f(\ln r)$  pour  $R_i \leq r \leq R_f$ . Conclusion.

Calculer, à partir de la valeur expérimentale obtenue pour  $\mathfrak{R}$ , la conductivité thermique du

laiton  $\lambda$ . On prendra  $\lambda$  pour  $\bar{T} = \frac{T_1 + T_6}{2}$ .

Comparer la valeur de  $\lambda$  obtenue pour le module radial avec les valeurs obtenues pour le module linéaire.

**Remarque :** Pour la conduction radiale la Théorie de la loi de Fourier est commet suite  
En régime permanent, et conductivité constante, l'équation générale de conduction s'écrit comme suite :

$$\lambda \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial \lambda}{\partial T} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right] = \rho C \frac{\partial T}{\partial t}$$

Ce réduit à l'expression suivante :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0}$$

Qu'on peut la réécrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0 &\Rightarrow r \frac{\partial T}{\partial r} = A \text{ (avec } A \text{ est une contante quelconque)} \\ \Rightarrow \partial T = A \frac{\partial r}{r} &\Rightarrow \int \partial T = \int A \frac{\partial r}{r} \Rightarrow \boxed{T(r) = A \ln r + B} \end{aligned}$$

Les conditions aux limites imposent :

$$\begin{aligned} \text{\`a } r = R_1: & T(R_1) = T_1 \\ \text{\`a } r = R_2: & T(R_2) = T_2 \end{aligned}$$

Aussi,

$$\begin{aligned} T_1 = A \ln R_1 + B, \quad \text{et: } T_2 = A \ln R_2 + B \\ \text{Ainsi : } T_1 - T_2 = A \ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right) &\Rightarrow \boxed{A = \frac{T_1 - T_2}{\ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)}} \text{ et: } B = T_1 - A \ln R_1 \\ &\Rightarrow \boxed{B = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)} \ln R_1} \end{aligned}$$

L'expression finale de la température prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)} \ln r + T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)} \ln R_1 &= T_1 + \frac{T_1 - T_2}{\ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)} (\ln r - \ln R_1) \\ &= T_1 + (T_1 - T_2) \frac{\ln \left( \frac{r}{R_1} \right)}{\ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)} \Rightarrow \boxed{T(r) = T_1 + (T_1 - T_2) \frac{\ln \left( \frac{r}{R_1} \right)}{\ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)}} \end{aligned}$$

Le flux de chaleur est adonné par l'expression :

$$\phi = -\lambda S \frac{dT}{dr} = -\lambda 2\pi r l \frac{1}{r} \frac{(T_1 - T_2)}{\ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)} \Rightarrow \boxed{\phi = \frac{\lambda 2\pi l}{\ln \left( \frac{R_1}{R_2} \right)} (T_1 - T_2)}$$

## TP 2 : Convection naturelle et Convection forcée dans des surfaces planes

### Introduction

La convection est un des trois modes de transfert de chaleur avec la conduction et le rayonnement. Le terme de convection fait référence aux transferts de chaleur se produisant entre une surface et un fluide en mouvement lorsque ceux-ci sont à des températures différentes. En plus du transfert d'énergie dû à la diffusion, il y a également transfert par le biais du mouvement du fluide. Ce dernier est associé au fait que de multiples molécules ont un mouvement collectif, ce qui implique un transfert de chaleur dans le cas où il existe un gradient thermique.

La contribution due au mouvement aléatoire des molécules, la diffusion, domine près de la surface où la vitesse du fluide est faible. En effet, à l'interface entre la surface et le fluide, étant donné que la vitesse du fluide est nulle, le seul mode de transfert est la diffusion. La contribution due au mouvement du fluide tient son origine du fait que la couche limite croît au fur et à mesure de l'avancée du fluide sur la surface. Le transfert thermique par convection est divisé en deux parties suivant la nature de l'écoulement :

La convection est un transfert de chaleur dans un milieu matériel avec mouvement de matière. Ce mode de transfert ne concerne donc que les fluides ou les échanges entre un solide et un fluide. Dans le cas d'un transfert entre un solide et un fluide, la puissance transférée par convection est donnée par la relation suivante :

$$\phi = h S(T_p - T_f) \quad (1)$$

Avec :

$T_p$ : la température de la paroi du solide ;

$T_f$  : la Température du fluide loin de la paroi ;

$h$  : le coefficient d'échange de surface. Sa détermination fait intervenir des relations de corrélations entre des nombres sans dimension, déterminés à partir des propriétés thermo physiques du fluide.

On distingue deux types de convection :

- **La convection libre** (ou naturelle) dans laquelle les mouvements du fluide sont dus aux variations de masse volumique,
- **La convection forcée** dans laquelle les mouvements du fluide sont imposés par une pompe ou un ventilateur.

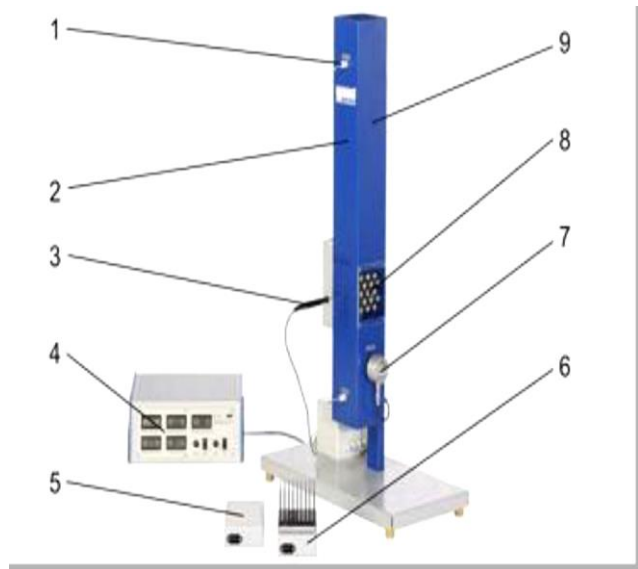
**Objectifs :** Les objectifs du TP sont multiples :

1. Calculer le flux de chaleur échangée par convection naturelle et forcée ;
2. Calculer le coefficient d'échange par convection.
3. comparer les résultats expérimentaux du coefficient H à celle trouvée dans la théorie.

**Description de l'appareillage :**

L'appareil WL 352 (Figure 1) est destiné à la transmission de la chaleur (Convection libre et convection forcée dans un écoulement d'air)

- 1- capteur de température.
- 2 - canal d'air.
- 3 - thermocouple type K.
- 4- appareil d'affichage et de commande.
- 5- élément chauffant "plaque".
- 6- élément chauffant "ailettes".
- 7- capteur d'écoulement,
- 8- élément chauffant "faisceau tubulaire".
- 9- raccord de mesure pour thermocouple



**Figure 1 :** L'appareil WL 352(Transfert de chaleur par convection)



**Figure 2 :** Amplificateur de mesure

Dans le mode de transfert thermique par convection, l'analyse adimensionnelle intervient afin de pouvoir calculer les caractéristiques du régime d'écoulement et le coefficient d'échange convectif  $h$ .

On travail généralement avec 4 modèles pour exprimer les calculs se sont :

Nombre de Nusselt	$Nu = \frac{hl}{\lambda}$	$h$ : coefficient de convection $l$ : longueur caractéristique $\lambda$ : conductivité thermique du fluide	$Nu$ traduit la qualité de l'échange thermique : une augmentation de ce nombre traduit une contribution importante de l'écoulement sur l'échange de chaleur avec la paroi
Nombre de Prandtl	$Pr = \frac{\nu}{a}$	$\nu$ : viscosité cinématique $a$ : diffusivité thermique du fluide	$Pr$ compare l'aptitude du fluide à diffuser la quantité de mouvement par le biais de sa viscosité à son aptitude à diffuser la chaleur par le biais de sa diffusivité thermique
Nombre de Reynolds	$Re = \frac{Ud}{\nu}$	$U$ vitesse moyenne de l'écoulement, $d$ dimension caractéristique et $\nu$ viscosité cinématique du fluide	
Nombre de Péclet	$Pe = \frac{Ud}{\alpha}$	$U$ vitesse moyenne de l'écoulement, $d$ dimension caractéristique et $\alpha = \frac{c_p \nu}{\lambda}$ diffusivité thermique du fluide	une valeur élevée de $Pe$ traduit une distorsion importante du champ de température due à l'écoulement par rapport à ce qu'il serait si seule la diffusion était présente

Le nombre de Nusselt est variée selon l'écoulement de fluide (turbulent ou laminaire) donc coefficient d'échange de chaleur par convection sera aussi variée

Dans le cas de convection libre pour une plaque verticale de longueur  $L$  le nombre de Nusselt est calculé par la relation suivante :

$$Nu = \left\{ 0.825 + 0.387Ra^{1/6} \left[ 1 + \left( \frac{0.492}{Pr} \right)^{9/16} \right]^{-8/17} \right\}^2 \quad \text{Où : } h = \frac{Nu.k}{L}$$

Où :  $k$  est la conductivité thermique de l'air à 25°C = 0.02603 W/m.K

$L$  : est la longueur caractéristique de l'élément (0.098 m)

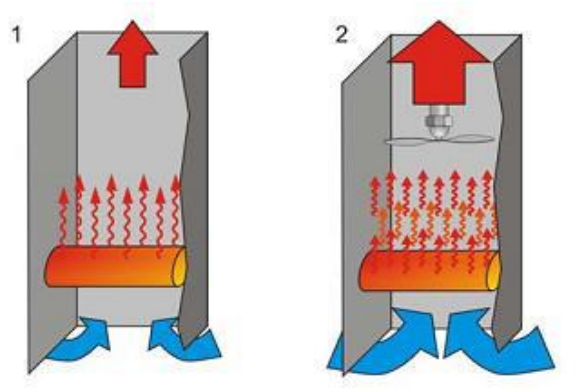
### Consignes pour la réalisation du montage

Les valeurs de la puissance de résistance utilisées dans ce TP doit être petite (vers des valeurs maximales de 50 à 60 % dans l'AR-1) lorsque l'appareil étant des valeurs de risque et de prévention du choc et de sécurité.

1-Activer l'amplificateur de mesure ; Fixer la source de chaleur choisie (plaque plane, faisceau tubulaire, ailettes) 3 Échangeurs en aluminium,

- *Échangeur de chaleur plat,*
- *Échangeur de chaleur à goujons.*
- *Échangeur de chaleur à ailettes.*

1. Activer l'interrupteur de puissance électrique et choisissez une puissance pour échauffer la source de chaleur ;
2. placez l'échangeur plat dans la tour. Un thermocouple est relié à l'échangeur (ST8- dans l'unité TXC-FF ou ST-0 dans l'unité TXC-FFB), les autres thermocouples, sont connectés à l'orifice du tunnel.
3. Réguler la puissance de l'AR-1 résistance (%) avec des valeurs prédéfinies.
4. Patienter (30 à 40 minutes) pour que l'air à l'intérieur de la conduite s'échauffe
5. Noter  $T_0$  la température auprès de la source de chaleur déterminée par le thermocouple type K
6. Enregistrer les valeurs qui s'affichent à l'amplificateur de mesure tel que
  - $T_1$  (température de l'air à l'entrée)-
  - $w$  (vitesse de l'air)
  - $T_2$  (température de l'air à la sortie),
  - $P$  (puissance électrique).



**Figure 3:** convection libre sur élément chauffant (1), convections forcées sur élément chauffant (2)

### Mesures à réaliser

#### 1- Données pour la série du TP

La température ambiante : 20C°

La longueur caractéristique de l'élément : 0.098 m

La surface de la plaque plane : 0.009604 m<sup>2</sup>

Le nombre de Prandtl : 0.7

La viscosité cinématique de l'air à (20C°) : 1.513.10<sup>-5</sup> m<sup>2</sup>/s

La conductivité de l'air à (20C°) : 0.02603W/m.K

La chaleur spécifique de l'air à (20C°) : 1007J/Kg.K

Efficacité  $AR1(\%) = (Q_{exp}/Q_{th}) * 100$

#### Exploitation des résultats (*convection naturelle*)

- 1) Calculer les nombres adimensionnelle intervient afin de pouvoir calculer les caractéristiques du régime d'écoulement et le coefficient d'échange convectif h.

***Pr, Ra, Nu, h th***

- 2) Remplir les tableaux ci-dessous :

<b><i>AR1(%)</i></b>	<b><i>AR(w)</i></b>	<b><i>ST8= STs</i></b>	<b><i>ST1</i></b>	<b><i>ST4</i></b>	<b><i>ST7</i></b>	<b><i>ST moye</i></b>	<b><i>ΔT</i></b>
<b><i>20</i></b>							
<b><i>30</i></b>							
<b><i>40</i></b>							
<b><i>50</i></b>							
<b><i>60</i></b>							

<b>ARI(%)</b>	<b>Ra</b>	<b>Nu</b>	<b><math>\frac{h}{th(w/m^2k)}</math></b>	<b>H exp</b>	<b>Q(w) th</b>	<b>Eff (%)</b>	<b>temps</b>
<b>20</b>							
<b>30</b>							
<b>40</b>							
<b>50</b>							
<b>60</b>							

- 3) Tracer le graphe  $Q = f(t)$  :
- 4) Interprétations des résultats :
- 5) Conclusion :

### Exploitation des résultats (convection forcée)

#### Remarque

Pour la convection forcée on suivra les mêmes étapes et on ajoute une action extérieure représentée par la ventilation et on choisit une vitesse pour le mouvement du fluide.

- 1) Calculer les nombres adimensionnelle intervient afin de pouvoir calculer les caractéristiques du régime d'écoulement et le coefficient d'échange convectif h.

**Pr, Ra, Nu, h th**

- 2) La vitesse de l'air et le régime d'écoulement
- 3) Remplir les tableaux ci-dessous :

<b>ARI(%)</b>	<b>ARI(w)</b>	<b>ST8= STs</b>	<b>ST1</b>	<b>ST4</b>	<b>ST7</b>	<b>ST moy</b>	<b><math>\Delta T</math></b>
<b>20</b>							
<b>25</b>							
<b>30</b>							
<b>35</b>							
<b>40</b>							
<b>50</b>							

<b><i>ARI(%)</i></b>	<b><i>Re</i></b>	<b><i>Nu</i></b>	<b><i>Pr</i></b>	<b><i>Q<sub>exp</sub>(w)</i></b>	<b><i>Q<sub>th</sub>(w)</i></b>	<b><i>Eff(%)</i></b>	<b><i>h<sub>th</sub></i></b>	<b><i>h<sub>exp</sub></i></b>
<b>20</b>								
<b>25</b>								
<b>30</b>								
<b>35</b>								
<b>40</b>								
<b>50</b>								

4) Interprétations des résultats :

5) Conclusion :

## TP 3 : Rayonnement

### Introduction

Le rayonnement thermique est distribué de façon continue sur tout le spectre électromagnétique.

Cependant, en fonction de la température du corps émetteur, il se concentre dans une certaine région du spectre. Ainsi, à température ambiante, le rayonnement est important dans l'infrarouge (IR, longueur d'onde  $\lambda \approx 10 \mu\text{m}$ ), communément associé à la production de chaleur. A plus haute température  $T$ , le spectre d'émission se déplace vers le visible, comme dans le cas du soleil

( $T \approx 5800 \text{ K}$ ), en commençant par le rouge. Dans une lampe à incandescence, le filament se trouve à une température de  $2800 \text{ K}$ , émettant seulement une petite partie de son énergie (environ 5%) dans le spectre visible et le reste dans l'IR, raison pour laquelle une telle lampe chauffe plus le milieu ambiant qu'elle n'éclaire. Une lampe halogène opère à plus haute température ( $3200 \text{ K}$ ), de sorte que la portion du spectre d'émission comprise dans le domaine du visible est élargie. Par conséquent, une telle lampe ou une résistance (chaude) possède une meilleure efficacité énergétique qu'une lampe à incandescence classique.

Le rayonnement est un transfert de chaleur entre deux corps, séparés par du vide ou un milieu transparent, par l'intermédiaire d'ondes électromagnétiques. Nous ne considérerons que les corps solides opaques au rayonnement.

Pour l'étude du rayonnement, on définit un corps de référence appelé le corps noir dont on peut déterminer les propriétés. La seule propriété qui nous intéressera par la suite est l'émittance  $M$  définie comme étant la puissance émise par unité de surface sur toute la gamme de longueur d'ondes (entre 0 et  $\infty$ ) dans tout le demi-espace supérieur. On démontre que :

$$M = \sigma T^4 \quad (1)$$

$T$  : la température absolue du corps considéré (K) ;

$\sigma$  : la constante de Stefan.

Les propriétés des corps réels sont définies par rapport à celles du corps noir. On ne considérera par la suite que l'approximation du corps gris diffusant. Dans ce cas, les propriétés du corps réel sont déduites de celles du corps noir par simple multiplication par l'émissivité  $\epsilon$ . L'émissivité est un nombre strictement inférieur à 1.

La puissance échangée entre deux corps (respectivement de surface  $S_1$ , température  $T_1$  et de surface  $S_2$ , température  $T_2$ ) se met sous la forme :

$$Q = S_1 F_{12} \sigma (T_1^4 - T_2^4) \quad (2)$$

$F_{1,2}$  : un nombre sans dimension appelé facteur de forme qui fait intervenir la géométrie considérée et les émissivités des 2 corps

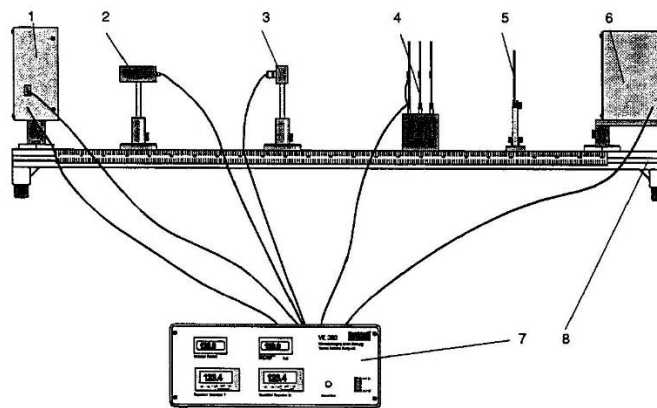
**Objectifs :** Les objectifs du TP sont multiples :

- L'exposant de la loi de Stefan Boltzmann, et la valeur de la constante de Stefan Boltzmann ;
- La loi de l'inverse du carré de Lambert ;
- La loi du cosinus de Lambert.

**Description de l'appareillage :**

L'appareil WL 360 (Figure. 1) est destiné pour la transmission de la chaleur par rayonnement. L'appareil WL 360 transmission de la chaleur par rayonnement est destiné à l'analyse des conformités à la loi du rayonnement en prenant l'exemple du rayonnement thermique et lumineux.

L'appareil possède un corps thermo rayonnant sous forme de source noir avec pile thermoélectrique correspondant qui mesure l'intensité lumineuse. Un luxmètre avec source lumineuse saisit l'intensité lumineuse, des thermocouples mesurent la température.



**Figure 1 :** L'appareil WL 352 (Transfert de chaleur par rayonnement).

- 1) Corps thermo rayonnant.
- 2) Pile thermoélectrique pour la mesure du rayonnement, sur support rotatif.
- 3) Luxmètre pour mesurer l'intensité lumineuse, sur support rotatif.
- 4) Plaque d'absorption avec points de mesure de température.
- 5) Filtres colorés (rouge, vert, infrarouge) avec fixation par pince.
- 6) Source lumineuse orientable.
- 7) Amplificateur de mesure avec câble de raccordement.
- 8) bâti de réception des dispositifs.

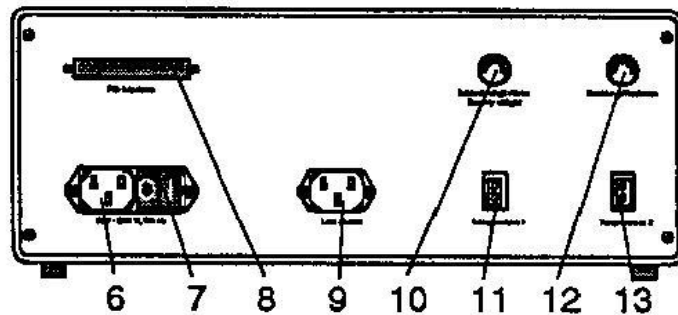


Figure 2 : Amplificateur de mesure

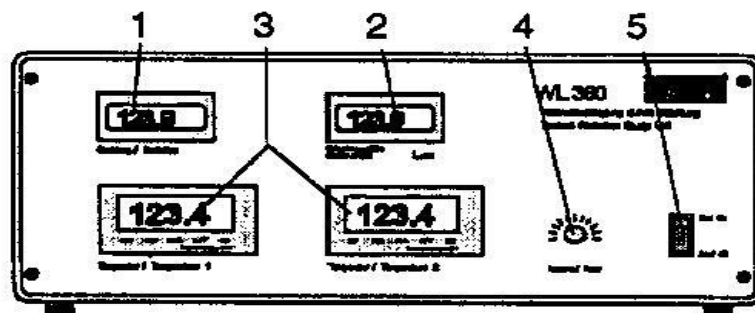


Figure 3 : Dos de l'amplificateur de mesure.

- 1) Afficheur de flux d'énergie du rayonnement ( $w/m^2$ ).
- 2) Afficheur de l'intensité lumineuse en Lux.
- 3) Afficheur des températures des thermocouples raccordés.
- 4) Régulateur de puissance pour modifier la tension d'alimentation.
- 5) interrupteur de régulateur.
- 6) Raccordement secteur.

- 7) Interrupteur principal.
- 8) Port PC.
- 9) Raccordement d'alimentation.
- 10) Sonde pour mesurer l'intensité lumineuse.
- 11) et 13) Sondes thermoélectriques.
- 12) Sonde pour mesurer le flux d'énergie du rayonnement

### **Consignes pour la réalisation du montage**

- Activez l'amplificateur de mesure.
- Fixez la pile thermoélectrique à une distance de  $L=50$  mm par rapport au corps thermorayonnant et enlever tous les autres modules intégrés entre ces appareils.
- Notez la température ambiante.
- Réglez le régulateur de mesure sur 7. la température augmente lentement.
- Enregistrez la série de mesures en notant tous les 10 kelvins la température et le flux d'énergie du rayonnement affiché.

### **Mesures à réaliser**

En augmente la température de la plaque noire et mesure la valeur de rayonnement émis par elle .pour ce faire, nous plaçons le radiomètre a une distance fixe pour échange la température du corps noire (émetteur) nous approchant la plaque a l'élément chauffant. Donc le radio mètre est en face de la plaque noire .la résistance chauffe la plaque et la plaque qui sera irradiée par une énergie. Cette énergie est mesurée par le radiomètre,

La distance entre la plaque noire et l'AR-1 doit être maintenue constante au cours de l'expérience, il est recommandé de modifier la température de la plaque noire en changeant la puissance de la résistance au lieu de changer la distance.

En doit suivie les conseille de notre prof pour un bon déroulement de l'expérience.

## Exploitation des résultats

Remplir le tableau ci-dessous :

Résistance (Watt/m <sup>2</sup> )	Température (C°)	Radiations (Watt/m <sup>2</sup> )
<b>50</b>		
<b>55</b>		
<b>60</b>		
<b>65</b>		
<b>70</b>		
<b>75</b>		
<b>80</b>		
<b>85</b>		

- 6) Tracer le graphe radiations en fonction des températures :
- 7) Vérifier la loi de stefan-boltzmann :
- 8) Interprétations des résultats :
- 9) Conclusion :

# TP 4 : Moteur STIRLING

## Introduction

Un cycle de Stirling qui fait référence au moteur éponyme, est un cycle thermodynamique réalisé en deux isothermes et deux isochores

Le moteur en question, comprenant un cylindre, un piston de déplacement Pd, et un piston de travail Pt, ainsi qu'un accumulateur d'énergie, contenant un gaz qui peut être de l'air au tout autre, une de ses partie est communiquée (en contact) avec une source de chaleur extérieure (source chaude), à une température Tc, et l'autre partie est en contact avec la source froide (en général avec de l'air ambiant). Afin d'avoir des changements de pression et température, le moteur est équipé de deux piston de déplacement du gaz (on comprime en réalité le gaz froid) vers le source chaude, qui assure l'expansion du gaz engendrant le déplacement de deuxième piston, et enfin un autre refroidissement du gaz avant de répéter la même étape (on appelle ici d'un cycle thermodynamique).

Le cycle de Stirling est constitué de quatre transformations ou évolutions :

### **Tronçon 4-1 :**

Correspond à une compression isotherme, réalisée par la montée du piston Pt au cours de laquelle le gaz reçoit de travail et cède de la chaleur Qf à la température Tf ;

### **Tronçon 1-2 :**

Correspond à un chauffage isochore, réalisé par la descente du piston Pd, au cours de laquelle le gaz traverse l'accumulateur A, de bas en haut, et reçoit de ce dernier de la chaleur, à une température variant entre Tf et Tc ;

### **Tronçon 2-3 :**

Correspond à une détente isotherme, réalisé par la descente des deux pistons, au cours de laquelle le gaz donne de travail et reçoit de la chaleur Qc à la température Tc ;

### **Tronçon 3-4 :**

Correspond à un refroidissement isochore, réalisé par la montée du piston Pd, au cours de laquelle le gaz retrace l'accumulateur A, cette fois ci de haut en bas, et donne à ce dernier de la chaleur à une température variant de Tc et Tf

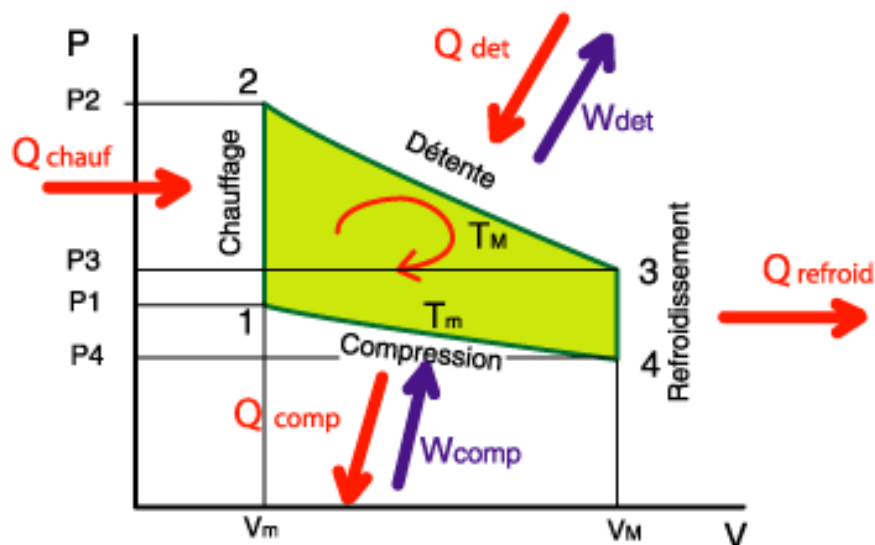


Figure 1 : cycle de Moteur STIRLING

### Étude énergétique du cycle Stirling

#### ➤ Chaleur Fournier au cycle

Il s'agit de la quantité de chaleur introduite au cours de deux processus de chauffage et détente, ainsi, pendant ces deux transformations, la chaleur reçue par le cycle ce fait premièrement d'une manière isochore suivie d'une isotherme, elles sont égales à:

$$Q_{1-2} = Q_{\text{chauffage}} = \Delta U = nC_v(T_2 - T_1) = nC_v(T_c - T_f) \text{ avec:}$$

$T_c$ : température de la source chaude;

$T_f$ : température de la source froide.

$$Q_{2-3} = Q_{\text{détente}} = -W_{2-3} = \int P dV = \int \frac{nRT}{V} dV = nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = nRT_c \ln \frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}$$

$$= nRT_c \ln \frac{P_2}{P_3}$$

Aussi,

$$Q_{\text{reçue}} = Q_{1-2} + Q_{2-3} = nC_v(T_c - T_f) + nRT_c \ln \frac{P_2}{P_3}$$

#### ➤ Chaleur cédée par le cycle

Il s'agit de la quantité de chaleur cédée au bien dégagée par le cycle au cours de refroidissement et de compression, ainsi, pendant ces deux transformations, la chaleur cédée par le cycle ce fait premièrement d'une manière isochore suivie d'une isotherme, elles sont égales à:

$$Q_{3-4} = Q_{\text{Refroidissement}} = \Delta U = nC_v(T_4 - T_3) = nC_v(T_f - T_c) \text{ et}$$

$$Q_{4-1} = Q_{\text{compression}} = -W_{4-1} = \int PdV = \int \frac{nRT}{V} dV = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_4} = nRT_f \ln \frac{V_{\min}}{V_{\max}}$$

$$= nRT_f \ln \frac{P_4}{P_1}$$

Aussi,

$$Q_{\text{cédée}} = Q_{3-4} + Q_{4-1} = nC_v(T_f - T_c) + nRT_f \ln \frac{P_4}{P_1}$$

➤ **Calcul des travaux mis en jeu lors du cycle**

Il est à noter que le cycle de Stirling comprend deux palier de travail seulement à cause des deux isochore qui annule les travaux aussi on peut écrire :

Si on regarde le diagramme ci-contre, on peut écrire :

$$W_{\text{net}} = W_{\text{detente}} + W_{\text{compression}} \text{ avec}$$

$$W_{\text{detente}} = W_{2-3} = -Q_{2-3} = -\int PdV = -\int \frac{nRT}{V} dV = -nRT_2 \ln \frac{V_3}{V_2} = -nRT_c \ln \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$$

$$= nRT_c \ln \frac{V_{\min}}{V_{\max}} - nRT_c \ln \frac{P_2}{P_3}$$

Et

$$W_{\text{compression}} = -Q_{4-1} = -Q_{\text{compression}} = -\int PdV = -\int \frac{nRT}{V} dV = -nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_4}$$

$$= -nRT_f \ln \frac{V_{\min}}{V_{\max}} = nRT_f \ln \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = -nRT_f \ln \frac{P_4}{P_1}$$

Aussi,

$$W_{\text{net}} = W_{\text{cycle}} = -nRT_c \ln \frac{V_{\max}}{V_{\min}} + nRT_f \ln \frac{V_{\max}}{V_{\min}} = -nR(T_c - T_f) \ln \frac{V_{\max}}{V_{\min}}$$

$$= -nR(T_c - T_f) \ln \frac{P_1}{P_4}$$

Le rendement thermique et ainsi définit comme étant le rapport entre le travail net et la chaleur fournie au cycle aussi,

$$\eta_{\text{thermique}} = \frac{|W_{\text{net}}|}{Q_{\text{reçue}}} = \frac{nR(T_c - T_f) \ln \frac{P_1}{P_4}}{nC_v(T_c - T_f) + nRT_c \ln \frac{P_2}{P_3}}$$

Dans les isochores :

$$P_4 V_4 = nRT_4$$

$$P_3 V_3 = nRT_3$$

$$V_3 = V_4 \text{ et } T_4 = T_{\text{froide}}, T_3 = T_{\text{chaude}}$$

$$\frac{P_4}{P_3} = \frac{T_{\text{froide}}}{T_{\text{chaude}}} \text{ et par le même raisonnement : } \frac{P_1}{P_2} = \frac{T_{\text{froide}}}{T_{\text{chaude}}}$$

$$\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}} \text{ qu'on désigne par taux volumétrique: } \tau =$$

$$\text{Dans les deux isothermes: } P_4 V_4 = P_1 V_1 \Rightarrow P_4 = \frac{P_1 V_1}{V_4} = \frac{P_1}{\tau} \text{ aussi,}$$

$$P_4 = \frac{P_1}{\tau} \text{ et } P_3 = \frac{P_2}{\tau}$$

$$C_v = 713 \text{ J/kgK}$$

Aussi, il nous suffit de savoir les pressions aux différents points et les températures à la source chaude et froide afin de calculer le rendement thermique du moteur de Stirling.

**Objectifs :** Les objectifs du TP sont :

Le but principal est de voir la variation du rendement thermique en fonction de la température.

**Description de l'appareillage :**

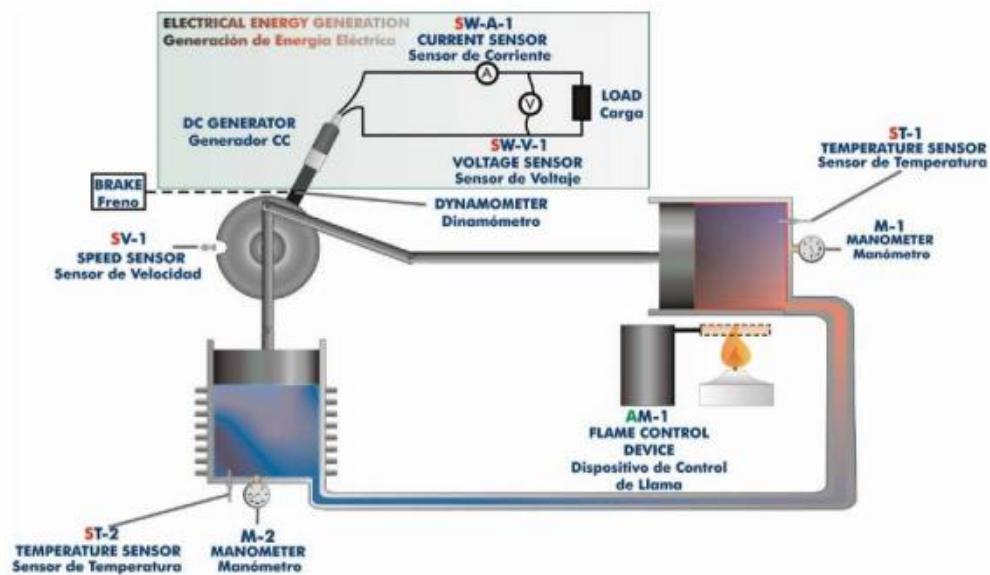
Le dispositif expérimental (figure 1) se compose du moteur lui-même et d'une unité de détection reliée au moteur, permettant de mesurer la pression  $p$ , le volume  $V$  et la vitesse de rotation  $n$ . Les températures  $T_1$  et  $T_2$  sont mesurées par des thermocouples. Les informations issues des différents capteurs sont envoyées sur une unité de mesure ( $pVnT$ ).

L'unité de mesure présente des sorties analogiques, permettant de visualiser les variations de pression et de volume au cours du temps sur les voies d'un oscilloscope et de les enregistrer à l'aide d'un ordinateur. Elles sont ensuite traitées et analysées.



Figure 1 : Dispositif expérimental du moteur de Stirling

Figure



2 :

Esquisse du moteur (chemin électrique)

### Consignes pour la réalisation du montage

Dans un premier temps, nous ferons fonctionner le dispositif à l'aide d'une alimentation pour l'utiliser comme un récepteur (machine frigorifique, pompe à chaleur). Ensuite, pour actionner le moteur, une quantité de chaleur doit être fournie à l'air contenu dans la chambre de détente. Ceci est réalisé par une résistance chauffante couplée à une alimentation continue (chauffage par effet Joule). On peut aussi utiliser une petite lampe à alcool ou une lampe au foyer d'une parabole ce qui simule un apport d'énergie solaire. Nous ne le ferons pas ici. On peut aussi faire tourner le moteur à l'aide d'une petite alimentation et utiliser alors le moteur de Stirling comme

refroidisseur. Durant son fonctionnement en mode moteur, une charge extérieure peut être soumise au moteur, soit en appliquant un couple mécanique ajustable sur son arbre, ici un torsiomètre du type frein de Poney, soit en couplant ce dernier à un générateur électrique débitant dans une résistance. On étudiera alors les variations de fréquence de rotation du moteur, les changements de température, de pression et de volume dans les chambres. Les énergies thermiques, mécaniques puis électriques mises en jeu et échangées seront analysées. L'analyse du diagramme  $p = f(V)$  permettra de déterminer la quantité d'énergie convertie par cycle moteur.

### **Procédures préliminaires et mesures de sécurité**

- Avant de commencer, on doit vérifier tout d'abord que la source de chaleur contienne de l'alcool ou de la paraffine sinon, il faut la remplir jusqu'au presque la moitié.
- Cessez de remplir au d'ajout lorsque la flamme brûle ;
- Fermer bien la bouteille après son utilisation ;
- Gardez-vous loin de la flamme et pas touchez les cylindres lors des essais ou bien quand l'expérience termine, laissez le moteur se refroidir

### **Mesures à réaliser**

Avant de mettre sous tension l'unité de mesure (pVnT), s'assurer qu'elle soit connectée à l'unité de détection (pVn). Relier les sorties analogiques p et V aux canaux Y1 et Y2 de l'oscilloscope numérique.

### **Exploitation des résultats**

- 1) Représenter dans un graphe la différence de température  $\Delta T$  (°C) et la vitesse de rotation (rps) en fonction de temps. Que remarquez-vous ;
- 2) Tracez le cycle de Stirling sur un diagramme (P, V) ;
- 3) Calculer la chaleur mise en jeu lors de cycle (chaleurs reçues et cédées) (prenez 2<sup>ème</sup> minute et 8<sup>ème</sup> minute) ;
- 4) Calculez le travail net (prenez 2<sup>ème</sup> minute et 8<sup>ème</sup> minute) ;
- 5) Calculez le rendement  $\rho = 1 - \frac{T_f}{T_c}$  ;
- 6) Calculer la puissance Electrique P ;
- 7) Interprétations des résultats ;
- 8) Conclusion ;

## **références bibliographiques :**

1. **"Heat and Mass Transfer: Fundamentals and Applications"** by Yunus A. Cengel and Afshin J. Ghajar. 5th edition (2014)
2. **"Introduction to Heat Transfer"** by Frank P. Incropera and David P. DeWitt. 6th edition (2006)
3. **"Fundamentals of Heat and Mass Transfer"** by Theodore L. Bergman, Adrienne S. Lavine, Frank P. Incropera, and David P. DeWitt. 8th edition (2017)
4. **"Conduction of Heat in Solids"** by H.S. Carslaw and J.C. Jaeger. 2nd edition (1959)
5. **"Radiative Heat Transfer"** by Michael F. Modest. 3rd edition (2013)
6. **"Principles of Heat Transfer"** by Frank Kreith and Raj M. Manglik. 7th edition (2010)
7. **"Heat Transfer"** by J.P. Holman. 10th edition (2010)
8. **"A Heat Transfer Textbook"** by John H. Lienhard IV and John H. Lienhard V. 4th edition (2020)
9. **"Heat Conduction"** by David W. Hahn and M. Necati Özisik. 3rd edition (2010)
10. **"Convective Heat and Mass Transfer"** by Kays and Crawford. 4th edition (1980)