Sommaire

0.1 Introduction

Dans le travail on s'interesse à un problème de modélisation cinétique de la fermentation d'acide lactique.

Ce problème a été traiter par J.Bizar, M.Tongo et R. Islam [1]par la méthode décomposition d'Adomian.

La méthode de perturbation de l'homotopie a été employer pour résoudre ce problème.

Cette méthode a été introduite en 1998 par la mathématicien chinoi JI.Huan He.

Ce mémoire est composé de trois chapitres:

Le premier chapitre on donne un rappelle sur les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles.

Dans le deuxième chapitre on utilise la méthode de perturbation de l'homotopie qui est introduite par JI.Huan He pour résoudre le problème de la fermentation d'acide lactique, Les résultats trouver confirme les résultats trouver par J.Biazar, M.Tongo, E. Babolian et R. Islam, on donne aussi les solutions d'un autre problème .

Dans le troisieme chapitre, on utilise la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre pour donnée une solution approximative des deux problèmes proposés en deuxième chapitre, Les résultats t rouveés sont confonder avec les résultats analytiques du chapitre 2

On utilise le fortran 77 comme langage de programation.

A la fin on donne une conclusion générale de ce travail.

CHAPITRE 1

Les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles

1.1 Introduction

L'une des procedures les plus importantes dans beaucoupe des phénomène physiques sont modilisés sous forme d'une équation différentielle, et surtont dans le domaine de la mécanique des fluide, chemie et biologie.

Une équation aux dérivées partielles fournit une relation entre les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables et elle est donnée par:

$$F\left(x, U, ..., \frac{\partial U}{\partial x_{i_1}}, \frac{\partial^2 U}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}}, ..., \frac{\partial^m U}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_m}}\right) = 0$$

(qui peut ou non dépendre du temps).

L'ordre d'une équations aux dérivées partielles est par définition, l'ordre maximal des dérivées partielles de son expréssion.

Parmi les équations aux dérivées partielles les plus classiques on trouve les suivantes:

• L'équation de la chaleur:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f$$

•L'équation des ondes:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f$$

•L'équation des télégraphes:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = f$$

1.2 L' équation différentielle

Une équation différentielle est linéaire si elle est constituée d'un somme de termes linéaire en y (l'inconnue) et ses dérivées, et non linéaire si elle est contient des termes non linéaires en y ou en ses dérivées.

1.2.1 L'équation différentielle linéaire d'ordre 1

Nous appellons L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 tout relation sous la forme:

$$a\frac{dy}{dx} + by = f(x)$$

L'équation est homogène si $f(x) = 0$.

Où a, b et f sont des fonctions numériques continues.

1.2.2 L'équation différentielle linéaire d'ordre 2

Nous appellons L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 tout relation sous la forme:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}(x) + b\,\frac{dy}{dx}(x) + c\;y\,(x) = f(x)$$

Où a, b, c et f sont des fonctions numériques continues.

1.2.3 L'équation différentielle linéaire d'ordre n

Une équation différentielle est linéaire se présente comme une relation entre une ou plusieur fonctions inconnues et leurs dérivées et définit par:

$$a_0\;y + a_1\frac{dy}{dx} + a_2\;\frac{d^2y}{dx^2} + \cdots + a_m\;\frac{d^my}{dx^m} + \cdots + a_n\;\frac{d^ny}{dx^n} = a_{n+1}$$

Où $a_0,\; a_1, a_2\;, a_m,\; a_n$ et a_{n+1} sont des fonctions numériques continues.

1.3 L'équation aux dérivées partielles

1.3.1 Définition

Soit U une variable dépendant de m variables indépendantes $x_1, x_2, x_3, ..., x_m$.

Toute relation entre U , x_j $(j = 1, 2, 3, ...; m)$ et des dérivées partielles de U par rapport aux x_j .

$$F\left(x, U, ..., \frac{\partial U}{\partial x_{_1}}, \frac{\partial^2 U}{\partial x^2_{_1}}, ..., \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, ..., \frac{\partial^m U}{\partial x^2_{_m}}, ...\right) = 0$$

Constitue une équation aux dérivées partielles (EDP).

Une équation aux dérivées partielles est dite d'ordre n quand la dérivées partielle d'ordre le plus élevè qu'elle contient est d'ordre n.

1.3.2 Les équations aux dérivées partielles du 1ère ordre

Nous examinons ici les équations aux dérivées partielles du $1^{\underline{ère}}$ ordre à deux variables indépendantes: équations aux dérivées partielles quasi-linéaire du $1^{\underline{ère}}$ ordre et à deux variables indépendantes s'écrit, de la façon la plus générale, comme:

$$P\frac{\partial U}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial y} = R$$

Où P, Q et R sont, au plus, fonctions dex, y et U.

L'équations aux dérivées partielles est dite homogène si: $R = 0$.

1.3.3 Les équations aux dérivées partielles linéaire du 1ère ordre

Les équations aux dérivées partielles du $1^{\underline{ère}}$ ordre écrire sous la forme générale:

$$P\frac{\partial U}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial y} + GU = F$$

Où P, Q, G et F sont des fonctions de x, y et U.

Si $F = 0$ alors l'équation appellé équations aux dérivées partielles linéaire et homogène du $1^{\underline{ère}}$ ordre.

1.3.4 Les équations aux dérivées partielles du 2 ème ordre

L'équations aux dérivées partielles linéaire du 2ème ordre et à deux variables indépendantes, sa forme

générale est:

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial xy} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + P\frac{\partial U}{\partial x} + Q\frac{\partial U}{\partial y} + GU = F$$

Où A, B, C, P, Q, G et F sont des fonctions de x et y.

L'équations aux dérivées partielles est homogène si $F = 0$.

1.4 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 2

- Si $B^2 - 4AC > 0$ alors on dit que l'équations aux dérivées partielles est hyperboliques.
- Si $B^2 - 4AC < 0$ alors on dit que l'équations aux dérivées partielles est elliptiques.
- Si $B^2 - 4AC = 0$ alors on dit que l'équations aux dérivées partielles est paraboliques.

CHAPITRE 2

Application de la méthode de perturbation de l'homotopie pour résolution d'un problème de la fermentation d'acide lactique

2.1 Le porblème de la fermentation d'acide lactique

2.1.1 Introduction

Le problème de la fermentation d'acide lactique a été propose, la méthode employer pour résoudre ce problème est celle de JI Huan He. qui est introduite en 1998, Ce modèle est composé d'un système de trios équations différentielles, J.Biazar, M.Tongo, E. Babolian et R. Islam ont traités le mème problème. mais ils ont utilisé deux méthode, La méthode décompositionnelle d' Adomian, et la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre.

2.1.2 Modélisation mathématique

Le modèle cinitique de la fermentation de l'acide lactique se compose des trois équations différentielles suivantes:

La croissance des cellules

Le taux de croissance net de la cellule peut être décrite comme suit:

$$\frac{dX}{dt} = \left[\mu_m \ \frac{S}{K_S + S} e^{\ -(P/K_i)n_1} e^{\ -(P/K_{Pi})n_2} - k_d\right] X$$

Utilisation des substrats

Le taux d'utilisation du substrat par Lactobacillus helveticus peut être décrite comme suit:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{-X}{Y_{X/S}} \left(\mu_m \ \frac{S}{K_S + S} e^{\ -(P/K_i)n_1} e^{\ -(P/K_{Pi})n_2} - k_d\right) - m_S X - \frac{1}{Y_{P/S}} \frac{dP}{dt}$$

La formation du produit

La vitesse à laquelle le produit est accumulée dans le réacteur est exprimée par la relation suivante:

$$\frac{dP}{dt} = X \ \left[\left(\mu_m \ \alpha \frac{S}{K_S + S} e^{\ -(P/K_i)n_1} e^{\ -(P/K_{Pi})n_2} - k_d\right) + \beta\right]$$

Pour plus de simplifier les notations, nous utilisons les paramètres suivants :

$$\eta = \frac{\mu_m}{Y_{X/S}} + m_S, \ \lambda = \frac{1}{Y_{P/S}}, \ \xi = \mu + \beta$$

Avec des notations nouvelles que nous avons le système suivant d'équations différentielles:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \mu X \\ \dfrac{dS}{dt} = -\eta X - \lambda \dfrac{dP}{dt} \\ \dfrac{dP}{dt} = (\mu + \beta) X \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \mu X \\ \dfrac{dS}{dt} = -\eta X - \lambda \dfrac{dP}{dt} \\ \dfrac{dP}{dt} = \xi X \end{cases}$$

2.2 Présentation de la méthode de perturbation de l'homotopie

2.2.1 Introduction

Une grande attention a été consacrée à l'application de la méthode de perturbation homotopie (MPH) [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9] pour résoudre des différentes problèmes des équations différentielles.

Pour illustrer l'idée de base de la MPH pour le système des équations aux dérivées partielles, nous considérons que les non-homogène, les systèmes non linéaires des équations aux dérivées partielles suivantes:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + g_1(t, u_1, u_2, u_3, ..., u_m) = f_1(x), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + g_2(t, u_1, u_2, u_3, ..., u_m) = f_2(x), \\ \frac{\partial u_3}{\partial t} + g_3(t, u_1, u_2, u_3, ..., u_m) = f_3(x), \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{\partial u_m}{\partial t} + g_m(t, u_1, u_2, u_3, ..., u_m) = f_m(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

Avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} u_1(x, y; 0) = c_1 \\ u_2(x, y; 0) = c_2 \\ u_3(x, y; 0) = c_3 \\ \vdots \\ u_m(x, y; 0) = c_m \end{cases} \tag{1.2}$$

Le système (1.1) peut être s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} L(u_1) + N_1(u_1, u_2, u_3, ..., u_m) - f_1(x) = 0 \\ L(u_1) + N_2(u_1, u_2, u_3, ..., u_m) - f_2(x) = 0 \\ L(u_1) + N_3(u_1, u_2, u_3, ..., u_m) - f_3(x) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ L(u_m) + N_m(u_1, u_2, u_3, ..., u_m) - f_m(x) = 0 \end{cases} \tag{1.4}$$

Où $L = \partial / \partial t$ est l'opérateur linéaire et N_1 , N_2, $N_3, ..., N_m$ sont opérateurs non linéaire.

Selon le MPH, nous construisons l'homotopie suivante:

$$\begin{cases} L(u_1) - L(v_1) + p\ L(v_1) + p\ [N_1(u_1, u_2, u_3, ..., u_m) - f_1(x)] = 0 \\ L(u_2) - L(v_2) + p\ L(v_2) + p\ [N_2(u_1, u_2, u_3, ..., u_m) - f_2(x)] = 0 \\ L(u_3) - L(v_3) + p\ L(v_3) + p\ [N_1(u_1, u_2, u_3, ..., u_m) - f_3(x)] = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ L(u_m) - L(v_m) + p\ L(v_m) + p\ [N_1(u_1, u_2, u_3, ..., u_m) - f_m(x)] = 0 \end{cases} \tag{1.5}$$

Où p est un paramètre de $[0;1]$nrobage et $v_1, v_2, v_3, ..., v_m$ sont des approximations initiales de la solution qui satisfont les conditions aux borns. Il est évident que lorsque le paramètre $p = 0$, l'équation ci-dessus (1.5) deviennent un système linéaire de l'équation et lorsque $p = 1$ on obtient le système d'origine non-linéaire de l'équation.

Considérons les approximations initiales, comme suit:

$$\begin{cases} u_{1,0}(x, y, t) = v_1(x, y, t) = u_1(x, y, 0) = c_1 \\ u_{2,0}(x, y, t) = v_1(x, y, t) = u_1(x, y, 0) = c_1 \\ u_{3,0}(x, y, t) = v_3(x, y, t) = u_3(x, y, 0) = c_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{m,0}(x, y, t) = v_m(x, y, t) = u_m(x, y, 0) = c_m \end{cases} \tag{1.6}$$

On considère la solution du système (1.1) est donnée par:

$$\begin{cases} u_1(x,y,t) = u_{1,0}(x,y,t) + p\ u_{1,1}(x,y,t) + p^2 u_{1,2}(x,y,t) + \cdots , \\ u_2(x,y,t) = u_{2,0}(x,y,t) + p\ u_{2,1}(x,y,t) + p^2 u_{2,2}(x,y,t) + \cdots , \\ u_3(x,y,t) = u_{3,0}(x,y,t) + p\ u_{3,1}(x,y,t) + p^2 u_{3,2}(x,y,t) + \cdots , \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_m(x,y,t) = u_{m,0}(x,y,t) + p\ u_{m,1}(x,y,t) + p^2 u_{m,2}(x,y,t) + \cdots , \end{cases} \tag{1.7}$$

Où: $u(x,y,t) = u_{i,j}$, $(i = 1,2,3,....m \ ; \ j = 1,2,3,....m\ )$ sont des fonctions à déterminer.

Substitution $(1,7)$ dans (1.5) et d'assembler les coefficients des mêmes puissances de p on obtenir:

$$\begin{cases} L(u_{1,1}) - L(v_1) + N_1(u_{1,0}, u_{2,0}, u_{3,0}, ..., u_{m,0}) - f_1(x) = 0,\ u_{1,1}(x,y,0) = 0 \\ L(u_{2,1}) - L(v_2) + N_2(u_{1,0}, u_{2,0}, u_{3,0}, ..., u_{m,0}) - f_2(x) = 0,\ u_{2,1}(x,y,0) = 0 \\ L(u_{3,1}) - L(v_3) + N_3(u_{1,0}, u_{2,0}, u_{3,0}, ..., u_{m,0}) - f_3(x) = 0,\ u_{3,1}(x,y,0) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ L(u_{m,1}) - L(v_m) + N_m(u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, ..., u_{m,1}) - f_m(x) = 0, u_{m,1}(x,y,0) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\begin{cases} L(u_{1,2}) + N_1(u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, ..., u_{m,1}) = 0, u_{2,2}(x,y,0) = 0 \\ L(u_{2,2}) + N_2(u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, ..., u_{m,1}) = 0, u_{2,2}(x,y,0) = 0 \\ L(u_{3,2}) + N_3(u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, ..., u_{m,1}) = 0, u_{3,2}(x,y,0) = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ L(u_{m,2}) + N_m(u_{1,1}, u_{2,1}, u_{3,1}, ..., u_{m,1}) = 0, u_{m,2}(x,y,0) = 0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Maintenant résoudre les systèmes ci-dessus de l'équation de l'inconnu:

$$u_{i,j}(i = 1, 2, 3, ...m; j \ = 1, 2, 3, ...m)$$

A cet effet, selon la méthodede perturbation de l'homotopie la solution de (1.4) peut être exprimée comme suit :

$$\begin{aligned}
\phi_{1,n}(x, y, t) &= u_1(x, y, t) \\
&= \lim_{p \to 1} u_1(x, y, t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} u_{1,k}(x, y, t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{2,n}(x, y, t) &= u_2(x, y, t) \\
&= \lim_{p \to 1} u_2(x, y, t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} u_{2,k}(x, y, t)
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}
\phi_{m,n}(x, y, t) &= u_m(x, y, t) \\
&= \lim_{p \to 1} u_m(x, y, t) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} u_{m,k}(x, y, t)
\end{aligned}$$

2.2.2 Implémentation de la méthode de perturbation de l'homotopie

Problème de la fermentation d'acide lactique

Le problème de la fermentation d'acide lactique est donnée par le système homogène linéaire des équations aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt}=\mu X \\ \dfrac{dS}{dt}=-\eta X-\lambda \frac{dP}{dt} \\ \dfrac{dP}{dt}=\xi X \end{cases}$$

Avec des conditions initiales:

$$\begin{cases} P(0)=P \\ S(0)=S \\ X(0)=X \end{cases}$$

Nous posons $P(0)=P_0$, $S(0)=S_0$ et $X(0)=X_0$

Selon le MHP, nous pouvons construire l'homotopie suivante:

$$\begin{cases} (X)_t-(X_0)_t+p\ \left[(X_0)_t-\mu X\ \right]=0 \\ (S)_t-(S_0)_t+p\ \left[(S_0)_t+\eta X\ +\lambda(P)_t\right]=0 \\ (P)_t-(P_0)_t+p\ \left[(P_0)_t-\xi X\right]=0 \end{cases}$$

On choisit la solution approximative suivante:

$$\begin{cases} X_0(t)=X(0)=x_0 \\ S_0(t)=S(0)=S_0 \\ P_0(t)=P(0)=P_0 \end{cases}$$

Et on cherche la solution sous la forme suivante:

$$\begin{cases} X(t) = X_0(t) + pX_0(t) + p^2 X_1(t) + \text{............}, \\ S(t) = S_0(t) + pS_0 t + p^2 S_1(t) + \text{.............}, \\ P(t) = P_0(t) + pP_0(t) + p^2 P_1(t) + \text{............}, \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} (X_1)_t + (X_0)_t - \mu X_0 \ = 0 \\ (S_1)_t + (S_0)_t + \eta X_0 \ + \lambda (P_0)_t = 0 \\ (P_1)_t + (P_0)_t - \xi X_0 \ = 0 \end{cases}$$

Avec:

$$\begin{cases} X_1(t) = 0 \\ S_1(t) = 0 \\ P_1(t) = 0 \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} (X_1)_t - \mu X_0 \ = 0 \\ (S_1)_t + \eta X_0 = 0 \\ (P_1)_t - \xi X_0 \ = 0 \end{cases}$$

Nous résoudrons le système précident on trouve :

$$\begin{cases} X_1(t) = \displaystyle\int \mu x_0 \ dt \\ S_1(t) = \displaystyle\int - \eta x_0 \ dt \\ P_1(t) = \displaystyle\int \xi x_0 \ dt \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} X_1(t) = \mu x_0 t \\ S_1(t) = -\eta x_0 t \\ P_1(t) = \xi x_0 t \end{cases}$$

Et par suit:

$$\begin{cases} (X_2)_t - \mu X_1 = 0 \\ (S_2)_t + \eta X_1 + \lambda (P_1)_t = 0 \\ (P_2)_t - \xi X_1 = 0 \end{cases}$$

Avec:

$$\begin{cases} X_2(t) = 0 \\ S_2(t) = 0 \\ P_2(t) = 0 \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} (X_2)_t - \mu (\mu x_0 t) = 0 \\ (S_2)_t + \eta (\mu x_0 t) + \lambda (\xi x_0 t)_t = 0 \\ (P_2)_t - \xi (\mu x_0 t) = 0 \end{cases}$$

Nous résoudrons ce système des équations différentielles on trouve:

$$\begin{cases} X_2(t) = \int \mu^2 x_0 t \, dt \\ S_2(t) = -\lambda \xi x_0 t - \int \eta \mu x_0 t \, dt \\ P_2(t) = \int \xi \mu x_0 t \, dt \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} X_2\left(t\right)=\mu^2x_0\ \dfrac{t^2}{2} \\ S_2\left(t\right)=-\eta\mu x_0\dfrac{t^2}{2}-\lambda\xi x_0\ t \\ P_2\left(t\right)=\mu\xi x_0\dfrac{t^2}{2} \end{cases}$$

Et par suit:

$$\begin{cases} \left(X_3\right)_t-\mu X_2\ \ =0 \\ \left(S_3\right)_t+\eta X_2\ \ +\lambda\left(P_2\right)_t=0 \\ \left(P_3\right)_t-\xi X_2\ \ =0 \end{cases}$$

Avec:

$$\begin{cases} X_3\left(t\right)=0 \\ S_3(t)=0 \\ P_3\left(t\right)=0 \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} \left(X_3\right)_t-\mu\left(\mu^2x_0\dfrac{t^2}{2}\right)\ \ =0 \\ \left(S_3\right)_t+\eta\left(\mu^2x_0\dfrac{t^2}{2}\right)+\lambda\left(\mu\xi x_0\dfrac{t^2}{2}\right)_t=0 \\ \left(P_3\right)_t-\xi\ \left(\mu^2x_0\dfrac{t^2}{2}\right)=0 \end{cases}$$

La solution de ce système est:

$$\begin{cases} X_3\left(t\right)=\displaystyle\int\mu^3x_0\frac{t^2}{2}\ dt \\ S_3\left(t\right)=-\lambda\xi\mu^2x_0\dfrac{t^2}{2}\ -\displaystyle\int\eta\mu^2x_0\frac{t^2}{2}\ dt \\ P_3\left(t\right)=\displaystyle\int\xi\mu^2x_0\frac{t^2}{2}\ \ dt \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} X_3(t) = \mu^3 x_0 \dfrac{t^3}{6} \\ S_3(t) = -\eta \mu^2 x_0 \dfrac{t^3}{6} - \lambda \mu \xi x_0 \dfrac{t^2}{2} \\ P_3(t) = \xi \mu^2 x_0 \dfrac{t^3}{6} \end{cases}$$

En sous suit:

$$\begin{cases} (X_n)_t - \mu X_{n-1} = 0 \\ (S_n)_t + \eta X_{n-1} + \lambda (P_{n-1})_t = 0 \\ (P_n)_t - \xi X_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Avec:

$$\begin{cases} X_n(t) = 0 \\ S_n(t) = 0 \\ P_n(t) = 0 \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} (X_n)_t - \mu \left(\mu^{n-1} x_0 \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right) = 0 \\ (S_n)_t + \eta \left(\mu^{n-1} x_0 \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right) + \lambda \left(\mu^{n-2} \xi x_0 \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right)_t = 0 \\ (P_n)_t - \xi \left(\mu^{n-1} x_0 \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right) = 0 \end{cases}$$

Nous résoudrons ce système on trouve :

$$\begin{cases} X_n(t) = \displaystyle\int \mu^n x_0 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \, dt \\ S_n(t) = -\lambda \xi \mu^{n-2} x_0 \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \displaystyle\int \eta \mu^{n-1} x_0 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \, dt \\ P_n(t) = \displaystyle\int \xi \mu^{n-1} x_0 \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \, dt \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} X_n(t) = \mu^n x_0 \ \dfrac{t^n}{(n)!} \\ S_n(t) = -\eta\mu^{n-1}x_0\dfrac{t^n}{(n)!} - \lambda\mu^{n-2}\xi x_0\dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ P_n(t) = \xi\mu^{n-1}x_0 \ \dfrac{t^n}{(n)!} \end{cases}$$

Et par conséquent, la solution est donnée par la séries:

$$\begin{cases} X(t) = x_0\left(1 + \mu t + \dfrac{(\mu t)^2}{2!} + \dfrac{(\mu t)^3}{3!} + \dfrac{(\mu t)^4}{4!} + \cdots\cdots\cdots\right) \\ S(t) = S_0 - x_0\eta\left(t + \dfrac{\mu(t)^2}{2!} + \dfrac{\mu^2(t)^3}{3!} + \dfrac{\mu^3(t)^4}{4!} + \cdots\cdots\cdots\right) \\ \qquad - \ \lambda\xi x_0\left(t + \dfrac{\mu(t)^2}{2!} + \dfrac{\mu^2(t)^3}{3!} + \dfrac{\mu^3(t)^4}{4!} + \cdots\cdots\cdots\right) \\ P(t) = P_0 + x_0\xi\left(t + \dfrac{\mu(t)^2}{2!} + \frac{\mu^2(t)^3}{3!} + \dfrac{\mu^3(t)^4}{4!} + \cdots\cdots\cdots\right) \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} X(t) = x_0\left(1 + \mu t + \dfrac{(\mu t)^2}{2!} + \dfrac{(\mu t)^3}{3!} + \dfrac{(\mu t)^4}{4!} + \cdots\cdots\right) \\ S(t) = S_0 - \dfrac{x_0}{\mu}(\eta + \lambda\xi)\left[\left(1 + \mu t + \dfrac{(\mu t)^2}{2!} + \dfrac{(\mu t)^3}{3!} + \dfrac{(\mu t)^4}{4!} + \cdots\right) - 1\right] \\ P(t) = P_0 + \dfrac{x_0\xi}{\mu}\left[\left(1 + \mu t + \dfrac{(\mu t)^2}{2!} + \dfrac{(\mu t)^3}{3!} + \dfrac{(\mu t)^4}{4!} + \cdots\cdots\right) - 1\right] \end{cases}$$

Donc la solution est sous forme suivante:

$$\begin{cases} X(t) = x_0 e^{\mu t} \\ S(t) = S_0 + \dfrac{x_0}{\mu}(\eta + \lambda\xi)\left(e^{\mu t} - 1\right) \\ P(t) = P_0 + \dfrac{x_0\xi}{\mu}\left(e^{\mu t} - 1\right) \end{cases}$$

Telle que:

$$\eta = \frac{\mu_m}{y_{x/s}} + m_s \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{1}{y_{p/s}}$$

Avec:

$S_0 = 50$, $\mu_m = 0.25$, $Ks = 0.9$, $K_d = 0.038$, $k_{ip} = 60$, $P_i = 250$, $m_s = 2.65$
$Y_{P/S} = 0.61$, $Y_{X/S} = 0.064, n_1 = n_2 = 5$, $\alpha = 4.6$ et $\beta = 0.23$.

Alors:

$$\begin{cases} X(t) = x_0 e^{0.262t} \\ S(t) = 50 - \dfrac{7.362x_0}{0.262}\left(e^{0.262t} - 1\right) \\ P(t) = P_0 + \dfrac{0.492x_0}{0.262}\left(e^{0.262t} - 1\right) \end{cases}$$

Donc ce cas la solution estla suivante:

$$\begin{cases} X(t) = 10.1e^{0.262t} \\ S(t) = 50 - 283.81\left(e^{0.262t} - 1\right) \\ P(t) = 8 + 18.95\left(e^{0.262t} - 1\right) \end{cases}$$

le deuxième problème

Le modèle mathématique d'épidermie est donné par le système des équations differentielles suivant:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = \beta X(t)Y(t) \\ \dfrac{dY}{dt} = \beta X(t)Y(t) - \gamma Y(t) \\ \dfrac{dZ}{dt} = \gamma Y(t) \end{cases}$$

Avec les conditions initiales:

$$\begin{cases} X(0) = n_1 \\ Y(0) = n_2 \\ Z(0) = n_3 \end{cases}$$

On pose $Z(0) = Z_0$, $Y(0) = Y_0$ et $X(0) = X_0$

Pour utilisez la méthode de perturbation de l'homotopie on troduit l'homotopie suivante:

$$\begin{cases} (X)_t - (X_0)_t + p \; [(X_0)_t - \; \beta XY] = 0 \\ (Y)_t - (Y_0)_t + p \; [(Y_0)_t - \beta X(t)Y(t) + \gamma Y(t)] = 0 \\ (Z)_t - (Z_0)_t + p \; [(Z_0)_t - \gamma Y(t)] = 0 \end{cases}$$

On cherche la solution sous la forme suivante:

$$\begin{cases} X(t) = X_0(t) + pX_0(t) + p^2 X_1(t) + ..., \\ Y(t) = Y_0(t) + pY_0 t + p^2 Y_1(t) + ..., \\ Z(t) = Z_0(t) + pZ_0(t) + p^2 Z_1(t) + ..., \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} (X_1)_t + (X_0)_t - \; \beta X_0 Y_0 \; = 0 \\ (Y_1)_t + (Y_0)_t - \beta X_0 Y_0 + \gamma Y_0 = 0 \\ (Z_1)_t + (Z_0)_t - \gamma Y_0 \; = 0 \end{cases}$$

Avec les condition:

$$\begin{cases} X_1(0) = 0 \\ Y_1(0) = 0 \\ Z_1(0) = 0 \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} (X_1)_t - \beta n_1 n_2 \ = 0 \\ (Y_1)_t - \beta n_1 n_2 + \gamma n_2 = 0 \\ (Z_1)_t - \gamma n_2 = 0 \end{cases}$$

Donc:

$$\begin{cases} X_1(t) = \displaystyle\int \beta n_1 n_2 \ dt \\ Y_1(t) = \displaystyle\int n_2 (\beta n_1 - \gamma) \ dt \\ Z_1(t) = \displaystyle\int \gamma n_2 \ dt \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} X_1(t) = \beta n_1 n_2 t \\ Y_1(t) = n_2 (\beta n_1 - \gamma) t \\ Z_1(t) = \gamma n_2 t \end{cases}$$

Par suit:

$$\begin{cases} (X_2)_t - \beta (X_0 Y_1 + X_1 Y_0) \ = 0 \\ (Y_2)_t - \beta (X_0 Y_1 + X_1 Y_0) - \gamma Y_1 = 0 \\ (Z_2)_t - \gamma Y_1 = 0 \end{cases}$$

Avec:

$$\begin{cases} X_2(0) = 0 \\ Y_2(0) = 0 \\ Z_2(0) = 0 \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} (X_2)_t - \beta\left[n_1 n_2 (\beta n_1 - \gamma)\, t + n_2 \beta n_1 n_2 t\ \ \right] \ = 0 \\ (Y_2)_t - \beta\left(n_1 n_2 (\beta n_1 - \gamma)\, t + n_2 \beta n_1 n_2 t\ \ \right) + \gamma (\beta n_1 - \gamma)\, n_2 t = 0 \\ (Z_2)_t - \gamma n_2 (\beta n_1 - \gamma)\, t = 0 \end{cases}$$

Nous résoudrons les équations différentielles :

$$\begin{cases} X_2(t) = \displaystyle\int (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma)\, \beta n_1 n_2 t \ \ dt \\ Y_2(t) = \displaystyle\int \left[\beta n_1 (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) - \gamma (\beta n_1 - \gamma)\right] n_2 t \ dt \\ Z_2(t) = \displaystyle\int (\beta n_1 - \gamma)\, \gamma n_2 t \ dt \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} X_2(t) = (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma)\ \dfrac{\beta n_1 n_2 t^2}{2} \\ Y_2(t) = \left[\beta n_1 (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) - \gamma (\beta n_1 - \gamma)\right] \dfrac{n_2 t^2}{2} \\ Z_2(t) = (\beta n_1 - \gamma)\ \dfrac{\gamma n_2 t^2}{2} \end{cases}$$

Par suit:

$$\begin{cases} (X_3)_t - \beta (X_0 Y_2 + X_1 Y_1 + X_2 Y_0) \ = 0 \\ (Y_3)_t - \beta (X_0 Y_2 + X_1 Y_1 + X_2 Y_0) - \gamma Y_2 = 0 \\ (Z_3)_t - \gamma Y_2 = 0 \end{cases}$$

Avec:

$$\begin{cases} X_3(0) = 0 \\ Y_3(0) = 0 \\ Z_3(0) = 0 \end{cases}$$

Alors:

$$\begin{cases} (X_3)_t - [\beta n_1 (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) - \gamma (\beta n_1 - \gamma)] \dfrac{\beta n_1 n_2 t^2}{2} \\ +n_2 \beta (\beta n_1 - \gamma) n_1 n_2 t^2 + n_2 \beta (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) \ \dfrac{\beta n_1 n_2 t^2}{2} \ = 0 \\ (Y_3)_t - [\beta n_1 (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) - \gamma (\beta n_1 - \gamma)] \dfrac{\beta n_1 n_2 t^2}{2} \\ +n_2 \beta (\beta n_1 - \gamma) n_1 n_2 t^2 + n_2 \beta (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) \ \dfrac{\beta n_1 n_2 t^2}{2} \\ +\gamma [\beta n_1 (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) - \gamma (\beta n_1 - \gamma)] \dfrac{n_2 t^2}{2} = 0 \\ (Z_3)_t - \gamma [\beta n_1 (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) - \gamma (\beta n_1 - \gamma)] \dfrac{n_2 t^2}{2} = 0 \end{cases}$$

Nous résoudrons les équations différentielles :

$$\begin{cases} X_3(t) = \displaystyle\int [\beta (n_1 + n_2) (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) + (2 n_2 \beta - \gamma) (\beta n_1 - \gamma)] \frac{\beta n_1 n_2 t^2}{2} \ dt \\ Y_3(t) = \displaystyle\int \left(n_1 + n_2 - \tfrac{\gamma}{\beta}\right) (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) \frac{\beta^2 n_1 n_2 t^2}{2} \ dt \\ \qquad + \displaystyle\int \left(2 n_1 n_2 \beta^2 - \beta n_1 \gamma + \gamma^2\right) (\beta n_1 - \gamma) \frac{n_2 t^2}{2} \ dt \\ Z_3(t) = \displaystyle\int \gamma [\beta n_1 (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) - \gamma (\beta n_1 - \gamma)] \frac{n_2 t^2}{2} \ dt \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} X_3(t) = [\beta (n_1 + n_2) (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) + (2 n_2 \beta - \gamma) (\beta n_1 - \gamma)] \ \dfrac{\beta n_1 n_2 t^3}{6} \\ Y_3(t) = \dfrac{\beta^2 n_1 n_2 t^3}{6} \left(n_1 + n_2 - \dfrac{\gamma}{\beta}\right) (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) \\ \qquad + \left(2 n_1 n_2 \beta^2 - \beta n_1 \gamma + \gamma^2\right) (\beta n_1 - \gamma) \dfrac{n_2 t^3}{6} \\ Z_3(t) = \gamma [\beta n_1 (\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma) - \gamma (\beta n_1 - \gamma)] \ \dfrac{\gamma n_2 t^3}{6} \end{cases}$$

Par suit:

$$\begin{cases} (X_n)_t - \beta\left(X_0Y_{n-1} + X_1Y_{n-2} + X_2Y_{n-3} + \cdots + X_{n-1}Y_0\right) \ = 0 \\ (Y_n)_t - \beta\left(X_0Y_{n-1} + X_1Y_{n-2} + X_2Y_{n-3} + \cdots + X_{n-1}Y_0\right) - \gamma Y_{n-1} = 0 \\ (Z_n)_t - \gamma Y_{n-1} = 0 \end{cases}$$

Avec:

$$\begin{cases} X_n\left(0\right) = 0 \\ Y_n(0) = 0 \\ Z_n\left(0\right) = 0 \end{cases}$$

Donc la solution donnée par la série:

$$\begin{cases} X\left(t\right) = n_1 + \beta n_1 n_2 t + \left(\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma\right) \ \dfrac{\beta n_1 n_2 t^2}{2} \\ \qquad + \ \left[\beta\left(n_1+n_2\right)\left(\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma\right) + \left(2n_2\beta - \gamma\right)\left(\beta n_1 - \gamma\right)\right] \ \dfrac{\beta n_1 n_2 t^3}{6} + \cdots \\ Y\left(t\right) = n_2 + n_2\left(\beta n_1 - \gamma\right)t \ + \left[\beta n_1\left(\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma\right) - \gamma\left(\beta n_1 - \gamma\right)\right]\dfrac{n_2 t^2}{2} \\ \qquad + \left(n_1 + n_2 - \dfrac{\gamma}{\beta}\right)\left(\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma\right)\dfrac{\beta^2 n_1 n_2 t^3}{6} \\ \qquad + \left(2n_1n_2\beta^2 - \beta n_1\gamma + \gamma^2\right)\left(\beta n_1 - \gamma\right)\dfrac{n_2 t^3}{6} + \cdots\cdots \\ Z\left(t\right) = n_3 + \gamma n_2 t \ + \left(\beta n_1 - \gamma\right) \ \dfrac{\gamma n_2 t^2}{2} + \dfrac{\gamma^2\beta n_1 n_2 t^3}{6}\left(\beta n_1 + \beta n_2 - \gamma\right) \\ \qquad - \left(\beta n_1 - \gamma\right) \ \dfrac{\gamma^3 n_2 t^3}{6} + \cdots \end{cases}$$

Pour $\beta = 0.01, \gamma = 0.02$ la condition initial et :

$$\begin{cases} n_1 = 20 \\ n_2 = 15 \\ n_3 = 10 \end{cases}$$

Nous trouvons la solution général suivant:

$$\begin{cases} X\left(t\right)=20+3t+0.495t^{2}+0.1659t^{3}+\cdots \\ Y\left(t\right)=15+0.18t+0.0624t^{2}+0.05445t^{3}+\cdots \\ Z\left(t\right)=10+0.3t+0.27t^{2}+0.0001964t^{3}+\cdots \end{cases}$$

Pour $\beta=0.01,\gamma=0.02$ la condition initial et :

$$\begin{cases} n_1=30 \\ n_2=50 \\ n_3=20 \end{cases}$$

Nous trouvons la solution général suivant:

$$\begin{cases} X\left(t\right)=30+15t+5.850t^{2}+1.346t^{3}+\cdots \\ Y\left(t\right)=50+14t+43.735t^{2}+1141.442t^{3}+\cdots \\ Z\left(t\right)=20+t+0.14t^{2}+0.0058t^{3}+\cdots \end{cases}$$

CHAPITRE 3

Approximation numérique d'un problème épidemique

3.1 Application de la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre au problème de la fermentation d'acide lactique

On a:

$$\begin{cases} \eta = 6.55 \\ \mu = 0.262 \\ \lambda = 1.64 \\ \xi = 0.492 \end{cases}$$

Et:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = 0.262X \\ \dfrac{dS}{dt} = -6.55X \ - 1.64\dfrac{dP}{dt} \\ \dfrac{dP}{dt} = 0.492X \end{cases} \tag{E1}$$

Nous posons:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= f(X) \\ &= 0.262X \end{aligned}$$

Et:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= g(X) \\ &= 0.492X \end{aligned}$$

Et:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= L(X) \\ &= -1.64g(X) - 6.55X \\ &= -1.64(0.492X) - 6.55X \\ &= (-0.80 - 6.55)X \\ &= -7.35X \end{aligned}$$

Alors le système (E1) èquivalant a:

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = 0.262X \\ \dfrac{dS}{dt} = -7.35X \\ \dfrac{dP}{dt} = 0.492X \end{cases}$$

Donc la solution par la méthode de runge Kutta d'ordre 4 donnée par:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(X_i\right) \\
k_2 &= hf\left(X_i + \frac{k_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(X_i + \frac{k_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf\left(X_i + k_3\right) \\
X_{i+1} &= X_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4) \\
m_1 &= hg\left(X_i\right) \\
m_2 &= hg\left(X_i + \frac{m_1}{2}\right) \\
m_3 &= hg\left(X_i + \frac{m_2}{2}\right) \\
m_4 &= hg\left(X_i + m_3\right) \\
P_{i+1} &= P_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2(m_2 + m_3) + m_4) \\
n_1 &= hL\left(X_i\right) \\
n_2 &= hL\left(X_i + \frac{n_1}{2}\right) \\
n_3 &= hL\left(X_i + \frac{n_2}{2}\right) \\
n_4 &= hL\left(X_i + n_3\right) \\
S_{i+1} &= S_i + \frac{1}{6}(n_1 + 2(n_2 + n_3) + n_4)
\end{aligned}$$

Nous appliquons la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 avec $h = 0.01$ et la condition initial:

$$\begin{cases} x_0 = 10.1 \\ S_0 = 50 \\ P_0 = 8 \end{cases}$$

3.2 Application de la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre au deuxième problème

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dt} = 0.262X \\ \dfrac{dS}{dt} = -15.625\dfrac{dP}{dt} - 3.059X \\ \dfrac{dP}{dt} = 6.6X + 0.33\dfrac{dx}{dt} \end{cases}$$

Nous posons:

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= f(X) \\ &= 0.262X \end{aligned}$$

Et:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= g(X) \\ &= 6.6X + 0.33f(X) \\ &= 6.6X + 0.33(0.262)X \\ &= 6.686X \end{aligned}$$

Et:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= L(X) \\
&= -15.625g(X) - 3.059X \\
&= -15.625(6.686X) - 3.059X \\
&= (-95.093 - 3.059)X \\
&= -107.52X
\end{aligned}$$

Alors le système (E2) èquivalant a:

$$\begin{cases}
\frac{dX}{dt} = \beta X(t)Y(t) \\
\frac{dY}{dt} = \beta X(t)Y(t) - \gamma Y(t) \\
\frac{dZ}{dt} = \gamma Y(t)
\end{cases}$$

Nous posons:

$$\begin{cases}
f(X,Y) = \beta XY \\
g(X,Y) = \beta XY - \gamma Y \\
L(Y) = \gamma Y
\end{cases}$$

Nous appliquons la méthode de Runge Kutta d'ordre 4:

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(X_i, Y_i\right) \\
k_2 &= hf\left(X_i + \frac{k_1}{2}, Y_i + \frac{m_1}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(X_i + \frac{k_2}{2}, Y_i + \frac{m_2}{2}\right) \\
k_4 &= hf\left(X_i + k_3, Y_i + m_3\right) \\
X_{i+1} &= X_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4) \\
m_1 &= hg\left(X_i, Y_i\right) \\
m_2 &= hg\left(X_i + \frac{k_1}{2}, Y_i + \frac{m_1}{2}\right) \\
m_3 &= hg\left(X_i + \frac{k_2}{2}, Y_i + \frac{m_2}{2}\right) \\
m_4 &= hg\left(X_i + k_3, Y_i + m_3\right) \\
Y_{i+1} &= Y_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2(m_2 + m_3) + m_4) \\
n_1 &= hL\left(X_i\right) \\
n_2 &= hL\left(Y_i + \frac{n_1}{2}\right) \\
n_3 &= hL\left(Y_i + \frac{n_2}{2}\right) \\
n_4 &= hL\left(Y_i + n_3\right) \\
Z_{i+1} &= Z_i + \frac{1}{6}(n_1 + 2(n_2 + n_3) + n_4)
\end{aligned}$$

3.3 Les graphes

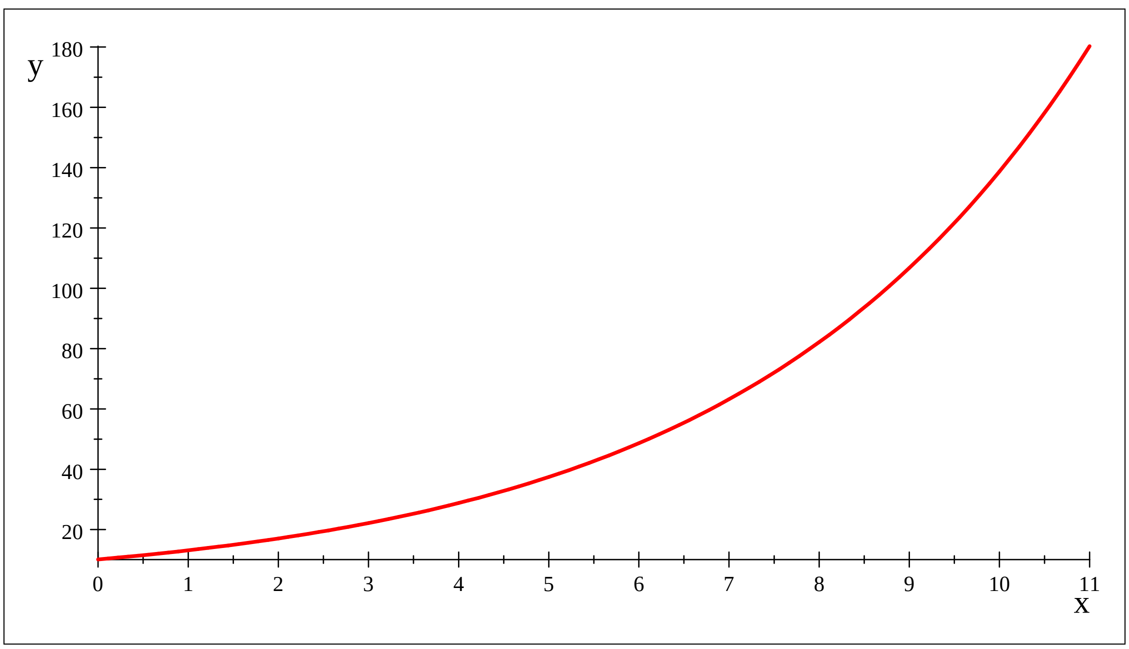
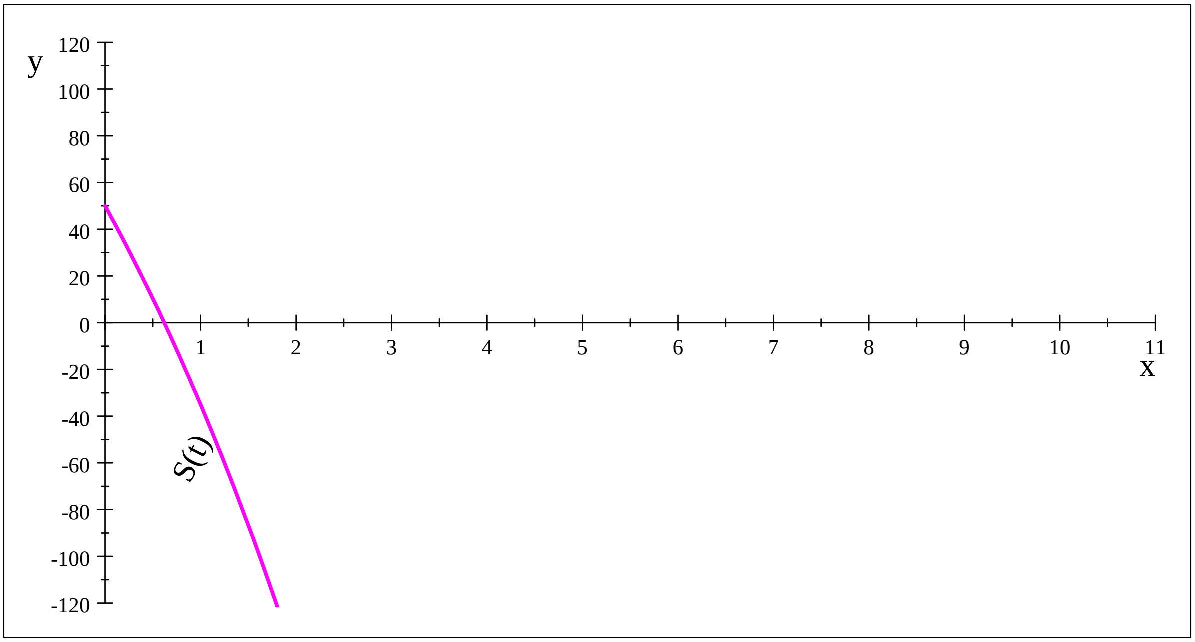


Figure 1(La croissance des cellulesle)



Fiqure 2 (Utilisation des substrats)

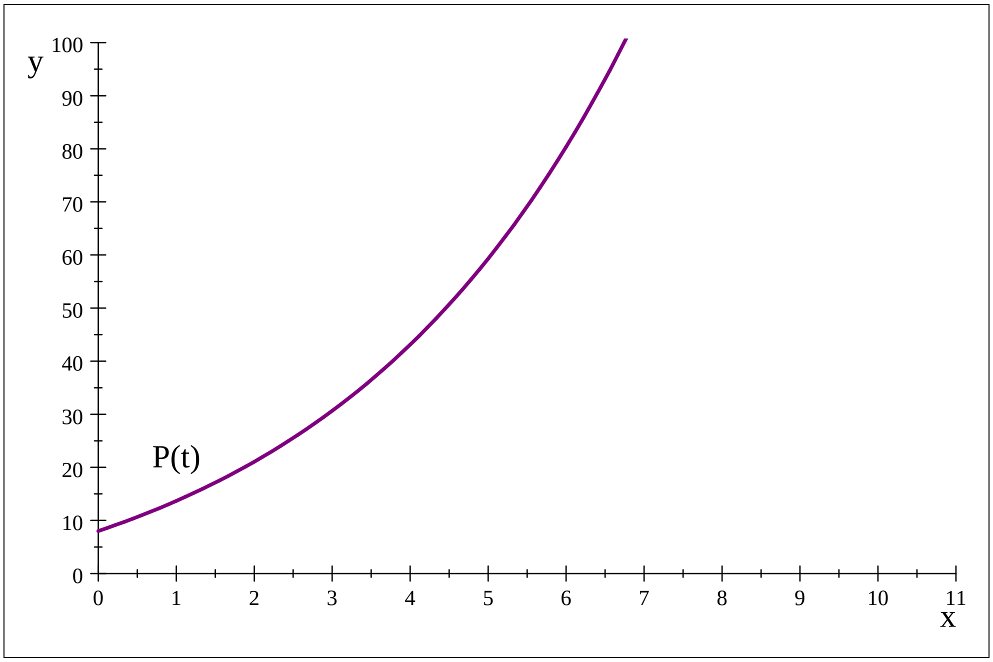


Figure 3 (La formation du produit)

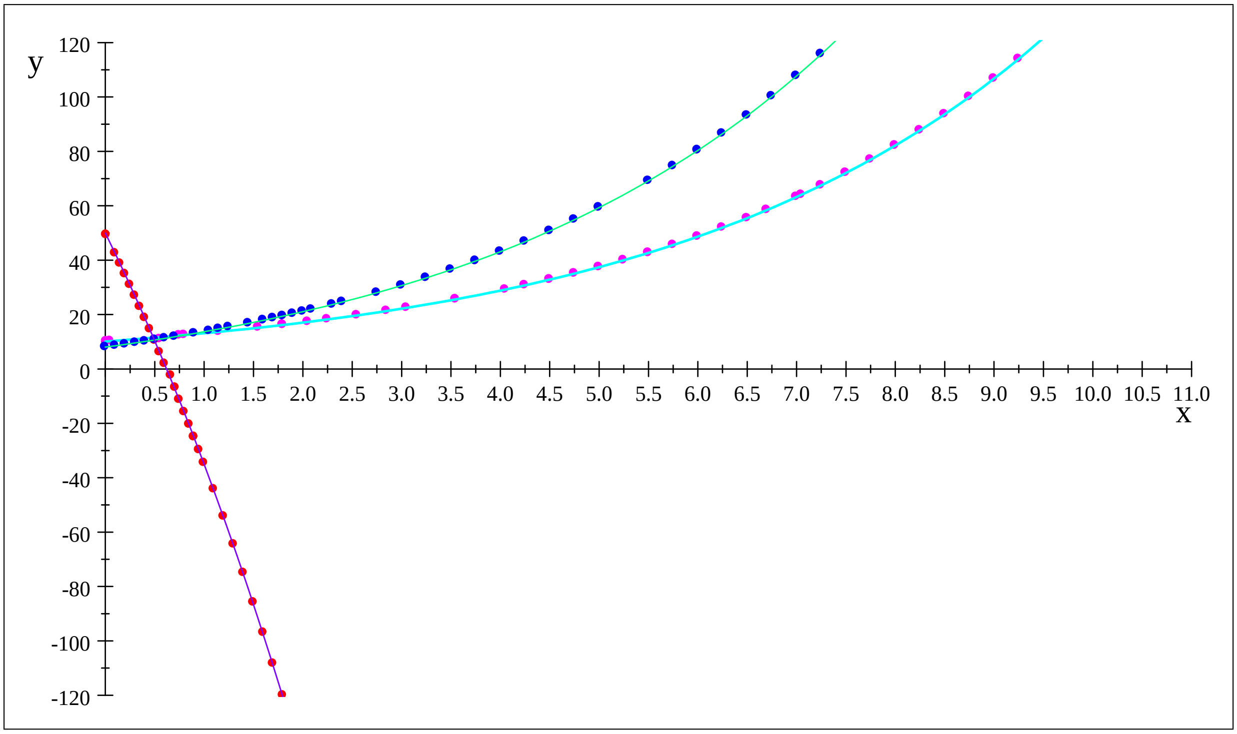


Figure 4

———————— (La solution par la méthode de perturbation de l'homotopie).

. . . . (La solution par la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre).

Annexe

La méthode de Runge Kutta d'order quatre:

Un système différentiel d'ordre n peut toujours s'écrire où t est la variable indépendante et x une fonction inconnue de t qui prend ses valeurs dans l'espace vectoriel réel de dimension n. La fonction$f(x,t)$ décrit les équations différentielles.

Quand t est le temps on dit que x est le vecteur d'état et que ses composantes sont les variables d'état.La variable indépendante t peut très bien figurer dans les équations, c'est-à-dire dans la fonction $f(x,t)$;il faut pour cela que t soit une composante du vecteur x et on indiquera dans la fonction $f(x,t)$ que sa dérivée vaut un. Pour intégrer numériquement un système différentiel, la méthode de Runge-Kuttad'ordre 4, très utilisée, part d'un état initial $x_0(t)$ et, le pas d'intégration h étant donné, elle calcule itérativement:

$$x_1(t),\ x_2(t), x_3(t), x_4(t), ...$$

telle que: $x_i(t) = x_0(t + hi\ )$

En sollicitant la fonction $f(x,t)$ quatre fois à chaque pas h. elle est précise quand h est suffisamment petit : l'erreur cumulée entre deux valeurs de t fixées est approximativement proportionnelle à la puissance 4 de h. Mais si h est trop grand la méthode diverge, donnant des résultats faux.

Cet article présente des fonctions qui la mettent en oeuvre quel que soit le système différentiel.Ces fonctions ont quelque longueur, mais on les entre une fois pour toutes dans une bibliothèque.

On les copie pour chaque application, et la longueur des fonctions qu'il faut écrire est déterminée par celle du système différentiel à intégrer. Le vecteur d'état est géré suivant la méthode décrite dans l'article.

L'algorithme de méthode RUNGE-KUTTA d'ordre 4

Soit l'équation:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t)$$

La méthode du point milieu est une des méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, et utilise le schéma d'approximation suivant :

$$\begin{aligned}
k_1 &= hf(x_i, t_i) \\
k_2 &= hf\left(x_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_i + \frac{k_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\
k_4 &= hf(x_i + k_3, t_i + h) \\
x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4)
\end{aligned}$$

soit le système des équations:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y,t) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y,t) \end{cases}$$

La méthode du point milieu est une des méthode de Runge-Kutta d'ordre 4, et utilise le schéma d'approximation suivant :

$$
\begin{aligned}
k_1 &= hf\left(x_i, y_i, t_i\right) \\
k_2 &= hf\left(x_i + \frac{k_1}{2}, y_i + \frac{m_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\
k_3 &= hf\left(x_i + \frac{k_2}{2}, y_i + \frac{m_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\
k_4 &= hf\left(x_i + k_3, y_i + m_3, t_i + h\right) \\
x_{i+1} &= x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4) \\
m_1 &= hf\left(x_i, y_i, t_i\right) \\
m_2 &= hg\left(x_i + \frac{k_1}{2}, y_i + \frac{m_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\
m_3 &= hg\left(x_i + \frac{k_2}{2}, y_i + \frac{m_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right) \\
m_4 &= hg\left(x_i + k_3, y_i + m_3, t_i + h\right) \\
y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(m_1 + 2(m_2 + m_3) + m_4)
\end{aligned}
$$

programme en Fortran 77

problème 1

```
program Runge Kutta
        real x(10001),p(10001),s(10001),t(10001) ,k3(10000)
        real m1(10000),m2(10000),m3(10000),m4(10000),k1(10000),k2(10000)
              real  h,a,b,c,n3(10000),n4(10000),n1(10000),n2(10000),k4(10000)

        integer i
              a=0.262
             b=-7.35
              c= 0.492
              h=0.001
        write(*,*)' le systeme des equation differentielle ordinare est :'
        write(*,*)' ',' dx/dt=0.262x'
        write(*,*)' ','ds/dt=-6.55x -1.64 dp/dt'
        write(*,*)' ','dp/dt=0.492x '
        write(*,*)'donner x(1),s(1) etp(1) '
4       read(*,*) x(1),s(1) ,p(1)
         t(1)=0
               do 1 i=1,10000
                        t(i+1)=t(i)+h
                      k1(i+1)=h*a*x(i)
                    k2(i+1)=h*a*(x(i)+k1(i+1)/2)
                     k3(i+1)=h*a*(x(i)+k2(i+1)/2)
                     k4(i+1)=h*a*(x(i)+k3(i+1))
                      x(i+1)=x(i)+(k1(i+1)+2*(k2(i+1)+k3(i+1))+k4(i+1))/6
1              continue
```

```
do 2 i=1,10000
t(i+1)=t(i)+h
m1(i+1)=h*b*x(i)
m2(i+1)=h*b*(x(i)+m1(i+1)/2)
m3(i+1)=h*b*(x(i)+m2(i+1)/2)
m4(i+1)=h*b*(x(i)+m3(i+1))
s(i+1)=s(i)+(m1(i+1)+2*(m2(i+1)+m3(i+1))+m4(i+1))/6
2 continue
do 3 i=1,10000
t(i+1)=t(i)+h
n1(i+1)=h*c*x(i)
n2(i+1)=h*c*(x(i)+n1(i+1)/2)
n3(i+1)=h*c*(x(i)+n2(i+1)/2)
n4(i+1)=h*c*(x(i)+n3(i+1))
p(i+1)=p(i)+(n1(i+1)+2*(n2(i+1)+n3(i+1))+n4(i+1))/6
3 continue
do 5 i=1,10001
open(6,file='resol x.dat',status='old')
write(6,*) t(i),x(i)
open(7,file='resol s.dat',status='old')
write(7,*) t(i),s(i)
open(8,file='resol p.dat',status='old')
write(8,*)t(i),p(i)
5 continue
close(6)
close(7)
close(8)
end
```

Nous appliquons la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 avec $h = 0.001, \beta = 0.01, \gamma = 0.02$ et la condition initial

$$\begin{aligned} n_1 &= 20 \\ n_2 &= 15 \\ n_3 &= 10 \end{aligned}$$

La résultat donnée dans les tableaux suivantes:

Nous appliquons la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 avec $h = 0.001, \beta = 0.01, \gamma = 0.02$ et la condition initial

$$\begin{aligned} n_1 &= 30 \\ n_2 &= 50 \\ n_3 &= 20 \end{aligned}$$

problème 2

```
program      Runge Kutta 2
      real x(100),y(100),z(100),t(100)
      real m1(100),m2(100),m3(100),m4(100),k1(100),k2(100),k3(100)
      real j,h,D,R,n3(100),n4(100),n1(100),n2(100),k4(100)
      integer i
        write(*,*)' le systeme des equation differentielle ordinare est :'
        write(*,*)' ',' dx/dt=R xy'
        write(*,*)' ','dy/dt=R xy - D y '
        write(*,*)' ','dz/dt=D y'
       write(*,*)'donner D et R '
         read(*,*)D,R
        write(*,*)' le systeme des equation differentielle ordinare est :'
        write(*,*)' ',' dx/dt=',R ,'xy'
        write(*,*)' ','dy/dt=',R,' xy -', D,' y '
        write(*,*)' ','dz/dt=',D, 'y'
1      write(*,*)'donner x(1) , y(1), z(1) et h'
          read(*,*)x(1),y(1),z(1),h
       write(*,*) 'x(1)=',x(1)      ,'y(1)=',y(1),'z(1)=',z(1),'h=',h
            t(1)=0
   do   2       i=1,99
           t(i+1)=t(i)+h
             k1(i+1)=h*R*x(i)*y(i)
             m1(i+1)=k1(i+1)-h*D*y(i)
             k2(i+1)=h*R*(x(i)+k1(i+1)/2)*(y(i)+m1(i+1)/2)
             m2(i+1)=k2(i+1)-h*D*(y(i)+m1(i+1)/2)
             k3(i+1)=h*R*(x(i)+k2(i+1)/2)*(y(i)+m2(i+1)/2)
             m3(i+1)=k3(i+1)-h*D*(y(i)+m2(i+1)/2)
```

```
                  k4(i+1)=h*R*(x(i)+k3(i+1))
                  m4(i+1)=k4(i+1)-h*D*(y(i)+m3(i+1))
                   x(i+1)=x(i)+(k1(i+1)+2*(k2(i+1)+k3(i+1))+k4(i+1))/6
                 y(i+1)=y(i)+(m1(i+1)+2*(m2(i+1)+m3(i+1))+m4(i+1))/6
2            continue
      do  3   i=1,99
             t(i+1)=t(i)+h
             n1(i+1)=h*D*y(i)
             n2(i+1)=h*D*(y(i)+n1(i+1)/2)
             n3(i+1)=h*D*(y(i)+n2(i+1)/2)
              n4(i+1)=h*D*(y(i)+n3(i+1))
             z(i+1)=z(i)+(n1(i+1)+2*(n2(i+1)+n3(i+1))+n4(i+1))/6
3       continue
             write(*,*)'la valeur de x(t) ',(t(i),x(i),i=1,100)
             write(*,*)'la valeur de y(t)',(t(i),y(i),i=1,10)
             write(*,*)'la valeur de z(t)',(t(i),z(i),i=1,100)

             read(*,*)j
         if  (j.eq.5)  then
                 goto 1
         endif
    end
```

Conclusion

Le problème de la modélisation cinétique de la fermentation d'acide lactique peut ètre modéliser comme un système des équations différentielles, on utilise deux méthodes pour résoudre ce problème.

La première méthode est celle de perturbation de l'homotopie qui est introduit par JI. Huan He en 1998 et la deuxième la méthode de Runge Kutta d'ordre quatre, J. Biazar, M.Tongo, E. Babolian et R. Islam [1] on traite le même problème en utilisant la méthode de décomposition d'Adomian.

Les résultats trouver confirmer ceux de J.Bizar, E. Babolian, M.Tongo et R. Islam.

Bibliographie

[1] J.Bizar, M.Tongo, E. Babolian et R. Islam, Solution of the kanetic modeling of lactic acid fermentation decomposition method, Applied Mathematics and Computation 144 (2003) 433-439.

[2] JI. Huan He, Homotopy perturbation technique, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg,178 (1999), 257-262.

[3] JI. Huan He, A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for nonlinear problems, Int. J. Non-Linear Mech, 35 (2000), 37-43.

[4] JI. Huan He, Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique, Appl. Math. Comput, 135 (2003), 73-79.

[5] JI. Huan He, Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul, 6 (2005), 207-208.

[6] JI. Huan He, Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, Chaos Solitons Fractals, 26 (2005), 695-700.

[7] JI. Huan He, Homotopy perturbation method for solving boundary value problems, Phys. Lett. A, 350 (2006), 87-88.

[8] J. H. He, Non-Perturbative Methods for Strongly Nonlinear Problems, Die Deutsche bibliothek, Germany, 2006.

[9] J. H. He, Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations, Int. J. Modern Phys. B, 20 (2006), 1141-1199.