UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles et application

Par
Djiab somia

Sujet

Principes de minimisation et applications sur des problèmes aux limites

Date de soutenance : 29 mai 2017

Devant le jury :

Mr. A. Saâdi	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. A. Mokhtari	Prof. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. B. Bougherara	Prof. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2016 / 2017

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, Mon Dieu qui m'a donné la force de rediger ce modeste travail.

Un grand merci à mon encadreur: *Dr. A. Mokhtari*, qui est toujours à nos côtés pour nous consulter, et nous guider, durant toute la période de la préparation de cette recherche.

Je remercie les membres de jury "*A. Saâdi* & *B. Bougherara* " , pour l'honneur qu'ils me font en participant au jugement de ce travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers; ma famille qui ont en un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Merci.

Notations

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert.

$\overline{\Omega}$ l'adhérence de Ω.

$\partial\Omega$ frontière de Ω.

$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ est mesurable : } \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\}.$

$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R},\ f \text{ est mesurable, et } \exists c > 0,\ |f(x)| < c \text{ p.p. sur } \Omega\}.$

$\mathcal{D}(\Omega)$ espaces des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω, à support compact dans Ω.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right).$

$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$

$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_i \,(i = 1, \ldots, n) \text{ tel que } \int\limits_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int\limits_{\Omega} g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right\}$

$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega), \nabla u \in L^2(\Omega)\}$

$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega\}$

E^* espace dual de E.

$\langle .,. \rangle_{E^* \times E}$ le crochet de dualité.

$\langle .,. \rangle$ le produit scalaire.

$\rightharpoonup$ convergence faible.

$\hookrightarrow$ si X et Y sont deux espaces normés, on écrit $X \hookrightarrow Y$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est continue.

$\hookrightarrow\hookrightarrow$ pour signifier que X est inclus dans Y et que l'injection canonique de X dans Y est compacte.

p.p.t presque partout.

$C^1(C, \mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions différentiables de $C \to \mathbb{R}$.

$B(0, R) = \{x \in E, \ \|x\|_E \leq R\}.$

Table des matières

Introduction

Les problèmes aux limites associés aux équations différentielles jouent un rôle important dans la théorie de la physique mathématique.

Le but de ce travail est d'étudier l'existence, unicité des solutions faibles pour certains problèmes aux limites et ceci en utilisant des techniques qui sont basées sur les méthodes variationnelles.

Les méthodes variationnelles ont une longue histoire (voir [4]) qu'est probablement originaire du problème de brachistochrone posé en 1696 et résolu par Newton et Leibniz, ont ensuite été initiées en tant que sujet à part entière par les frères Bernoulli Jakob et Johann.

L'idée fondamentale pour établir l'existence de solution est l'interprétation d'un problème différentielle écrit abstraitement comme

$$\mathcal{D}(u) = 0$$

qui sera désigné formulation variationnelle, en d'autres termes, en considérant une fonctionnelle appropriée J définie sur un espace de fonctions E telle que

$$J'(u) = 0$$

où J' est le différentiel de J dans sens qu'on va précises, et qu'elle vérifie

$$\mathcal{D}(u) = 0 \Leftrightarrow J'(u) = 0$$

Voir ([6]; Chapitre 10 & 11) pour plus de détails.

Notre objectif de ce mémoire est détaillé de certains résultats afin de les rendre plus claires pour les lecteurs.

Pour cela, nous avons dvisé ce travail aù trois chapitres, qui sont :

• Le premier chapitre de façon général est représenté des résultats fondamentales dans l'analyse fonctonnelle: l'espaces fonctionnelles "espace de Lebsuge, espace de Sobelev", injections de Sobelev et définitions général sur les fonnctionnelles; convexe, la convergence, et la semi-continuité des fonctionnelles.

• Le deuxième chapitre contient quelques notions et définitions sur la différentiabilité, points extremas, points critiques et certains résultats d'existence des points critiques d'une fonctionnelle.

• Le dernier chapitre est consacré quelques principes de minimisation et ses applications sur des problèmes aux limites linéaires et non linéaires suivants:

$$(P_1): \begin{cases} -\triangle u + q(x)u &= h(x) \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et $h \in L^2(\Omega)$ et $q \in L^\infty(\Omega)$ satisfaire $q(x) \geq 0$ p.p.t dans Ω ou bien pour $q \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$.

Et

$$(P_3): \begin{cases} -\triangle u &= f(x,u) \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ et f est fonction de Carathédory satisfait quelques hypothèses qu'on les vera dans chapitre 3.

Finalement, on rédige une conclusion générale qui résume ce travail.

Chapitre 1

Quelques outils préliminaires

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques outils de base qui sera utiliser dans ce que suit.

1.1 Espaces fonctionnelles

1.1.1 Les espaces L^p

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, muni de la mesure de Lebesgue dx [2].

Définition 1.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. On note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions f définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ et mesurables au sens de Lebesgue sur Ω, telles que:*

$$\begin{array}{ll} \int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx < +\infty & si \;\; 1 \leq p < \infty \\ \exists c > 0, \;\; |f(x)| < c \;\, p.p. \;\, sur \; \Omega & si \quad p = +\infty \end{array}$$

On munit l'espace $L^p(\Omega)$ par la norme:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &= \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \; 1 \leq p < \infty \\ \|f\|_\infty &= \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \end{aligned}$$

Remarque 1.2 *L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace Hilbert avec le produit scalaire:*

$$(u, v) = \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

Proposition 1.3 (**Inégalité de Hölder**) *Soit* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$ *avec* $p \in [1, +\infty[$ *et* q *l'exposant conjugué de* p *c-à-d* $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, *alors*

$$\int_{\Omega} |fg| \, dx \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_{\Omega} |g|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Proposition 1.4 (**Inégalité de Hölder généralisé**) *Soit* $f \in L^p$ *et* $g \in L^q$ *avec* $p, q \in [1, +\infty[$ *et soit* $r > 0$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, *on a:*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Proposition 1.5 (**Inégalité de Minkowski**) *Soit* $p \in [1, +\infty[$. *Si* $f, g \in L^p$, *alors*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Théorème 1.6 (**Riesz – Fisher**) *L'espace de Lebesgue* L^p *est un espace de Banach, pour tout* $p \in [1, +\infty]$.

Remarque 1.7 1.*Pour tout* $p \in]1, +\infty[$: $L^p(\Omega)$ *sont réflixifs et séparables et* $(L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
2. $L^1(\Omega)$ *et* $L^\infty(\Omega)$ *ne sont pas réflixifs, ni séparables et* $(L^1(\Omega))^* = L^\infty(\Omega)$.

Remarque 1.8 *Soient* $q, p \in [1, +\infty[$, *et soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *telles que* $q < p$, *alors* $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. *De plus pour tout* $u \in L^p(\Omega)$ *on a*

$$\|u\|_{L^q} \leq C \|u\|_{L^p}, \; C > 0$$

Définition 1.9 *On désigne par* E^* *le dual (topologique)*[1] *de* E, E^* *est muni de la norme duale:*

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| \leq 1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\| = 1}} |f(x)|$$

Lorsque $f \in E^*$ *et* $x \in E$ *on notera généralement* $\langle f, x \rangle_{E^* \times E}$ *au lieu de* $f(x)$.

[1] l'espace des formes linéaires et continues sur E, $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

1.1.2 Espaces de Sobelev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, avec $p \in [1, +\infty[$, et q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Définition 1.10 [2]*L'espace de sobolev d'ordre* 1, $W^{1,p}(\Omega)$ *est l'ensemble suivante:*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega), \exists g_i \, (i = 1, \ldots, n) \quad \text{tel que} \quad \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_\Omega g_i \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \right\}$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach, quand on muni de la norme:*

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} &= \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p} \\ &\equiv \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

En particulier $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire:*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$$

et par suite, on a:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u, u)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

1.1.3 Espaces $H_0^1(\Omega)$

L'espace H_0^1 est muni du produit scalaire induit par H^1. De plus l'espace H_0^1 est un espace de Hilbert séparable.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de frontière $\partial\Omega$.

Théorème 1.11 *Soit* $u \in H^1(\Omega)$*, alors* $u \in H_0^1(\Omega)$ *si et seulement si* $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$*. Donc*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) : \; u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \right\}$$

Inégalité de Poincaré

Théorème 1.12 [2] *Soit* Ω *un borné, alors il existe une constante* $C_\Omega > 0$ *telle que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega) \tag{1.1}$$

Remarque 1.13

1. *L' inégalité* (1.1) *est vraie seulement que* Ω *est borné.*

2. *Sur* $H_0^1(\Omega)$ *la quantité* $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ *est une norme équivalente à la norme de* $H^1(\Omega)$, *en effet:*

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (C_\Omega + 1)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &\leq (C_\Omega + 1)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

Injection de Sobolev

Définition 1.14 *Soient* X *et* Y *de espaces. L'ecriture* $X \hookrightarrow Y$ *signifie que* X *est s'injecte de manière continue dans* Y, *c-à-d qu'il existe une constante* S *telle que:*

$$S\|u\|_Y \leq \|\nabla u\|_X \ , \quad \forall u \in X$$

Théorème 1.15 [2] *Supposons que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *est une ouvert borné de classe* C^1. *On a:*

$$\begin{array}{lllll} si & N \geq 3 & alors & H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega) & où \ \ 2^* = \dfrac{2N}{N-2} \\ si & N = 2 & alors & H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) & \forall q \in [2, +\infty[\\ si & N < 2 & alors & H^1(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega) & \end{array}$$

D'aprés la théorème de Rellich-Kondrachov (Voir [2]), on a:

Théorème 1.16 *Supposons que* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *est une ouvert borné de classe* C^1. *On a:*

$$\begin{array}{llllll} si & N \geq 3 & alors & H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) & \forall q \in [1, 2^*[& où \ \ 2^* = \dfrac{2N}{N-2} \\ si & N = 2 & alors & H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) & \forall q \in [1, +\infty[& \\ si & N < 2 & alors & H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\overline{\Omega}) & & \end{array}$$

Théorème 1.17 [2] *Un espace de Banach* E *est réflexif si et seulement si sa boule fermée est faiblement compacte.*

1.2 Quelques notions de convergence et de continuité

Soit E un espace de Banach

Définition 1.18 (***Convergence d'une suite***) [2] *Soit $(x_n)_n \subset E$ et $x \in E$. On dit que $(x_n)_n$ converge vers x (en norme) si $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_E = 0$, et on ecrit $x_n \longrightarrow x$ dans E.*

Le résultat suivant est de conséquence du théorème de Baire [2].

Théorème 1.19 (***Principe de la borne uniforme***) *et soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Si*

$$\forall x \in \Omega, \ \sup_{u\in E} \|u(x)\| < +\infty$$

Alors $\sup_{u\in E} \|u(x)\| < +\infty$.
Autrement dit, une borne ponctuelle implique une borne uniforme (en norme).

Définition 1.20 (***Convergence faible***) [2] *On dit qu'une suite $(x_n)_n \subset E$ converge faiblement vers x dans E, si*

$$\forall J \in E^*, \ \langle J, x_n\rangle \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle J, x\rangle$$

et on écrit $x_n \rightharpoonup x$.

Définition 1.21 [2] *Soient E et F deux espaces de Banach. Un opérateur $T : E \longrightarrow F$ est dit:*

1. ***Borné*** *si l'image de tout borné dans E par T est un borné de F .*
2. ***Continue*** *en $x \in E$ si pour toute suite $(x_n)_n \subset E$ qui converge vers x, $T(x_n)$ converge vers $T(x)$ dans F.*
3. ***Faiblement continue*** *en $x \in E$ si pour toute suite $(x_n)_n \subset E$ telle que $x_n \rightharpoonup x$ dans E, alors $T(x_n) \rightharpoonup T(x)$ dans F .*
4. ***Compact*** *s'il est continu pour toute suite $(x_n)_n$ bornée dans E, la suite $(T(x_n))$ admet une sous suite convergente.*

Définition 1.22 [2] *Soit C un sous-ensemble de E. On dit que C est faiblement fermé si pour tout $(u_n) \subset C$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ alors $u \in E$.*

Corollaire 1.23 [2] *Soit E un espace de Banach réflexif. Toute suite bornée $(x_n)_n \subset E$ contient une sous suite qui converge faiblement vers un élément $x \in E$.*

Théorème 1.24 (***Théorème de la convergence dominée de Lebesgue***) [2] *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $(f_n)_{n\geq 1}$une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$. On suppose que:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, *p.p.t dans* Ω.
2. *Il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega$. Alors $f \in L^1(\Omega)$ et*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n(x) = \int_{\Omega} f(x) \quad et \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\Omega)} = 0$$

1.2.1 Fonctions convexes

Définition 1.25 [8], [2]

- *On dit que $C \subset E$ est convexe si :*

$$\forall x, y \in C, \ \forall \lambda \in [0,1] \ : \qquad \lambda x + (1-\lambda)\, y \in C$$

- *Soit $F : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. On dit que F est convexe sur E si:*

$$F\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) \leq \lambda F\left(x\right) + (1-\lambda)\, F\left(y\right), \quad \forall \ x, y \in E, \forall \lambda \in [0,1] \tag{1.2}$$

- *F est dite strictement convexe si l'inégalité (1.2) est stricte $\forall x \neq y$ et $\lambda \in]0,1[$.*

Lemme 1.26 (***Lemme de Mazur***) [2] *Soit $C \subset E$ est convexe. Alors C est faiblement fermé si seulement s'il est fortement fermé.*

1.2.2 Semi-continuité

La semi-continuité inférieure est une proprité trés importante en optimisation, notamment que la semi-continuité inférieure d'une fonction sur un compact non vide assure l'existence d'un minimum global.

Soit E un espace de Banach [2], [8].

Définition 1.27 *Une fonctionnelle $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite:*

1. ***Semi-continue inférieurement*** *(s.c.i.) au point u_0, si pour toute suite $(u_n)_n \subset E$ telle que $u_n \longrightarrow u_0$, on a*

$$J(u_0) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n).$$

2. ***Faiblement semi-continue inférieurement*** *(f.s.c.i.) au point u_0, si pour toute suite $(u_n)_n \subset E$ telle que $u_n \rightharpoonup u_0$, on a*

$$J(u_0) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n).$$

Remarque 1.28 1. *Si J est continue en u_0, alors J est semi-continue inférieurement.*
2. *Si J est faiblement continue en u_0, alors J est faiblement semi-continue inferieurement.*
Pour plus d'explication, on a la forme suivant:

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Continue} & \Longleftarrow & \text{Faiblement continue} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
\text{Semi-continue inférieurement} & \Longleftarrow & \text{faiblement semi-continue inférieurement}
\end{array}
$$

Théorème 1.29 ([8], [2]) *Soit $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue et convexe, alors J est une fonction faiblement semi-continue inferieurement.*

Exemple 1.30 *On considère la fonctionnelle $J(u) = \|u\|^2_{H_0^1}$ definie sur un espace de Hilbert. La fonctionnelle J est (f.s.c.i) en tout $u_0 \in H_0^1$. En effet : soit u_n telle que $u_n \rightharpoonup u_0$, alors*

$$(u_n, u_0) \longrightarrow (u_0, u_0) = \|u_0\|^2_{H_0^1}$$

De plus

$$0 \leq \|u_n - u_0\|^2_{H_0^1} = (u_n - u_0, u_n - u_0) = \|u_n\|^2_{H_0^1} + \|u_0\|^2_{H_0^1} - 2\,(u_n, u_0)$$

On en déduit que

$$2\,(u_n, u_0) - \|u_0\|^2_{H_0^1} \leq \|u_n\|^2_{H_0^1}$$

Ceci montre que

$$\|u_0\|_{H_0^1} \leq \lim_{n\to\infty} \inf \|u_n\|_{H_0^1} \tag{1.3}$$

i.e.

$$J(u_0) \leq \lim_{n\to\infty} \inf J(u_n)$$

Chapitre 2

Différentiabilité et points extremas des fonctionnelles

2.1 Différentiabilité des fonctionnelles

Dans ce que suit, on introduit quelque notions sur la différentiablité des fonctionnelles sur un espace de Banach ([8], [5]).

Soit E est un espace de Banach et C un ouvert de E.

2.1.1 Gâteaux-différentiabilité

Définition 2.1 *On dit que $F : C \to \mathbb{R}$ est différentiable au sens de Gâteaux (G-différentiable) en $u \in C$; s'il existe $l \in E^*$ unique, tel que dans chaque direction $v \in E$ où $F(u+tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle DFu existe et on a :*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{F(u+tv) - F(u)}{t} = \langle l, v \rangle$$

On note $DFu := l$.

Exemple 2.2 *Soit $F : L^2(0,1) \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle définie par:*

$$F(u) = \int_0^1 |u(x)|^2 \, dx = \|u\|_{L^2}^2$$

on a

$$\langle DFu, v \rangle = 2\,(u, v)$$

En effet, soient $u, u+tv \in L^2(0,1)$, on a:

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{F(u+tv)-F(u)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t^2 \|v\|_{L^2}^2 + 2t\,(u,v)}{t} = 2\,(u,v)$$

Et

$$\begin{aligned} l : L^2(0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v \to l(v) &= 2\,(u,v) \end{aligned}$$

- l est linéaire et continue, alors $l \in (L^2(0,1))^* \equiv L^2(0,1)$. Donc F est G-différentiable.

Exemple 2.3 *Soit $F : L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ définie par:*

$$F(u) = \sin u$$

On a:

$$\langle DFu, v\rangle = \langle \cos u, v\rangle$$

En effet, fixons $v \in L^2(0,1)$ et que t assez voisin de 0, les fonction $\cos tv$ et $\sin tv$ sont de classe C^∞ alors

$$\cos tv = \cos 0 - tv \sin 0 + o(t)$$
$$\sin tv = \sin 0 + tv \cos 0 + o(t)$$

Soient $u, u+tv \in L^2(0,1)$, on a:

$$\begin{aligned} \sin(u+tv) &= \sin u \cos tv + \sin tv \cos u \\ &= \sin u + tv \cos u \end{aligned}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \left\| \frac{\sin(u+tv)-\sin u}{t} - \langle \cos u, v\rangle \right\|_{L^2}^2 = 0$$

L'application $v \to \langle \cos u, v\rangle$ est linéaire continue.

Donc F est G-différentiable avec

$$\langle DFu, v\rangle = \langle \cos u, v\rangle$$

2.1.2 Fréchet-différentiabilité

On introduit enfin la dérivée classique (ou la dérivée au sens de Fréchet).

i.e. On utilise la notation de Landau $o(x)$ pour désigner une fonction de x telle que $\lim_{\|x\|\to 0} \frac{o(x)}{\|x\|} = 0$.

Définition 2.4 *Une fonctionnelle $F : C \to \mathbb{R}$ est appelée Fréchet-différentiable (F-différentiable) en $u \in C$ s'il existe $l \in E^*$, tel que:*

$$\forall v \in C; \qquad F(u) - F(v) = \langle l, u - v\rangle + o(u - v).$$

Si F est différentiable, l est unique et on note $F'(u) := l$ et on a $F \in C^1(C, \mathbb{R})$.

Exemple 2.5 *Soit l'espace $E = C(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_\infty$, et soit*

$$\begin{aligned} F : \ & E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & u \to F(u(x)) = \int_\Omega u(x)dx \end{aligned}$$

et

$$\forall v \in E, \ F(u) - F(v) = \int_\Omega (u - v)(x)dx$$

Le dernier terme est linéaire et continue, et que

$$\lim_{u \to v} \left(F(u) - F(v) - \int_\Omega (u - v)(x)dx \right) = 0$$

alors on peut dire que

$$\langle F'(u), u - v\rangle = \int_\Omega (u - v)(x)dx$$

On notera que si F est différentiable au sens de Fréchet, alors F est continue.

En général il est plus commode de travailler avec la notion de G-différentiable, car on n'a qu'à considérer l'application $t \longrightarrow F(u + tv)$ (pour v fixé dans E) définie dans un intervalle $[0, \epsilon[$. C'est pour ne pas alourdir ce qui suit que l'on n'introduira pas des notations différentes pour distinguer la G-différentiable et la F-différentiable.

S'il y a risque de confusion, on précisera dans quel sens la notation $F'(u)$ doit être comprise. Une autre raison de ne pas introduire des notations différentes, c'est qu'il y a de façon naturelle un lien entre ces deux notions de différentiabilité.

En effet on a le résultat suivant :

Proposition 2.6 *Soit $F : C \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle continue et G-différentiable dans un voisinage de $v \in C$. On désigne par $DF(u)$ la G-différentiable de F en u et on suppose que l'application $u \to DF(u)$ est continue au voisinage de v. Alors*

$$F(u) = F(v) + \langle DF(v), u - v\rangle + o(u - v)$$

c'est à dire que F est F-différentiable et sa dérivée (classique) coïncide avec $DF(v)$.

Démonstration. Voir [5]. ■

Remarque 2.7 *Si F est Fréchet-différentiable en u, alors F est Gâteaux-différentiable en u (La réciproque est fausse).*

Exemple 2.8 *Dans l'exemple (2.3), on suppose que*

$$u(x) = 0, \ \ v_n(x) = \begin{cases} 2n\pi & si \ x \in [0, n^{-3}] \\ 0 & si \ non \end{cases} , \forall n \in \mathbb{N}$$

On a

$$\cos(u) = 1, \ \ \sin(v_n) = 0, \ \ \|v_n(x)\|_{L^2(0,n^{-3})} = \frac{2}{\sqrt{n}}\pi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Pour montrer que DFu est Fréchet-différentiable, on montrer que:

$$\lim_{n\to 0} n \|\sin u - \sin v_n - \langle \cos v_n, u - v_n \rangle\|^2_{L^2(0,n^{-3})} = 0$$

Mais

$$\lim_{n\to 0} n \|\sin u - \sin v_n - \langle \cos v_n, -v_n \rangle\|^2_{L^2(0,n^{-3})} = \lim_{n\to 0} n \|v_n\|^2_{L^2(0,n^{-3})} = 4\pi^2$$

2.2 Extremas d'une fonctionnelle

Soit E est un espace de Banach et C un ouvert de E.

Définition 2.9 *Soit $J : C \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle. On dit que $u \in C$ est extrémum de J s'il existe un voisinage V_u de u tel que:*

$$J(v) \leq J(u), \quad \forall v \in V_u \Longleftrightarrow J \text{ est maximal en } u \tag{2.1}$$

ou

$$J(u) \leq J(v), \quad \forall v \in V_u \Longleftrightarrow J \text{ est minimal en } u \tag{2.2}$$

• *Lorsque l'inégalité (2.2) est vraie pour tout $v \in C$, on dit que J admet un minimum global en u.*

• *Si les inégalités (2.1) et (2.2) sont strictes pour $u \neq v$, on parle de extremum strict.*

• *Le mot extremum désigne un maximum ou un minimum.*

Définition 2.10 *Une suite minimisante d'une fonctionnelle $J : C \to]-\infty, +\infty]$ est une suite (u_k) telle que:*

$$\lim_{k\to+\infty} J(u_k) = \inf_C J(u)$$

2.3 Points critiques d'une fonctionnelle

Définition 2.11 *(Voir [5], [1]) Soient C un ouvert de l'espace de Banach E et on suppose que $J \in C^1(C, \mathbb{R})$.*

On dit que $u \in C$ est un ***point critique*** *de J, si*

$$J'(u) = 0.$$

Si u n'est pas un point critique, on dit que u est un point régulier de J.

Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une ***valeur critique*** *de J, s'il existe $u \in C$ tel que*

$$J(u) = c \quad \text{et} \quad J'(u) = 0.$$

Si c n'est pas une valeur critique, on dit que c est une valeur réguliére de J .

Théorème 2.12 [1] *Un point minimum local d'une fonctionnelle différentiable est un point critique.*

Démonstration. Soit $J : E \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle différentiable et

$$J(u) = \min_{v \in E} J(v)$$

Alors pour tout fixé $v \in E$, et considérons une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par

$$\varphi(t) = J(u + tv)$$

De plus φ est différentiable car J est différentiable

$$\varphi'(t) = J'(u + tv)v$$

comme u est un minumum de J, alors la fonction φ admet un minimum local si $t = 0$

$$0 = \varphi'(0) = J'(u)v$$

Donc

$$J'(u) = 0$$

Ceci est valable pour tous $v \in E$.

Donc u est une point critique de J. ∎

Théorème 2.13 [1] *Si $J : E \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle strictement convexe et différentiable, alors J admet au plus un point critique unique en E.*

Démonstration. Supposons que u est un point critique de J, et fixons tout $v \in E$, telle que $u \neq v$. On définit une fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par

$$\varphi(t) = J(u + t(v - u))$$

La fonction φ est différentiable et

$$\varphi'(t) = \langle J'(u + t(v - u)), v - u \rangle$$

et strictement convexe

$$\varphi(t) = J(u + t(v - u)) = J(tv + (1 - t)u) < tJ(v) + (1 - t)J(u)$$

alors $\varphi'(t)$ est strictement monotone s'implique que

$$\exists! t_0 \in \mathbb{R}, \ \varphi'(t_0) = 0$$

Il est facile de voir que

$$\varphi'(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \neq 0 & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

alors

$$\forall t \neq 0, \ \langle J'(u + t(v - u)), v - u \rangle \neq 0$$

Donc

$$\forall t \neq 0, \ J'(u + t(v - u)) \neq 0, \ \forall v \in E$$

■

Proposition 2.14 [1] (***Monotonie***) *Soit $J : E \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle différentiable, supposons*

$$\forall u, v \in E, \ \langle J'(u) - J'(v), u - v \rangle \geq 0 \tag{2.3}$$

Alors J est convexe. Si l'inégalité (2.3) stricte $\forall u \neq v$, alors J est strictement convexe.

Démonstration. Soient $u, v \in E$ fixé. Considérons l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par

$$\varphi(t) = -tJ(v) - (1 - t)J(u) + J(u + t(v - u))$$

La fonction φ est différentiable et

$$\varphi'(t) = -J(v) + J(u) + \langle J'(u + t(v - u)), v - u\rangle$$

La fonction φ vérifie les hypothèses du théorème de Rolle sur $[0, 1]$, alors il existe donc $t_0 \in]0, 1[$ tel que

$$\varphi'(t_0) = 0$$

Maintenent fixons $s < t$ on trouve

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) - \varphi'(s) &= \langle J'(u + t(v - u)) - J'(u + s(v - u)), v - u\rangle \\
&= \frac{1}{t - s}\left[J'(u + t(v - u)) - J'(u + s(v - u))\right] \\
&\quad \times \left[(u + t(v - u)) - (u + s(v - u))\right]
\end{aligned}$$

par hypothèse (2.3) le dernier terme de l'égalité précédente est ≥ 0, ce qui montre que la fonction φ' est une fonction croissante avec

$$\varphi'(t_0) = 0$$

On déduit alors que la foction φ' est négative sur $[0, t_0]$ et positive sur $[t_0, 1]$. La fonction φ est donc décroissante sur $[0, t_0]$ et croissante sur $[t_0, 1]$.

Comme

$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0$$

alors la fonction φ est négative sur $[0, 1]$ ce qui signifie que J est convexe.

φ est dite strictement croissante si l'inégalité (2.3) est stricte $\forall u \neq v$, alors J est strictement convexe. ■

Chapitre 3

Calcul des variations et points critiques

Nous présentons dans la première partie des principes qui nous permet de minimiser une fonctionnelle ou bien de trouver un point critique dans le cas de différentiabilité, puis on applique ces principes sur des problèmes aux limites dans la deuxième partie.

Soit E un espace de Banach E, et soit $J : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle.

Définition 3.1 [1] *Une fonctionnelle $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ est coercive si:*

$$\lim_{\|u_k\|_E \rightarrow +\infty} \|J(u_k)\| = +\infty$$

3.1 Principe de minimisation 1

Théorème 3.2 [1] *Soit E un espace de Banach réflexif, soit $J : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonctionnelle continue, convexe et coercive, alors J admet un point minimum global.*

Démonstration. Si $J \equiv +\infty$ sur E alors là rien à prouver. Supposons que $J \not\equiv +\infty$ et on note $\alpha = \inf_{u \in E} J(u) \geq -\infty$. Soit $\{u_k\} \subset E$ une suite minimisante $\left(\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) = \alpha\right)$.

Maintenant, supposons qu'on:

(i) la suite $\{u_k\}$ est uniformement bornée dans E.

(ii) il existe une sous suite $\{u_{nk}\}$ tels que $u_{nk} \rightharpoonup \hat{u}$, pour certains $\hat{u} \in E$.

D'aprés le théorème (1.29) J est $(f.s.c.i)$ on a:

et par la preuve du théorème précédent, on a:

$$J(\hat{u}) \leq \lim_{k\to\infty} \inf J(u_{nk}) = \lim_{k\to\infty} J(u_{nk}) = \alpha \tag{3.1}$$

et comme $J(\hat{u}) \geq \alpha$ et d'aprés l'inégalité (3.1), alors on a:

$$J(\hat{u}) = \inf_E J$$

Ceci montre que $\alpha = J(\hat{u})$. Donc $\hat{u}$ est un point minimum global de J.

Ainsi, on justifier (i) et (ii) pour compléter la preuve

Preuve de (i) : Par la définition de coercivité de J, si $J(u_k) \nrightarrow \infty$ car $\alpha < +\infty$ implique que $\|u_k\| \nrightarrow \infty$.

Preuve de (ii) : Par (i) tout suite $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E qui est réflixif, d'où $\|u_k\| < \infty$ alors il existe une sous-suite convergente noté aussi $\{u_k\}$ telle que $u_k \rightharpoonup \hat{u}$, avec $\lim_{k\to\infty} J(u_k) = \alpha$. ∎

3.2 Principe de minimisation 2

Théorème 3.3 [3] *Soient E un espace de Banach réflexif, et C un sous-ensemble faiblement fermé de E. Une fonctionnelle J définie sur C tells que:*

(i) $\lim_{\|u\|_C\to+\infty} J(u) = +\infty$.

(ii) *J est $(f.s.c.i.)$*

Alors J est bornée inférieurement sur C et atteint sa borne inférieure en un point $\hat{u} \in C$.

Démonstration. Comme la preuve précédant. Supposons que $J \ncong +\infty$ et on note $\alpha = \inf_{u\in C} J(u) \geq -\infty$. Soit $\{u_k\} \subset C$ une suite minimisante, et sous les hypothèses (i) et (ii) du théorème précédent

Depuis $u_{nk} \rightharpoonup \hat{u}$ par (ii) et C est faiblement fermé alors $\hat{u} \in C$, J est $(f.s.c.i)$ et avec même principe

$$J(\hat{u}) = \inf_C J$$

Ainsi, la justification de (i) est rest le même et pour (ii):

Preuve de (ii) : E est réflexif, alors par la théorème (1.17) la boule fermé $\overline{B(0,R)}$ de E est faiblement compact. Depuis (u_k) est bornée dans E. D'aprés (i) alors $u_k \subset \overline{B(0,R)}$, pour certains R ($\|u_k\| \leq R$).

Donc la suite (u_k) admet une sous suite convergens faiblement vers $\hat{u} \in \overline{B(0, R)} \subset E$. ∎

Un sous-ensemble convexe fermé et bornée de E est faiblement compact. Alors en peut remplace remplace $\overline{B_R}$ par $\overline{B_R} \cap C$ dans théorème (3.3).

Corollaire 3.4 [3] *Soit un sous-ensemble convexe fermé $C \subset E$. Sous les hypothèses (i) et (ii) du théorème (3.2), il existe $u_0 \in C$ tels que $J(u_0) = \inf_C J$.*

Théorème 3.5 [1] *Si $J : E \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle strictement convexe, alors J admet au plus un point minimum unique en E.*

Démonstration. Supposons que J admet deux différentes minimum global u_1 et u_2 dans E. Par strictement convexité

$$\min_{u \in E} J(u) \leq J\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2) = \min_{u \in E} J(u)$$

Une contradiction. ∎

3.3 Applications

Dans cette section, on applique les résultats précédents à des problèmes aux limites.

3.3.1 Problèmes linéaires

On commence par le problème linéaire de Dirichlet suivant: Soit $q \in L^\infty(\Omega)$ satisfaire $q(x) \geq 0$ p.p.t dans Ω.

Alors pour tout $h \in L^2(\Omega)$

$$(P_1) : \begin{cases} -\Delta u + q(x)u & = h(x) \quad \text{dans } \Omega \\ u & = 0 \quad\quad\; \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Définition 3.6 *On dit qu'une fonction u est une solution faible du problème (P_1) si et selment si*

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega q(x)uvdx = \int_\Omega h(x)vdx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Théorème 3.7 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Le problème (P_1) admet une solution faible unique.*

Démonstration. On considère la fonctionnelle $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} q(x)u^2dx - \int\limits_{\Omega} h(x)udx$$

On remarque que notre fonctionnelle est bien définie, en effet:

puisque $u \in H_0^1(\Omega)$ alors

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx < \infty$$

et comme $q \in L^\infty(\Omega), u \in L^2(\Omega)$ alors

$$\int\limits_{\Omega} q(x)u^2dx \leq \|q\|_\infty \int\limits_{\Omega} |u|^2\,dx < \infty$$

et comme $h \in L^2(\Omega), u \in L^2(\Omega)$ alors $h \times u \in L^1(\Omega)$ $\left(\int\limits_{\Omega} h(x)udx < \infty\right)$.

1. J **est F-différentiable**:

$(a\ )$ J **est G-différentiable**: Pour tout $u, u+tv \in H_0^1(\Omega)$, ($t \in \mathbb{R}$ assez petit)

$$J(u+tv)-J(u) = t\left(\int\limits_{\Omega} \nabla u.\nabla vdx + \int\limits_{\Omega} q(x)uvdx - \int\limits_{\Omega} h(x)vdx\right)+\frac{t^2}{2}\left(\int\limits_{\Omega} |\nabla v|^2\,dx + \int\limits_{\Omega} q(x)v^2dx\right)$$

alors

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(J(u+tv)-J(u)\right) = \int\limits_{\Omega} \nabla u.\nabla vdx + \int\limits_{\Omega} q(x)uvdx - \int\limits_{\Omega} h(x)vdx$$

on note:

$$\begin{array}{lll} DJu & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & v & \to \langle L, v\rangle = \int\limits_{\Omega} \nabla u.\nabla vdx + \int\limits_{\Omega} q(x)uvdx - \int\limits_{\Omega} h(x)vdx \end{array}$$

On a:

- DJu est linéaire (clair)

- DJu est continue: par l' inégalité de Hölder (1.3) on a:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} q(x)\,|uv|\,dx &\leq \|q\|_\infty \int\limits_{\Omega} |uv| \leq \|q\|_\infty \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ \int\limits_{\Omega} |h(x)v|\,dx &\leq \|h\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ \int\limits_{\Omega} |\nabla u.\nabla v|\,dx &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

L'inégalité de Poincaré (1.12) donne

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \forall u \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\|_{L^2(\Omega)} &\leq C_\Omega \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{aligned}$$

alors pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} |\langle DJu, v\rangle| &\leq \int_\Omega |\nabla u.\nabla v|\, dx + \int_\Omega q(x)\, |uv|\, dx + \int_\Omega |h(x)v|\, dx \\ &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + C_\Omega^2 \|q\|_\infty \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= C \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

où $C = \left((1 + \|q\|_\infty C_\Omega^2)\, \|u\|_{H_0^1(\Omega)} + \|h\|_{L^2(\Omega)}\right)$.

Donc J est G-différentiable en $H_0^1(\Omega)$.

(b) Maintenant pour vérifie que J est F-différentiable, il suffit de montrer que DJ :

$$\begin{aligned} DJ: \quad H_0^1(\Omega) &\longrightarrow (H_0^1(\Omega))^* \\ u &\rightarrow DJu : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\qquad\qquad\qquad v \rightarrow \langle DJu, v\rangle \end{aligned}$$

est continue, en effet: Soit $(u_k) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que $u_k \longrightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$ c-à-d

$$\lim_{k\to+\infty} \|u_k - u\|_{H_0^1(\Omega)} = 0$$

on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \|DJ(u_k) - DJ(u)\|_{(H_0^1(\Omega))^*} = 0$$

avec

$$\|DJ(u_k) - DJ(u)\|_{(H_0^1(\Omega))^*} = \sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|=1}} |\langle DJ(u_k) - DJ(u), v\rangle|$$

En effet, soit $v \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|v\| = 1$

$$
\begin{aligned}
|\langle DJ(u_k) - DJ(u), v\rangle| &= |\langle DJ(u_k), v\rangle - \langle DJ(u), v\rangle| \\
&= \left| \int_\Omega \nabla u_k.\nabla v dx + \int_\Omega q(x) u_k v dx - \int_\Omega h(x) v dx \right. \\
&\quad \left. - \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega q(x) u v dx + \int_\Omega h(x) v dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega \nabla(u_k - u)\nabla v dx + \int_\Omega q(x)(u_k - u) v dx \right| \qquad (3.2) \\
&\leq \int_\Omega |\nabla(u_k - u)| |\nabla v| dx + \sup_{x\in\Omega} |q(x)| \int_\Omega |u_k - u| |v| dx \\
&\leq \|\nabla(u_k - u)\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} + \|q(x)\|_\infty \|u_k - u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \\
&\leq \|u_k - u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + C_\Omega \|q(x)\|_\infty \|u_k - u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} \\
&= (1 + C_\Omega \|q(x)\|_\infty) \|u_k - u\|_{H_0^1}
\end{aligned}
$$

Alors

$$\sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|=1}} |\langle DJ(u_k) - DJ(u), v\rangle| \leq C' \|u_k - u\|_{H_0^1}$$

où $C' = (1 + C_\Omega \|q(x)\|_\infty)$ et

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|=1}} |\langle DJ(u_k) - DJ(u), v\rangle| = 0$$

Ce qui montre que:

$$\lim_{k\to+\infty} \|DJ(u_k) - DJ(u_k)\|_{(H_0^1(\Omega))^*} = 0$$

Donc DJ est continue.

D'aprés $(a\ )$ et (b) : J est différentiable alors J est cotinue et on pose $DJ = J'$, plus précisément

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uvdx - \int_{\Omega} h(x)vdx, \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega)$$

Remarque: Si u un point critique de J alors u est une solution faible de (P_1).

En effet, u un point critique de J signifie que: $J'(u) = 0$, on a:

$$\begin{aligned} J'(u) = 0 &\Longleftrightarrow \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) : \langle J'(u), v\rangle = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx + \int_{\Omega} q(x)uvdx - \int_{\Omega} h(x)vdx = 0 \end{aligned}$$

u est une solution faible de (P_1).

2. J est strictement convexe: D'aprés la proposition (2.14) , il suffit de montrer que J' est strictement monotone, on a pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq v$

$$\begin{aligned} \langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle &= \int_{\Omega} \nabla u.\nabla(u-v)dx + \int_{\Omega} q(x)u(u-v)dx - \int_{\Omega} h(x)(u-v)dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \nabla v.\nabla(u-v)dx - \int_{\Omega} q(x)v(u-v)dx + \int_{\Omega} h(x)(u-v)dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla(u-v)|^2 dx + \int_{\Omega} q(x)(u-v)^2 dx \\ &\geq \int_{\Omega} |\nabla(u-v)|^2 dx > 0 \end{aligned}$$

J' est strictement monotone alors J est strictement convexe.

3. J est coercive: Comme $\frac{1}{2}\int_{\Omega} q(x)u^2dx \geq 0$ et en utilisant le fait que $-h.u \geq |h.u|$

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \int_{\Omega} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - h(x)udx \\ &\geq \int_{\Omega} \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - |h(x)|\,|u|\,dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - c\|u\|_{H_0^1} \end{aligned}$$

On a:

$$\lim_{\|u\|\to+\infty} \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - c\|u\|_{H_0^1} = +\infty \Longrightarrow \lim_{\|u\|\to+\infty} J(u) = +\infty$$

et par conséquence J est coercive.

Finalement d'aprés les théorèmes (3.2), (3.5) et (2.12) J admet un point critique unique.

■

On peut garder le même résultat dans théorème (3.7) si on remplace la bornétude de q par une condition plus faible, on a le résultat suivant:

Théorème 3.8 *Soit Ω un ouvert bornée de $\mathbb{R}^N$ et soit $h \in L^2(\Omega)$ et soit $q \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega)$ avec*

$$\|q\|_{L^{\frac{N}{2}}} \leq S$$

alors le problème (P_1) admet une solution faible unique.

Remarque 3.9 *On note par S la plus grand constante qui garanti l'injection continue de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^{2^*}(\Omega)$ avec $2^* = \dfrac{2N}{N-2}$; c-à-d*

$$S \|u\|_{L^{2^*}}^2 \leq \|u\|_{H_0^1}^2, \quad \forall u \in \ H_0^1(\Omega) \tag{3.3}$$

Démonstration. On considère la fonctionnelle $J : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ définit par:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega q(x)u^2 dx - \int_\Omega h(x)udx$$

Evidant de voir que J est bien définit, plus précisément : Comme $q \in L^{\frac{N}{2}}(\Omega), u \in H_0^1(\Omega)$, par l'inégalité de Hölder généralisé (1.4)

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega q(x)u^2 dx\right| &\leq \left(\int_\Omega |q(x)|^{\frac{N}{2}} \, dx\right)^{\frac{2}{N}} \left(\int_\Omega |u)|^{\frac{2N}{N-2}} \, dx\right)^{\frac{N-2}{2N}} \\ &= \|q\|_{L^{\frac{N}{2}}} \|u\|_{L^{2^*}}^2 < \infty \end{aligned}$$

1. J **est différentiable**:

$(a\ )$ J **est G-différentiable**: Pour tout $u, u + tv \in H_0^1(\Omega)$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(J(u+tv) - J(u)\right) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega q(x)uvdx - \int_\Omega h(x)vdx$$

On note:

$$\begin{aligned} DJu : \ \ H_0^1(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v \quad &\rightarrow \langle DJu, v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega q(x)uvdx - \int_\Omega h(x)vdx \end{aligned}$$

On a:

- DJu est linéaire (clair)

- DJu est continue: Par l' inégalité de Hölder généralisé (1.4) et l'inégalité (3.3) , on a:

$$\begin{aligned}
\|u.v\|_{L^{\frac{N}{N-2}}} &\leq \|u\|_{L^{2^*}} \|v\|_{L^{2^*}} \\
&\leq \frac{1}{S} \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{S} \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

et par l'inégalité de Hölder (1.3)

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega q(x) uv dx \right| &\leq \|q\|_{L^{\frac{N}{2}}} \|u.v\|_{L^{\frac{N}{N-2}}} \\
&\leq \frac{1}{S} \|q\|_{L^{\frac{N}{2}}} \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
|\langle DJu, v\rangle| &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1} + \frac{1}{S} \|q\|_{L^{\frac{N}{2}}} \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + C_\Omega \|h\|_{L^2} \|v\|_{H_0^1} \\
&\leq C \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

ou $C = \|u\|_{H_0^1} + \frac{1}{S} \|q\|_{L^{\frac{N}{2}}} \|u\|_{H_0^1} + C_\Omega \|h\|_{L^2}$.
Donc J est G-différentiable en $H_0^1(\Omega)$.

(b) Maintenant pour vérifie que J est F-différentiable, il suffit de montrer que DJ :

$$\begin{array}{rcccl}
DJ: & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & (H_0^1(\Omega))^* & \\
& u & \rightarrow & DJu: & H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\
& & & & v \quad \rightarrow \langle DJu, v\rangle
\end{array}$$

est continue: Avec même manière que la preuve précédant l'inégalité (3.2) devient:

$$\begin{aligned}
|\langle DJ(u_k) - DJ(u), v\rangle| &\leq \|u_k - u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + \int_\Omega |q(x)| \, |(u_k - u) . v| \, dx \\
&\leq \|u_k - u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1} + \|q\|_{L^{\frac{N}{2}}} \|(u_k - u) . v\|_{L^{\frac{N}{N-2}}}
\end{aligned}$$

par l' inégalité de Hölder généralisé (1.4) et l'inégalité (3.3) , on a:

$$\begin{aligned}
\|(u_k - u) . v\|_{L^{\frac{N}{N-2}}} &\leq \|u_k - u\|_{L^{2^*}} \|v\|_{L^{2^*}} \\
&\leq \frac{1}{S} \|\nabla (u_k - u)\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\
&\leq \frac{1}{S} \|u_k - u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\left|\langle DJ(u_k) - DJ(u), v\rangle\right| &\leq \|u_k - u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} + \frac{1}{S}\|q\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|u_k - u\|_{H_0^1}\|v\|_{H_0^1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{S}\|q\|_{L^{\frac{N}{2}}}\right)\|u_k - u\|_{H_0^1}\end{aligned}$$

Alors

$$\sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|=1}} \left|\langle DJ(u_k) - DJ(u), v\rangle\right| \leq \left(1 + \frac{1}{S}\right)\|u_k - u\|_{H_0^1}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|=1}} \left|\langle DJ(u_k) - DJ(u), v\rangle\right| = 0$$

Alors

$$\lim_{k\to+\infty}\|DJ(u_k) - DJ(u_k)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^*} = 0$$

Donc DJ est continue

D'aprés $(a\ )$ et (b) : J est différentiable alors J est continue et on pose $DJ = J'$.

2. J est strictement convexe: D'aprés la proposition (2.14), il suffit de montrer que J' est strictement monotone, on a pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$, $u \neq v$

$$\begin{aligned}\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle &= \int_\Omega (\nabla(u-v))^2\,dx + \int_\Omega q(x)(u-v)^2 dx \\ &\geq \int_\Omega (\nabla(u-v))^2\,dx - \int_\Omega |q(x)|\,(u-v)^2 dx \\ &= \|u - v\|_{H_0^1}^2 - \|q\|_{L^{\frac{N}{2}}}\|u - v\|_{L^{\frac{N}{N-2}}}^2\end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Hölder généralisé (1.4) et l'inégalité (3.3) nous permet de voir que:

$$\|u - v\|_{L^{\frac{N}{N-2}}}^2 \leq \|u - v\|_{L^{2^*}}^2 \leq \frac{1}{S}\|u - v\|_{H_0^1}^2$$

alors

$$\langle J'(u) - J'(v), u - v\rangle \geq \left(1 - \frac{1}{S}\|q\|_{L^{\frac{N}{2}}}\right)\|u - v\|_{H_0^1} > 0$$

Ce qui montre que J' est strictement monotone et par suite J est strictement convexe.

3. J est coercive: on a $\|h(x)\|_{L^2} \leq c$

$$\begin{aligned}J(u) &\geq \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 - |q(x)|\,u^2 dx - \int_\Omega |h(x)|\,|u|\,dx \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{S}C_\Omega\|q\|_{L^{\frac{N}{2}}}\right)\|u\|_{H_0^1}^2 - c\,\|u\|_{H_0^1}\end{aligned}$$

On a

$$\lim_{\|u\|\to+\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{S}C_\Omega\|q\|_{L^{\frac{N}{2}}}\right)\|u\|_{H_0^1}^2-c\|u\|_{H_0^1}=+\infty\Longrightarrow\lim_{\|u\|\to+\infty}J(u)=+\infty$$

Donc J est coercive.

Conclusion: D'aprés les théorèmes (3.2), (3.5) et (2.12) J admet un point critique unique.

■

3.3.2 Problèmes non-linéaires

Définition 3.10 *On dit qu'une fonction $f:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction de Carathédory si l'application $(x,s)\longrightarrow f(x,s)$ est continue par rapport à s, et mesurable par rapport à x.*

Opérateur de Nemytskii

Définition 3.11 *[7] Soit $G:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction satisfaisante les conditions de Carathéodory. L'opérateur N défni par $N_G(u)=G(.,u)$ est appelé opérateur de Nemytskii.*

Dans cette section, on va étudier le problème quasi-lineaire suivant:

$$(P_3):\begin{cases}-\Delta u & = f(x,u) \quad \text{dans } \Omega\\ \quad u & = 0 \qquad\quad\ \text{sur } \partial\Omega\end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ $(N\geq 1)$ et f est fonction de carathédory. Supposons que f vérifie l'hypothèse suivant:

(f_1) : il existe $c,d>0$ et $0\leq\beta<(N+2)\diagup(N-2)$ si $N\geq 3$ et $1\leq\beta<\infty$ si $N=1,2$, telle que

$$|f(.,u)|\leq c|u|^\beta+d$$

Remarque 3.12 *Comme f est une fonction de Carathédory satisfait (f_1) alors la fonction F qui définit par $F(x,u)=\int_0^u f(x,s)\,ds$ est aussi une fonction de Carathédory vérifie:*

(F_1) : il existe $a,b>0$ et $1\leq\alpha<2N\diagup N-2$ si $N\geq 3$ et $1\leq\alpha<\infty$ si $N=1,2$ tels que

$$|F(.,u)|\leq a|u|^\alpha+b$$

Dans ce suite, on a besoin d'introduire un résultat important.

Théorème de Krasnoselskii

Théorème 3.13 *[7] Soit $G : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisante les conditions de Carathéodory. Supposons que G vérifie la condition suivante*

$$|G(.,u)| \leq a\,|u|^{p/q} + |b(x)| \tag{3.4}$$

où $b \in L^q(\Omega)$, et $a \in \mathbb{R}^+$. Alors

$$\begin{aligned} N_G : \quad L^p(\Omega) &\longrightarrow L^q(\Omega) \\ u &\longrightarrow N_G(u) = G(.,u) \end{aligned} \quad p,q \in [1,+\infty[$$

l'opérateur est bien définie, de plus N_G est borné et continue de l'espace $L^p(\Omega)$ dans $L^q(\Omega)$.

Pour plus de détails sur ce théorème voir ([7]; 1.4. Nonlineaire operators).

Remarque 3.14 *Grâce au théorème de Krasnoslskii, on peut déduire:*
(i) D'aprés (f_1) que $N_f : L^p(\Omega) \longrightarrow L^{p/\beta}(\Omega)$ est continue et en prenant $\beta = \dfrac{p}{q}$.
(ii) D'aprés (F_1) que $N_F : L^p(\Omega) \longrightarrow L^{p/\alpha}(\Omega)$ est continue et en prenant $\alpha = \dfrac{p}{q}$.

Définition 3.15 *On dit qu'une fonction u est une solution faible du problème (P_3) si et seulement si*

$$\int_\Omega [\nabla u.\nabla v - f(x,u)\,v]\,dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Théorème 3.16 *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N\ (N \geq 1)$ un ouvert bornée et $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de carathédory. Le problème (P_3) admet une solution faible.*

Pour prouver le théorème (3.16) on a besoin de prouver les résultats de bases suivant:

Proposition 3.17 *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de carathédory vérifie (f_1) et $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\,ds$. Alors la fonctionnelle*

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \int_\Omega F(x,u)\,dx, \qquad \forall\ u \in H_0^1(\Omega)$$

est F-différentiable avec

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)\,v dx, \qquad \forall u,v \in H_0^1(\Omega)$$

Remarque 3.18 *$u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible de (P_3) si et seulement si u est une point critique.*

Démonstration. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, on pose:

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2 - \varphi(u), \qquad \varphi(u) = \int_\Omega F(x,u)\,dx$$

On remarque que notre fonctionnelle est bien définie, en effet:

puisque $u \in H_0^1(\Omega)$ alors $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx < \infty$, et comme $u \in L^2(\Omega)$ et F est une fonction de Carathéodory vérifie (F_1) alors

$$\int_\Omega |F(x,u)|\,dx \le a\int_\Omega |u|^\alpha\,dx + b\int_\Omega dx$$

I- On pose $J_1(u) = \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1}^2$, J_1 est F-diffrentiable avec

$$\langle J_1'(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u.\nabla v dx$$

et $J_1 \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$ (Voir preuve du théorème (3.7; 1)).

II- On montrer que $\varphi \in C^1(H_0^1(\Omega), \mathbb{R})$. D'abord:

1- On montrer que φ est G-différentiable:

1^{ere} *étape:* Soient u, $u+tv \in H_0^1(\Omega)$ et $t \ge 0$.

$$\frac{1}{t}(\varphi(u+tv) - \varphi(u)) = \frac{1}{t}\int_\Omega F(x,u+tv) - F(x,u)\,dx \tag{3.5}$$

on pose $h(s) = F(x,u+sv) - F(x,u)$, $s \in [0,t]$, alors d'aprés le théorème des accroissement finis, il existe $c_t \in]0,t[$ telle que:

$$h(t) - h(0) = h'(c_t).t$$

alors $F(x,u+tv) - F(x,u) = t.f(x,u+c_tv)v$ et

$$\frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t} = f(x,u+c_tv)v$$

et comme f est continue, alors

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{F(x,u+tv) - F(x,u)}{t} &= \lim_{c_t\to 0} f(x,u+c_tv)v \\ &= f(x,u)v\end{aligned}$$

Donc l'équation (3.5) devient

$$\lim_{t\to 0}\frac{\varphi(u+tv)-\varphi(u)}{t}=\lim_{c_t\to 0}\int_\Omega f(x,u+c_tv)\,vdx$$

par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (1.24) on a:

$$\lim_{c_t\to 0}\int_\Omega f(x,u+c_tv)\,vdx=\int_\Omega f(x,u)\,vdx$$

En effet:

D'aprés l'inégalité de Hölder, pour tout $v\in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega [f(x,u+c_tv)-f(x,u)]\,vdx\right| &\le \int_\Omega |f(x,u+c_tv)-f(x,u)|\,|v|\,dx \\ &\le \|f(x,u+c_tv)-f(x,u)\|_{L^{2N/N+2}}\|v\|_{L^{2^*}}\end{aligned}\tag{3.6}$$

On montrer que

$$\|f(x,u+c_tv)-f(x,u)\|_{L^{2N/N+2}}\longrightarrow 0$$

on considère:

$$\begin{aligned}N_f(u):\ \ L^{2^*}(\Omega)&\ \to L^{2^*/\beta}(\Omega)\\ u&\ \longrightarrow N_f(u)=f(.,u)\end{aligned}$$

A- De l'hypothèse (f_1), on a: $N_f(u):L^{2^*}(\Omega)\longrightarrow L^{2^*/\beta}(\Omega)$ est continue.

En applique le théorème (3.13) posons:

$$u_n=u+\frac{1}{n}v \quad \text{et} \quad t=\frac{1}{n}\,(t\to 0,\ n\to 0)$$

alors on vérifie que: pour tout $u_n\subset L^{2^*}(\Omega)$:

$$\text{si } u_n\longrightarrow u \text{ dans } L^{2^*}(\Omega) \quad \text{c-à-d} \quad N_f(u_n)\longrightarrow N_f(u) \text{ dans } L^{2^*/\beta}(\Omega)$$

On applique le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (1.24):

(**a**)- $u_n\longrightarrow u$ p.p dans Ω alors $|u_n-u|^{2^*}\longrightarrow 0$ p.p dans Ω.

(**b**)- $|u_n-u|=\frac{1}{n}|v|\le|v|$ alors $|u_n-u|^{2^*}\le|v|^{2^*}$, et comme

$$v\in H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$$

de manière continue alors

$$v\in L^{2^*}(\Omega)\subset L^1(\Omega)$$

d'où

$$v^{2^*} \in L^1(\Omega)$$

D'aprés ($\mathbf{a}$) et ($\mathbf{b}$) on conclue que:

- $|u_n - u|^{2^*} \longrightarrow 0$ p.p dans Ω.
- $|u_n - u|^{2^*} \leq |v|^{2^*} \in L^1(\Omega)$.

alors $|u_n - u|^{2^*} \in L^1(\Omega)$, et par suite:

$$\int\limits_{\Omega} |u_n - u|^{2^*} dx \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow \|u_n - u\|^{2^*} \longrightarrow 0 \tag{3.7}$$

donc $u_n \longrightarrow u$ dans $L^{2^*}(\Omega)$ et on sait que $N_f(u) : L^{2^*}(\Omega) \longrightarrow L^{2^*/\beta}(\Omega)$ est continue, alors

$$N_f(u_n) \longrightarrow N_f(u) \quad \text{dans} \quad L^{2^*/\beta}(\Omega) \tag{3.8}$$

de plus

$$\|f(x, u + c_t v) - f(x, u)\|_{L^{2^*/\beta}} \longrightarrow 0$$

B- On remaque que

$$\beta.\frac{2N}{N+2} < \frac{2N}{N+2}.\frac{2N}{N-2} = 2^* \tag{3.9}$$

alors

$$L^{2^*/\beta}(\Omega) \hookrightarrow L^{2N/N+2}(\Omega)$$

continement alors il existe $k > 0$ telle que:

$$\|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{L^{2N/N+2}} \leq k \|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{L^{2^*/\beta}}$$

et par l'afirmation **A,** on a**:**

$$\|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{L^{2N/N+2}} \longrightarrow 0 \tag{3.10}$$

Finalement d'aprés (3.6), on a:

$$\left| \int\limits_{\Omega} [f(x, u + c_t v) - f(x, u)] v dx \right| \longrightarrow 0$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (\varphi(u + tv) - \varphi(u)) &= \lim_{t \to 0} \int\limits_{\Omega} \frac{F(x, u + tv) - F(x, u)}{t} dx \\
&= \lim_{c_t \to 0} \int\limits_{\Omega} f(x, u + c_t v) v dx \\
&= \int\limits_{\Omega} f(x, u) v dx
\end{aligned}$$

$2^{éme}$ *étape:* On montrer que $\langle D\varphi u, v\rangle = \int_\Omega f(x,u)\, v dx$ est linéaire et continue

On a:

a- $D\varphi u$ est linéaire (clair)

b- $D\varphi u$ est continue: pour tout $u, v \in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} |\langle D\varphi u, v\rangle| &= \left|\int_\Omega f(x,u)\, v dx\right| \leq \int_\Omega |f(x,u)|\, |v|\, dx \\ &\leq \|f(x,u)\|_{L^{2N/N+2}} \|v\|_{L^{2^*}} \\ &\leq k\, \|f(x,u)\|_{L^{2^*/\beta}} \|v\|_{L^{2^*}}, \qquad k > 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

et que

$$\begin{aligned} \|f(x,u)\|_{L^{2^*/\beta}} &= \left(\int_\Omega |f(x,u)|^{2^*/\beta} dx\right)^{\beta/2^*} \\ \text{D'aprés l'hypothèse } (f_1) \quad &: \\ &\leq \left(\int_\Omega \left(c\,|u|^\beta + d\right)^{2^*/\beta} dx\right)^{\beta/2^*} \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Minkowski (1.5), il vient

$$\begin{aligned} \|f(x,u)\|_{L^{2^*/\beta}} &\leq c\left(\int_\Omega |u|^{\beta\times\frac{2^*}{\beta}} dx\right)^{\beta/2^*} + d\,|\Omega|^{\beta/2^*} \\ &= c\left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\right)^{\beta/2^*} + D \\ &= c\,\|u\|_{L^{2^*}}^\beta + D \end{aligned} \tag{3.12}$$

avec $D = d\,|\Omega|^{\beta/2^*}$, et par l'inégalité (3.3)

$$C\,\|u\|_{L^{2^*}}^\beta \leq \|u\|_{H_0^1}^\beta$$

alors l'opérateur $f(x,u)$ est borné ($\|f(x,u)\|_{L^{2N/N+2}} \leq \lambda, \quad \lambda > 0$).

Par l'inégalité (3.3) et l'inégalité de Poincaré (1.12), l'inégalité (3.11) devient:

$$|\langle D\varphi u, v\rangle| \leq \lambda\,\|v\|_{L^{2^*}} \leq \frac{\lambda}{C}\,\|v\|_{H_0^1}$$

comme $D\varphi u$ est linéaire et continue. Donc φ est G- différentiable avec

$$\langle D\varphi u, v\rangle = \int_\Omega f(x,u)\, v dx$$

Finalement J est G- différentiable avec

$$\langle DJu, v\rangle = \int_{\Omega} \nabla u.\nabla v dx - \int_{\Omega} f(x,u)\, v dx, \quad u,v \in H_0^1(\Omega)$$

2- Maintenant pour vérifie que J est F-différentiable, il suffit de montrer que $D\varphi$ est continue**:**

i.e. Soit $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que $u_n \longrightarrow u$ dans $H_0^1(\Omega)$, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} \|D\varphi(u_n) - D\varphi(u)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^*} = 0$$

avec

$$\|D\varphi(u_n) - D\varphi(u)\|_{\left(H_0^1(\Omega)\right)^*} = \sup_{\substack{v\in H_0^1(\Omega)\\ \|v\|_{H_0^1}=1}} |\langle D\varphi(u_n) - D\varphi(u), v\rangle|$$

En effet, soit $v \in H_0^1(\Omega)$ avec $\|v\|_{H_0^1} = 1$. Par l'inégalité (3.3) : $s\|v\|_{L^{2^*}} \leq 1$, par (3.6) et (3.10)

$$\begin{aligned}
|\langle D\varphi(u_n) - D\varphi(u), v\rangle| &= \left|\int_{\Omega} (f(x,u_n) - f(x,u).v)\, dx\right| \\
&\leq \|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{L^{2N/N+2}} \|v\|_{L^{2^*}} \\
&\leq \frac{1}{s}\|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{L^{2N/N+2}}
\end{aligned}$$

De même manière que (3.7) , (3.8) et (3.9), on obtient:

$$\|N_f(u_n) - N_f(u)\|_{L^{2N/N+2}} \longrightarrow 0$$

Donc

$$|\langle D\varphi(u_n) - D\varphi(u), v\rangle| \longrightarrow 0$$

Conclusion: D'aprés le théorème (3.13), on déduit que l'hypothèse sur (f_1) nous permet de voir la différentiablité aux sens de Fréchet pour la fonctionnelle:

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} F(x,u)\, dx, \qquad \forall\ u \in H_0^1(\Omega)$$

où $F(x,u) = \int_0^u f(x,s)\, ds.$ ■

Maintenant, pour garantir l'existence d'une solotion faible de problème (P_3) on a besoin d'ajouter des hypothèse sur f.

Rappel: Soit Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on définit la première valeur propre du Laplacien pour problème de Drichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u & = \lambda u \quad \text{dans } \Omega \\ u & = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.13}$$

par : $\lambda_1 = \inf\limits_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \left(\dfrac{\|\nabla u\|_{L^2}^2}{\|u\|_{L^2}^2} \right)$.

Le résultat suivant consiste à ce point:

Théorème 3.19 *Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est fonction de carathédory vérifie (f_1) et (f_2)*

$(f_2) : \exists \delta < \lambda_1$ *tels que* $\lim\limits_{|s| \to \infty} \sup\limits_{x \in \Omega} \dfrac{2F(x,s)}{s^2} = \lim\limits_{|s| \to \infty} \sup\limits_{x \in \Omega} \dfrac{f(x,s)}{s} \leq \delta$ *uniformement pour* $x \in \Omega$.

Alors le probléme (P_3) admet une solution faible.

Démonstration. I- Montrons que J est f.s.c.i

1- D'aprés l'inégalité (1.3), on a J_1 qui définie par $J_1(u) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$ est f.s.c.i.

2- Il reste de vérifie que La fonctionnelle φ qu'elle définit par:

$$\varphi(u) = \int_\Omega F(x, u(x)) \, dx$$

est faiblement continue dans $H_0^1(\Omega)$, Soit $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ telle que $u_n \rightharpoonup u$ dans $H_0^1(\Omega)$, on montre que:

$$\varphi(u_n) \rightharpoonup \varphi(u) \text{ dans } \mathbb{R} \quad \text{c-à-d} \quad \varphi(u_n) \longrightarrow \varphi(u) \text{ dans } \mathbb{R}$$

- Rappelons que $\forall p \in [1, 2^*[$, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow_{comp} L^p(\Omega)$ (voir le théorème (1.16)) d'où $u_n \rightarrow u$ fortement dans $L^p(\Omega)$.

On considère l'opérateur de Nemytskii:

$$\begin{aligned} N_F : \ L^p(\Omega) & \longrightarrow L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega) \\ u & \longrightarrow N_F(u) = F(.,u) \end{aligned} \quad \text{avec } p \geq \alpha$$

D'arés l'hypothèse sur (F_1) et le théorème (3.13), on peut voir que N_F est continue, alors

$$N_F(u_n) \rightarrow N_F(u) \quad \text{fortement dans} \quad L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega)$$

et par conséquent fortement dans $L^1(\Omega)$ car $\dfrac{p}{\alpha} \geq 1$ c-à-d

$$L^{\frac{p}{\alpha}}(\Omega) \hookrightarrow_{cont} L^1(\Omega)$$

alors

$$N_F(u_n) \to N_F(u) \quad \text{fortement dans} \quad L^1(\Omega)$$

qui signifie que:

$$\int_\Omega F(x, u_n)\, dx \longrightarrow \int_\Omega F(x, u)\, dx, \text{ dans } \mathbb{R} \Longrightarrow \varphi(u_n) \longrightarrow \varphi(u), \text{ dans } \mathbb{R}$$

φ est faiblement continue, ce qui implique que φ est $(f.s.c.i)$.

II- Montrons que J est coercive:

On a:

$$\lim_{|s|\to\infty} \sup_{x\in\Omega} \frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \delta \text{ uniformement pour } \ x \in \Omega$$

Par la définiton, on a: $\forall \epsilon > 0$, $\exists R > 0$, $\forall s$ tel que $|s| > R$:

$$\frac{2F(x,s)}{s^2} \leq \delta$$

- On prend δ_1 telle que $\delta < \delta_1 < \lambda_1$. Il existe R telle que:

$$\forall x \in \Omega,\ F(x,s) \leq \tfrac{1}{2}\delta_1 s^2, \qquad |s| > R$$

- Comme F est une fonction sur $[-R\ , R]$ qu'est fermé et bornée alors la fonction F est bornée et d'aprés (F_1) on a:

$$\exists \gamma_1 : \ \ |F(x,s)| \leq \gamma_1, \qquad |s| < R$$

Globalement, on a:

$$|F(x,s)| \leq \frac{1}{2}\delta_1 s^2 + \gamma_1, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall s \in \mathbb{R}$$

En faisant quelques estimations appriori:

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1} - \int_\Omega F(x, u(x))\, dx \\ &\geq \frac{1}{2}\|u\|_{H_0^1} - \frac{1}{2}\delta_1 \int_\Omega u^2 dx - \gamma_1 |\Omega| \end{aligned}$$

par l'inégalité de Poincaré: $\lambda_1 \|u\|_{L^2} \leq \|u\|_{H_0^1}$

$$J(u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1} \left(1 - \frac{\delta_1}{\lambda_1}\right) - \gamma_1 |\Omega| = a \|u\|_{H_0^1} - \gamma$$

avec $a = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\delta_1}{\lambda_1}\right) > 0$ et $\gamma = \gamma_1 |\Omega|$.

Donc J est coercive.

Conclusion: Grâce à (I) et (II) et par les théorème (3.3), (2.12) et la remarque (3.18) il existe une solution faible de (P_3). ■

Conclusion

Dans ce travail, on a étudié une méthode très importante pour démontrer l'existence d'une solution faible de problème aux limites qui est appelé " La méthode variationnelle via à la théorie des points critiques"; plus précisement, on a appliqué quelques résultats principales du la théorie de minimisation dans l'étude des modèles des EDP. Signalons qu'on a laissé pour l'étude un type qui généralise le problème (P_3) ; en remplaçant l'opérateur Δu par $\Delta_p u$ où

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-1} \nabla u\right), \ \forall p > 2$$

Bibliography

[1] M. Badiale & E.Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners*, Springer-Verlag, London, 2011.

[2] H. Brezis, *Analayse fonctionnelle,Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.

[3] D. G. Costa, *An Invitation to Variational Methods In Differential Equations*, Birkhäuser Boston, Boston, 2007.

[4] S. Hildebrandt & A.Tromba, *Mathematics and Optimal*, Scientific American Books, New York, 1985.

[5] O. Kavian, *Introduction à laThéorie des Points Critiques*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, vol. 13, 1993.

[6] P. J. Olver, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer–Verlag, New York, 2013.

[7] N. S. Papageorgiou & L.Gasinski, *Nonsmooth Critical Point Theory and Nonlinear Boundary Value Problems*, Chapman and Hall/ CRC, Boca Raton, 2005.

[8] R. R. Phelps, *Convex Functions, Monotone Operators and Differentiability*, Springer-Verlag, Berlin, 1993.

Résumé

Ce mémoire consiste à étudié une méthode importante pour démontrer l'existence d'une solution faible qu'est la méthode variationnelle via à la théorie de points critiques et on s'appuie plus précisément sur la minimisation des fonctionnelles associés aux problèmes aux limites pour établir des solutions faibles.

Mot-clé

Espace de Banach, réflexif, convexe, continue, convergence faible, convergence fort, faiblement fermé, faiblement semi-continue inférieurement, Gâteaux-différentiabilité, Fréchet-différentiabilité, problème aux limites, point de minimum, point critique, solution faible.

Abstract

This memory is study an important method to demonstrate the existence of a weak solution which is the variational method via to the theory of critical points and it relies specifically on the minimization of the functional associated to problems of limits for establish weak solutions.

Key Word

Banach space, reflexive, convex, continuous, weakly convergence, strongly convergence, weakly closed, weakly lower semicontinuous, Gâteaux-differentiability, Fréchet- differentiability, minimum point, critical point, weak solution.

ملخص

هده المدكرة تتناول طريقة هامة لبرهنة وجود حل ضعيف باستعمال نظرية النقاط الحرجة , فهي تعتمد على وجه التحديد على تدنية (تصغير) الدوال المرتبطة بمسائل دات حدود لإظهار وجود هده الحلول.

الكلمات المفتاحية

فضاء بانخ, انعكاسي, محدب, مستمر, تقارب ضعيف, تقارب قوي, مغلق بضعف, نصف مستمر من الاسفل بضعف, مشتقة قاطو, مشتقة فريشي, قيمة صغرى, نقطة حرجة, حل ضعيف.