UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse fonctionnelle

Par

Meryem KARA

Sujet

Sur les polynômes m-homogènes Cohen fortement p-sommant

Devant le jury :

Dr. Elhadj Dahia	M.C.A. Univ de M'sila	Président
Ms. Ahlem Alouani	M.A.A. Univ de M'sila	Rapporteur
Dr. Abdelhamid Tallab	M.C.B. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2016 / 2017

Remerciements

D'abord et avant tout, je voudrais remercier "Allah" qui me bénit de terminer ce travail.

Je veux exprimer mon vif remerciement à mon superviseur Ms. Ahlem ALOUANI, pour son aide efficace, son orientation et ses conseils précieux.

Aussi, mes remerciements à tous les enseignants de département de mathématiques, et spécialement, les enseignants de spécialité d'analyse fonctionnelle.

Je remercie aussi ma sœur Soumia et mon mari Mustapha et tous mes collègues pour m'aider.

Dédicace

Je dédie ce travail

A mon père.

A ma mère.

A mon mari.

A tous mes frères.

Table des matières

Introduction

Dans le cadre de la théorie des opérateurs multilinéaires, la théorie du produit tensoriel topologique est un outil nécessaire et important, car il fournit une description simple du façon dont ces opérateurs agissent sur les produits des espaces de Banach, et aussi parce qu'il permet la représentation des espaces dual des applications multilinéaires. Plus concrètement, pouvons nous répond a la question suivante : exist'il un espace vectoriel noté E tel que les espaces $L(E;Y)$ et $L(X_1, ..., X_m; Y)$ sont isomorphism ?

La reponce : Oui, et le but c'est construire le produit tensoriel des espaces $X_1, ..., X_m$ qui fait cet objectif.

Les produits tensoriels apparaissent apparemment dans l'analyse fonctionnelle pour la première fois à la fin des années trente dans le travail de Murray et Jhon von Neumann sur les espaces de Hilbert. La première étude systématique des classes de normes sur les produits tensorisés des espaces de Banach est due à R.Schatten [18], mais A.Grothendieck dans [9] a été le premier à étudier profondément cet objet "*Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*". Après eux, beaucoup d'autres ont investi la théorie du produit tensoriel, ont compris le pouvoir de cet objet , qui établit qui le sujet vient l'aider avec de nombreux problèmes d'aspects plus classiques des mathématiques.

Le travail de cette mémoire s'inscrit dans le cadre de l'analyse non linéaire et se consacre au développement de certains théorèmes de la sommabilité, ainsi que les théorèmes de domination de Pietsch / factorisation. Nous abordons la linéarisation. Dans ce travail on introduit le concept des polynomes m-homogène Cohen fortement p-sommant introduit premièrement par Achour et Saadi dans [2] ce dernier est une extension au version polynomial des opèrateurs multilinèaires Cohen fortement p-sommants introduits par Achour-Mezrag en 2006 [1], où cette Classe de Polynômes vérifie l'analogique du théorème de domination de Pietsch , Nous avons trouvé le chemin vers la linéarisation du polynômes m-homogènes Cohen fortement p-sommant et la connexion avec son opérateur multilinéaire symétrique associée.

Ce travail est organisé en trois chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre, on va présenter des concepts et des résultats de base sur les application m-linéaires et les polynomes m-homogènes.

Dans le deuxième chapitre, nous allons nous concentrer sur la théorie du produit tensoriel, on va donné des définititons et des propositions, ensuite, on va définir la norme projective, pour présenter le théorème de linéarisation des applications m-linéaires et les polynomes m-homogènes.

Le troisième chapitre est consacré pour les polynômes Cohen fortement p-sommant et le théorème de domination de Pietsch et quelues résultas.

Chapitre 1

Les polynômes m-homogènes

Dans ce chapitre, nous présentons des concepts de base sur les application m-linéaires, ensuite, nous allons nous concentrer plus sur les polynomes m-homogènes, parce qu'il est l'objet principal de cette mémoire.

1.1 Les applications multilinéaires

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $X_j\,(1 \leq j \leq m)\,, Y$ des espaces normés sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On considérer le produit cartésien

$$X_1 \times ... \times X_m = \left\{ \left(x^1, ..., x^m\right) : x^j \in X_j,\ \forall 1 \leq j \leq m \right\},$$

qui est un espace normé muni du norme

$$\left\| \left(x^1, ..., x^m\right) \right\| := \max \left\{ \left\| x^j \right\|;\ x^j \in X_j, \forall 1 \leq j \leq m \right\}. \tag{1.1.1}$$

Définition 1.1.1 *L'application $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ est appelé multilinéaire (ou m-linéaire) si les applications*

$$\begin{array}{rccl} T_j: & X_j & \to & Y \\ & x^j & \mapsto & T\left(x^1, ..., x^j, ..., x^m\right) \end{array}$$

sont linéaires pour chaque $x^k \in X_j$, $k \neq j$, en d'autres termes

$$T\left(x^1, ..., \lambda x^j + y^j, ..., x^m\right) = \lambda T\left(x^1, ..., x^j, ..., x^m\right) + T\left(x^1, ..., y^j, ..., x^m\right)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* x^j, $y^j \in X_j \, (1 \leq j \leq m)$. *Soit* $L(X_1, ..., X_m; Y)$ *l'espace de tous les applications* m*-linéaires* T *de* $X_1 \times ... \times X_m$ *dans* Y.

Définissons les opérations linéaires suivantes

$$(S+T)(x^1, ..., x^m) := S(x^1, ..., x^m) + T(x^1, ..., x^m)$$
$$(\lambda T)(x^1, ..., x^m) := \lambda T(x^1, ..., x^m)$$

on obtient une structure d'espace vectoriel dans $L(X_1, ..., X_m; Y)$. Si $Y = \mathbb{K}$, on ecrit $L(X_1, ..., X_m)$.

Remarque 1.1.1 *L'ensemble* $\mathcal{S}$ *de tous les vecteurs dans* Y *de la forme* $T(x^1, ..., x^m)$, $x^j \in X_j, (\forall 1 \leq j \leq m)$ *généralement pas un sous-espace vectoriel de* Y. *Pour voir cela, soit* $X_1 = X_2$ *et* Y *deux espaces vectoriels à 2 et 4 dimensions respectivement. On choisir une base* $\{a_1, a_2\}$ *de* X_1 *et une base* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *de* Y. *Définissons maintenant l'application bilinéaire* T *par*

$$T\left(x^1, x^2\right) = \xi_1 \eta_1 e_1 + \xi_1 \eta_2 e_2 + \xi_2 \eta_1 e_3 + \xi_2 \eta_2 e_4$$

tel que $x^1 = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2$ *et* $x^2 = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2$.*Il est facile de voir que*

$$\mathcal{S} = \left\{ z = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i e_i \in Y / \ \lambda_1 \lambda_4 - \lambda_2 \lambda_3 = 0 \right\}$$

Soit $z_1 = 2e_1 + 3e_2 + 4e_3 + e_4$ *et* $z_2 = e_1 + 3e_2 + 3e_4$, *il est clair que* $z_1, z_2 \in \mathcal{S}$ *mais* $z_1 - z_2 \notin \mathcal{S}$ *ce qui implique que* $\mathcal{S}$ *n'est pas un sous-espace de* Y.

Définition 1.1.2 *L'application multilineaire* $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ *est continue si elle est continue comme une fonction entre deux espaces normés.*

Remarque 1.1.2 *Une conséquence de cette définition et de l'inégalité suivante*

$$T\left(x^1, ..., x^m\right) - T\left(y^1, ..., y^m\right) = T\left(x^1 - y^1, ..., x^m\right) + T\left(x^1, x^2 - y^2, ..., x^m\right) + ... + T\left(x^1, ..., x^m - y^m\right).$$

Similairement au cas linéaire, nous avons ce résultat qui donne la caractérisation des applications multilinéaires continus.

Proposition 1.1.1 *Soit $X_1, ..., X_m, Y$ des espaces normés. Pour tout $T \in L(X_1, ..., X_m; Y)$, les affirmations suivantes sont équivalentes*

(1) *T est continue*

(2) *T est continue en $(0, ..., 0)$*

(3) *Ils existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\left\|T\left(x^1, ..., x^m\right)\right\| \leq C \left\|x^1\right\| ... \|x^m\| \tag{1.1.2}$$

pour tout $x^j \in X_j$, $(\forall 1 \leq j \leq m)$.

(4) $\|T\| = \sup\limits_{\|x^j\| \leq 1,\ j=1,...m} \|T(x^1, ..., x^m)\| < \infty.$

Preuve. [16] ■

On note par $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ l'espace vectoriel de tous les applications m-linéaires continues de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y. Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$, et pour simplification si $X_1 = ... = X_m = X$ on écrit $\mathcal{L}(^m X; Y)$.

On peut voir que

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x^j\| \leq 1,\ j=1,...m} \|T(x^1, ..., x^m)\| \\ &= \inf\{C \geq 0,\ C \text{ vérifiant l'inégalité } (1.1.2)\} \end{aligned}.$$

Définition 1.1.3 *Pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$, on note l'ensemble S_m de toutes les permutations de $\{1, ..., m\}$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections $\sigma : \{1, ..., m\} \longrightarrow \{1, ..., m\}$.*

Définition 1.1.4 *Soient $m \in \mathbb{N}$ et X, Y deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application multilinéaire continue $T : \underbrace{X \times ... \times X}_{m} \to Y$, est dite symétrique si*

$$T(x^1, ..., x^m) = T(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}), \tag{1.1.3}$$

pour tout $x^1, ..., x^m \in X$, et toute permutation $\sigma \in S_m$. On note $\mathcal{L}_s(^m X; Y)$ l'espace des opérateurs multilinéaires continus symétriques, lequel est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(^m X; Y)$. Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{L}_s(^m X)$.

Si on fait toutes les permutations possibles on peut associer à $T \in \mathcal{L}(^m X; Y)$ un opérateur symétrique $T_s \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$ cet opérateur T_s s'appelle opérateur symétrie de T.

Proposition 1.1.2 *[3]Pour chaque $T \in \mathcal{L}(^m X;Y)$, On associe l'opérateur symétrique T_s de T défini par*

$$T_s(x^1,...,x^m) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} T(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}). \tag{1.1.4}$$

Les propriétés suivantes sont satisfaites:

(1) $T_s \in \mathcal{L}_s(^m X;Y)$

(2) $T_s = T$ *si, et seulement si,* $T \in \mathcal{L}_s(^m X;Y)$

(3) $(T_s)_s = T_s$

(4) *Si* $x \in X$, *alors* $Tx^m = T_s x^m$.

Preuve. (1) Soient $(x^1,...,x^m) \in X^m$ et $\sigma' \in S_m$. Alors,

$$\begin{aligned} T_s(x^1,...,x^m) &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} T(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}) \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} T\big(x_{\sigma(\sigma'(1))},...,x_{\sigma(\sigma'(m))}\big) \\ &= T_s(x_{\sigma'(1)},...,x_{\sigma'(m)}) \end{aligned}$$

et par conséquent $T_s \in \mathcal{L}_s(^m X;Y)$.

(2) Si $T_s = T$, alors $T \in \mathcal{L}_s(^m X;Y)$, car $T_s \in \mathcal{L}_s(^m X;Y)$,

Si $T \in \mathcal{L}_s(^m X;Y)$, on obtient

$$\begin{aligned} T_s(x^1,...,x^m) &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} T(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}) \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} T(x^1,...,x^m) \\ &= \frac{1}{m!} m! T(x^1,...,x^m) \\ &= T(x^1,...,x^m), \end{aligned}$$

pour tout $(x^1,...,x^m) \in X_m$, ce qui implique $T_s = T$.

(3) D'après (1) et (2) il est clair.

(4) Soit $x \in X$. Alors:

$$\begin{aligned} T_s x^m &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} Tx^m \\ &= \frac{1}{m!} m! Tx^m \\ &= Tx^m. \end{aligned}$$

■

Les propréties précédentes montrer que l'opérateur $S : \mathcal{L}(^mX;Y) \to \mathcal{L}_s(^mX;Y)$ est la projection continue de $\mathcal{L}(^mX;Y)$ sur $\mathcal{L}_s(^mX;Y)$ définie par $S(T) = T_s$, pour plus de détail voir [6]

Parmi les très intéressantes formules dans la théorie des opérateurs multilinéaires, Formule de Leibniz/ polarisation pour plus de details voir [11]

Théorème 1.1.1 *[10]Soit $T \in \mathcal{L}_s(^mX;Y)$. Alors:*

(**a**) ***(Formule de Leibniz)*** *pour $x^1, ..., x^m \in X$, on a*

$$T(x^1, ..., x^m)^m = \sum \frac{m!}{\alpha!} T x_1^{\alpha_1} ... x_m^{\alpha_m} \tag{1.1.5}$$

où la somme est prise sur tous les multi-indices $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)$, avec $\mid \alpha \mid = m$.

(b) ***(Formule de polarisation)*** *pour $x^0, x^1, ..., x^m \in X$, on a*

$$T(x^1, ..., x^m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 ... \varepsilon_m T(x^0 + \varepsilon_1 x^1 + ... + \varepsilon_m x^m)^m, \tag{1.1.6}$$

la formule de polarisation peut être obtenue à partir de la formule de Leibniz et elle est essentiel pour traiter polynôme m- homogène.

1.2 Les polynômes m- homogènes

Définition 1.2.1 *Soient $m \in \mathbb{N}$ et X, Y deux espaces normés. Une application $P :^m X \to Y$ est dite polynôme m-homogène ou polynôme homogène de degré m, s'il existe une application $T \in \mathcal{L}(^mX;Y)$, tel que $P(x) = Tx^m$ pour tout $x \in X$. Dans ce cas, on dit que P est le polynôme m-homogène associée par l'application T.*

On note par $\mathcal{P}(^mX;Y)$ l'espace vectoriel de tous les polynômes m-homogènes continus. Si $Y = \mathbb{K}$, on écrit $\mathcal{P}(^mX;Y) = \mathcal{P}(^mX)$.

Pour chaque polynôme m-homogène $P :^m X \to Y$, on définie

$$\parallel P \parallel = \sup \{ \parallel P(x) \parallel : x \in X, \quad \parallel x \parallel \leq 1 \}. \tag{1.2.1}$$

Exemple 1.2.1 *L'application $P :^m \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, définie par $P(x) = \alpha x^m, \alpha \in \mathbb{K}$, est un polynôme m- homogène. On prend $T \in \mathcal{L}(^m\mathbb{K})$ donnée par $T(x^1, ..., x^m) = \alpha x^1 ... x^m$, donc on a $P(x) = Tx^m$ (notez que ce sont les seuls polynômes m- homogènes de $^m\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$).*

Si $T \in \mathcal{L}(^m\mathbb{K})$ *et* $x^1, ..., x^m \in \mathbb{K}$ *on a*

$$T(x^1, ..., x^m) = x^1...x^m T(1, ..., 1) = \alpha x^m \tag{1.2.2}$$

où $\alpha = T(1, ..., 1)$.

Proposition 1.2.1 *[10]Pour chaque* $P \in \mathcal{P}(^mX; Y)$*, il existe un unique opérateur multilinéaire symétrique* $\check{P} \in \mathcal{L}_s(^mX; Y)$*, tel que* $P(x) = \check{P}x^m$ *pour tout* $x \in X$*, et on a les inégalités suivantes:*

$$\| P \| \leq \| \check{P} \| \leq \frac{m^m}{m!} \| P \| . \tag{1.2.3}$$

Preuve. Soit $P \in \mathcal{P}(^mX; Y)$. Par définition, il existe $T \in \mathcal{L}(^mX; Y)$ tel que $P(x) = Tx^m$ pour tous $x \in X$. On définie T_s par

$$T_s(x^1, ..., x^m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma} T(x^{\sigma(1)}, ..., x^{\sigma(m)}),$$

alors

$$\begin{aligned} T_s &= \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} T(x, ..., x) = \frac{1}{m!} m! T(x, ..., x) \\ &= T_s x^m = P(x), \end{aligned}$$

il suffit de prendre $\check{P} = T_s$.

Pour l'unicité de $\check{P}$. Si $h_s \in \mathcal{L}_s(^mX; Y)$ et tel que $P(x) = h_s x^m$, pour chaque $x \in X$, alors $\check{P}x^m = h_s x^m$ pour chaque $x \in X$ et par la formule la polarisation nous concluons que $\check{P} = h_s$.

Pour tout $x \in X$ avec $\| x \| \leq 1$, on a

$$\| P(x) \| \leq \| \check{P} \| \| x \|^m \leq \| \check{P} \|$$

donc, $\| P \| \leq \| \check{P} \|$. Soit $x_1, ..., x_m \in X$, avec $\| x_j \| \leq 1$. Par la formule de polirisation on a

$$\| \check{P}(x^1, ..., x^m) \| \leq \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \| \varepsilon_1 ... \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x^1 + ... + \varepsilon_m x^m) \|$$

pour $\varepsilon = \pm 1$,on a

$$\begin{aligned} \| & \quad \varepsilon_1 ... \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x^1 + ... + \varepsilon_m x^m) \| \leq \| P \| \| \varepsilon_1 x^1 + ... + \varepsilon_1 x^m \|^m \\ \leq & \quad \| P \| (\| x^1 \| + ... + \| x^m \|)^m \\ \leq & \quad \| P \| m^m \end{aligned}$$

alors,

$$\| \check{P}(x^1, ..., x^m) \| \leq \frac{m^m}{m!} \| P \|$$

donc

$$\| \check{P} \| \leq \frac{m^m}{m!} \| P \| .$$

■

Proposition 1.2.2 *[7] Soient X, Y deux espaces normés, $T \in L_s(^m X; Y)$ et $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$. Les afirmations suivantes sont equivalents:*

(1) $T \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$

(2) P est continu

(3) P est continu en 0.

(4) Il existe une constante $C > 0$ telle que $\| P(x) \| \leq C \| x \|^m$ pour tout $x \in X$

(5) $\| P \| = \sup \{\| P(x) \| : x \in X, \| x \| \leq 1\} < \infty$.

Preuve. (1) $\Rightarrow$ (2) Soit $T \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$, on a $P(x) = (T \circ i)(x)$, où $i : X \to X^m$, définie par $i(x) = (x, ..., x)$. Comme i et T sont continues, alors P est continu.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Si P est continu, en particulier, P est continu en 0.

(3) $\Rightarrow$ (4) Si P est continu en 0, alors, on donne $\varepsilon = 1$ il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ avec $\| x \| \leq \delta$, on a $\| P(x) \| \leq \varepsilon$. Si $x \neq 0$, quand $\| \frac{\delta x}{\|x\|} \| = \delta$, on a

$$\| P(\frac{\delta x}{\| x \|}) \| \leq 1.$$

Donc, pour tout $x \neq 0$, on a

$$\| P(x) \| \leq C \| x \|^m, \text{ avec } C = (\frac{1}{\delta})^m$$

Si $x = 0$, l'inégalité reste valable

(4) $\Rightarrow$ (5) Clair .

(5) $\Longrightarrow$ (1) Si $\| P \| < \infty$, alors par la proposition (1.2.1), on a $\| \check{P} \| \leq \frac{m^m}{m!} \| P \| < \infty$, tel que $\check{P} = T \in L_s(^m X; Y)$, alors $\| T \| < \infty$, donc $T \in \mathcal{L}_s(^m X; Y)$. ■

Proposition 1.2.3 *Soient X, Y deux espaces normés et $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$. Alors*

$$\| P \| = \sup \{\| P(x) \| : x \in X, \| x \| \leq 1\}$$

est une norme sur $\mathcal{P}(^m X; Y)$.

Preuve. (a) Premierment on note que si $P \in \mathcal{P}(^m X;Y)$, alors par la proposition (1.2.2) $\| P \| < \infty$. Donc l'application:

$$\| \,.\, \| : \mathcal{P}(^m X;Y) \to \mathbb{R}^+$$

est bien définie.

Si $P \in \mathcal{P}(^m X;Y)$, alors:

$\| P \| = 0$ si, et seulment si $\sup \{\| P(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1\} = 0$. Mais comme l'ensemble $\{\| P(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1\}$ composé de nombres réels positifs, il en résulte que

$$\begin{aligned}
\sup \{\| P(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1\} &= 0 \Longleftrightarrow \| P(x) \| = 0, \text{pour } x \in X, et \; \| x \| \leq 1 \\
&\Longleftrightarrow P(x) = 0, \text{pour } x \in X, \text{ et } \| x \| \leq 1 \\
&\Longleftrightarrow P(\frac{y}{\| y \|}) = 0, \text{ pour } y \in X \setminus \{0\} \\
&\Longleftrightarrow P(y) = 0, \text{ pour } y \in X \\
&\Longleftrightarrow P = 0.
\end{aligned}$$

Donc $\| P \| = 0$ si, et seulment si $P = 0$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $x \in X$, on a

$$\begin{aligned}
\| \quad \lambda P \| &= \sup \{\| \lambda P(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1\} \\
&= \sup \{| \lambda | \| P(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1\} \\
&= | \lambda | \sup \{\| P(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1\} \\
&= | \lambda | \| P \| .
\end{aligned}$$

(c) Soit P et $P' \in \mathcal{P}(^m X;Y)$.

$$\begin{aligned}
\| \quad P + P' \| &= \sup \{\| (P + P')(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1\} \\
&= \sup \{\| P(x) + P'(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1\} \\
&\leq \sup \{\| P(x) \| + \| P'(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1\} \\
&\leq \sup \{\| P(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1\} + \sup \{\| P'(x) \| : x \in X^m, \| x \| \leq 1\} \\
&\leq \| P \| + \| P' \|
\end{aligned}$$

Donc de (a), (b) et (c) $\| \,.\, \|_{\mathcal{P}(^m X;Y)}$ est une norme sur $\mathcal{P}(^m X;Y)$. ∎

Proposition 1.2.4 *[3]Soient X et Y deux espaces normés.*

L'application φ définie par

$$\varphi : \mathcal{L}_s({}^mX;Y) \to \mathcal{P}({}^mX;Y),$$

$$\varphi(T) = \hat{T}.$$

est une isomorphisme.

Preuve. Selon la proposition (1.2.2), l'application φ est bien définie.

On vérifier que φ est linéaire.

Soit $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_s({}^mX;Y)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors pour tout $x \in X$,

$$\varphi(T_1+\lambda T_2)(x) = (\widehat{T_1 + \lambda T_2})(x) = (T_1+\lambda T_2)x^m = T_1x^m+\lambda T_2x^m = \hat{T}_1(x)+\lambda\hat{T}_2(x) = \varphi(T_1)(x)+\varphi(T_2)(x).$$

Donc φ est linéaires.

Maintenant, il suffit de vérifier que φ est bijective.

En effet, si $P \in \mathcal{P}({}^mX;Y)$, par définition, il existe $T \in \mathcal{L}({}^mX;Y)$ tel que $P(x) = Tx^m$.
En effet,

$$T_s(x^1,...,x^m) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} T(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}),$$

Alors, par la proposition (1.1.2), $T_s \in \mathcal{L}_s({}^mX;Y)$ et $T_sx^m = Tx^m = P(x)$.

Donc l'application φ est surjective.

D'outre part, si $T \in \mathcal{L}_s({}^mX;Y)$ et $\hat{T} = 0$, alors $Tx^m = 0$, pour tout $x \in X$.

donc, par la formule de polirisation:

$$T(x^1,...,x^m) = \frac{1}{m!2^m}\sum_{\varepsilon_j=\pm 1} \varepsilon_1...\varepsilon_m T(x^0+\varepsilon_1x^1+...+\varepsilon_mx^m)^m = 0,$$

pour tout $x^0,...,x^m \in X$. Donc $T = 0$, donc l'application φ est injective.

Nous concluons que φ est une isomorphisme. ■

Proposition 1.2.5 *Soient $m \in \mathbb{N}$, X un espace normé et Y un espace de Banach. L'espace $\mathcal{P}({}^mX;Y)$ est un espace de Banach.*

Preuve. Comme $\mathcal{L}_s(^mX;Y)$ est isomorphe a $\mathcal{P}(^mX;Y)$, alors si $\mathcal{L}_s(^mX;Y)$ est Banach, alors $\mathcal{P}(^mX;Y)$ est Banach.

Danc, il suffit de montrer que $\mathcal{L}_s(^mX;Y)$ est un espace de Banach.

On a $\mathcal{L}(^mX;Y)$ est Banach et $\mathcal{L}_s(^mX;Y) \subset \mathcal{L}(^mX;Y)$, donc il suffit de montre que $\mathcal{L}_s(^mX;Y)$ est fermé.

Soit $T \in \overline{\mathcal{L}_s(^mX;Y)}$, alors il existe une suite $(T_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{L}_s(^mX;Y)$, tel que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$.

On a

$$\| T_n(x^1,...,x^m) - T(x^1,...,x^m) \| = \| (T_n - T)(x^1,...,x^m) \| \leq \| T_n - T \| \| x^1 \| ... \| x^m \|,$$

pour tout $x^1,...,x^m \in X$. Si $n \to \infty$ en inégalité ci-dessus, on a

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x^1,...,x^m) = T(x^1,...,x^m)$$

pour tout $x^1,...,x^m \in X$. Comme $T_n \in \mathcal{L}_s(^mX;Y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, pour tout permutation $\sigma \in S_m$, on a

$$T_n(x^1,...,x^m) = T_n(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}) \to T(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}).$$

Alors

$$T(x^1,...,x^m) = \lim_{n\to\infty} T_n(x^1,...,x^m) = \lim_{n\to\infty} T_n(x^1,...,x^m) = \lim_{n\to\infty} T_n(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}) = T(x_{\sigma(1)},...,x_{\sigma(m)}).$$

Donc $T \in \mathcal{L}_s(^mX;Y)$.

Donc $\mathcal{L}_s(^mX;Y)$ est fermé, nous concluons que $\mathcal{P}(^mX;Y)$ est un espace de Banach. ■

Définition 1.2.2 *Soient X, Y deux espaces de Banach et $m \in \mathbb{N}$. Un polynome $P \in \mathcal{P}(^mX;Y)$ est dit de rang finie , s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que*

$$P(x) = \sum_{j=1}^{k} (\varphi_j(x))^m b_j. \tag{1.2.4}$$

où $\varphi_j \in X^*, b_j \in Y$ et $j = 1,...,k$.

Il est facile voir que le sous-ensemble de tous les polynômes m-homogène continus de rang finie est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(^mX;Y)$, qui sera noté par $\mathcal{P}_f(^mX;Y)$, pour plus de détail voir [10].

Exemple 1.2.2 *Soient X et Y deux espaces normés, $\varphi \in X^*, b \in Y$ et $m \in \mathbb{N}$. On définie P par*

$$P : X \to Y,\ \ P(x) = (\varphi(x))^m b,$$

évidemment $P \in \mathcal{P}_f(^m X; Y)$ et $\| P \| = \| \varphi \|^m \| b \|$.

En effet

$$\begin{aligned}
\| \quad P \| &:= \sup \{\| P(x) \| : x \in X, \| x \| \leq 1\} \\
\| \quad P \| &:= \sup \{\| (\varphi(x))^m b \| : x \in X, \| x \| \leq 1\} \\
&= \sup \{| \varphi(x) |^m \| b \| : x \in X, \| x \| \leq 1\} \\
&= \sup \{| \varphi(x) |^m : x \in X, \| x \| \leq 1\} \| b \| \\
&= (\sup \{| \varphi(x) | : x \in X, \| x \| \leq 1\})^m \| b \| \\
&= \| \varphi \|^m \| b \| .
\end{aligned}$$

Chapitre 2

Le produit tensoriel symétrique

2.1 Produit tensoriel algébrique

Dans le cadre de la théorie des opérateurs multilinéaires, la théorie du produit tensoriel topologique est un outil nécessaire, car il fournit une description simple du façon dont ces opérateurs agissent sur les produits des espaces de Banach, et aussi parce qu'il permet la représentation des espaces dual des applications multilinéaires.Plus concrètement, nous pouvons comprendre comment fonctionne comme outil:

Soient $m \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_m; Y$ des espaces vectoriels, on considérer le dual algébrique $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)^*$ de l'espace $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$, tel que

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)^* = \{\phi : \mathcal{L}(X_1, ..., X_m) \to \mathbb{K} : \phi \text{ est une fonctionnelle linéaire}\}.$$

Le produit tensoriel de $X_1, ..., X_m$ sera construit a partir des éléments de l'espace $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)^*$.

Soit $x^1 \in X_1, ..., x^m \in X_m$, on définie

$$x^1 \otimes ... \otimes x^m : \quad \mathcal{L}(X_1, ..., X_m) \quad \to \quad \mathbb{K}$$

par

$$x^1 \otimes ... \otimes x^m (\varphi) = \varphi\left(x^1, ..., x^m\right),$$

ou φ est une forme m-linéaire: $\varphi : X_1 \times ... \times X_m \to \mathbb{K}$

On pose l'ensemble D formé par tous ces éléments,

$$D := \left\{x^1 \otimes ... \otimes x^m : x^1 \in X_1, ..., x^m \in X_m\right\} \subseteq \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)^*.$$

La fonctionnelle $x^1 \otimes ... \otimes x^m$ s'appelle un tenseur élémentaire.

Définition 2.1.1 *Le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m)^*$ engendré par D est dit produit tensoreil algébrique de $X_1, ..., X_m$, et sera noté par $X_1 \otimes ... \otimes X_m$, ainsi que les éléments de $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ s'appelés tenseurs, et sont écrits sous la forme*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m,$$

tels que $n \in \mathbb{N}, x_i^j \in X_j, (\lambda_i) \in \mathbb{K}$, $j = 1, .., m$, et $i = 1, ..., n$. Cette représentation de u n'est pas unique.

Si $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$ et ϕ une forme multilinéaire sur $X_1 \times ... \times X_m$ alors,

$$u(\phi) = \left\langle \phi, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \phi(x_i^1, ..., x_i^m).$$

La valeur de cette expression est indépendante du choix de u.

Par définition, le produit tensoriel $X_1 \otimes ... \otimes X_m$, est un espace vectoiel sur $\mathbb{K}$. Alors, on peut voir dans la proposition suivante quelque propriéties algèbrique sur les tenseurs élémentaires.

Proposition 2.1.1 *Soient $X_1, ..., X_m$ des espaces vectoriels, $x_j, y_j \in X_j$, pour tout $j = 1, ..., m$, et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors:*

1. $x^1 \otimes ... \otimes (x^j + y^j) \otimes ... \otimes x^m = x^1 \otimes ... \otimes x^j \otimes ... \otimes x^m + x^1 \otimes ... \otimes y^j \otimes ... \otimes x^m$

2. $\lambda(x^1 \otimes ... \otimes x^j \otimes ... \otimes x^m) = x^1 \otimes ... \otimes (\lambda x^j) \otimes ... \otimes x^m$

3. $x^1 \otimes ... \otimes 0 \otimes ... \otimes x^m = 0.$

Preuve. Soient $x_j, y_j \in X_j$, pour tout $j = 1, ..., m$, et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. $(x^1 \otimes ... \otimes (x^j + y^j) \otimes ... \otimes x^m)(T) = T(x^1, ..., x^j + y^j, ..., x^m)$

$$\begin{aligned} &= T(x^1, ..., x^j, ..., x^m) + T(x^1, ..., y^j, ..., x^m) \\ &= (x^1 \otimes ... \otimes x^j \otimes ... \otimes x^m)(T) + (x^1 \otimes ... \otimes y^j \otimes ... \otimes x^m)(T), \end{aligned}$$

pour toute application m-lineaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$.

2. $(\lambda(x^1 \otimes ... \otimes x^j \otimes ... \otimes x^m))(T) = \lambda\left[(x^1 \otimes ... \otimes x^j \otimes ... \otimes x^m)(T)\right]$

$$\begin{aligned} &= \lambda T(x^1, ..., x^j, ..., x^m) \\ &= T(x^1, ..., \lambda x^j, ..., x^m) \\ &= (x^1 \otimes ... \otimes (\lambda x^j) \otimes ... \otimes x^m)(T), \end{aligned}$$

pour toute application m-lineaire $T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m)$.

3. (3) est une conséquence de (2). ■

D'aprés la propriété (2) de la proposition(1.1.1) on déduit que: un élément $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$, tel que $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m$, c'est écrit sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m.$$

Remarque 2.1.1 *(1) Si* $\dim X_j < \infty$ *pour tout* $j = 1, .., m$ *alors* $\dim(X_1 \otimes ... \otimes X_m) = \prod_{j=1}^{m} \dim X_j$.

(2) Pour tout $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m, u \neq 0$, *il existe un plus petit entier* $n \in \mathbb{N}$ *pour lequel* u *admet une représentation de* n *termes, telle que*

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m.$$

Et en plus on a $x_1^j, ..., x_n^j$ *sont linéairement indépendant dans* X_j, $\forall j = 1, .., m$, *l'entier* n *s'appelle le rang de* u. *Pour approfondir plus voir [13].*

Proposition 2.1.2 *Pour* $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$, *les affirmations suivantes sont équivalentes*

1. $u = 0$
2. $\sum_{i=1}^{n} \phi_1(x_i^1)...\phi_m(x_i^m) = 0$, *pour tout* $\phi_j \in X_j^*, j = 1, .., m.$

Pour la dimonstration voir [13] .

le produit tensoriel des opérateurs.

Proposition 2.1.3 *[16]Soient $T_j : X_j \to Y_j$, pour tout, $j = 1, .., m$, des opérateurs linéairs continus, alors il existe un unique opérateur $T_1 \otimes ... \otimes T_m : X_1 \otimes ... \otimes X_m \to Y_1 \otimes ... \otimes Y_m$ tel que*

$$T_1 \otimes ... \otimes T_m(x^1 \otimes ... \otimes x^m) = T_1(x^1) \otimes ... \otimes T_m(x^m).$$

pour tout $x^1 \in X_1, ..., x^m \in X_m$.

2.2 Produit tensoriel projectif

La norme projective

Proposition 2.2.1 *Soient $m \in \mathbb{N}$ et $X_1, ..., X_m$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ pour chaque $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$, nous définissons le nombre réel positif*

$$\pi(u) = \inf \sum_{i=1}^{n} \left\| x_i^1 \right\| ... \left\| x_i^m \right\|$$

où l'infimum portée sur toutes les représentations possibles de u de la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m.$$

Alors π est une norme tensorielle sur l'espace $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ et en plus on a $\pi(x^1 \otimes ... \otimes x^m) = \|x^1\| ... \|x^m\|$.

Preuve. (1) Premierment On montre que $\sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i^1)...\varphi_m(x_i^m)$ indépendante de représentation de $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$, pour tout $\varphi_1 \in X_1', ..., \varphi_m \in X_m'$.

Soit $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$, supposons que u a deux représentations de la forme

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m = \sum_{i=1}^{k} y_i^1 \otimes ... \otimes y_i^m.$$

pour tout application m-linéaire $T \in L(X_1, ..., X_m)$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} T(x_i^1, ..., x_i^m) &= \sum_{i=1}^{n} (x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m)(T) \\ &= (\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m)(T) \\ &= (\sum_{i=1}^{k} y_i^1 \otimes ... \otimes y_i^m)(T) \\ &= \sum_{i=1}^{k} T(y_i^1, ..., y_i^m). \end{aligned}$$

En particulier, soient $\varphi_1 \in X_1', ..., \varphi_m \in X_m'$, et on considére l'application T m-linéaire est de type finie:

$$\begin{aligned} T : X_1 \times ... \times X_m &\rightarrow \mathbb{K} \\ (x^1, ..., x^m) &\mapsto T(x^1, ..., x^m) = \varphi_1(x^1)...\varphi_m(x^m). \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i^1)...\varphi_m(x_i^m) &= \sum_{i=1}^{n} T(x_i^1, ..., x_i^m) \\ &= \sum_{i=1}^{k} T(y_j^1, ..., y_j^m) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \varphi_1(y_i^1)...\varphi_m(y_i^m). \end{aligned}$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} \varphi_1(x_i^1)...\varphi_m(x_i^m)$ indépendante de la représentation de u.

Maintenant, on montre que $\pi(u) = 0 \Longleftrightarrow u = 0$, pour tout $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$.

Supposons que $\pi(u) = 0$, dans ce cas, pour tout $\varepsilon > 0$, par la définition de $\pi(u)$, il existe une représentation $\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m$ de u, tel que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \left\| x_i^1 \right\| ... \left\| x_i^m \right\| < \varepsilon.$$

Alors, pour tous $\varphi_j \in X_j^{'}, i = 1, ..., m$,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i^1)...\varphi_m(x_i^m)\right| &\leq \sum_{i=1}^{n} \mid \varphi_1(x_i^1) \mid ... \mid \varphi_m(x_i^m) \mid \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left\|x_i^1\right\| ... \left\|x_i^m\right\| \parallel \varphi_1 \parallel ... \parallel \varphi_m \parallel \\ &< \parallel \varphi_1 \parallel ... \parallel \varphi_m \parallel \varepsilon.\end{aligned}$$

Donc,

$$0 \leq \left|\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i^1)...\varphi_m(x_i^m)\right| <\parallel \varphi_1 \parallel ... \parallel \varphi_m \parallel \varepsilon. \tag{2.2.1}$$

D'après ce que nous avons prouvé au début, la valeur de la somme $\sum_{i=1}^{k}\varphi_1(y_i^1)...\varphi_m(y_i^m)$ est indépendante de la représentation de u, donc si $\epsilon \longrightarrow 0$, on obtient, $\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i^1)...\varphi_m(x_i^m) = 0$.

On sait que, $X_j^{'}$ est un sous-ensemble de $X_i^*, i = 1, ..., m$. Donc $\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(x_i^1)...\varphi_m(x_i^m) = 0$, pour tout φ_i appartenant à un sous-ensemble de X_i^*.

Donc par la proposition (2.1.2), nous concluons que $u = 0$.

Si $u = 0$, il est clair que $\pi(u) = 0$.

(2) On montre que $\pi(\lambda) =\mid \lambda \mid \pi(u)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$. .

Il est clair que l'égalité est satisfaite pour $\lambda = 0$. Supposons que $\lambda \neq 0$. Si $u = \sum_{i=1}^{n}x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m$ est une répresentation pour u, alors $\lambda u = \sum_{i=1}^{n}(\lambda x_i^1) \otimes ... \otimes x_i^m$, et donner

$$\pi(\lambda u) \leq \sum_{i=1}^{n} \parallel \lambda x_i^1 \parallel \parallel x_i^2 \parallel ... \left\|x_i^m\right\| =\mid \lambda \mid \sum_{i=1}^{n} \left\|x_i^1\right\| ... \left\|x_i^m\right\|.$$

Donc,

$$\frac{\pi(\lambda u)}{\mid \lambda \mid} \leq \sum_{i=1}^{n} \left\|x_i^1\right\| ... \left\|x_i^m\right\|.$$

Comme cette dernière inégalité est satisfaite pour toute représentation de u, en prenant l'infimum sur ces représentations, il est obtenu, $\frac{\pi(\lambda u)}{|\lambda|} \leq \pi(u)$, c'est-à-dire, $\pi(\lambda u) \leq\mid \lambda \mid \pi(u)$. D'autre part,

$$\pi(u) = \pi(\lambda^{-1}\lambda u) \leq\mid \lambda^{-1} \mid \pi(\lambda u).$$

Alors, $\mid \lambda \mid \pi(u) \leq \pi(\lambda u)$. Donc $\pi(\lambda) =\mid \lambda \mid \pi(x)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour tout $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$.

(3) Finalement, on montre que $\pi(u+v) \leq \pi(u) + \pi(v)$, pour tout $u, v \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $u, v \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$. Par la définition nous pouvons de choisir des représentations $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m$ et $v = \sum_{j=1}^{k} y_j^1 \otimes ... \otimes y_j^m$, tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \|x_i^1\| ... \|x_i^m\| < \pi(u) + \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ et}$$
$$\sum_{j=1}^{k} \|y_i^1\| ... \|y_i^m\| < \pi(y) + \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m + \sum_{j=1}^{k} y_i^1 \otimes ... \otimes y_i^m$ est une représentation de $u+v$, alors

$$\pi(u+v) \leq \sum_{i=1}^{n} \left\|x_i^1\right\| ... \|x_i^m\| + \sum_{j=1}^{k} \left\|y_i^1\right\| ... \|y_i^m\| \leq \pi(u) + \pi(v) + \varepsilon.$$

Si $\varepsilon \longrightarrow 0$, on obtient, $\pi(u+v) \leq \pi(u) + \pi(v)$, pour tout $u, v \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$.

Donc, de $(1), (2)$ et (3) π *est une norme tensorielle sur l'espace* $X_1 \otimes ... \otimes X_m$.

On montre maintenant que $\pi(x^1 \otimes ... \otimes x^m) = \|x^1\| ... \|x^m\|$.

Soient $x^j \in X_j, j = 1, ..., m$, il est clair que $\pi(x^1 \otimes ... \otimes x^m) \leq \|x^1\| ... \|x^m\|$.

On choisir $\varphi_1 \in B_{X_1'}, ..., \varphi_m \in B_{X_m'}$, tels que $\varphi_j(x_j) =\| x_j \|, j = 1, ..., m$.

On considère la forme m-linéaire de type finie

$$\begin{array}{rcl} B : X_1 \times ... \times X_m & \to & \mathbb{K} \\ (x^1, ..., x^m) & \mapsto & B(x^1, ..., x^m) = \varphi_1(x^1)...\varphi_m(x^m). \end{array}$$

Alors, il existe *une unique forme linéaire* $B_L \in \mathcal{L}(X_1 \otimes ... \otimes X_m)$, tel que $B = B_L \circ \sigma_m$.

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$,

$$\begin{aligned} \mid \quad B_L(u) \mid &= \left| B_L \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \right) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \mid B_L(x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m) \mid \\ &= \sum_{i=1}^{n} \mid B(x_i^1, ..., x_i^m) \mid = \sum_{i=1}^{n} \mid \varphi_1(x_i^1) \mid ... \mid \varphi_m(x_i^m) \mid = \sum_{i=1}^{n} \left\|x_i^1\right\| ... \|x_i^m\| . \end{aligned}$$

on prend l'infimum sur toutes les représentations de u, on conclure que $| B_L(u) |\leq \pi(u)$, pour tout $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$.

En particulier, pour $x^1 \otimes ... \otimes x^m \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$,

$$\begin{aligned} \left\|x^1\right\| ... \|x^m\| &= \left| \left\|x^1\right\| ... \|x^m\| \right| = \left| \varphi_1(x^1)...\varphi_m(x^m) \right| = \left| B(x^1, ..., x^m) \right| \\ &= \left| B_L(x^1 \otimes ... \otimes x^m) \right| \leq \pi(x^1 \otimes ... \otimes x^m). \end{aligned}$$

Donc, $\pi(x^1 \otimes ... \otimes x^m) = \|x^1\| ... \|x^m\|$. ∎

La norme π s'apeleé la norme projective, et l'espace $X_1 \otimes_\pi ... \otimes_\pi X_m$, est l'espace de produit tenseriel des espaces $X_1, ..., X_m$ muni de la norme π, cet espace en général n'est pas complet, alors on note par $X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m$ son complété. L'espace de Banach $X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m$ s'appeler le produit tensoriel projectif des espaces vectoriels normés $X_1, ..., X_m$. Pour plus de détails voir[3] et [13].

Maintenant on définie le produit tenseriel projective des opérateurs continus.

Proposition 2.2.2 *[16]Soient $X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_m$ des espaces vectoriels normés et des opérateurs linéaires conituns $T_j : X_j \to Y_j, j = 1, .., m$, il existe un uniqu opérateur linéaire continu $T_1 \otimes ... \otimes T_m : X_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi X_m \to Y_1 \hat{\otimes}_\pi ... \hat{\otimes}_\pi Y_m$, tel que*

$$T_1 \otimes_\pi ... \otimes_\pi T_m(x^1 \otimes ... \otimes x^m) = T_1(x^1) \otimes ... \otimes T_m(x^m)$$

pour tout $x^j \in X_j, j = 1, ..., m$, et en plus

$$\|T_1 \otimes_\pi ... \otimes_\pi T_m\| = \prod_{j=1}^{m} \|T_j\| .$$

Linéarisation des applications m-linéaires continues

Maintenant pouvons-nous, en quelque sorte, linéariser les applications multilinéaires. Autrement dit existe-t-il un espace vectoriel E tel que $L(E, Y)$ coïncide avec l'espace $L(X_1, ..., X_m; Y)$ (existe-t-il un isomorphisme entre les deux espaces) le théorème suivant nous donne la réponse

Théorème 2.2.1 *[12] Soient $X_1, ..., X_m$ and Y des espaces de Banach. Si $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ une application multilinéaire continue, alors, il existe un unique opérateur linéaire continu T_L definie sur $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ dans Y, vérifier*

$$T_L(x^1 \otimes ... \otimes x^m) = T(x^1, ..., x^m)$$

pour tout $x^j \in X_j$, *et tout* $j = 1, ..., m$, *avec, le diagramme suivant est comutative*

$$\begin{array}{ccc} X_1 \times ... \times X_m & \xrightarrow{T} & Y \\ \searrow_{\sigma_m} & & \nearrow_{T_L} \\ & X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m & \end{array}$$

avec σ_m *est l'operateur canonique definie de* $X_1 \times ... \times X_m$ *dans* $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$ *par:*

$$\sigma_m \left(x^1, ..., x^m\right) = x^1 \otimes ... \otimes x^m$$

Autrement dit: $T = T_L \circ \sigma_m$.

La correspondance $T \leftrightarrow T_L$ *est une isomorphisme isométrique entre l'espace de Banach* $\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y)$ *et* $\mathcal{L}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y)$. *De plus l'operateur* T_L *s'appelle linéarisation de* T.

Le théorème précédent donne l'identification

$$\mathcal{L}(X_1, ..., X_m; Y) = \mathcal{L}(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m; Y).$$

Si $Y = \mathbb{K}$, le dual de $(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m)$ est identifié à l'espace des formes multilinéaires bornées

$$(X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m)^* = \mathcal{L}(X_1, ..., X_m).$$

Avec cette identification, l'action d'une forme continue T, comme fonction linéaire continue sur $X_1 \widehat{\otimes}_\pi ... \widehat{\otimes}_\pi X_m$, est donné par

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m \longmapsto \sum_{i=1}^{n} T(x_i^1, ..., x_i^m);$$

cette dualité donne une nouvelle formule pour la norme projective,

$$\pi(u) = \sup \left\{ |T_L(u)|, T \in \mathcal{L}(X_1, ..., X_m), \|T\| \leq 1 \right\}.$$

2.3 Produit tensoriel injectif

La norme injective

Définition 2.3.1 *Soit $X_1, ..., X_m$ des espaces normés. La norme injective sur $X_1 \otimes ... \otimes X_m$ est définie par*

$$\epsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{n} \phi^1(x_i^1)...\phi^m(x_i^m) \right|, \phi^j \in B_{X_j^*}, j = 1, .., m \right\},$$

où $\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m$ est une représentation de $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$.

On note par $X_1 \otimes_\epsilon ... \otimes_\epsilon X_m$ le produit tenseriel muni de la norme ϵ. Cet espace n'est pas complet en général, alors on note par $X_1 \widehat{\otimes}_\epsilon ... \widehat{\otimes}_\epsilon X_m$ son complété. L'espace de Banach $X_1 \widehat{\otimes}_\epsilon ... \widehat{\otimes}_\epsilon X_m$ s'appelle le produit tensoriel injectif des espaces de Banach $X_1, ..., X_m$.

Proposition 2.3.1 *[5]Soit $X_1, ..., X_m$ des espaces vectoriels normés.*

1. $\epsilon(x^1 \otimes ... \otimes x^m) = \|x^1\| ... \|x^m\|$ *pour tout* $(x^1, ..., x^m) \in X_1 \times ... \times X_m$.

2. $\epsilon(u) \leq \pi(u)$ *pour tout* $u \in X_1 \otimes ... \otimes X_m$

2.4 La linéarisation du polynômes m-homogènes

Définition 2.4.1 *Soit $m \in \mathbb{N}$, et X un espace vectoriel. Le sous espace de produit tenseriel $\otimes^m X$ est l'ensemble de tous les éléments $u \in \otimes^m X$, de la forme*

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i, \ \ (n \in \mathbb{N}, x_i \in X, 1 \leq i \leq n).$$

et sera appelée produit tenseriel symétrique de X, cette sous espace sera noté par $\otimes_s^m X$.

Maintenant, on peut définie une norme sur $\otimes_s^m X$, qui sera la clé de la linéarisation du polynômes m-homogenes continu définie sur X. Cette norme s'appelée norme s-tensor projective, notée par π_s, et définie par

$$\pi_s(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^m : u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i, n \in \mathbb{N} \right\}$$

pour $u \in \otimes_s^m X$. On note l'espace normé $(\otimes_s^m X, \ \pi_s)$ par $\otimes_{\pi,s}^m X$, et par $\hat{\otimes}_{\pi,s}^m X$ son complété.

Proposition 2.4.1 *[3]Soit $m \in \mathbb{N}$. L'application*

$$\begin{array}{rccc} \sigma_m : & X & \rightarrow & \hat{\otimes}^m_{\pi,s} X \\ & x & \longmapsto & \otimes^m x \end{array}$$

est un polynôme m-homogène continu avec une norme égale à 1.

Preuve. Premièrement, on vérifier que l'application suivante:

$$\begin{array}{rccc} T : & X \times \overset{(m)}{\cdots} \times X & \rightarrow & \otimes^m X \\ & (x^1, ..., x^m) & \mapsto & x^1 \otimes ... \otimes x^m \end{array}$$

est une application m-linéaire. En effet:

soit $\lambda \in \mathbb{K}, i \in \{1, ..., m\}$ et $x^1, ..., x^i, y^i, ..., x^m \in X$, alors

$$\begin{aligned} T(x^1, ..., \lambda x^i + y^i, ..., x^m) &= x^1 \otimes ... \otimes \lambda x^i + y^i \otimes ... \otimes x^m \\ &= \lambda(x^1 \otimes ... \otimes x^i \otimes ... \otimes x^m) + \left(x^1 \otimes ... \otimes y^i \otimes ... \otimes x^m\right) \\ &= \lambda T(x^1, ..., x^i, ..., x^m) + T(x^1, ..., y^i, ..., x^m) \end{aligned}$$

donc, T est m-linéaire.

Par la proposition (1.1.2), l'application symétrique de T :

$$\begin{array}{rccc} T_s : & X \times \overset{(m)}{\cdots} \times X & \rightarrow & \otimes^m X \\ & (x^1, ..., x^m) & \mapsto & \frac{1}{m!} \sum\limits_{\sigma \in S_m} T(x_{\sigma(1)}, ..., x_{\sigma(m)}) = \frac{1}{m!} \sum\limits_{\sigma \in S_m} x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(m)} \end{array}$$

est une application m-linéaire.

Comme l'image de l'application T_s est exactement le produit tensoriel symétrique $\otimes^m_s X$, [pour plus de detail voir [12] propostion 1.4], alors l'application:

$$\begin{array}{rccc} T' : & X^m & \rightarrow & \hat{\otimes}^m_{\pi,s} X \\ & (x^1, ..., x^m) & \mapsto & T'(x^1, ..., x^m) = T_s(x^1, ..., x^m), \end{array}$$

est bien définie, et m-linéaire. De plus, $T'x^m = \sigma_m(x)$, pour tout $x \in X$, donc l'application σ_m est une polynôme m-homogène.

De plus, on a:

$$\pi_s(\sigma_m(x)) = \pi_s(x \otimes ... \otimes x) = \| x \|^m,$$

pour tout $x \in X$.

Donc par la proposition (1.2.2), le polynôme m-homogène σ_m est continu et de norme 1. ■

Théorème 2.4.1 *Soit X et Y deux espaces normés. Si $P :^m X \to Y$ est un polynôme m-homogène continu, alors il existe un opérateur linéaire unique $P_L \in \mathcal{L}(\hat{\otimes}^m_{\pi,s} X, Y)$ tel que:*

$$P(x) = P_L(x \otimes ... \otimes x), \text{ pour tout } x \in X.$$

La correspondance $P \leftrightarrow P_L$, établit un isomorphisme isométrique entre l'espace $\mathcal{P}(^m X; Y)$, muni de la norme habituelle le sup*, et le dual de l'espace $\hat{\otimes}^m_{\pi,s} X$; considérons le polynôme canonique:*

$$\delta_m : \quad X \quad \to \quad \hat{\otimes}^m_{\pi,s} X$$

définir par:

$$\delta_m (x) = x \otimes ... \otimes x.$$

Nous avons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{P} & Y \\ & \searrow_{\delta_m} & \uparrow P_L \\ & & \hat{\otimes}^m_{\pi,s} X \end{array}$$

ainsi $P = P_L \circ \delta_m$.

L'operateur linéair continu P_L s'appelle la linéarisation du polynôme m-homogène continu P.

Preuve. Soit $P :^m X \to Y$ polynôme m-homogène. On choisir T tel que $P(x) = Tx^m$, pour tout $x \in X$.

Alors $P(x) = T_L(x \otimes ... \otimes x)$, pour tout $x \in X$, tel que $T_L :^m \otimes X \to Y$ la Linéarisation de T par le théorème (2.2.1).

Soit P_L la restriction de T_L sur $^m \otimes X$, donc l'opérateur P_L est linéaire et $P = P_L \circ \delta_m$.

Soit $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i \in \otimes^m_s X$, on a

$$\begin{aligned} \| P_L(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i) \| &\leq \sum_{i=1}^{n} \| P_L(x_i \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x_i) \| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \| P(x_i) \| \\ &\leq \|P\| \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^m . \end{aligned}$$

En prenant l'infimum sur toutes les représentations de u, alors$\|P_L(u)\| \leq\| P \| \pi_s(u)$.

Donc $P_L$est borné et $\|P_L\| \leq \|P\|$.

D'autre part, pour tout $x \in X$

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &= \|P_L(x \otimes ... \otimes x)\| \\ &\leq \|P_L\| \, \pi(x \otimes ... \otimes x) \\ &= \|P_L\| \, \|x\|^m \end{aligned}$$

Donc $\|P_L\| = \|P\|$.

Soit maintenant $S_L \in \mathcal{L}(\otimes^m_{\pi,s} X, Y)$ un autre opérateur de linéarisation de P; alors:

$$\begin{aligned} S_L(u) &= S_L(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes ... \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{n} S_L(x_i \otimes ... \otimes x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P_L(x_i \otimes ... \otimes x_i) \\ &= P_L(\sum_{i=1}^{n} x_i^1 \otimes ... \otimes x_i^m) = P_L(u). \end{aligned}$$

Donc P_L, S_L sont identiques sur $\otimes^m_s X$ et enfin, par densité, ils sont identiques sur $\widehat{\otimes}^m_{\pi,s} X$.

Maintenant, on montre que l'application φ est isomorphisme isométrié tel que

$$\begin{aligned} \varphi : \ \mathcal{P}(^m X; Y) &\to \mathcal{L}(\hat{\otimes}^m_{\pi,s} X, Y) \\ P &\mapsto P_L \end{aligned}$$

1- On prouve que φ est linéaire.

On a

$$\begin{aligned} (P + \lambda P')_L(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes ... \otimes x_i) &= \sum_{i=1}^{n} (P + \lambda P')(x_i) = \sum_{i=1}^{n} [P(x_i) + \lambda P'(x_i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(x_i) + \lambda(\sum_{i=1}^{n} P'(x_i) \\ &= P_L(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes ... \otimes x_i) + \lambda P'_L(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes ... \otimes x_i) \\ &= (P_L + \lambda P'_L)(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes ... \otimes x_i), \end{aligned}$$

pour tout $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes ... \otimes x_i \in \otimes_s^m X$.

Donc $(P+\lambda P')_L = P_L+\lambda P'_L$. alors $\varphi(P+\lambda P') = (P+\lambda P')_L = P_L+\lambda P'_L = \varphi(P)+\lambda\varphi(P')$.

Donc φ est linéaire.

2- On montre que φ est injective.

On suppose que $P \in \ker\varphi$, c'est a dire $\varphi(P) = 0$, dans ce cas $P_L = \varphi(P) = 0$.donc

$$P_L(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes ... \otimes x_i) = 0,$$

pour tout $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes ... \otimes x_i \in \otimes_s^m X$. En particulier

$$0 = P_L(x \otimes ... \otimes x) = P(x),$$

pour tout $x \in X$. Alors $P = 0$.

Donc φ est injective.

Montrons que φ est surjective.

Pour $u \in \mathcal{P}(^m X; Y)$. On definie

$$\begin{array}{cccc} B: & X & \rightarrow & Y \\ & x & \mapsto & B(x) = u(x \otimes ... \otimes x) \end{array}$$

il est facile de voir que $B \in \mathcal{P}(^m X; Y)$, donc il existe un unique opérateur linéaire $B_L \in \mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{\pi,s}^m X, Y)$ tel que $B = B_L \circ \delta_n$.

D'un autre part, $B = u \circ \sigma_n$.

comme B_L est l'unique opérateur linéaire tel que $B = B_L \circ \delta_n$, alors $u = B_L$.

Donc $\varphi(B) = B_L = u$.

Donc φ est surjective.

3- On a

$$\| \varphi(P) \| = \| P_L \| = \| P \| .$$

De (1),(2) et (3) La correspondance $P \leftrightarrow P_L$ est une isomorphisme isométrique entre l'espace de Banach $\mathcal{P}(^m X; Y)$ et $\mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{\pi,s}^m X, Y)$. ■

Chapitre 3

Les polynomes Cohen fortement p-sommant

Dans ce chapitre et à travers [2], nous allons donné la définition des polynômes Cohen fortement p-sommant et le théorème de domination de Pietsch et par [1] on va montrer ce théorème, ensuite, par [2] on mettre le preuve de une polynôme fortement Cohen P-sommant si, et seulement si, son opérateur multilinéaire symétrique associée est Cohen fortement p-sommant, si et seulement si, sa linéarisation est un opérateur linéaire Cohen fortement de p-sommant.

Soit X un espace Banach et $1 \leq p \leq \infty$.On note par $l_p^n(X)$, l'espace de toutes les suites $(x_i)_{i=1}^n$ dans X muni de la norme

$$\| (x_i)_{1 \leq i \leq n} \|_{l_p^n(X)} = (\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^p)^{\frac{1}{p}} \tag{3.0.1}$$

et par $l_p^{n\omega}(X)$ l'space de toutes les suites $(x_i)_{i=1}^n$ dans X muni de la norme

$$\| (x_n) \|_{l_p^{n\omega}(X)} = \sup_{\|x^*\|_{X^*}=1} (\sum_{i=1}^{n} | \langle x_i, x^* \rangle |^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{3.0.2}$$

où X^* est le dual topologique de X.

La boule d'unité fermée de X sera noté par B_X, l'espace vectoriel de tous les opérateurs linéaires bornés de X dans Y sera noté par $\mathcal{B}(X, Y)$,et p^* est le conjugué de p, c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

3.1 Les polynômes Cohen fortement p-sommant

Avant de donner la définition des polynômes Cohen fortement p-sommant, nous commençons par rappeler la définition du opérateurs multilinéaires Cohen fortement p-sommant.

Définition 3.1.1 *[2]Soit $1 \leq p \leq \infty$. Un opérateur m-liniéaire $T : X_1 \times ... \times X_m \to Y$ (X_j, Y sont des espaces de Banach et $m \in \mathbb{N}^*$) est Cohen fortement p-sommont si, et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x_1^j, ..., x_n^j \in X_j$, $(j = 1, ..., m)$ et tout $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,*

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle T(x_i^1, ..., x_i^m), y_i^* \right\rangle\right| \leq C(\sum_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \parallel x_i^j \parallel_{X_j}^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \parallel y_i^*(y) \parallel_{l_{p^*}^n} . \tag{3.1.1}$$

La classe des opérateurs m-linéaires Cohen fortement p-sommant de $X_1 \times ... \times X_m$ dans Y, qui est noté par $\mathcal{D}_p^m(X_1 \times ... \times X_m; Y)$, est un espace de Banach muni du norme $d_p^m(T)$, c'est-à-dire le plus petite constante C telle que l'inégalité (3.1.1) est vérifiée.

Pour $m = 1$ c'est le cas linéaire des opérateurs linéaires Cohen fortement p-sommants $\mathcal{D}_p(X, Y)$

Définition 3.1.2 *[2]Soient $m \in \mathbb{N}$, $1 < p \leq \infty$ et X, Y des espaces de Banach. Un polynôme m-homogène $P :^m X \to Y$ est Cohen fortement p-sommant, s'il existe une constante $C > 0$ tel que pour tout $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| \leq C(\sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \parallel y_i^*(y) \parallel_{l_{p^*}^n} \tag{3.1.2}$$

La classe de ces polynômes est noté par $\mathcal{P}_{Coh}^p(^m X; Y)$; il est muni de la norme $d_p(P)$,c'est-à-dire, la plus petite constante C telle que l'inégalité (3.1.2) est vérifiée.

Pour $p = 1$, on a $\mathcal{P}_{Coh}^1(^m X; Y) = \mathcal{P}(^m X; Y)$.

Proposition 3.1.1 *[2]Soient $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$ et $v \in \mathcal{B}(l_p^n; Y^*)$. Alors P est Cohen fortement p-sommant si*

$$\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), v(e_i) \rangle| \,|\leq k(\sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^{mp})^{\frac{1}{p}} \parallel v \parallel, \tag{3.1.3}$$

Exemple 3.1.1 *Soient $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$ et $u : X \to Y$ est un opérateur linéaire fortement p-sommant et $\varphi \in X^*$. Le polynôme*

$$\begin{array}{rccl} P: & {}^mX & \to & Y \\ & x & \mapsto & \varphi^{m-1}(x)u(x) \end{array}$$

est un polynôme Cohen fortement p-sommant. En effet, pour $x_1, ..., x_n \in X$, $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle \varphi^{m-1}(x_i)u(x_i), y_i^* \right\rangle \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left| \left\langle u(\varphi^{m-1}(x_i)x_i), y_i^* \right\rangle \right| \\ &\leq d_p(u) \parallel \varphi \parallel^{m-1} (\sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{i=1}^{n} \mid y_i^*(y) \mid^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

Alors, P est Cohen fortement p-sommant et $d_p(P) \leq \parallel \varphi \parallel^{m-1} d_p(u)$.

Proposition 3.1.2 *(Propriété d'idéal) Soit $P \in \mathcal{P}(^mX;Y)$, $R \in \mathcal{B}(Y,Z)$ et $S \in \mathcal{B}(G,X)$.*

1. *Si P est Cohen fortement p-sommant, alors $R \circ P$ est Cohen fortement p-sommant et $d_p^m(R \circ P) \leq \parallel R \parallel d_p^m(P)$.*
2. *Si P est Cohen fortement p-sommant, alors $P \circ S$ est Cohen fortement p-sommant et $d_p^m(P \circ S) \leq d_p^m(P) \parallel S \parallel^m$.*

Preuve. (1) On montre que $R \circ P$ est Cohen fortement p-sommant et $d_p^m(R \circ P) \leq \parallel R \parallel d_p^m(P)$.

Soient $P \in \mathcal{P}(^mX;Y)$ et $R \in \mathcal{B}(Y,Z)$, alors pour tout $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} |\langle (R \circ P)(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle (P)(x_i), R^*(y_i^*) \rangle| \\ &\leq d_p^m(P)(\sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{i=1}^{n} \parallel R^*(y_i^*(y)) \parallel^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \|R^*\| d_p^m(P)(\sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{i=1}^{n} \parallel y_i^*(y) \parallel^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Donc $R \circ P$ est Cohen fortement p-sommant et $d_p^m(R \circ P) \leq \parallel R \parallel d_p^m(P)$.

(2) On montre que $P \circ S$ est Cohen fortement p-sommant et $d_p^m(P \circ S) \leq d_p^m(P) \parallel S \parallel^m$.
Soient $P \in \mathcal{P}(^mX; Y)$ et $S \in \mathcal{B}(G, X)$, alors pour tout $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\langle (P \circ S)(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle P(S(x_i)), (y_i^*) \rangle| \\
&\leq d_p^m(P) (\sum_{i=1}^{n} \parallel S(x_i) \parallel^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{i=1}^{n} \parallel y_i^*(y) \parallel^{p^*})^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq d_p^m(P) \parallel S \parallel^m (\sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} (\sum_{i=1}^{n} \parallel y_i^*(y) \parallel^{p^*})^{\frac{1}{p^*}}
\end{aligned}$$

Donc $P \circ S$ est Cohen fortement p-sommant et $d_p^m(P \circ S) \leq d_p^m(P) \parallel S \parallel^m$. ■

3.2 Théorème de domination de Pietsch

On présente maintenant le thèoréme de domination de Pietsch pour cette classe. Avant ceci, on donne le lemme de Ky Fan pour son utilitè dans la dèmonstration du thèorème. Pour la preuve le lecteur pourra consulter [[8], p.190].

Lemme 3.2.1 *Soit X un espace vectoriel topologique Hausdorff et Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble convexe compact de X. Soit M un ensemble de fonctions definis sur $\mathcal{C}$ à valeurs dans $(-\infty, \infty]$ vérifiant les proprieté suivantes:*

(a) toute $f \in M$ est convexe et semi-continue inférieurement;

(b) si $g \in$ conv (M), il existe $f \in M$ avec $g(x) \leq f(x)$, $\forall\ x \in \mathcal{C}$;

(c) il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in M$ prend une valeur $\leq r$.

Alors, il existe $x_0 \in \mathcal{C}$ tel que $f(x_0) \leq r$, $\forall f \in M$.

Théorème 3.2.1 *[2]Soit $m \in \mathbb{N}$. Un polynôme m-homogène $P \in \mathcal{P}(^mX; Y)$ est Cohen fortement p-sommant $(1 < P \leq \infty)$ si, et seulement s'il existe une mesure de probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ et $C > 0$ tel que, pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$*

$$|\langle P(x), y^* \rangle| \leq C \parallel x \parallel^m (\int_{B_{Y^{**}}} | y^*(y^{**}) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}. \tag{3.2.1}$$

De plus, dans ce cas $d_p(P) = \min \{C : C$ vérifiant $(3.2.1)\}$.

Preuve. *D'abord, on montre l'inverse. Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Soit* $x \in X$ *et* $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$.*on a par* (3.2.1)

$$|\langle P(x), y_i^* \rangle| \leq C \parallel x \parallel^m (\int\limits_{B_{Y^{**}}} | y_i^*(y^{**}) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}.$$

pour tout $1 \leq i \leq n$,*alors*

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| &\leq C\sum_{i=1}^{n}(\parallel x_i \parallel^m (\int\limits_{B_{Y^{**}}} | y_i^*(y^{**}) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}) \text{ (par Holder)} \\
&\leq C(\sum_{i=1}^{n}(\parallel x_i \parallel^m)^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}(\int\limits_{B_{Y^{**}}} | y_i^*(y^{**}) |^{p^*} d\mu(y^{**})))^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq C(\sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \parallel y_i^*(y) \parallel .
\end{aligned}$$

Cela implique que $P \in \mathcal{P}^p_{Coh}(^m X; Y)$ *et* $d_p^m(P) \leq C$.

Pour prouver la première implication, soit $K = B_{Y^{**}}$. *Considérons l'ensemble* $\mathcal{C}$ *des mesures de probabilité sur* $C(K)^*$. *C'est un compact convexe de* $C(K)^*$ *doté de sa topologie* $*$ *faible* $\sigma(C(K)^*, C(K))$. *Soit* M *l'ensemble de toutes les fonctions sur* $\mathcal{C}$ *avec des valeurs en* $\mathbb{R}$ *de la forme*

$$f_{((x_i),(y_i^*))}(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \left(| \langle P(x_i), y_i^* \rangle | - \frac{C}{p} \parallel x_i \parallel^{mp} - \frac{C}{p^*}(\int\limits_K | \langle y_i^*, y^{**} \rangle |^{p^*} d\mu(y^{**}) \right), \quad (3.2.2)$$

ou $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \subset X$, *et* $(y_i^*)_{1 \leq i \leq n} \subset Y^*$.

Ces fonctions sont convexes et continues. Nous appliquons maintenant le lemme de Ky Fan avec $E = C(K)^*$. *Soit* f, g *dans* M *et* $\alpha \in [0, 1]$ *tel que*

$$f_{((x_i'),(y_i'^*))}(\mu) = \sum_{i=1}^{k} \left(| \langle P(x_i'), y_i^* \rangle | - \frac{C}{p} \parallel x_i' \parallel^{mp} - \frac{C}{p^*}(\int\limits_K | \langle y_i'^*, y^{**} \rangle |^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)$$

et

$$g_{((x_i''),(y_i''^*))}(\mu) = \sum_{i=1}^{l} \left(| \langle P(x_i''), y_i^* \rangle | - \frac{C}{p} \parallel x_i'' \parallel^{mp} - \frac{C}{p^*}(\int\limits_K | \langle y_i''^*, y^{**} \rangle |^{p^*} d\mu(y^{**}) \right)$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\alpha f &= \sum_{i=1}^{k} \alpha \left(| \langle P(x'_i), y_i^* \rangle | - \frac{C}{p} \parallel x'_i \parallel^{mp} - \frac{C}{p^*} (\int\limits_K | \langle y_i'^*, y^{**} \rangle |^{p^*} \, d\mu(y^{**}) \right) \\
\alpha f &= \sum_{i=1}^{k} \left(| \left\langle P(\alpha^{1/(mp)} x'_i), \alpha^{1/p^*} y_i^* \right\rangle | - \frac{C}{p} \parallel \alpha^{1/(mp)} x'_i \parallel^{mp} - \frac{C}{p^*} (\int\limits_K | \left\langle \alpha^{1/p^*} y_i'^*, y^{**} \right\rangle |^{p^*} \, d\mu(y^{**}) \right)
\end{aligned}$$

et

$$(1-\alpha) g = \sum_{i=1}^{l} (1-\alpha) \left(| \langle P(x''_i), y_i^* \rangle | - \frac{C}{p} \parallel x''_i \parallel^{mp} - \frac{C}{p^*} (\int\limits_K | \langle y_i''^*, y^{**} \rangle |^{p^*} \, d\mu(y^{**}) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \left(| \left\langle P((1-\alpha)^{1/(mp)} x''_i), (1-\alpha)^{1/p^*} y_i^* \right\rangle | - \frac{C}{p} \parallel (1-\alpha)^{1/(mp)} x''_i \parallel^{mp} - \frac{C}{p^*} (\int\limits_K | \left\langle (1-\alpha)^{1/p^*} y_i''^*, y^{**} \right\rangle |^{p^*}$$

Enfin, nous avons

$$\alpha f + (1-\alpha) g = \sum_{i=1}^{n} \left(| \langle P(x_i), y_i^* \rangle | - \frac{C}{p} \parallel x_i \parallel^{mp} - \frac{C}{p^*} (\int\limits_K | \langle y_i^*, y^{**} \rangle |^{p^*} \, d\mu(y^{**}) \right)$$

avec $n = k + l$,

$$x_i = \begin{cases} \alpha^{1/(mp)} x'_i & si \quad 1 \le i \le k, \\ (1-\alpha)^{1/(mp)} x'_i & si \quad k+1 \le i \le n, \end{cases}$$

et

$$x_i = \begin{cases} \alpha^{1/p^*} y_i''^* & si \quad 1 \le i \le k, \\ (1-\alpha)^{1/p^*} y_i''^* & si \quad k+1 \le i \le n. \end{cases}$$

Soit maintenant $y_0 \in B_{y^{**}}$, *tel que*

$$\sup_{\|y\|=1} \left(\sum_{i=1}^{n} | \langle y_i^*, y^{**} \rangle |^{p^*} \right)^{1/p^*} = \left(\sum_{i=1}^{n} | \langle y_i^*, y_0 \rangle |^{p^*} \right)^{1/p^*}$$

et f *de la forme (3.2.5). On a*

$$\begin{aligned}
f_{((x_i),(y_i^*))}(\delta_{y_0}) &= \sum_{i=1}^{n} \left(| \langle P(x_i), y_i^* \rangle | - \frac{C}{p} \parallel x_i \parallel^{mp} - \frac{C}{p^*} (\int\limits_K | \langle y_i^*, y^{**} \rangle |^{p^*} \, d\delta_{y_0}(y^{**}) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} | \langle P(x_i), y_i^* \rangle | - \frac{C}{p} \sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^{mp} - \frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^{n} | \langle y_i^*, y_0 \rangle |^{p^*} .
\end{aligned}$$

(δ_{y_0} est la mesure de Dirac)

Utilisation de l'identité élémentaire

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^* \qquad \alpha\beta = \inf_{\epsilon>0} \left\{ \frac{1}{p} \left(\frac{\alpha}{\epsilon} \right)^p + \frac{1}{p^*} (\epsilon\beta)^{p^*} \right\} \tag{3.2.3}$$

Nous trouvons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} & \mid \langle P(x_i), y_i^* \rangle \mid -\frac{C}{p} \sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^{mp} -\frac{C}{p^*} \sum_{i=1}^{n} \mid \langle y_i^*, y_0 \rangle \mid^{p^*} \\ & \leq \sum_{i=1}^{n} \mid \langle P(x_i), y_i^* \rangle \mid -C \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^{mp} \right)^{1/p} \left(. \sum_{i=1}^{n} \mid \langle y_i^*, y_0 \rangle \mid^{p^*} \right)^{1/p^*} \right) \end{aligned}$$

et ceci par (3.2.2) est inférieur ou égal à zéro. Par le lemme de Ky Fan, il existe $\mu \in \mathcal{C}$ *tel que* $f(\mu) \leq 0$ *Pour tout* $f \in M$*. Si on prend* $x \in X$ *et* $y^* \in Y^*$ *on a*

$$\begin{aligned} f(\mu) &= f_{(x,y^*)}(\mu) \\ &= \mid \langle P(x), y^* \rangle \mid -\frac{C}{p} \parallel x \parallel^{mp} -\frac{C}{p^*} (\int_K \mid \langle y^*, y^{**} \rangle \mid^{p^*} d\mu \leq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\mid \langle P(x), y^* \rangle \mid \leq C \left(\frac{1}{p} \parallel x \parallel^{mp} + \frac{1}{p^*} \int_K \mid \langle y^*, y^{**} \rangle \mid^{p^*} d\mu \right).$$

Soit $\epsilon > 0$*. Remplacer* x *par* $\frac{1}{\epsilon^{1/m}} x$*,* y^* *par* ϵy^* *et prendre l'infimum sur tout* $\epsilon > 0$ *(voir (3.2.6)),*

on trouve

$$\begin{aligned} \mid & \langle P(x), y^* \rangle \mid \leq C \left(\frac{1}{p} \parallel x \parallel^{mp} + \frac{1}{p^*} \int_K \mid \langle y^*, y^{**} \rangle \mid^{p^*} d\mu \right) \\ \leq & \; C \left(\frac{1}{p} \parallel \frac{x}{\epsilon^{1/m}} \parallel^{mp} + \frac{1}{p^*} \int_K \mid \langle \epsilon y^*, y^{**} \rangle \mid^{p^*} d\mu \right) \\ \leq & \; C \left(\frac{1}{p} \left(\frac{\parallel x \parallel^m}{\epsilon} \right)^p + \frac{1}{p^*} \left(\epsilon \left(\int_K \mid \langle y^*, y^{**} \rangle \mid^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}} \right)^{p^*} \right) \\ \leq & \; C \parallel x \parallel^m \left(\int_K \mid \langle y^*, y^{**} \rangle \mid^{p^*} d\mu \right)^{\frac{1}{p^*}}. \end{aligned}$$

Cela implique que

$$| \langle P(x), y^* \rangle | \leq C \parallel x \parallel^m \parallel y^* \parallel_{L_{p^*(B_{Y^{**}},\mu)}} .$$

■

Corollaire 3.2.1 *Soit $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$. Si $P \in \mathcal{P}^{p_2}_{Coh}(^m X; Y)$, alors $P \in \mathcal{P}^{p_1}_{Coh}(^m X; Y)$ et $d_{p_1}(P) \leq d_{p_2}(P)$.*

Preuve. *Soient $1 \leq p_1 \leq p_2 < \infty$ et $P \in \mathcal{P}^{p_2}_{Coh}(^m X; Y)$. Alors par la teoreme (3.2.1) il existe une mesure de probabilité de Radon μ sur $B_{Y^{**}}$ tel que*

$$| \langle P(x), y^* \rangle | \leq d_{p_2}(P) \parallel x \parallel^m \Big(\int_{B_{Y^{**}}} | y^*(y^{**}) |^{p^*} d\mu(y^{**}) \Big)^{\frac{1}{p^*}},$$

pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$.Comme μ'est une mesure de probabilité, alors $L_{p_2}(\mu) \subseteq L_{p_1}(\mu)$ et $\parallel . \parallel_{L_{p_1}} \leq \parallel . \parallel_{L_{p_2}}$.

Donc

$$\begin{aligned} | \langle P(x), y^* \rangle | &\leq d_{p_2}(P) \parallel x \parallel^m \Big(\int_{B_{Y^{**}}} | y^*(y^{**}) |^{p_2^*} d\mu(y^{**}) \Big)^{\frac{1}{p_2^*}} \\ &\leq d_{p_2}(P) \parallel x \parallel^m \Big(\int_{B_{Y^{**}}} | y^*(y^{**}) |^{p_1^*} d\mu(y^{**}) \Big)^{\frac{1}{p_1^*}} \end{aligned}$$

pour tout $x \in X$ et $y^* \in Y^*$.

Donc $P \in \mathcal{P}^{p_1}_{Coh}(^m X; Y)$ et $d_{p_1}(P) \leq d_{p_2}(P)$. ■

3.3 Théorèmes de caractérisation et d'inclusion

Théorème 3.3.1 *[2]Le polynôme $P \in \mathcal{P}(^m X, Y)$ est Cohen fortement p-sommant si, et seulement si, son opérateur m-linéaire symétrique associé $\check{P} \in \mathcal{L}(^m X, Y)$ est fortement Cohen p-sommant.*

Preuve. Premièrement, supposons que P_L est Cohen fortement p-sommant. Soit $x_1, ..., x_n \in X$, $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$,alors

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} \left|\left\langle \check{P}(x_i, ..., x_i), y_i^* \right\rangle\right| \\
&\leq d_p^m(\check{P})(\sum_{i=1}^{n}\prod^{m} \| x_i \|^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \| (y_i^*(y)) \|_{l_{p^*}^n} \\
&= d_p^m(\check{P})(\sum_{i=1}^{n} \| x_i \|^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_Y} \| (y_i^*(y)) \|_{l_{p^*}^n}
\end{aligned}$$

Donc, P est Cohen fortement p-sommant et $d_p(P) \leq d_p^m(\check{P})$.

Inversement, soit $P \in \mathcal{P}_{Coh}^p({}^mX; Y)$. Soit $x^j \in X$ tel que $\| x^j \| \leq 1$ $(j = 1, ..., m)$ et $y^* \in Y^*$. En utilisant la formule de polarisation (1.1.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left|\left\langle \check{P}(x^1, ..., x^m), y^* \right\rangle\right| &= |< \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_1,...,\epsilon_m = \pm 1} \epsilon_1 ... \epsilon_m P(\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j x^j), y^* >| \\
&\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_1,...,\epsilon_m = \pm 1} |< P(\sum_{j=1}^{m} \epsilon_j x^j), y^* >| \\
&\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\epsilon_1,...,\epsilon_m = \pm 1} d_p(P) \| \sum_{j=1}^{m} \epsilon_j x^j \|^m (\int_{B_{Y^{**}}} | y^*(y^{**}) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \frac{1}{m!2^m} d_p(P) \sum_{\epsilon_1,...,\epsilon_m = \pm 1} (\sum_{j=1}^{m} \| x^j \|)^m (\int_{B_{Y^{**}}} | y^*(y^{**}) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \frac{1}{m!2^m} d_p(P) 2^m m^m (\int_{B_{Y^{**}}} | y^*(y^{**}) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}} \\
&\leq \frac{m^m}{m!} d_p(P) (\int_{B_{Y^{**}}} | y^*(y^{**}) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}.
\end{aligned}$$

alors, pour tout $x^j \in B_X (1 \leq j \leq m)$, on a

$$\left|\left\langle \check{P}(x^1, ..., x^m), y^* \right\rangle\right| \leq \frac{m^m}{m!} d_p(P) (\int_{B_{Y^{**}}} | y^*(y^{**}) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}.$$

et pour $x^j \in X$ $(x^j \neq 0)$,

$$\left|\left\langle \check{P}(\frac{x^1}{\| x^1 \|}, ..., \frac{x^m}{\| x^m \|}), y^* \right\rangle\right| \leq \frac{m^m}{m!} d_p(P) \prod_{j=1}^{m} \| x^j \| (\int_{B_{Y^{**}}} | y^*(y^{**}) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}.$$

Donc, $\check{P}$ est Cohen fortement p-sommant et $d_p(\check{P}) \leq \frac{m^m}{m!} d_p(P)$. ∎

Proposition 3.3.1 *[2]Soit $1 < p \leq \infty$. soient $P :^m X \to Y$ un polynôme m-homogène et P_L sa linéarisation. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

1. *Le polynôme $P \in \mathcal{P}^p_{Coh}(^m X; Y)$.*

2. *L'opérateur $P_L \in \mathcal{D}_p(\hat{\otimes}^m_{\pi,s} X; Y)$.*

Preuve. Supposons que $P_L \in \mathcal{D}_p(\hat{\otimes}^m_{\pi,s} X; Y)$. Pour $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle P_L(x_i \otimes ... \otimes x_i), y_i^* \rangle| \\ &\leq d_p(P_L)(\sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \otimes ... \otimes x_i \parallel^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_y} \parallel y_i^*(y) \parallel_{l^n_{p^*}} \\ &\leq d_p(P_L)(\sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_y} \parallel y_i^*(y) \parallel_{l^n_{p^*}}\end{aligned}$$

Inversement, supposons que P est Cohen fortement p-sommant. Soit $v \subset \hat{\otimes}^m_{\pi,s} X$ tel que $v \neq 0$ et $y^* \in Y^*$. Supposons que $v = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \otimes, ..., \otimes x_i$. Alors

$$\begin{aligned}|\langle P_L(v), y^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y^* \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} d_p^m(P) \parallel x_i \parallel^m (\int_{B_{Y^{**}}} | y^{**}(y^*) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}, \text{ (par holder)} \\ &\leq d_p^m(P)(\sum_{i=1}^{n} \parallel x_i \parallel^m)(\int_{B_{Y^{**}}} | y^{**}(y^*) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}\end{aligned}$$

En prenant l'infimum sur tout représentation de v; on obtient

$$|\langle P_L(v), y^* \rangle| \leq d_p^m(P) \parallel v \parallel (\int_{B_{Y^{**}}} | y^{**}(y^*) |^{p^*} d\mu(y^{**}))^{\frac{1}{p^*}}$$

Donc, par [achour et Mezrag.], P_L est fortement p-sommant et $d_p^m(P) = d_p(P_L)$. ∎

Proposition 3.3.2 *[2]Ce qui suit est équivalent pour $P \in \mathcal{P}(^m X; Y)$*

(1) Le polynôme P est Cohen fortement p-sommant.

(2) L'opérateur P_L est Cohen fortement p-sommant de $\hat{\otimes}^m_{\pi,s} X$ dans Y.

(3) Il existe un opérateur Cohen fortement p-sommant u et un polynôme Q tel que $P = u \circ Q$.

Preuve. (1) $\Longleftrightarrow$ (2) Proposition (3.3.1).

(2) $\Longrightarrow$ (3) On a le résultat directement du factorisation $P = P_L \circ \delta_m$.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Soient Z un espace de Banach, u un opérateur linéaire Cohen fortement p-sommant ($u \in \mathcal{D}_p(Z;Y)$) et un polynôme $Q \in \mathcal{P}(^m X; Z)$ tel que $P = u \circ Q$. Pour $x_1, ..., x_n \in X$ et $y_1^*, ..., y_n^* \in Y^*$, nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\langle P(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^{n} |\langle u \circ Q(x_i), y_i^* \rangle| \\
&= \sum_{i=1}^{n} |\langle u\left(Q(x_i)\right), y_i^* \rangle| \\
&\leq d_p(u) (\sum_{i=1}^{n} \parallel Q(x_i) \parallel^p)^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_y} \parallel (y_i^*(y)) \parallel_{l_{p^*}^n} \\
&\leq d_p(u) \parallel Q \parallel (\sum_{i=1}^{n} \parallel (x_i) \parallel^{mp})^{\frac{1}{p}} \sup_{y \in B_y} \parallel y_i^*(y) \parallel_{l_{p^*}^n} .
\end{aligned}$$

donc, P est Cohen fortement p-sommant. ■

Bibliographie

[1] D. Achour, L. Mezrag, On the Cohen strongly p-summing multilinear operators, J. Math.Anal. Appl. 327 (2007), 550–563.

[2] D. Achour and K. Saadi. A polynomial caracterization of Hilbert spaces. Collect. Math. 61, 3 (2010), 291 –301.

[3] R. T. Alves. Polinômios dominados entre espaços de Banach, Dissertaçao de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2011.

[4] A. T. L. Bernardino. Ideais de Aplicaçes Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach, Dissertaçao de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba 2008.

[5] E. Dahia. Sur la représentation tensorielle des idéaux multilinéaires, thèse de doctorat, Universite Mohamed Boudiaf-M'sila 2014.

[6] S.Dineen, Comples analysis on infinite dimensional spaces, London 1999.

[7] F. R. DeMoura. Ideais algébricos de aplicações multilinearese polinômios homogêneos, Dissertaçao de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia. 2014.

[8] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely summing operators. Cambridge University Press, 1995.

[9] A. Grothendieck, Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Bol. Soc. Mat. São Paulo 8 (1956), 1–79.

[10] M. Y. Miyamura, Reflexividade de Espacos de Operadores Lineares e Espaços de Polinômios Homogêneos. Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

[11] J. Mujica, Complex analysis in Banach spaces holomorphic functions and domains of holomorphy in finite and infinite dimensions, North Holland mathematics studies 120, Amesterdam, 1986

[12] A.Ryan, Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy, Ph.D. Thesis, Trinity College, Dublin, (1980).

[13] R. Ryan, Introduction to Tensor Product of Banach Spaces, Springer-Verlag, London, 2002. La linéarisation du polynômes m-homogènes

[14] J. O. Rebeiro. Ideais coerentes e copmativeis entre espaços de Banach. 2011.

[15] K. Saadi, Les opérateurs multi p-sommants et leurs applications, thèse de doctorat, Universite Mohamed Boudiaf−M'sila, 2010.

[16] A.R. Silva, Linearização de aplicações multilineares continuas entre espaços de Banach e multi-ideais de composição, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.

[17] E. R. Torres. Hiper-ideais de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach, Universidade de Sao Paulo, thèse de doctorat, 2015.

[18] R. Schatten, The cross-space of linear transformations, Ann. of Math. (2)47 (1946), 73–84 .

الملخص:

يتناول هذا العمل كثيرات الحدود المستمرة، حيث في البداية أدرجنا المفاهيم و النتائج الأساسية، ثم تطرقنا لمفهوم منتج موتر الذي من خلاله نتطرق لنظرية خطية كثيرات الحدود متعددة التجانس، و أنهينا العمل بتقديم كثيرات الحدود قوة ب-تجميعية و نظرية الهيمنة لبيتش مع البرهان و بعض النتائج الأساسية.

الكلمات المفتاحية: تطبيق متعدد الخطية، كثيرات الحدود متعددة التجانس، منتج موتر، كثيرات الحدود كوهين قوة ب-تجميعية، نظرية الهيمنة لـ بيتش.

Résumé

Ce travail est traite les polynômes m-homogènes continus, nous avons inclus des définitions et des résultats de base, ensuite, nous avons étudié les concepts de base des produit tensoriel, pour mettre le théorème de la linéarisation des polynômes m-homogènes continus, et à la fin de ce travail, nous avons présenté les polynômes Cohen fortement p-sommant et le théorème de domination de Pietsch avec le preuve et quelques résultats.

Mots clés: Application multilinéaire, Polynôme m- homogène, Produit tensoriel, Polynôme Cohen fortement p-sommant, Théorème de domination de Pietsch.

Abstract

This work deals with continuous m-homogeneous polynomials, we have included basic definitions and results, then, we studied the basic concepts of tensor product, to put the theorem of linearization of continuous m-homogeneous polynomials, and at the end of this work, we presented the Cohen strongly p-summing polynomials and Pietsch domination theorem with the proof and some results.

Key words: Multilinear application, m-homogeneous polynomial, Tensor Product, Cohen strongly p-summant polynomial.