Étude des treillis distributifs et treillis flous

MOURAD ***YETTOU***

4 juin 2016

Table des matières

Introduction

Comme les choses de la vie se chevauchent les uns avec les autres, il est nécessaire de les classifier ou de les ordonner, pour simplifier leur étude et leur compréhension et le décèlement de leurs vérités. Pour cela les mathématiciens ont inventé deux concepts fondamentaux qui sont : la relation d'équivalence et la relation d'ordre.

Dans ce mémoire nous allons traiter le sujet des treillis, qui sont une classe particulière d'ensembles ordonnés et nous allons accentuer l'étude sur les treillis de Boole ou **algèbre de Boole** (cette structure algébrique a été étudiée par le mathématicien **Georges Boole** 1815-1864) et les treillis flous.

Les notions de treillis flous utilisées dans ce mémoire sont celles introduites par **Chon (Korean J. Math 17 (2009), No.4,361-374)**).

Les treillis de Boole et les treillis flous sont la base de la logique classique (propositionnelle) et la logique floue, d'où ils ont beaucoup d'utilisations, surtout dans le domaine d'électronique en particulier **les circuits électroniques intégrés** qui sont le cœur de toute machine électronique.

Ce mémoire est réparti en quatre chapitres :

Dans le premier chapitre : nous allons étudier la notion de relations binaires sur un ensemble, en particulier les relations d'ordres.

Dans le deuxième chapitre on donne des généralités sur les treillis.

Le troisième chapitre est un aperçu sur les treillis flous et certaines de leur propriétés essentiels.

Le quatrième chapitre est une application d'algèbre de Boole pour afficher les 10 chiffres sur un afficheur numérique à 7 segments.

Chapitre 1

Notions de relations binaires sur un ensemble

À la base de la théorie des graphes, le concept de relations joue un rôle fondamental dans les domaines les plus variés. En informatique, il occupe une place prépondérante dans les questions structurations de bases de données.
Dans ce chapitre nous allons développer la notion de relations binaires sur un ensemble, en particulier les relations d'ordres.

1.1 Relations binaires sur un ensemble

De façon informelle, une relation binaire sur un ensemble est une proposition qui lie certains éléments de cet ensemble entre eux.

1.1.1 Préliminaires

Définition 1.1 (Produit cartésien) *[28]*
Soient E et F des ensembles, on note $E \times F$ et on appelle ***Le produit cartésien*** *de E et F l'ensemble de tous les couples dont la première composante appartient à E et le seconde à F :*
$E \times F = \{(x, y) : (x \in E) \wedge (y \in F)\}$.

Définition 1.2 (Relation binaire sur un ensemble) *[28]*
Soit E un ensemble quelconque, une ***relation binaire*** *$\Re$ sur E est une partie de E^2, c'est-à-dire*

$\Re = \{(a,b) : (a,b) \in E^2\}$. *Si* $\Re$ *une relation binaire sur un ensemble* E *et* $(a,b) \in \Re$*, on dit que* ***a*** *est en relation avec* ***b*** *selon* $\Re$ *et on écrit* $a\Re b$.

Définition 1.3 (L'image directe et l'image réciproque) *[22]*
Soit $\Re$ *une relation binaire sur un ensemble* E*, et soit* X, Y *des parties de* E*. On appelle* ***image directe*** *de* X *par* $\Re$*, et on note* $\Re(X)$*, le sous-ensemble de* E *:* $\Re(X) = \{y \in E \mid \exists x \in X : x\Re y\}$.
Cas particulier, si la partie $X = \{a\}$ *(singleton) on note* $\Re(X)$ *par* $\Re(a)$*. On appelle* ***image réciproque*** *de* Y *par* $\Re$*, et on note* $\Re^{-1}(Y)$*, le sous-ensemble de* E *:* $\Re^{-1}(Y) = \{x \in E \mid \exists z \in Y \ : \ x\Re z\}$.
Cas particulier, si la partie $Y = \{b\}$ *(singleton) on note* $\Re^{-1}(Y)$ *par* $\Re^{-1}(b)$.

Exemple 1.1
Soient l'ensemble $E = \{1,2,3\}$ *et* $\Re = \{(1,1), (2,1), (3,2)\}$ *une relation binaire sur* E.
$X_1 = \{1,3\}$, $X_2 = \{3\}$, $Y_1 = \{1,2\}$ *et* $Y_2 = \{2\}$ *sont des parties de* E.

- $\Re(X_1) = \{1,2\} = Y_1$ *et* $\Re(X_2) = \Re(3) = \{2\} = Y_2$.
- $\Re^{-1}(Y_1) = \{1,3\} = X_1$ *et* $\Re^{-1}(Y_2) = \Re^{-1}(2) = \{3\} = X_2$.

Théorème 1.1 *[3]*
Si $\Re$ *et* Σ *sont des relations binaires sur un ensemble* E *tel que* $\Re(a) = \Sigma(a)$ *pour tout* $a \in E$*, alors* $\Re = \Sigma$.

Preuve :
Si $a\Re b \Longleftrightarrow b \in \Re(a) \Longleftrightarrow b \in \Sigma(a) \Longleftrightarrow a\Sigma b$.

1.1.2 Propriétés des relations binaires sur un ensemble

Définition 1.4
Soit $\Re$ *une relation binaire sur un ensemble* E.

- $\Re$ *est dite* ***réflexive*** *si* $(a,a) \in \Re$*, pour tout* $a \in E$.
- $\Re$ *est dite* ***irréflexive*** *si* $(a,a) \notin \Re$*, pour tout* $a \in E$.
- $\Re$ *est dite* ***symétrique*** *si* $(a,b) \in \Re \Longleftrightarrow (b,a) \in \Re$*, pour tout* $a, b \in E$.
- $\Re$ *est dite* ***antisymétrique*** *si* $(a,b) \in \Re$ *et* $(b,a) \in \Re \Longrightarrow a = b$ *pour tout* $a, b \in E$.
- $\Re$ *est dite* ***transitive*** *si* $(a,b) \in \Re$ *et* $(b,c) \in \Re \Longrightarrow (a,c) \in \Re$ *pour tout* $a, b, c \in E$.

Exemple 1.2

1. *Pour n'importe quel ensemble E non vide, $\Delta = \{(a,a)\,|a \in E\}$ la relation* ***d'égalité*** *est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.*

2. *Sur $\mathbb{Z}$ la relation $<$ est irréflexive, antisymétrique et transitive.*

3. *Sur $\mathbb{N}^*$ la relation* ***divise*** *est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Théorème 1.2 *[3]*
Soit $\Re$ une relation binaire sur un ensemble E non vide.

- *Si $\forall a \in E : a \in \Re(a)$, alors $\Re$ est* ***réflexive****.*
- *Si $\forall a, b \in E : a \in \Re(b) \Longleftrightarrow b \in \Re(a)$, alors $\Re$ est* ***symétrique****.*
- *Si $\forall a, b \in E : a \in \Re(b)$ et $b \in \Re(a) \Longrightarrow a = b$, alors $\Re$ est* ***antisymétrique****.*
- *Si $\forall a, b, c \in E : a \in \Re(b)$ et $b \in \Re(c) \Longrightarrow a \in \Re(c)$, alors $\Re$ est* ***transitive****.*

1.2 Relations d'ordres

Cette section est une introduction à l'étude des ensembles partiellement ordonnés. Au tout début était l'ordre...ou l'ordre strict ! cette section commence par la définition de ses deux notions et du vocabulaire de base qui leur est associé, qui nous serviront par la suite.

1.2.1 Ensemble partiellement ordonné

Définition 1.5 (Ordre partiel)
Une relation binaire $\leqslant$ sur un ensemble E est dite relation ***d'ordre*** *(au bien* ***ordre partiel****) si elle est* ***réflexive****,* ***antisymétrique*** *et* ***transitive****. Dans ce cas le couple $(E, \leqslant)$ est dit* ***ensemble ordonné*** *(au bien* ***ensemble partiellement ordonné****, au tout simplement* ***poset****).*

Définition 1.6 (Ordre strict)
Une relation binaire $<$ sur un ensemble E est dite ***ordre strict*** *si elle est* ***irréflexive*** *et* ***transitive****. Dans ce cas le couple $(E, <)$ est dit* ***ensemble strictement ordonné****.*

Exemple 1.3

1. *La relation de divisibilité ($a\Re b \iff a|b$) est un ordre partiel sur $\mathbb{N}^*$, donc le couple $(\mathbb{N}^*, |)$ est un ensemble partiellement ordonné.*
2. *Pour tout ensemble E, $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un ensemble partiellement ordonné, avec $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E.*

Remarque 1.1 ***[22]***

- *Si E n'est pas vide, un ordre strict n'est pas donc un ordre.*
- *Un ordre strict $<$ est nécessairement antisymétrique. En effet : si on imagine $((a < b)$ et $(b < a))$, avec $a \neq b$, la transitivité de $<$ entraîne $a < a$, ce qui est contredit l'irréflexivité de $<$.*

Définition 1.7 (La comparabilité) ***[19]***

Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble partiellement ordonné et a, b des éléments de E.
On dit que a et b sont comparables selon $\leqslant$ ***si*** *$a \leqslant b$ ou $b \leqslant a$.*
On dit que a et b sont incomparables selon $\leqslant$ ***si*** *$a \nleqslant b$ et $b \nleqslant a$.*

Définition 1.8 ***[27]***

Un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ est dit ***linéairement ordonné*** *(au bien* ***totalement ordonné****, au tout simplement* ***chaîne****) si tous ses éléments sont comparables, et dans ce cas l'ordre $\leqslant$ est dit* ***linéaire*** *(au bien* ***total****).*

Exemple 1.4

1. *Les ensembles $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel $\leqslant$, sont des ensembles linéairement ordonnés (totalement ordonnés).*
2. *L'ensemble $D(8) = \{1, 2, 4, 8\}$ des diviseurs de 8 muni de la relation divise $|$ est un ensemble linéairement ordonné.*
3. *La relation $\subseteq$ sur $\mathcal{P}(E)$, est un ordre généralement partiel, elle n'est un ordre total que si $|E| \leq 1$.*

Remarque 1.2 ***[28]***

- *Si $\leqslant$ est un ordre partiel sur un ensemble E, l'ordre strict $<$ associé à $\leqslant$ est défini comme suit :*

$$a < b \Longleftrightarrow (a \leqslant b \ \ et \ \ a \neq b)$$

- *Si $<$ est un ordre strict sur un ensemble E, l'ordre partiel $\leqslant$ associé à $<$ est défini comme suit :*

$$a \leqslant b \Longleftrightarrow (a < b \ \ ou \ \ a = b)$$

Définition 1.9 (Antichaîne) *[24]*

*Un ensemble ordonné $(E, \leq)$ est dit **antichaîne**, si tous ses éléments sont deux à deux incomparables.*

Remarque 1.3

- *Les seules ensembles ordonnés qui sont à la fois **chaîne** et **antichaîne** sont les singletons.*
- *Dans une chaîne : $a \nleqslant b$ équivaut à $b < a$.*

Théorème 1.3

Si $(E, \leqslant_E)$, $(F, \leqslant_F)$ deux ensembles ordonnés, alors $(E \times F, \leqslant_{E\times F})$ est aussi un ensemble ordonné tel que l'ordre $\leqslant_{E\times F}$ définie comme suit : $(a_1, b_1) \leqslant_{E\times F} (a_2, b_2) \Longleftrightarrow a_1 \leqslant_E a_2$ et $b_1 \leqslant_F b_2$.

*Cet ordre $\leqslant_{E\times F}$ est dit Ordre **produit classique**.*

Preuve :

On a : $[a \leqslant_E a \text{ et } b \leqslant_F b], \forall (a, b) \in E \times F \Longrightarrow [(a, b) \leqslant_{E\times F} (a, b)], \forall (a, b) \in E \times F$, donc $\leqslant_{E\times F}$ est **réflexive**.

Si :

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \leqslant_{E\times F} (a_2, b_2) \text{ et } (a_2, b_2) \leqslant_{E\times F} (a_1, b_1) &\Longleftrightarrow (a_1 \leqslant_E a_2 \text{ et } b_1 \leqslant_F b_2) \text{ et } (a_2 \leqslant_E a_1 \text{ et } b_2 \leqslant_F b_1). \\ &\Longleftrightarrow (a_1 \leqslant_E a_2 \text{ et } a_2 \leqslant_E a_1) \text{ et } (b_1 \leqslant_F b_2 \text{ et } b_2 \leqslant_F b_1). \\ &\Longrightarrow (a_1, b_1) = (a_2, b_2)\text{, donc } \leqslant_{E\times F} \text{ est } \textbf{antisymétrique}. \end{aligned}$$

Si :

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) \leqslant_{E\times F} (a_2, b_2) \text{ et } (a_2, b_2) \leqslant_{E\times F} (a_3, b_3) &\Longleftrightarrow (a_1 \leqslant_E a_2 \text{ et } b_1 \leqslant_F b_2) \text{ et } (a_2 \leqslant_E a_3 \text{ et } b_2 \leqslant_F b_3). \\ &\Longleftrightarrow (a_1 \leqslant_E a_2 \text{ et } a_2 \leqslant_E a_3) \text{ et } (b_1 \leqslant_F b_2 \text{ et } b_2 \leqslant_F b_3). \\ &\Longrightarrow (a_1 \leqslant_E a_3 \text{ et } b_1 \leqslant_F b_3) \\ &\Longleftrightarrow (a_1, b_1) \leqslant_{E\times F} (a_3, b_3)\text{, donc } \leqslant_{E\times F} \text{ est } \textbf{transitive}. \end{aligned}$$

Finalement $\leqslant_{E\times F}$ est un ordre partiel, donc $(E \times F, \leqslant_{E\times F})$ est un ensemble ordonné.

Définition 1.10 *[19]*

Si $(E, \leqslant_E)$ et $(F, \leqslant_F)$ deux ensembles ordonnés, on peut définir sur $E \times F$ un ordre $\preceq$ définie comme suit : $(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \Longleftrightarrow [a_1 <_E a_2$ ou $(a_1 = a_2$ et $b_1 <_F b_2)]$.

*Cet ordre est dit **ordre lexicographique** au bien **ordre de dictionnaire**.*

Remarque 1.4 *[3]*

Si $\leqslant_E$ et $\leqslant_F$ sont des ordres linéaires sur E et F respectivement, alors

- *l'ordre lexicographique $\preceq$ est aussi linéaire.*
- *Mais l'ordre produit classique $\leqslant_{E\times F}$ n'est pas forcement linéaire.*

Définition 1.11 (Ordre réciproque) *[4]*

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné, on peut définir sur E une nouvelle relation, notée $x \geqslant y$ comme étant équivalente à $y \leqslant x$, on vérifie immédiatement que c'est aussi une relation d'ordre sur E.

*La relation $x \geqslant y$ (x supérieur à y) est dite **la relation d'ordre réciproque** de $x \leqslant y$ $(\geqslant = \leqslant^{-1} = \{(x, y) \in E^2 : y \leqslant x\})$. On notera également :*

- *$x \ngeqslant y$: x non supérieur à y.*
- *$x > y$: x strictement supérieur à y, c'est-à-dire $x \geqslant y$ et $x \neq y$.*

Définition 1.12 (Ordre induit) *[5]*

Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et B une partie de E, alors la relation $\leqslant_B = \{(x, y) \in B^2 \mid x \leqslant y\}$ sera appelée relation d'ordre induite par $\leqslant$ sur B.

1.2.2 Morphismes d'ensembles ordonnés

Définition 1.13 (Morphisme d'ordres) *[21]*

*Soient $(E, \leqslant_E)$ et $(F, \leqslant_F)$ des ensembles ordonnes, une application $f : E \longrightarrow F$ sera dite **morphisme d'ordres** ou encoure une **application croissante**, si quels que soient x, y dans E :*
$x \leqslant_E y \Longrightarrow f(x) \leqslant_F f(y)$.

On définira également :

Application décroissante : $x \leqslant_E y \Longrightarrow f(x) \geqslant_F f(y)$ (c'est un morphisme en munissant F de l'ordre réciproque).

Application strictement croissante : $x <_E y \Longrightarrow f(x) <_F f(y)$.

Application strictement décroissante : $x <_E y \Longrightarrow f(x) >_F f(y)$.

Exemple 1.5

1. *L'application identique d'un ensemble ordonné est un morphisme d'ordre.*
2. *Soit* $f : (D(6), |) \longrightarrow (D(30), |)$ *une application définie comme suit :* $f(a) = a, \forall a \in D(6)$. *L'application* f *est un morphisme d'ordre.*

Remarque 1.5 *[4]*

1. *Une application constante est à la fois croissante et décroissante, mais la réciproque est inexacte, exemple :*
   Soit $E = \{2, 3, 4, 9\}$ *ordonné par divisibilité,* $F = \mathbb{N}$ *avec l'ordre naturel, on définit* f *par* $f(2) = f(4) = 1$ *et* $f(3) = f(9) = 2$, f *est croissante et décroissante mais n'est pas constante.*
2. *Une application croissante et injective est strictement croissante, mais une application strictement croissante n'est pas nécessairement injective, exemple : avec les mêmes ensembles que précédemment,* $f(2) = 1$, $f(3) = f(4) = 2$, *et* $f(9) = 3$, f *est strictement croissante mais n'est pas injective, puisque* $f(3) = f(4)$ *mais* $3 \neq 4$.
3. *Si* f *est une bijection croissante, l'application réciproque* f^{-1} *n'est pas nécessairement croissante, exemple : l'application identique de* $(\mathbb{N}, |)$ *sur* $(\mathbb{N}, \leqslant)$ *est une bijection croissante, mais l'application réciproque n'est pas croissante, puisque* $2 \leqslant 3$ *mais* 2 *ne divise pas* 3.

Définition 1.14 (Isomorphisme d'ordres) *[7]*

Soient $(E, \leqslant_E)$ *et* $(F, \leqslant_F)$ *des ensembles ordonnés, une application* $f : E \longrightarrow F$ *sera dite un* ***isomorphisme d'ordres*** *si :*

1. $\forall x, y \in E : x \leqslant_E y \Longleftrightarrow f(x) \leqslant_F f(y)$.
2. f *est bijective.*

Cela signifie donc que f *et* f^{-1} *sont toutes les deux croissantes, par suite étant injectives elles seront strictement croissantes.*

Exemple 1.6

1. *L'application identique d'un ensemble ordonné est un isomorphisme d'ordre.*
2. *Soit* $f : (D(6), |) \longrightarrow (D(30), |)$ *une application définie comme suit :* $f(a) = a, \forall a \in D(6)$. *L'application* f *est un morphisme d'ordre, mais n'est pas surjectif, donc n'est pas un isomorphisme d'ordre.*

Remarque 1.6

Si E est une chaîne, un isomorphisme peut être défini simplement comme une bijection croissante, car si $f(x) \leqslant_F f(y)$: $y \nless x$ (sinon $f(y) <_F f(x)$), donc $x \leqslant y$.

1.2.3 Éléments particuliers d'un ensemble ordonné

Soit $(E, \leqslant_E)$ un ensemble ordonné, on peut définir, éventuellement, quatre types d'éléments jouant des rôles intéressants pour la relation d'ordre.

Définition 1.15 (Élément maximal et élément minimal) *[27]*

- *Un élément k de E est dit **maximal** si pour tout $x \in E$: $k \nless x$ (ce qui signifie : ou bien $x \leqslant k$, ou bien x et k sont incomparables).*
- *Un élément k de E est dit **minimal** si pour tout $x \in E$: $k \ngtr x$ (ce qui signifie : ou bien $k \leqslant x$, ou bien x et k sont incomparables).*

Exemple 1.7

Dans l'ensemble $E = \{2, 4, 5, 10, 12, 20, 25\}$ ordonné par divisibilité $12, 20$ et 25 sont des éléments maximaux, mais 2 et 5 sont des éléments minimaux.

Théorème 1.4 *[7]*

Si $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné fini :

1. *Tout élément a de E est inférieur ou égal à un élément maximal.*
2. *Tout élément a de E est supérieur ou égal à un élément minimal.*

Preuve :

*Si a n'est pas **lui-même maximal**, il existe a_1 tel que : $a < a_1$ si a_1 n'est pas **maximal**, il existe a_2 tel que : $a_1 < a_2$, etc...*

*Comme E est fini, ce processus doit prendre fin en un élément **maximal** supérieur à a (même manière pour le résultat (2)).*

Définition 1.16 (Plus grand élément et plus petit élément) *[19]*

- *On appelle **plus grand élément** (ou bien maximum) de E, tout élément **g** de E réalisant $\forall x \in E,\ \ x \leqslant g$. Notons qu'un tel élément, s'il existe, est nécessairement **unique**, car s'il y en avait deux, g_1 et g_2, on aurait $g_1 \leqslant g_2$ et $g_2 \leqslant g_1$, donc $g_1 = g_2$.*

  On note $g = max(E)$.

- *On appelle* ***plus petit élément*** *(au bien minimum) de E, tout élément* ***p*** *de E réalisant $\forall x \in E,\ \ p \leqslant x$. Notons qu'un tel élément, s'il existe, est nécessairement* ***unique****, car s'il y en avait deux, p_1 et p_2, on aurait $p_1 \leqslant p_2$ et $p_2 \leqslant p_1$, donc $p_1 = p_2$.*
  On note $p = min\,(E)$.

Exemple 1.8

1. *Dans l'exemple 1.7, E n'ayant pas ni plus grand élément et ni plus petit élément.*
2. *Dans l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 6\}$ ordonné par divisibilité, 1 est le* ***plus petit élément*** *de E, et 6 est le* ***plus grand élément*** *de E.*

Remarque 1.7 *[4]*

- *Si E a un plus grand élément (resp. un plus petit élément) α, α est aussi un élément maximal (resp. un élément minimal) et c'est le seul.*
- *Si E est une chaîne, les notions d'élément maximal et de plus grand élément (resp. d'élément minimal et de plus petit élément) se confondent.*

Définition 1.17 (Majorant et minorant)

Soient E un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

- *On dit que $k \in E$ est un* ***majorant*** *de A dans E, si $x \leqslant k$ pour tout $x \in A$. L'ensemble de tous les majorants de A se notera $Major\,(A)$, $Major\,(A) = \{z \in E : a \leqslant z, \forall a \in A\}$.*
- *On dit que $k \in E$ est un* ***minorant*** *de A dans E, si $k \leqslant x$ pour tout $x \in A$. L'ensemble de tous les minorants de A se notera $Minor\,(A)$, $Minor\,(A) = \{z \in E : z \leqslant a, \forall a \in A\}$.*

Exemple 1.9

Soient $A = \{2, 3, 4, 9\}$ et $(E, \leqslant_E) = (\mathbb{N}^*, |)$, 36 est un majorant de A, 72 est aussi, etc..
$Major\,(A) = \{36z, z \in \mathbb{N}^*\}$, 1 est le seul minorant de A, $Minor\,(A) = \{1\}$.

Remarque 1.8

- *Si β un majorant (resp. un minorant) de A appartient à A c'est alors le plus grand élément (resp. le plus petit élément) de A.*
- *Une partie A qui possède au moins un majorant (resp. un minorant) dans E est dite majorée (resp. minorée).*

- *Dire que z de E n'est pas un majorant (resp. un minorant) de A signifié qu'il existe x de A avec $x \nleqslant z$ (resp. $z \nleqslant x$), il en résulte que la partie vide $\emptyset$ de E admet tout élément de E comme majorant (resp. comme minorant).*

Définition 1.18 (Borne supérieur et borne inférieur) *[5]*

Soient $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné et A une partie non vide de E.

- *On dit que $s \in E$ est une **borne supérieure** de A dans E si s est le plus petit majorant de A.*
  Alors tout simplement : $s = min\,(Major\,(A)) = min\{z \in E : \; a \leqslant z, \;\; \forall a \in A\}$.
  *Notons qu'un tel élément, s'il existe, est **unique**.*
  Si une partie A de E admet une borne supérieur s, celle-ci sera notée : $s = sup_E A$.
- *On dit que $i \in E$ est une **borne inférieure** de A dans E si i est le plus grand minorant de A.*
  Alors tout simplement : $i = max\,(Minor\,(A)) = max\{z \in E : \; z \leqslant a, \;\; \forall a \in A\}$.
  *Notons qu'un tel élément, s'il existe, est **unique**.*
  Si une partie A de E admet une borne inférieur i, celle-ci sera notée : $i = inf_E A$.

Exemple 1.10

Dans l'exemple 1.9, 36 est la borne supérieur de A ($sup_E A = 36$) et 1 est la borne inférieur de A ($inf_E A = 1$).

Remarque 1.9 *[4]*

- *Si $s = sup_E A$ (resp. $s = inf_E A$) existe et $s \in A$, alors s est **le plus grand élément** (resp. **le plus petit élément**) de A pour l'ordre induit, réciproquement, si A a un **plus grand élément** (resp. **un plus petit élément**) pour l'ordre induit, alors c'est aussi sa **borne supérieur** (resp. sa **borne inférieur**).*
- *L'ensemble **des majorants** (resp. **des minorants**) de $\emptyset$ dans E est E, donc dire que $sup_E(\emptyset)$ (resp. $inf_E(\emptyset)$) existe signifie que E possède **un plus petit élément** (resp. **un plus grand élément**).*

Proposition 1.1 *[22]*

Soit A une partie de l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leqslant)$, et soient a, b deux éléments de $\mathbb{R}$, alors on a :

1. $a = Sup_{\mathbb{R}}\,(A) \Longleftrightarrow [(\forall x \in A : x \leqslant a) \;\; et \;\; (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : a - \varepsilon < x)]$.
2. $b = Inf_{\mathbb{R}}\,(A) \Longleftrightarrow [(\forall x \in A : b \leqslant x) \;\; et \;\; (\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < b + \varepsilon)]$.

Démonstration :

Supposons que $a = sup_{\mathbb{R}}(A)$, et soit $\varepsilon > 0$. Puisque a est le plus petit des majorants de A, le réel $a - \varepsilon$ ne peut être majorant de A car : $(a - \varepsilon < a)$, donc il existe $x \in B$ tel que : $a - \varepsilon < x$.

Réciproquement, supposons a soit un majorant de A tel que :

$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : a - \varepsilon < x$, alors : $a = sup_{\mathbb{R}}(A)$.

En effet : supposons que a_0 soit un autre majorant de A.

Si $a_0 < a$, en posant $\varepsilon = a - a_0$, on aurait un réel $x \in A$ tel que : $a - \varepsilon = a_0 < x$, ce qui contredit le fait que a_0 majore A. Donc a est inférieur ou égal à tout majorant de A.

Finalement $a = sup_{\mathbb{R}}(A)$ (même manière pour le résultat (2)).

Proposition 1.2 *[4]*

Soit $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme d'ordres, si $A \subseteq E$ possède une borne supérieur s dans E, alors $f(A)$ possède une borne supérieure dans F qui est $f(s)$. Autrement dit : $f(sup_E A) = sup_F f(A)$. Résultat analogue pour les bornes inférieures.

Démonstration :

- Soit $y \in f(A)$, $y = f(x)$ avec $x \in A$, comme $x \leqslant s$, donc $y = f(x) \leqslant f(s)$, alors $f(s)$ est un majorant de $f(A)$.
- Soit m_0 un majorant de $f(A)$ dans F, il existe $m \in E$ unique tel que $m_0 = f(m)$.
  Pour tout $x \in A$: $f(x) \leqslant f(m) = m_0$, donc $x \leqslant m$, donc m est un majorant de A, donc $s \leqslant m$, d'où $f(s) \leqslant f(m) = m_0$.

Définition 1.19 (Diagramme de Hasse)

Un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ fini, peut être représenté par un diagramme ou la réflexivité et la transitivité sont implicites. Chaque élément de E est représenté par un point, un segment (arc) joignant deux points x et y représente $x \leqslant y$, on utilise le "haut" et le "bas" pour se passer d'un sens fléché.

***Le diagramme de Hasse** d'un ensemble ordonné fini s'obtient en procédant de proche en proche à partir des éléments maximaux et de leurs prédécesseurs immédiats. Pour dessiner un diagramme de Hasse :*

– *On représente les éléments de E par des points ;*

– *Si un élément x est plus grand qu'un autre élément y selon $<$, on place la représentation de x plus haut que celle de y ;*

– *Le fait que deux éléments sont en relation est représenté par un segment entre ses deux points ;*

– *Pour ne pas changer le schéma, on ne représente pas toute la relation d'ordre, mais seulement sa réduction réflexive transitive : d'une part si $x \leqslant y$, mais qu'il existe z différent de x et de y tel que $x \leqslant z$ et $z \leqslant y$, alors on ne trace pas le segment entre x et y, d'autre part on ne représente pas les boucles d'un élément vers lui-même ;*

– *On veille autant que possible à ne pas croiser les segments.*

Exemple 1.11

Le schéma (c) dans la figure **??** *désigne le diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné* $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$.

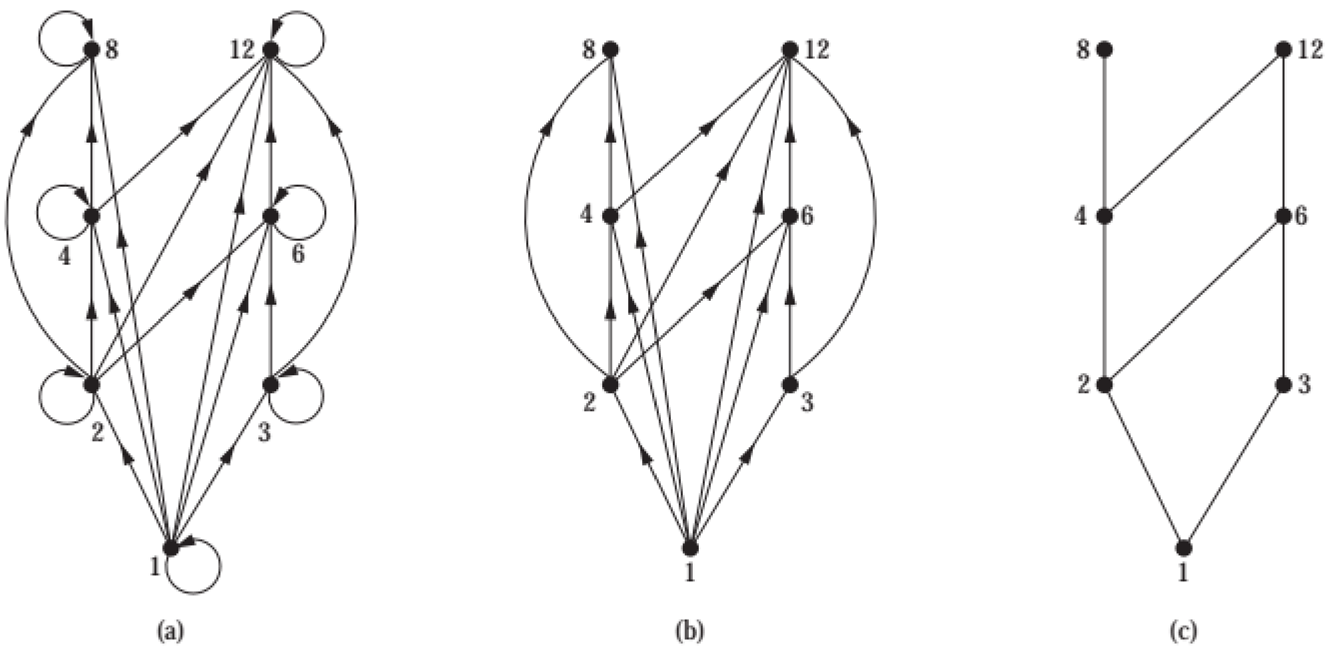


FIGURE 1.1 – Construction du diagramme de Hasse de $(\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}, |)$

Théorème 1.5 *[18]*

Tout ensemble ordonné fini possède un diagramme de Hasse.

Chapitre 2

Généralités sur les treillis distributifs

Les treillis constituent une catégorie très importante d'ensembles ordonnés, car ils font le lien entre l'étude des relations d'ordres et l'étude de certaines structures algébriques. Ils permettent, notamment, d'algébriser les différents calculs logiques, classiques ou non classiques. Ils interviennent également en topologie, en géométrie, en théorie des anneaux.

2.1 Notions sur les treillis

Dans cette section nous allons s'intéresser spécialement au cas d'une classe d'ordre (**Treillis**). Précédemment, on avait donc définit le treillis en général d'une manière ensembliste, sachant, qu'il existe une définition purement algébrique contenant quelques propriétés très importantes qu'on définira et qu'on démontrera par la suite :

2.1.1 Treillis d'ordre

Soit $(E, \leqslant)$ un ensemble ordonné.

Définition 2.1 (sup.demi-treillis) *[23]*

*E est dit **réticulé supérieurement**, ou encore est appelé un **sup.demi-treillis**, si toute paire $\{x, y\}$ d'éléments de E possède une borne supérieure dans E, on notera : $sup\{x, y\} = x \vee y$, (qui pourra se lire : x ou y).*

Définition 2.2 (inf.demi-treillis) *[23]*

*E est dit **réticulé inférieurement**, ou encore est appelé un **inf.demi-treillis**, si toute paire $\{x, y\}$*

d'éléments de E possède une borne inférieure dans E, on notera : $inf\{x,y\} = x \wedge y$, (qui pourra se lire : x et y).

Définition 2.3 (Treillis) ***[17]***

*E est dit **réticulé**, ou encore est appelé un **treillis**, s'il est à la fois **réticulé supérieurement** et **inférieurement**, c'est-à-dire il est à la fois **sup.demi-treillis** et **inf.demi-treillis**.*

Exemple 2.1

1. *Pour tout ensemble E, $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un treillis avec $A \vee B = A \cup B$ et $A \wedge B = A \cap B$ pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$.*
2. $(\mathbb{N}^*, |)$ *est un treillis avec $x \vee y = ppcm(x,y)$ et $x \wedge y = pgcd(x,y)$ pour tout $x, y \in N^*$.*
3. *Toute chaîne est un treillis avec $x \vee y = max(x,y)$ et $x \wedge y = min(x,y)$.*

Proposition 2.1 ***[2]***

*Dans un sup.demi-treillis $(E, \leqslant)$ la loi de composition interne $\vee$ est **idempotente** (c'est-à-dire : $x \vee x = x$), **commutative** (c'est-à-dire : $x \vee y = y \vee x$), **associative** (c'est-à-dire : $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$).*

Démonstration :

- L'idempotence et la commutativité sont évidentes.
- Pour l'associativité : posons $s = x \vee (y \vee z)$, on a $x \leqslant s$ et $y \vee z \leqslant s$, donc $y \leqslant s$ et $z \leqslant s$, donc aussi $x \vee y \leqslant s$. Ainsi s est un majorant de $\{x \vee y, z\}$.
  Soit M un autre majorant de $\{x \vee y, z\}$, $x \vee y \leqslant M$, donc $x \leqslant M$ et $y \leqslant M$, et aussi $z \leqslant M$, donc $y \vee z \leqslant M$. Ainsi M est un majorant de $\{x, y \vee z\}$, donc $s \leqslant M$, il en résulte : $s = (x \vee y) \vee z$.

Remarque 2.1 ***[4]***

- *Cette proposition est évidemment valable pour un inf.demi-treillis avec la loi de composition interne $\wedge$.*
- *La démonstration précédente montre que $s = x \vee (y \vee z)$ n'est autre que $sup\{x,y,z\}$, on écrira alors simplement $x \vee y \vee z$ au lieu de $x \vee (y \vee z)$.*
- *Par une récurrence simple on en déduit, toute partie finie non vide d'un sup.demi-treillis possède une borne supérieure (remarque analogue pour un inf.demi-treillis).*

2.1.2 Treillis algébrique

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne que nous noterons $\vee$, on peut se demander s'il est possible de définir sur E une relation d'ordre $\leqslant$ qui en fasse un **sup.demi-treillis**, tel que $sup_E\{x, y\} = x \vee y$. L'étude précédente nous indique des conditions nécessaires :

- La loi $\vee$ doit être idempotente, commutative et associative.
- Si $x \leqslant y$, on aura $sup_E\{x, y\} = y$, soit $x \vee y = y$ et réciproquement.

Proposition 2.2 *[4]*
*Soit un ensemble E muni d'une loi de composition interne $\vee$, qui est **idempotente**, **commutative** et **associative**, alors il existe une unique relation d'ordre $\leqslant$ sur E telle que E soit un **sup.demi-treillis** et quels que soient x et y : $sup_E\{x, y\} = x \vee y$. (proposition analogue pour un **inf.demi-treillis**).*

Démonstration :
Si une telle relation d'ordre existe elle est nécessairement définie par : $x \leqslant y$ si et seulement si $x \vee y = y$ (elle sera donc unique). Appelons $\Re$ la relation, $x\Re y$, définie par $x \vee y = y$.

- $\Re$ est réflexive : $x\Re x$ car $x \vee x = x$ (l'idempotence).
- $\Re$ est transitive : supposons $x\Re y$ et $y\Re z$, donc $x \vee y = y$ et $y \vee z = z$, alors :
  $x \vee z = x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z = y \vee z = z$ donc $x\Re z$.
- $\Re$ est antisymétrique : supposons $x\Re y$ et $y\Re x$, donc $x \vee y = y$ et $y \vee x = x$, d'après la commutativité il en résulte $x = y$.

$\Re$ est donc bien une relation d'ordre, nous la noterons maintenant $x \leqslant y$. $(E, \leqslant)$ est alors un **sup.demi-treillis**.
Soient x et y des éléments de E, $x \leqslant x \vee y$ car $x \vee (x \vee y) = (x \vee x) \vee y = x \vee y$, de même $y \leqslant x \vee y$, donc $x \vee y$ est un majorant de $\{x, y\}$.
Soit M un autre majorant de $\{x, y\}$: $(x \vee y) \vee M = x \vee (y \vee M) = x \vee M = M$.
Donc $x \vee y \leqslant M$, on a donc bien : $x \vee y = sup_E\{x, y\}$.

Remarque 2.2 *[4]*
Si $(E, \leqslant)$ est un treillis, il est muni de deux lois de composition internes $\vee$ et $\wedge$, chacune d'elles étant idempotente, commutative et associative.

Théorème 2.1 *[23]*

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes, $\vee$ et $\wedge$, telles que : ces lois sont idempotentes, commutatives et associatives, et vérifient les lois d'absorption, c'est-à-dire quels que soit x et y : $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$.

Alors on peut définir sur E une seule relation d'ordre $\leqslant$ telle que $(E, \leqslant)$ soit un treillis, avec $inf_E\{x, y\} = x \wedge y$ et $sup_E\{x, y\} = x \vee y$. Cette relation d'ordre est définie par $x \vee y = y$ ou $x \wedge y = x$ qui sont des relations équivalentes.

Preuve :

D'après ce qui précède il suffit de montre que les deux relations suivantes sont équivalentes :

$x \leqslant_1 y$ définie par $x \vee y = y$

$x \leqslant_2 y$ définie par $x \wedge y = x$

Supposons $x \leqslant_1 y$, donc $x \vee y = y$ d'où $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x$ (loi d'absorption), donc $x \leqslant_2 y$.

Supposons $x \leqslant_2 y$, donc $x \wedge y = x$ d'où $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ (loi d'absorption), donc $x \leqslant_1 y$.

Proposition 2.3 *[3]*

Dans un treillis $(E, \leqslant)$:

- *Si $a \leqslant b$, alors pour tout $x \in E$: $a \wedge x \leqslant b \wedge x$ et $a \vee x \leqslant b \vee x$.*
- *Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$, alors : $a \wedge c \leqslant b \wedge d$ et $a \vee c \leqslant b \vee d$.*

Démonstration :

- Si $a \leqslant b$, donc $a \wedge b = a$ et $a \vee b = b$, alors :

  $(a \wedge x) \wedge (b \wedge x) = (a \wedge b) \wedge (x \wedge x) = a \wedge x$ donc $a \wedge x \leqslant b \wedge x$.

  $(a \vee x) \vee (b \vee x) = (a \vee b) \vee (x \vee x) = b \vee x$ donc $a \vee x \leqslant b \vee x$.

- Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$:

  $a \wedge c \leqslant b \wedge c$ et $b \wedge c \leqslant b \wedge d$ donc $a \wedge c \leqslant b \wedge d$.

  $a \vee c \leqslant b \vee c$ et $b \vee c \leqslant b \vee d$ donc $a \vee c \leqslant b \vee d$.

2.1.3 Sous-treillis et morphismes

Définition 2.4 (sous-sup.demi-treillis) *[17]*

*Une partie A non vide d'un sup.demi-treillis E, est dite **sous-sup.demi-treillis** si on a l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*

- *$sup_A\{x, y\}$ existe et égale à $x \vee y$, quels que soient x, y dans A.*
- *$x \vee y \in A$ quels que soient x, y dans A.*

*A est alors un **sup.demi-treillis** pour la structure induite (définition analogue pour un **sous-inf.demi-treillis**).*

Remarque 2.3 *[4]*

1. *Il est important que l'une ou l'autre ces conditions sont réalisée quels que soient x et y dans A.*
2. *Il est possible que A ne soit pas un sous-sup.demi-treillis de E, mais qu'il soit quand même un sup.demi-treillis pour la structure induite.*

Exemple 2.2
Dans $(\mathbb{N}^*, |)$, $A = \{1, 3, 4, 24\}$ n'est pas un sous-sup.demi-treillis car $3 \vee 4 = 12 \notin A$. Mais A est quand même un sup.demi-treillis, car toutes les paires ont une borne supérieure dans A, en particulier $sup_A\{3, 4\} = 24$.

Définition 2.5 (Sous-treillis) *[24]*
*Une partie A non vide d'un treillis $(E, \leqslant)$ est dite un **sous-treillis** si elle est à la fois un **sous-sup.demi-treillis** et un **sous-inf.demi-treillis**, ceci équivaut à dire quels que soient x et y éléments de A : $x \vee y \in A$ et $x \wedge y \in A$.*
A est alors un treillis pour la structure induite, avec : $sup_A\{x, y\} = x \vee y$ et $inf_A\{x, y\} = x \wedge y$.

Exemple 2.3

1. *Nous considérons ici le treillis $(\mathbb{N}^*, |)$ et soit n un entier positive non nul fixé, nous désignons par $D(n)$ l'ensemble des diviseurs positives de n, on a alors $D(n)$ est un sous-treillis de $\mathbb{N}^*$. En effet : si $x|n$ et $y|n$, alors $pgcd(x, y)\,|n$ et $ppcm(x, y)\,|n$, donc $x \vee y = ppcm(x, y) \in D(n)$ et $x \wedge y = pgcd(x, y) \in D(n)$ (voir **la figure 2.1**).*
2. *Soit E un espace topologique quelconque, on considère le treillis $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, alors :*
   - *L'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts de E est un sous-treillis de $\mathcal{P}(E)$.*
   - *L'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés de E est un sous-treillis de $\mathcal{P}(E)$.*

Considérons par exemple deux treillis E_1 et E_2, en tant qu'ensembles ordonnés on pourra parler de morphisme d'ordre, c'est-à-dire tout application croissante f de E_1 dans E_2, en

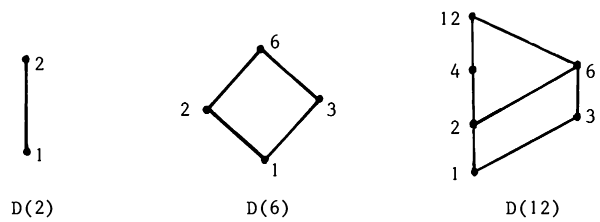


FIGURE 2.1

général une telle application ne conserve pas les bornes supérieures, par exemple : Pour $E_1 = (\mathbb{N}^*, |)$ et $E_2 = (\mathbb{N}^*, \leqslant)$, prenons f l'identité de $\mathbb{N}^*$, elle est croissante : si $x|y \Longrightarrow x \leqslant y$.
Mais elle ne conserve pas les bornes supérieures, par exemple :
Dans E_1, $2 \vee 3 = 6$, mais dans E_2, $2 \vee 3 = 3$.

Définition 2.6 *[17]*
Un morphisme de sup.demi-treillis, ou encore un $\vee$-morphisme, est toute application f de E_1 dans E_2 vérifiant quels que soient les éléments x et y de E : $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$
On définira de façon analogue un morphisme d'inf.demi-treillis, ou encore un $\wedge$-morphisme par : $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

Proposition 2.4 *[4]*
Un $\vee$-morphisme (resp. un $\wedge$-morphisme) est une application croissante.

Démonstration :
Pour un $\vee$-morphisme si $x \leqslant y \Longleftrightarrow x \vee y = y \Longrightarrow f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) = f(y) \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$. La notion de morphisme de demi-treillis est donc plus précise que celle de morphismes d'ordres.

Définition 2.7 ($\vee$-isomorphisme) *[4]*
On définira un $\vee$-isomorphisme (resp. un $\wedge$-isomorphisme) comme étant un morphisme bijectif de sup.demi-treillis (resp. comme un morphisme bijectif d'inf.demi-treillis).

Proposition 2.5 *[4]*
La notion d'isomorphisme d'ordre est la même que celle de $\vee$-isomorphisme (de $\wedge$-isomorphisme).

Démonstration :

- Soit f un $\vee$-isomorphisme de E_1 sur E_2, nous savons déjà que f est bijective et croissante, de plus : si $f(x) \leqslant f(y) \Longrightarrow f(x) \vee f(y) = f(x \vee y) = f(y) \Longrightarrow x \vee y = y$ (car f est injective) $\Longrightarrow x \leqslant y$. Finalement f est bien un isomorphisme d'ordre.
- Soient f un isomorphisme d'ordre de E_1 sur E_2, et x, y deux éléments de E_1.

  On va montrer que : $f(x \vee y) = f(x) \vee f(x)$, c'est-à-dire : f est un $\vee$-morphisme.

  On a : $\begin{cases} x \leqslant x \vee y \\ y \leqslant x \vee y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant f(x \vee y) \\ f(y) \leqslant f(x \vee y) \end{cases}$ (car f est croissante)

  Donc $f(x \vee y)$ est un majorant de $\{f(x), f(y)\}$.

  Soit M d'autre majorant de $\{f(x), f(y)\}$, et comme f surjective, alors $M = f(t)$ avec $t \in E_1$

  Donc $\begin{cases} f(x) \leqslant M \\ f(y) \leqslant M \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} f(x) \leqslant f(t) \\ f(y) \leqslant f(t) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leqslant t \\ y \leqslant t \end{cases}$ (car f un isomorphisme d'ordre) $\Longrightarrow x \vee y \leqslant t$

  Donc on a : $x \vee y \leqslant t \Longrightarrow f(x \vee y) \leqslant f(t) = M$ (car f est croissante), alors $f(x \vee y)$ est le plus petit des majorant de $\{f(x), f(y)\}$, c'est-à-dire :$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$

  Finalement f est un $\vee$-morphisme + bijective, donc f est un $\vee$-isomorphisme.

Remarque 2.4

Les notions de $\vee$-morphisme et de $\wedge$-morphisme ne sont pas en général équivalentes. Par exemple :
Soient E un espace topologique et $\mathcal{F}$ l'ensemble des fermés de E, considérons l'application f de $\mathcal{P}(E)$ dans $\mathcal{F}$ (ordonnés par inclusion) définie par : $f(X) = \overline{X}$ ($\overline{X}$ est l'adhérence de X).
On a : $f(X \cup Y) = \overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y} = f(X) \cup f(Y)$, donc f est un $\vee$-morphisme. Mais en général : $f(X \cap Y) = \overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y} = f(X) \cap f(Y)$ donc f n'est pas forcement $\wedge$-morphisme.

Définition 2.8 (Morphisme de treillis) *[17]*

*On appelle **morphisme de treillis** toute application qui est à la fois un $\vee$-morphisme et un $\wedge$-morphisme. D'après l'étude précédant, un morphisme de treillis est a fortiori une application croissante.*

Définition 2.9 (Isomorphisme de treillis) *[17]*

On définira évidemment un isomorphisme de treillis comme étant un morphisme de treillis bijective.

Proposition 2.6 *[4]*
Si f est une application d'un treillis E_1 dans un treillis E_2 les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un isomorphisme de treillis.*
2. *f est un isomorphisme d'ordre.*
3. *f est un $\vee$-isomorphisme.*
4. *f est un $\wedge$-isomorphisme.*

Remarque 2.5 *[4]*
En pratique, il n'y a donc que vérifications à faire pour montrer que f est un isomorphisme de treillis : f est bijective et quels que soient x et y, $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ ou bien $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

2.1.4 Filtres et idéaux dans un treillis

Dans ce paragraphe nous supposerons pour simplifier (bien que ce ne soit pas nécessaire pour les définitions) que tous les demi-treillis ou treillis considérés ont à la fois un plus petit élément (qui sera noté 0) et un plus grand élément (qui sera noté 1). On va étudier les filtres sur un inf.demi-treillis, soit $(E, \leqslant)$ un inf.demi-treillis.

Définition 2.10 (Filtre) *[2]*
On appelle filtre de E toute partie non vide F de E vérifiant :

1. *Si $x \in F$ et $x \leqslant y$, alors $y \in F$;*
2. *Si $x \in F$ et $y \in F$, alors $x \wedge y \in F$.*

Remarque 2.6 *[4]*

- *La condition $2)$ montre qu'un filtre est un sous-inf.demi-treillis (mais la réciproque est in exacte).*
- *E est un filtre de E, il sera dit le filtre **impropre**, tout filtre F différent de E sera dit un filtre **propre**.*
- *Si $Card\,(E) \geq 2$, il y a au moins un filtre propre, par exemple $\{1\}$.*
- *D'après la condition $1)$ l'élément 1 appartient à tous les filtres.*

- *D'après la condition* $1)$ *un filtre* F *est propre si et seulement si* $0 \notin F$.
- *l'intersection d'une famille quelconque* $(F_i)_I$ *de filtres est encore un filtre.*
- *Soit* α *un élément fixé de* E *définissons l'ensemble* $F_\alpha = \{x \in E : x \geqslant \alpha\}$, F_α *est un filtre de* E, *dit le filtre engendré par* α.
- $F_\alpha = E \vee \alpha = \{x \vee \alpha : x \in E\}$, *en effet :*
  Si $x \in F_\alpha$, *alors* $x \geqslant \alpha$, *donc* $x = x \vee \alpha$, *donc* $x \in E \vee \alpha$.
  Si $y \in E \vee \alpha$, *alors* $y = x \vee \alpha$ *avec* $x \in E$, *donc* $y \geqslant \alpha$, *donc* $y \in F_\alpha$.

Définition 2.11 (Filtre principal) *[28]*
Un filtre F *de* E *est dit principal, s'il existe un élément* α *de* E *tel que* $F = F_\alpha$.

Définition 2.12 (Filtre engendré par une partie) *[28]*
Soit G *une partie quelconque de* E, *le filtre engendré par* G *est l'intersection de tous les filtres contenant* G, *c'est-à-dire le plus petit filtre (au sens de l'inclusion) contenant* G, *il sera noté* F_G *et* G *sera dit un générateur de* F_G. *On peut caractériser* F_G *par :*
$F_G = \{x \in E \mid \exists a_1, ..., a_n \in G, n \in \mathbb{N}^* : x \geqslant a_1 \wedge ... \wedge a_n\}$.

Proposition 2.7 *[4]*
Tout filtre possédant un générateur fini est principal.
En particulier dans un inf.demi-treillis fini, tous les filtres sont principaux.

Démonstration :
Considérons F_G où G est un ensemble fini.
Si $G = \emptyset$, alors $F_G = \{1\} = F_1$.
Si $G = \{a_1, ..., a_q\}$ posons $a = a_1 \wedge ... \wedge a_q$, alors $F_G = F_a$ car :

- Si $x \in F_G$, $x \geqslant a_{i_1} \wedge ... \wedge a_{i_n} \geqslant a$, donc $x \in F_a$ ($F_G \subseteq F_a$)...........(1)
- Si $x \in F_a$, $x \geqslant a$, donc $x \in F_G$ ($F_a \subseteq F_G$)...........(2)
  Finalement de (1) et (2) on a légalité $F_G = F_a$.

Définition 2.13 *[4]*

- *Une partie* G *de* E *est dite* $\wedge$*-incompatible, si le filtre* F_G *est* ***impropre****, c'est-à-dire il existe un nombre fini d'éléments de* G, $a_1, ..., a_n$ *tels que :* $a_1 \wedge ... \wedge a_n = 0$.

- *Une partie G de E qui engendre un filtre **propre** sera dite $\wedge$-compatible.*

Définition 2.14 (Ultrafiltre) *[16]*

*Un filtre propre F d'un inf.demi-treillis E est dit **maximal** (ou bien **ultrafiltre**) si pour tout filtre X de E, $F \subseteq X \subseteq E \Longrightarrow X = F$ ou $X = E$.*

Proposition 2.8 *[4]*

Soit F un filtre propre, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *F est un ultrafiltre.*
2. *Pour tout $x \notin F$, il existe $y \in F$ tel que $x \wedge y = 0$.*

Démonstration :

- Si F est un ultrafiltre, supposons qu'il existe $x \notin F$ tel que pour tout $y \in F$, $x \wedge y \neq 0$. Posons $G = F \cup \{x\}$, G est une partie $\wedge$-compatible, en effet : soient $a_1, ..., a_n$ des éléments de G et posons $a = a_1 \wedge ... \wedge a_n$.
  - Si tous les a_i appartiennent à F, alors $a \in F$ donc $a \neq 0$ (car F propre).
  - Si par exemple $a_1 = x$, donc $a = x \wedge y$ avec $y = a_2 \wedge ... \wedge\ a_n$, $y \in F$ donc $a \neq 0$.

  Par suite G engendre un filtre propre F_G, or $F \subsetneq G \subseteq F_G$ ce qui contredit la maximalité de F.
- Si on a l'assertion $2)$: Supposons qu'il existe un filtre propre F' tel que $F \subsetneq F'$, soit alors $x \in F'$ et $x \notin F$, il existe $y \in F$ tel que $x \wedge y = 0$, or x et y appartiennent à F' on aurait donc $0 \in F'$ ce qui contredit le fait que F' soit propre.

Définition 2.15 (Idéal) *[2]*

La notion d'idéal est la même que celle de filtre mais en considérant l'ordre réciproque. On appelle idéal d'un sup.demi-treillis E toute partie non vide I de E vérifiant :

1. *Si $x \in I$ et $y \leqslant x$: alors $y \in I$;*
2. *Si $x \in I$ et $y \in I$: alors $x \vee y \in I$.*

Définition 2.16 *[28]*

*Un idéal propre I (c'est-à-dire $1 \notin I$) d'un sup.demi-treillis E est dit **maximal** si pour tout idéal Y de E, $I \subseteq Y \subseteq E \Longrightarrow Y = I$ ou $Y = E$.*

Remarque 2.7 *[4]*

Tout ce qui a été dit pour les filtres peut être transcrit immédiatement pour les idéaux, nous indiquons brièvement :

- *Un idéal est un sous-sup.demi-treillis.*
- *Un idéal I est dit propre si $I \neq E$, cela équivaut à :* $1 \notin I$.
- 0 *appartient à tous les idéaux de E, donc $\{0\}$ est le plus petit idéal de E.*
- *Si $a \in E$, $I_a = \{x \in E : x \leqslant a\}$ est un idéal, appelé l'idéal principal engendré par a.*
- *Si $G \subseteq E$, l'intersection I_G de tous les idéaux contenant G est un idéal appelé l'idéal engendré par G, c'est le plus petit idéal contenant G. Il peut également être défini comme l'ensemble des éléments x tels que : il existe un nombre fini d'éléments de G, $a_1, ..., a_n$, tels que $x \leqslant a_1 \vee ... \vee a_n$.*
- *Une partie G de E est dite $\vee$-incompatible si elle engendre l'idéal impropre E, cela équivaut à dire : il existe un nombre fini d'éléments de G, $a_1, ..., a_n$, tels que $a_1 \vee ... \vee a_n = 1$. Une partie qui n'est pas $\vee$-incompatible est dite $\vee$-compatible.*
- *On peut caractériser les idéaux maximaux par :*
  1. *I est un idéal maximal.*
  2. *Pour tout $x \notin I$, il existe $y \in I$ tel que $x \vee y = 1$.*

Dans un treillis nous aurons à la fois les notions de filtre et d'idéal, donc tout filtre (resp. tout idéal) est un sous-treillis. En effet, soit F un filtre, nous savons déjà que c'est un sous-inf.demi-treillis, mais c'est aussi un sous-sup.demi-treillis : si $x \in F$ et $y \in F$, $x \vee y \geqslant x$ donc $x \vee y \in F$.

Exemple 2.4

1. *Soit E un ensemble infini, l'ensemble des parties cofinies de E est un filtre de $\mathcal{P}(E)$ (nous appellerons partie cofinie de E toute partie dont le complémentaire est fini). L'ensemble des parties finies de E est un idéal de $\mathcal{P}(E)$.*
2. *Dans le treillis $D(60)$ tous les filtres et les idéaux sont principaux, sur* ***la figure 2.2*** *nous avons représenté le filtre principal $F_6 = \{6, 12, 30, 60\}$ (en pointillés), et l'idéal principal $I_6 = \{1, 2, 3, 6\}$ (en tirets).*

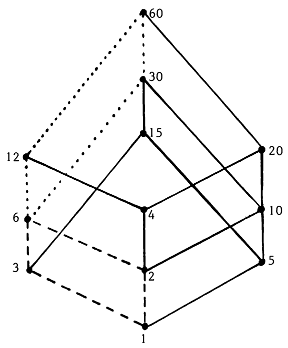


FIGURE 2.2 – Treillis $(D(60), |)$

2.2 Propriétés algébriques de quelques classes de treillis

Dans cette section nous allons étudier les classes de treillis distributifs, complémentés, modulaires, résiduels et booléens. Ce choix n'est pas arbitraire, mais bien réfléchi, car celles-ci sont les plus importantes, les plus intéressantes et les plus particulières dans le monde des treillis.

2.2.1 Treillis distributifs

Considérons un treillis quelconque $(E, \leqslant)$, il est muni des deux lois de composition internes $\wedge$ et $\vee$, on peut se demander si chacune de ces lois est distributive par rapport à l'autre, les conditions pour que ceci soit réalisé sont :
D.1) Quels que soient x, y, z : $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
D.2) Quels que soient x, y, z : $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Remarque 2.8 *[2]*
Les conditions D.1) et D.2) sont équivalentes. En effet : supposons D.1) soit vérifiée, on peut écrire :

$$\begin{aligned}(x \vee y) \wedge (x \vee z) &= [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z]\\ &= x \vee [z \wedge (x \vee y)] \quad \textit{(lois d'absorption)}\\ &= x \vee (z \wedge x) \vee (z \wedge y)\\ &= x \vee (y \wedge z) \qquad\qquad \textit{(lois d'absorption)}\end{aligned}$$

Donc D.2) est aussi vérifiée. La réciproque se démontre de façon analogue.

Remarque 2.9 *[28]*

Dans tout treillis les deux conditions suivantes sont toujours vérifiées :

$D'.1)$ *Quels que soient* x, y, z : $x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

$D'.2)$ *Quels que soient* x, y, z : $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

En effet :

$x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge y)$ *et* $x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge z)$, *donc* $x \wedge (y \vee z) \geqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

$x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y)$ *et* $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee z)$, *donc* $x \vee (y \wedge z) \leqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Il en résulte que les conditions D.1) et D.2) sont équivalentes à :

$D''.1)$ Quels que soient $x, y, z : x \wedge (y \vee z) \leqslant (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

$D''.2)$ Quels que soient $x, y, z : x \vee (y \wedge z) \geqslant (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Finalement, en combinant les deux remarques précédentes les Quatre conditions $D.1, D.2, D''.1, D''.2$ sont équivalentes.

Définition 2.17 (Treillis distributif) *[4]*

Un treillis E est dit distributif si chacune des lois $\wedge$ et $\vee$ est distributive par rapport à l'autre, cela équivaut à dire que E vérifie l'une quelconque des quatre condition $D.1, D.2, D''.1, D''.2$

Exemple 2.5

1. *Pour tout ensemble E, le treillis $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est distributif car on sait que chaque des lois $\cap$ et $\cup$ est distributive par rapport à l'autre.*
2. *Exemples de treillis non distributifs (voir* ***la figure 2.3****) :*

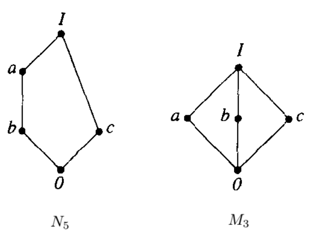


FIGURE 2.3

N_5 (un pentagone) n'est pas distributif car : $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$, *mais* $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \vee 0 = b$.

M_3 (un diamant) n'est pas distributif car : $a \wedge (b \vee c) = a \wedge 1 = a$, *mais* $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = 0 \vee 0 = 0$.

Théorème 2.2 *[3]*

Un treillis E est non distributif si et seulement si il est contient un sous-treillis isomorphe à M_3 ou à N_5. (voir ***la figure 2.3****)*

Proposition 2.9

Toute chaîne est un treillis distributif, avec $x \wedge y = min\,(x, y)$ et $x \vee y = max\,(x, y)$.

Démonstration :

Soient $(E, \leqslant)$ une chaîne et x, y, z sont des éléments de E, comme tous les éléments sont comparables on a : $x \wedge (y \vee z) = \begin{cases} x & si \quad x \leqslant y \vee z\,; \\ y \vee z & si \quad y \vee z \leqslant x. \end{cases}$

1. Si $x \wedge (y \vee z) = x$: $x \wedge (y \vee z) = x \Longrightarrow x \leqslant y \vee z \Longrightarrow x \leqslant y$ ou $x \leqslant z$ (car E est une chaîne).
   - Si $x \leqslant y$: $x \leqslant y \Longrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \vee (x \wedge z) = x$.
   - Si $x \leqslant z$: $x \leqslant z \Longrightarrow (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge z) \vee x = x$.
2. Si $x \wedge (y \vee z) = (y \vee z)$: $x \wedge (y \vee z) = (y \vee z) \Longrightarrow (y \vee z) \leqslant x \Longrightarrow y \leqslant x$ et $z \leqslant x$.
   Donc $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = y \vee z$.

Proposition 2.10 *[4]*

L'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de l'ordre de divisibilité est un treillis distributif.

Démonstration :

Si $x \in \mathbb{N}^*$ et si P est un nombre premier on désignera par $V_p(x)$ l'exposant de P dans la décomposition de x en facteurs premiers : $x = \prod P^{V_p(x)}$, ce produit étant étendu à tous les nombres premiers, mais bien entendu il n'y a qu'un nombre fini d'exposants non nuls.

On sait que :

$$pgcd(x, y) = \prod P^{\,min(V_p(x), V_p(y))} \text{ et } ppcm(x, y) = \prod P^{\,max(V_p(x), V_p(y))}$$

Dans la chaîne naturelle $(\mathbb{N}, \leqslant)$ pour tout P :

$$min(V_p(x), max(V_p(y), V_p(z))) = max(min(V_p(x), V_p(y)), min(V_p(x), V_p(z))).$$

On a :

$$\begin{aligned}
pgcd(x, ppcm(y,z)) &= \prod P^{\,min(V_p(x), V_p(ppcm(y,z)))} \\
&= \prod P^{\,min(V_p(x), V_p(\prod P^{\,max(V_p(y), V_p(z))}))} \\
&= \prod P^{\,min(V_p(x), max(V_p(y), V_p(z)))} \\
&= \prod P^{\,max(min(V_p(x), V_p(y)), min(V_p(x), V_p(z)))} \\
&= \prod P^{\,max(V_p(\prod P^{\,min(V_p(x), V_p(y))}), V_p(\prod P^{\,min(V_p(x), V_p(z))})} \\
&= \prod P^{\,max(V_p(pgcd(x,y)), V_p(pgcd(x,z)))} \\
&= ppcm(\, pgcd(x,y), pgcd(x,z)).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que le treillis $(\mathbb{N}^*, |)$ est distributif.

2.2.2 Treillis modulaires

Nous allons introduire une notion de treillis vérifiant une propriété plus faible que celle de la distributivité.

Définition 2.18 ***[22]***
Un treillis E est dit ***modulaire*** *si $x \leqslant z \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$, pour tout x, y, z dans E.*

Exemple 2.6

1. *Tout treillis distributif est modulaire. En effet, on a : $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, comme $x \leqslant z$ donc $x \vee z = z$ et $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Mais la réciproque en général inexacte, par exemple : Le treillis $(\{1, 2, 3, 5, 30\}, |)$ n'est pas distributif, mais modulaire.*
2. *Tout sous-treillis d'un treillis modulaire est aussi modulaire.*
3. *Il existe des treillis non modulaires, par exemple, soit $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ ordonné par divisibilité. $2 \leqslant 4$, mais $2 \vee (5 \wedge 4) = 2 \vee 1 = 2$ et $(2 \vee 5) \wedge 4 = 20 \wedge 4 = 4$ (voir* ***la figure suivante****).*

Théorème 2.3 (Caractérisation des treillis modulaires) ***[22]***
Pour qu'un treillis E soit modulaire ***il faut et il suffit*** *qu'il vérifie, quels que soient x, y, z, la condition :* $\begin{cases} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{cases} \Longrightarrow$ *x et y sont égaux ou incomparables.*

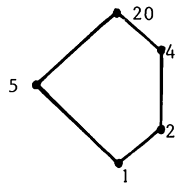


FIGURE 2.4

Théorème 2.4 *[28]*

Un treillis E est modulaire ***ssi*** *il ne contient pas un sous treillis isomorphe à N_5.*

Théorème 2.5 (Caractérisation des treillis distributifs) *[22]*

Pour qu'un treillis E soit distributif ***il faut et il suffit*** *qu'il vérifie, quels que soient x, y, z, la condition :* $\begin{cases} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{cases} \Longrightarrow x = y.$

2.2.3 Treillis complémentés

Considérons un treillis quelconque E et soit $[a, b]$ un intervalle de E ($[a, b] = \{x \in E \ : \ a \leqslant x \leqslant b\}$).

Définition 2.19 (Complémentation relative) *[28]*

Si $x \in [a, b]$ on appelle complément de x relativement à $[a, b]$ tout élément y (s'il existe) vérifiant : $x \wedge y = a$ et $x \vee y = b$.

Remarque 2.10 *[4]*

- *Si y est un complément de x relativement à $[a, b]$ on a aussi $y \in [a, b]$, car $y \geqslant x \wedge y = a$ et $y \leqslant x \vee y = b$, x est alors un complément de y relativement à $[a, b]$.*
- *b est le complément, unique, de a relativement à $[a, b]$.*
- *Un élément x n'a pas nécessairement de complément relatif, il peut également en avoir plusieurs, par exemple, soit le treillis $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ ordonné par divisibilité. Dans l'intervalle $[1, 4]$, 2 n'a pas de complément relatif. Dans l'intervalle $[1, 20]$, 5 a deux compléments relatifs sont 2 et 4 (voir* ***la figure 2.5****).*

Proposition 2.11 *[4]*

Soient $(E, \leqslant)$ un treillis et $[a, b]$ un intervalle de E et ***x*** *un élément de $[a, b]$:*

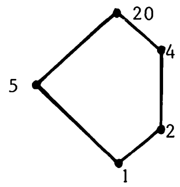


FIGURE 2.5

- *Si E est modulaire : les compléments relatifs, éventuels, de **x** sont incomparables entre eux.*
- *Si E est distributif : **x** a au plus un complément relatif.*

Démonstration :

Si y_1 et y_2 sont deux compléments relatifs de x on a : $x \wedge y_1 = a = x \wedge y_2$ et $x \vee y_1 = b = x \vee y_2$ ce qui dans le cas modulaire implique $y_1 = y_2$, ou y_1 et y_2 sont incomparables. Dans le cas distributif implique $y_1 = y_2$ (voir théorème 2.3 et théorème 2.5).

Définition 2.20 (Treillis relativement complémenté) ***[4]***

*Un treillis est dit **relativement complimenté** si dans tout intervalle $[a, b]$, tout élément **x** possède au moins un complément relatif.*

Définition 2.21 (Treillis fermé)

Un treillis E est dit fermé (au borné) si il possède un plus petit élément (que l'on notera 0) et un plus grand élément (que l'on notera 1).

Exemple 2.7

1. *Tout treillis fini est fermé.*
2. *Le treillis $(\mathbb{N}^*, |)$ n'est pas fermé.*

Définition 2.22 ***[28]***

Soit E un treillis fermé et a, b des éléments de E.

*On dit que b est **le complément** de a (au bien a et b sont **compléments l'un de l'autre**) si $a \wedge b = 0$ et $a \vee b = 1$.*

Définition 2.23 (Treillis complémenté)

*Dans un treillis fermé E si tout élément a un complément, E est dit **complémenté**.*

Remarque 2.11 *[4]*

- *En général, l'existence aussi bien que l'unicité du complément ne soit pas assurées, exemples :* *Dans une chaîne, un élément différent de* 0 *et de* 1 *n'a jamais de complément.* *Dans le treillis* $E = \{1, 2, 4, 5, 20\}$ *ordonné par divisibilité,* 5 *a pour compléments* 2 *et* 4*,* 2 *et* 4 *ont un seul complément* 5*,* 1 *et* 20 *sont compléments l'un de l'autre.*
- *D'une façon générale,* 0 *et* 1 *sont toujours compléments l'un de l'autre.*
- *Tout treillis relativement complémenté et ayant un plus petit élément et un plus grand élément est complémenté.*
- *Un treillis complémenté n'est pas nécessairement relativement complémenté, les exemples suivants sont des treillis ordonnés par divisibilité (voir* ***la figure 2.6****).*

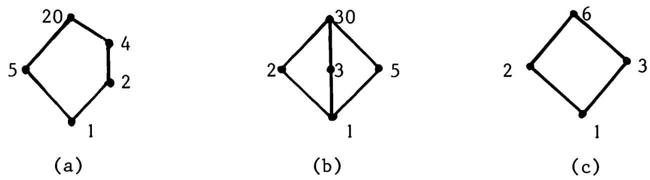


FIGURE 2.6

(a) Ce treillis est complémenté (sans unicité de complément), mais n'est pas relativement complémenté. Puisque dans l'intervalle $[2, 20]$*,* 4 *ne possède pas un complément relatif.*
(b) Ce treillis est à la fois complémenté et relativement complémenté (sans unicité des compléments).
(c) Ce treillis est à la fois complémenté et relativement complémenté (avec unicité des compléments)

- *Tout treillis* $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ *est complémenté, si* $X \subseteq E$ *son complément (unique) n'est autre que le complément de* X *:* $\complement X$ *.*

Proposition 2.12 *[3]*
Dans un treillis distributif, tout élément a au plus un complément (résulte immédiatement de la ***proposition 2.11*** *sur les compléments relatifs).*

Proposition 2.13 *[4]*
Si un treillis copmlémenté et modulaire (et a fortiori s'il est distributif), alors il est relativement complémenté.

Démonstration :

Soient $[a,b]$ un intervalle de E et $x \in [a,b]$, soit $x^{'}$ un complément de x.

Posons $y = (a \vee x^{'}) \wedge b$, alors :

$$\begin{aligned} y \wedge x = (a \vee x^{'}) \wedge b \wedge x &= (a \vee x^{'}) \wedge x \ \ (\text{ car } x \leqslant b\ ) \\ &= a \vee (x^{'} \wedge x) \ \ (\text{ car } a \leqslant x \text{ et le treillis est supposé modulaire}) \\ &= a \vee 0 = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y \vee x = x \vee ((a \vee x^{'}) \wedge b) &= (x \vee a \vee x^{'}) \wedge b \ \ (\text{ car } x \leqslant b \text{ et le treillis est supposé modulaire}) \\ &= 1 \wedge b = b \end{aligned}$$

Donc y est un complément de x relativement à $[a,b]$.

Considérons un treillis E (La définition est d'ailleurs valable pour un inf.demi-treillis) ayant un plus petit élément 0.

Définition 2.24 (Treillis $\wedge$-complémenté) ***[4]***

*On appelle $\wedge$-**complément** d'un élément x le plus grand élément (s'il existe) de l'ensemble $\{y \in E : x \wedge y = 0\}$. Un treillis est dit $\wedge$-**complémenté** si tous ses éléments possèdent un $\wedge$-complément (nécessairement unique).*

Exemple 2.8

Soit $\mathcal{O}$ le treillis des ouverts (ordonné par inclusion) d'un espace topologique quelconque. Ce treillis n'est pas, en général, complémenté, mais est $\wedge$-complémenté : si X un ouvert, il existe un plus grand ouvert disjoint avec X qui est $\complement\overline{X}$ (avec $\overline{X}$ est l'adhérence de X).

Remarque 2.12 ***[4]***

- *On pourrait, de façon analogue, définir un treillis $\vee$-**complémenté**.*
- *Un treillis complémenté n'est pas nécessairement $\wedge$-**complémenté**.*

Exemple 2.9 ***[4]***

*Le treillis $(\{1,2,3,5,30\},|)$ est complémenté, mais n'est pas $\wedge$-**complémenté**, par exemple $\{y \in E : y \wedge 2 = 1\} = \{1,3,5\}$ n'a pas de plus grand élément (voir **la figure 2.7**).*

Proposition 2.14 ***[4]***

Tout treillis distributif et complémenté est $\wedge$-complémenté.

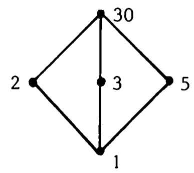


FIGURE 2.7

Démonstration :

Soit E un treillis distributif et complémenté, soient $x \in E$ et soit $x^{'}$ son complément (unique), on a $x \wedge x^{'} = 0$. Supposons $x \wedge y = 0$, alors :

$(y \wedge x^{'}) \wedge x = y \wedge (x^{'} \wedge x) = y \wedge 0 = 0 = y \wedge x.$

$(y \wedge x^{'}) \vee x = (y \vee x) \wedge (x^{'} \vee x) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x.$

D'après la caractérisation des treillis distributifs on en déduit : $y \wedge x^{'} = y$, donc $y \leqslant x^{'}$.Ainsi $x^{'}$ est le plus grand élément de $\{y : x \wedge y = 0\}$ c'est donc aussi le $\wedge$-complément de x.

2.2.4 Treillis résiduels

Définition 2.25 *[25]*

*Un **treillis résiduel** est une structure algébrique $(L, \vee, \wedge, *, \rightarrow, 0, 1)$ de type $(2, 2, 2, 2, 0, 0)$ vérifiant les trois conditions suivantes :*

(RL1) $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ *est un treillis fermé.*

(RL2) $(L, *, 1)$ *est un monoïde commutative.*

(RL3) Les deux opérations $(*, \rightarrow)$ *sont adjointes, c'est-à-dire :* $x * y \leqslant z \Longleftrightarrow x \leqslant y \rightarrow z$ *, pour tout* $x, y, z \in L$.

Proposition 2.15

Soit $(L, \vee, \wedge, *, \rightarrow, 0, 1)$ *un treillis résiduel, pour tout* $x, y \in L$ *:*

$x \rightarrow y = max\{z \in L : x * z \leqslant y\}.$

Démonstration :

Soit $(L, \vee, \wedge, *, \rightarrow, 0, 1)$ un treillis résiduel, donc les trois conditions (RL1),(RL2) et (RL3) sont vérifier.

On a : $x \rightarrow y \leqslant x \rightarrow y \Longleftrightarrow x * (x \rightarrow y) \leqslant y$ (de RL3), donc $x \rightarrow y \in \{z \in L : x * z \leqslant y\}$.

Soit $m \in \{z \in L : x * z \leqslant y\}$, donc $x * m \leqslant y \Longleftrightarrow m \leqslant x \to y$ (de RL3).

Finalement $x \to y = max\{z \in L : x * z \leqslant y\}$.

Exemple 2.10 *[26]*

1. *Si $I = [0,1]$, pour $x, y \in I$ on définit $x * y = min\{x, y\}$ et* $x \to y = \begin{cases} 1 & si\ \ x \leqslant y\,; \\ y & sinon. \end{cases}$

   Alors $(I, max, min, *, \to, 0, 1)$ est un treillis résiduel.

2. *Si $I = [0,1]$, pour $x, y \in I$ on définit $x * y = x \cdot y$ par la multiplication usuel des réels et* $x \to y = \begin{cases} 1 & si\ \ x \leqslant y\,; \\ \frac{y}{x} & sinon. \end{cases}$

   Alors $(I, max, min, *, \to, 0, 1)$ est un treillis résiduel.

Remarque 2.13 *[8]*

Dans un treillis résiduel $(L, \vee, \wedge, *, \to, 0, 1)$, on a pour tout $x, y, z \in L$:

(R1) : $x \leqslant y \Longleftrightarrow x \to y = 1$.

(R2) : $1 \to x = x$, $x \to 1 = 1$, $x \to x = 1$, $0 \to x = 1$, $x \to (y \to x) = 1$.

(R3) : $x \to (y \to z) = (x * y) \to z = y \to (x \to z)$.

Proposition 2.16

*Un treillis $(L, \vee, \wedge, *, \to, 0, 1)$ est dit treillis résiduel **si et seulement si** il vérifie les trois conditions suivantes :*

1. $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ *est un treillis fermé.*
2. $(L, \to, 1)$ *vérifie :* $x = 1 \to x$ *et* $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$.
3. *Les deux opérations $(*, \to)$ sont adjointes, c'est-à-dire :* $x * y \leqslant z \Longleftrightarrow x \leqslant y \to z$, *pour tout* $x, y, z \in L$.

Démonstration :

$(\Rightarrow)$ Les propriétés $1), 2)$ et $3)$ sont valables pour tout treillis résiduel.

$(\Leftarrow)$ Il suffit de monter que $(L, \wedge, 1)$ est un monoïde commutative.

Soient x, y, z, t des éléments de L, on a :

- $x * 1 \leqslant t$ ssi $x \leqslant 1 \to t$ ssi $x \leqslant t$ (de (2)).

  Donc comme $\begin{cases} x * 1 \leqslant x * 1 \\ x \leqslant x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x * 1 \leqslant x \\ x \leqslant x * 1 \end{cases} \Longrightarrow x * 1 = x.$

- $x * y \leqslant t$ ssi $x \leqslant y \to t$ ssi $1 \leqslant x \to (y \to t)$ ssi $1 \leqslant y \to (x \to t)$ (de (2)) ssi $y \leqslant x \to t$ ssi $y * x \leqslant t$. Donc comme $\begin{cases} x * y \leqslant x * y \\ y * x \leqslant y * x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x * y \leqslant y * x \\ y * x \leqslant x * y \end{cases} \Longrightarrow x * y = y * x.$
- $x * (y * z) \leqslant t$ ssi $y * z \leqslant x \to t$ ssi $y \leqslant z \to (x \to t)$ ssi $y \leqslant x \to (z \to t)$ (de (2)) ssi $x * y \leqslant z \to t$ ssi $(x * y) * z \leqslant t$. Donc comme $\begin{cases} x * (y * z) \leqslant x * (y * z) \\ (x * y) * z \leqslant (x * y) * z \end{cases} \Longrightarrow$
$\begin{cases} x * (y * z) \leqslant (x * y) * z \\ (x * y) * z \leqslant x * (y * z) \end{cases} \Longrightarrow x * (y * z) = (x * y) * z.$

Finalement $(L, \wedge, 1)$ est un monoïde commutative.

Théorème 2.6 *[25]*
Soit $W_k = \{0, 1, ..., k-1\}$ un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$, on définit pour tout $x, y \in W_k$:

$$x \wedge y = min\{x, y\}, x * y = \begin{cases} 0 & si \quad x + y \leqslant k - 1; \\ (x+y) - (k-1) & si \quad x + y > k - 1. \end{cases}$$

$$x \vee y = max\{x, y\},\ x \to y = \begin{cases} k - 1 & si \quad x \leqslant y; \\ (k-1) - x + y & si \quad x > y. \end{cases}$$

La structure $(W_k, max, min, *, \to, 0, k-1)$ est un treillis résiduel.

Preuve :

- Clair que $(W_k, max, min, 0, k-1)$ est un treillis fermé (on a (RL1)).
- Comme $+$ est commutative et associative, alors $*$ est aussi commutative et associative, et $k-1$ sont élément neutre. Donc $(W_k, *, k-1)$ est un monoïde commutative (on a (RL2)).
- Soient $x, y, z \in W_k$ tel que $x * y \leqslant z$:
  Si $y \leqslant z$, donc $x \leqslant k - 1 = y \to z$
  Si $y > z$:
  - Si $x * y = 0$, donc $x + y \leqslant k - 1$, donc $x \leqslant (k-1) - y \leqslant (k-1) - y + z = y \to z$.
  - Si $x * y = (x+y) - (k-1)$, donc $x * y = (x+y) - (k-1) \leqslant z$, donc $x \leqslant (k-1) - y + z = y \to z$.

Réciproquement : Soit $x \leqslant y \to z$.

Si $x + y \leqslant k - 1$, donc $x * y = 0 \leqslant z$

Si $x + y > k - 1$:

- Si $y \leqslant z$, donc $x + y \leqslant x + z$, on obtient $k - 1 < x + y \leqslant x + z \leqslant (k - 1) + z$, donc $x + y \leqslant (k - 1) + z$, alors $x * y = x + y - (k - 1) \leqslant z$.
- Si $y > z$, alors $x \leqslant y \to z = (k - 1) - y + z$, alors $x * y = x + y - (k - 1) \leqslant z$.

(on a (RL3))

Proposition 2.17 *[25]*

Soit Q_n l'ensemble de tous les nombres rationnels de l'intervalle $[1, n]$ et $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, on définit pour tout $x, y \in Q_n$:

$$x \wedge y = min\{x, y\},\ x * y = \begin{cases} 1 & si \quad xy \leqslant n\,; \\ \frac{xy}{n} & si \quad xy > n. \end{cases}$$

$$x \vee y = max\{x, y\},\ x \to y = \begin{cases} n & si \quad x \leqslant y\,; \\ \frac{n}{x}y & si \quad x > y. \end{cases}$$

La structure $(Q_n, max, min, *, \to, 0, n)$ est un treillis résiduel.

Démonstration :

Il est clair que $(Q_n, max, min, 0, n)$ est un treillis fermé (on a (RL1)) et $(Q_n, *, n)$ est un monoïde commutative (on a (RL2)).

On va montrer la condition (RL3), soient $x, y, z \in Q_n$ et $x * y \leqslant z$:

Si $y \leqslant z$, donc $x \leqslant n = y \to z$.

Si $y > z$:

- Si $xy \leqslant n$, donc $x \leqslant \frac{n}{y} \leqslant \frac{n}{y}z = y \to z$.
- Si $xy > n$, donc $x * y = \frac{xy}{n} \leqslant z$, alors $x \leqslant \frac{n}{y}z = y \to z$.

Réciproquement, soit $x \leqslant y \to z$:

Si $xy \leqslant n$, donc $x * y = 1 \leqslant z$.

Si $xy > n$:

- Si $y \leqslant z$, donc $n < xy \leqslant xz$ et comme $\frac{x}{n} \leqslant 1$, donc $1 < \frac{xy}{n} \leqslant \frac{x}{n}z \leqslant z$, alors $x * y \leqslant z$.
- Si $y > z$, donc $x \leqslant y \to z = \frac{n}{y}z$ donc $\frac{xy}{n} \leqslant z$, par conséquent $x * y \leqslant z$.

2.3 Anneaux booléens

Cette section est une initiation à l'étude générale des anneaux booléens, cette structure algébrique a été étudiée par le mathématicien Georges Boole (1815-1864) pour formaliser les règles de la logique des propositions. Dans cette section on va développer la notion de treillis de Boole et quelques propriétés fondamentales. Le point de départ de cette section sera la notion de treillis distributif et complémenté.

2.3.1 Treillis de Boole et anneau booléen associé

Définition 2.26 (Treillis de Boole) *[23]*
On appelle treillis de Boole tout treillis fermé qui est à la fois distributif et complémenté.

Propriétés :[2]
Dans un treillis de Boole E on a :

- $0^{'} = 1$, $1^{'} = 0$ et pour tout x : $(x^{'})^{'} = x$.
- Quels que soient x et y : $(x \wedge y)^{'} = x^{'} \vee y^{'}$ et $(x \vee y)^{'} = x^{'} \wedge y^{'}$, ces deux égalités sont appelées lois de **De Morgan**, elles sont faciles à vérifier :
  $(x \wedge y) \wedge (x^{'} \vee y^{'}) = (x \wedge y \wedge x^{'}) \vee (x \wedge y \wedge y^{'}) = (0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) = 0 \vee 0 = 0.$
  $(x \wedge y) \vee (x^{'} \vee y^{'}) = (x \vee x^{'} \vee y^{'}) \wedge (y \vee x^{'} \vee y^{'}) = (y^{'} \vee 1) \wedge (x^{'} \vee 1) = 1 \wedge 1 = 1.$
  Donc $(x \wedge y)^{'} = x^{'} \vee y^{'}$, d'où $(x^{'} \wedge y^{'})^{'} = x \vee y$ et $(x \vee y)^{'} = x^{'} \wedge y^{'}$.
- Quels que soient x et y : $x^{'} \vee y = 1 \Longleftrightarrow x \leqslant y \Longleftrightarrow x \wedge y^{'} = 0$.

Remarque 2.14 *[4]*
Dans un treillis de Boole tout élément x de $[a, b]$ possède un complément relatif et un seul, qui est $y = (a \vee x^{'}) \wedge b$. Le complément $x^{'}$ d'un élément x est aussi son $\wedge$-complément, c'est-à-dire si $x \wedge y = 0$ et comme $x \wedge x^{'} = 0$ alors $y \leqslant x^{'}$.

Définition 2.27 (Addition) *[16]*
Dans un treillis de Boole on définit une nouvelle opération, dite addition par :
$x + y = (x \wedge y^{'}) \vee (x^{'} \wedge y) = (x \vee y) \wedge (x^{'} \vee y^{'}).$

Exemple 2.11 *[4]*
Tout treillis $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$ est un treillis de Boole, cette opération est celle qu'on appelle souvent ***la différence symétrique****, notée $X + Y = X \bigtriangleup Y = (X \cap \complement Y) \cup (\complement X \cap Y)$.*

Remarque 2.15 *[16]*

- $(x+y)^{'} = (x^{'} \vee y) \wedge (x \vee y^{'}) = (x \wedge y) \vee (x^{'} \wedge y^{'})$.
- *L'opération d'addition vérifie quelques propriétés, elle est commutative, associative et admet* 0 *comme élément neutre :* $x + 0 = (x \vee 0) \wedge (x^{'} \vee 1) = x \wedge 1 = x$. *Tout élément est son propre opposé :* $x + x = (x \vee x) \wedge (x^{'} \vee x^{'}) = x \wedge x^{'} = 0$.
  $x + 1 = x^{'}$ *car* $x + 1 = (x \vee 1) \wedge (x^{'} \vee 0) = 1 \wedge x^{'} = x^{'}$, *ou encore* $x + x^{'} = 1$.

Définition 2.28 (Anneau booléen) *[28]*

On appelle ***anneau booléen*** *tout anneau unitaire dont la multiplication est idempotente (*$x^2 = x$*).*

Théorème 2.7 *[28]*

Tout treillis de Boole est un anneau booléen pour les opérations :
$x + y = (x \wedge y^{'}) \vee (x^{'} \wedge y)$ *et* $x \cdot y = x \wedge y$.

Preuve :

Soit E un treillis de Boole. D'après la remarque 2.15, $(E, +)$ est un groupe abélien.
Définissons la multiplication par : $xy = x \wedge y$ (on note, suivant l'usage, xy au lieu de $x \cdot y$).
Cette opération est commutative, associative et idempotente, 1 est l'élément neutre : $x \cdot 1 = x \wedge 1 = x$, elle est distributive par rapport à l'addition ($(x+y)z = xz + yz$).

Remarque 2.16 *[28]*

Dans un anneau booléen tout élément est son propre opposé (car $(x+x)^2 = x+x$ *soit* $x^2+x^2+x^2+x^2 = x+x$, *or* $x^2 = x$ *donc* $x + x = 0$ *), et la multiplication est commutative (car* $(x+y)^2 = x+y$ *soit* $x^2 + xy + yx + y^2 = x + y$, *d'où* $xy + yx = 0$ *et d'après ce qui précède :* $yx = xy$ *).*

Théorème 2.8 *[4]*

Tout anneau booléen est un treillis de Boole pour les opérations : $x \wedge y = x \cdot y = xy$ *et* $x \vee y = x + y + xy$

Démonstration :

- La loi $\wedge$ est commutative, associative et idempotente.
- La loi $\vee$ est commutative, associative $(x \vee y) \vee z = x+y+z+xy+yz+xz+xyz = x \vee (y \vee z)$ et idempotente $x \vee x = x + x + x^2 = x + x + x = x$.

- Les lois d'absorption sont vérifiées :

  $x \wedge (x \vee y) = x(x + y + xy) = x^2 + xy + x^2y = x + xy + xy = x.$

  $x \vee (x \wedge y) = x + xy + x^2y = x + xy + xy = x.$

- Distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$:

  $x \wedge (y \vee z) = x(y + z + yz) = xy + xz + xyz.$

  $(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = xy + xz + x^2yz = xy + xz + xyz.$

- Plus petit et plus grand éléments : Pour tout x :

  $x \wedge 0 = x \cdot 0 = 0$, donc $0 \leqslant x$.

  $x \wedge 1 = x \cdot 1 = x$, donc $x \leqslant 1$.

- Complémentation : posons $x^{'} = x + 1$:

  $x \wedge x^{'} = x(x + 1) = x^2 + x = x + x = 0.$

  $x \vee x^{'} = x \vee (x + 1) = x + x + 1 + x^2 + x = x + x + 1 + x + x = 1.$

Soit E un treillis de Boole, nous lui avons associé l'anneau de Boole que nous noterons pour l'instant $A(E)$ en définissant les opérations : $x + y = (x \wedge y^{'}) \vee (x^{'} \wedge y)$ et $xy = x \wedge y$. Soit B un anneau booléen, nous lui avons associé le treillis de Boole que nous noterons pour l'instant $T(B)$ en définissant les opérations : $x \wedge y = xy$ et $x \vee y = x + y + xy$.

Proposition 2.18 *[4]*

$T(A(E)) = E$

Démonstration :

Notons $\triangledown$ et $\vartriangle$ les opération dans $T(A(E))$: $x \vartriangle y = xy = x \wedge y$, il en résulte que la relation d'ordre est la même dans E et $T(A(E))$, il s'agit donc du même treillis.

Proposition 2.19 *[4]*

$A(T(B)) = B$

Démonstration :

Notons $\oplus$ et $\otimes$ les opérations dans $A(T(B))$: $x \otimes y = x \wedge y = xy$ et

$$\begin{aligned} x \oplus y = (x \wedge y^{'}) \vee (x^{'} \wedge y) &= [x(y+1)] \vee [(x+1)y] \\ &= x(y+1) + (x+1)y + xy(x+1)(y+1) \\ &= xy + x + xy + y + x^2y^2 + x^2y + xy^2 + xy \\ &= x + y \end{aligned}$$

Sur un ensemble E il est équivalent de définir : une structure de treillis de Boole $(E, \leqslant, \wedge, \vee, 0, 1, \ ')$, et une structure d'anneau booléen $(E, +, \cdot, 0, 1)$. On parle souvent **d'algèbre de Boole** pour désigner l'ensemble de ces deux structures $(E, \leqslant, \wedge, \vee, 0, 1, \ ', +, \cdot)$. Il sera utile de retenir le formulaire suivant qui permet les passages d'une structure à l'autre :

$$\begin{cases} xy = x \wedge y \\ x + y = (x \wedge y^{'}) \vee (x^{'} \wedge y) \\ \qquad = (x \vee y) \wedge (x^{'} \vee y^{'}) \end{cases} \qquad \begin{cases} x \wedge y = xy \\ x \vee y = x + y + xy \\ x^{'} = x + 1 \end{cases}$$

Remarque 2.17 ***[16]***

- *Considérons une algèbre de Boole $(E, \leqslant, \wedge, \vee, 0, 1, \ ', +, \cdot)$:*
  1. *La relation d'ordre $x \leqslant y$ peut être exprimée de plusieurs façons équivalentes :*
     - *Par $xy = x$ (on utilisera de préférence la notation xy à $x \wedge y$).*
     - *Par $x \vee y = y$.*
     - *Par $x^{'} \vee y = 1$.*
     - *Par $xy^{'} = 0$.*
  2. *Nous savons que la relation d'ordre est compatible avec les opérations $\cdot$ et $\vee$: $x \leqslant y$ implique $xz \leqslant yz$ et $x \vee a \leqslant y \vee z$, mais il n'en pas de même pour l'addition, par exemple $0 < 1$ mais $0 + 1 = 1 > 1 + 1 = 0$.*
  3. *$x \leqslant y$ équivaut à $y^{'} \leqslant x^{'}$ car : $xy = x$ équivaut à $(xy)^{'} = x^{'}$, soit $x^{'} \vee y^{'} = x^{'}$.*
- *Le seul anneau booléen intègre est l'anneau à deux éléments $\mathbb{U} = \{0, 1\}$, ce n'est autre d'ailleurs que le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*

Exemple 2.12

*Anneau des ofs d'un espace topologique : Dans un espace topologique X, on appelle **of** toute partie qui est à la fois ouverte et fermée (en anglais : **clopen**). Tout espace topologique X possède au moins deux **ofs**, sont X et $\emptyset$, si l'espace est connexe ce sont d'ailleurs les seuls. L'ensemble $\mathcal{V}$ des ofs de X est un sous-treillis de $\mathcal{P}(X)$: si A et B sont des ofs, $A \cap B$ et $A \cup B$ sont des ofs.$\mathcal{V}$ est donc lui-même un treillis distributif avec un plus petit élément $\emptyset$ et un plus grand élément X, il est en outre complémenté car si A est un of, $\complement A$ est aussi un of.*

*$\mathcal{V}$ est donc **une algèbre de Boole** pour les opérations ensemblistes usuelles.*

Théorème 2.9 *[3]*

Le treillis $D(n)$, ordonné par divisibilité, est une algèbre de Boole ***si et seulement si*** *n n'est divisible par aucun carré de nombre premier (cela signifie que n est de la forme $p_1 \cdot p_2 \cdots p_s$ où les p_i sont des nombres premiers distincts).*

Exemple 2.13

1. $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ *et* $646 = 2 \cdot 17 \cdot 19$, *donc* D_{210}, D_{66} *et* D_{646} *sont des anneaux booléennes.*

2. *On a représenté dans la figure 2.8 les trois anneaux booléens :* $D(2)$, $D(6)$ *et* $D(30)$. *Dans* $D(30)$ *on calcule, par exemple :* $5 + 2 = 10$, $6 \cdot 10 = 2$

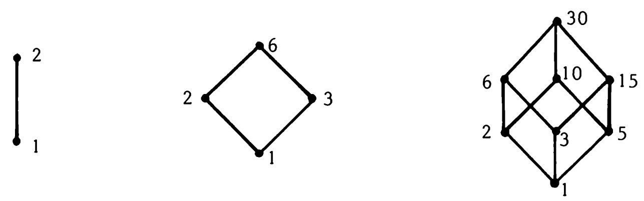


FIGURE 2.8

Exemple 2.14 *[26]*

Soit $(A, \vee, \wedge, ', 0, 1)$ *un anneau booléen et pour* $x, y \in A$ *on définit* $x * y = x \wedge y$ *et* $x \to y = x' \vee y$, *alors la structure* $(A, \vee, \wedge, *, \to 0, 1)$ *est un treillis résiduel.*

2.3.2 Sous-anneau booléen

Définition 2.29 *[27]*

Dans une algèbre de Boole A, on appelle ***sous-anneau booléen****, ou encoure* ***sous-algèbre de Boole*** *de A tout sous-anneau* ***unitaire*** *de A.*

Remarque 2.18 *[4]*

- *Un sous-anneau booléen B de A, muni de l'ordre induite, est un sous-treillis de A.*
- *Dans un anneau booléen A il y a au moins les deux sous-anneaux booléens $\mathbb{U}$ et A.*
- *L'intersection d'une famille quelconque de sous-anneau booléens de A est un sous-anneau booléen de A.*

Proposition 2.20

Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

- *B est un sous-anneau booléen.*
- *B est une partie non vide stable pour les opérations xy et $x^{'}$.*
- *B est une partie non vide stable pour les opérations $x \vee y$ et $x^{'}$.*

En pratique, on utilisera assez souvent la deuxième caractérisation.

Exemple 2.15

1. *L'ensemble $FC(E)$ des parties finis ou cofinies d'un ensemble E est un sous-treillis booléen de $\mathcal{P}(E)$. Plus généralement, si E est un ensemble infini de cardinal α et si β est un cardinal infini inférieur à α, l'ensemble des parties A telles que $card(A) \leqslant \beta$ ou $card(A^c) \leqslant \beta$ est un sous-anneau booléen de $\mathcal{P}(E)$.*
2. *L'ensemble $\mathcal{V}$ des ofs d'un espace topologique X est un sous-anneau booléen de $\mathcal{P}(X)$. Par contre, l'ensemble $\mathcal{O}$ des ouverts est bien un sous-treillis qui contient l'élément unité X, mais ce n'est pas en général un sous-anneau booléen, car il n'est pas stable pour la complémentation.*

2.3.3 Morphismes booléens

Définition 2.30 ***[16]***

*Soient A et B deux anneaux booléens, une application $f : A \longrightarrow B$ est dite **morphisme booléen** si f est un morphisme **unitaire d'anneaux**, c'est-à-dire : $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$ et $f(1) = 1$.*

Remarque 2.19 ***[16]***

Un morphisme booléen préserve toutes les opérations d'algèbre booléenne $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$, $f(x^{'}) = f(x)^{'}$ et $f(0) = 0$, de plus il préserve l'ordre si $x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$ (c'est-à-dire croissant).

Proposition 2.21 ***[4]***

Si A et B sont deux algèbre booléennes et f une application de A dans B, les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un morphisme booléen.*

2. *Quels que soient* x, y *dans* A *:* $f(xy) = f(x)f(y)$ *et* $f(x^{'}) = f(x)^{'}$.

3. *Quels que soient* x, y *dans* A *:* $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ *et* $f(x^{'}) = f(x)^{'}$.

En pratique, on utilisera assez souvent la caractérisation (2).

Exemple 2.16

1. *Si* A *un anneau booléen, l'application identique* I_A *de* A *est un morphisme booléen.*

2. *Si* $A = \mathcal{P}(E)$ *et* x_0 *est un élément fixé de* E*, l'application* $f : A \longrightarrow \mathbb{U}$ *définie par* $f(X) = \begin{cases} 1 & si \;\; x_0 \in X \\ 0 & si \;\; x_0 \notin X \end{cases}$ *est un morphisme booléen.*

Si f est un morphisme booléen de A dans B on définira :

f est un **monomorphisme** booléen : si f est injective.

f est un **épimorphisme** booléen : si f est surjective.

f est un **isomorphisme** booléen : si f est bijective.

f est un **endomorphisme** booléen : si $A = B$ avec la même structure.

f est un **automorphisme** booléen : si f est un endomorphisme bijectif.

Remarque 2.20 *[4]*

Un morphisme booléen f *de* A *dans* B *vérifie notamment* $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ *et* $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$*, c'est donc aussi un morphisme de treillis, et a fortiori une application croissante. Mais un morphisme de treillis entre deux algèbres booléennes n'est pas nécessairement un morphisme booléen (même s'il préserve* 1*), par exemples : soit* $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ *définie par* $f(X) = X \cup X_0$ *où* X_0 *est une partie non vide fixée de* E*.*

$f(X \cup Y) = X \cup Y \cup X_0 = (X \cup X_0) \cup (Y \cup X_0) = f(X) \cup f(Y)$.

$f(X \cap Y) = (X \cap Y) \cup X_0 = (X \cup X_0) \cap (Y \cup X_0) = f(X) \cap f(Y)$, *et* $f(E) = E$.

Mais $f(\emptyset) = X_0$ *et* $f(\complement X) = \complement X \cup X_0 \neq \complement X \cap \complement X_0 = \complement f(X)$.

Proposition 2.22 *[4]*

f *est un morphisme booléen de* A *dans* B ***ssi*** f *est un morphisme de treillis avec* $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 1$.

Démonstration :

$(\Rightarrow)$ déjà traiter.

($\Leftarrow$) Pour tout $x \in A$, $x \wedge x^{'} = 0$ donc $f(x \wedge x^{'}) = f(x) \wedge f(x^{'}) = f(0) = 0 = f(x) \wedge f(x)^{'}$.
$x \vee x^{'} = 1$ donc $f(x \vee x^{'}) = f(x) \vee f(x^{'}) = f(1) = 1 = f(x) \vee f(x)^{'}$.
Ce qui preuve $f(x^{'}) = f(x)^{'}$.

Proposition 2.23 *[4]*
Soient A et B deux anneaux booléennes, si f un morphisme de treillis surjective (épimorphisme) de A sur B, alors f est un morphisme booléen.

Démonstration :
Soit $y \in B$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, dans A : $0 \leqslant x \leqslant 1$, or f est croissante, donc $f(0) \leqslant f(x) = y \leqslant f(1)$ et ceci pur tout $y \in B$. Il en résulte $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on utilise alors le résultat du proposition 2.22.

Remarque 2.21 *[4]*
Soient A et B deux anneaux booléennes, Un morphisme injective de treillis de A dans B n'est pas nécessairement un morphisme booléen. Exemple : $D(6)$ est un sous-treillis de $D(30)$, l'injection canonique de $D(6)$ dans $D(30)$ est un morphisme de treillis, mais ce n'est pas un morphisme booléen, puisque $f(2') = f(3) = 3 \neq 10 = 3' = f(2)'$.

Proposition 2.24 *[4]*
Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. *f est un isomorphisme booléen.*
2. *f est un isomorphisme de treillis.*
3. *f est un isomorphisme d'ordre.*

2.3.4 Filtres et idéaux dans un anneau booléen

Nous avons déjà introduit les notions de filtres et idéaux dans l'étude des treillis, tout ce qui a été dit reste a fortiori valable dans une algèbre de Boole A.

Définition 2.31 (Idéal d'anneau) *[7]*
Un idéal J d'un anneau commutatif A est toute partie non vide de A vérifiant :

$a)$ *J est un sous-groupe additif de A ;*

b) *Si $x \in J$ et $\alpha \in A$, alors $\alpha x \in J$.*

Proposition 2.25 (Idéaux de treillis et idéaux d'anneaux) *[2]*
Dans une algèbre booléenne A les notions d'idéal au sens des treillis et idéal au sens des anneaux sont les mêmes.

Démonstration :

- Si J est un idéal au sens des treillis :
  a) Soient $x, y \in J : x + y = (xy') \vee (x'y)$, $xy' \leqslant x$ donc $xy' \in J$, $x'y \leqslant y$ donc $x'y \in J$, donc $x + y \in J$, J est donc un sous-groupe additif de A.
  b) Soient $x \in J$ et $\alpha \in A$: $\alpha x \leqslant x$ donc $\alpha x \in J$. Donc J est un idéal au sens des anneaux.
- Si J est un idéal au sens des anneaux :
  a) Soient $x \in J$ et $y \leqslant x$: $y = xy$ donc $y \in J$.
  b) Soient $x \in J$ et $y \in J$: $x \vee y = x + y + xy \in J$.

Remarque 2.22 *[4]*
Un idéal principal au sens des treillis est la même chose qu'un idéal principal au sens des anneaux.

Rappelons que si G est une partie d'un anneau booléen A, nous avons noté :

$$G^{'} = \{x^{'} \mid x \in G\} = \{x \in A \mid x^{'} \in G\}$$

Remarque 2.23

- *F est un filtre $\Longleftrightarrow$ $F^{'}$ est un idéal.*
- *F est un filtre propre $\Longleftrightarrow$ $F^{'}$ est un idéal propre.*
- *F est le filtre principal $A \vee \alpha \Longleftrightarrow F^{'}$ est l'idéal principal $A\alpha'$.*
- *F est le filtre engendré par $G \Longleftrightarrow F^{'}$ est l'idéal engendré par $G^{'}$.*

Soit A un anneau booléen, nous savons qu'il possède des ultrafiltres (c'est-à-dire des filtres propres maximaux), et que tout filtre est contenu dans un ultrafiltre. La caractérisation des ultrafiltres que nous avons vue à propos des treillis va nous permettre d'obtenir les résultats suivants.

Proposition 2.26 *[16]*
Si F est un filtre propre, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

a) *F est un ultrafiltre.*

b) *Pour tout $x \notin F$, $x^{'} \in F$.*

Démonstration :

$a)$ implique $b)$: nous savons que si $x \notin F$ il existe $y \in F$ tel que $xy = 0$ d'où $y \leqslant x^{'}$, donc $x^{'} \in F$.

$b)$ implique $a)$: si $x \notin F$, il existe $x^{'} \in F$ tel que $xx^{'} = 0$, donc F est un ultrafiltre.

Proposition 2.27 ***[4]***

Pour qu'une partie F de A soit un ultrafiltre, ***il faut et il suffit que*** *sa fonction caractéristique δ_F soit un morphisme booléen de A dans l'anneau booléen $\mathbb{U} = \{0, 1\}$.*

Où $\delta_F : A \longrightarrow \mathbb{U}$ telle que pour tout x de A, $\delta_F(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in F. \\ 0 & si\ x \notin F. \end{cases}$

Démonstration :

- Si F est un ultrafiltre :
  - Si $\delta_F(xy) = 1$, $xy \in F$ or $x \geqslant xy$ et $y \geqslant xy$, donc $\delta_F(x) = \delta_F(y) = 1$.
  - $\delta_F(x) = \delta_F(y) = 1$: $x \in F$ et $y \in F$, donc $xy \in F$ donc $\delta_F(xy) = 1$.
    On en déduit : $\delta_F(xy) = \delta_F(x)\delta_F(y)$.
  - $\delta_F(x) = 1$, $x \in F$ donc $x' \notin F$ (sinon $xx' = 0 \in F$), d'où $\delta_F(x') = 0$.
  - $\delta_F(x') = 0$, $x' \notin F$ donc $x = (x')' \in F$, d'où $\delta_F(x) = 1$.
    On en déduit : $\delta_F(x') = (\delta_F(x))'$, donc δ_F est un morphisme booléen.
- Réciproquement, si δ_F est un morphisme booléen :
  - $\delta_F(1) = 1$, donc $1 \in F$.
  - $\delta_F(0) = 0$, donc $0 \notin F$.
  - Si $x \in F$ et $y \geqslant x$: $\delta_F(x) = 1$ et $\delta_F(y) \geqslant \delta_F(x)$, donc $\delta_F(y) = 1$, $y \in F$.
  - Si $x \in F$ et $y \in F$: $\delta_F(x) = \delta_F(y) = 1$, $\delta_F(xy) = \delta_F(x)\delta_F(y) = 1$, $xy \in F$.
  - Si $x \notin F$: $\delta_F(x) = 0$ donc $(\delta_F(x))' = \delta_F(x') = 1$, $x^{'} \in F$.
    Il en résulte que F est un ultrafiltre.

Remarque 2.24

- *Ce résultat montre qu'il y a correspondance bijective entre les ultrafiltres de A et les morphismes booléens de A dans $\mathbb{U}$.*
- *Pour un ultrafiltre F on a donc :* $\begin{cases} x' \in F \Longleftrightarrow x \notin F \\ xy \in F \Longleftrightarrow x \in F \text{ et } y \in F \\ x \vee y \in F \Longleftrightarrow x \in F \text{ ou } y \in F \end{cases}$

Proposition 2.28 *[4]*

Tout filtre propre est égal à l'intersection de tous les ultrafiltres le contient.
En particulier, l'intersection de tous les ultrafiltres de A est $\{1\}$.

Démonstration :

Soit $\mathcal{U}_F$ la famille des ultrafiltres contenant F (F est un filtre propre).

- On a évidemment : $F \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{U}_F} U$
- Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{U \in \mathcal{U}_F} U$, posons $G = F \cup \{x'\}$.
  Si G est $\wedge$-compatible, elle engendre un filtre propre F_G, lui-même contenu dans un ultrafiltre U_1, donc $U_1 \in \mathcal{U}_F$ et $x \in U_1$, de plus comme $G \subseteq F_G \subseteq U_1$, $x^{'} \in U_1$. On a $x, x' \in U_1$ et U_1 un ultrafiltre, ce qui est contradictoire. Donc G est $\wedge$-incompatible, alors il existe $y \in F$ tel que $yx' = 0$, donc $y \leqslant x$ et $y \in F$ d'où $x \in F$.

Remarque 2.25

Tout ce qui vient d'être dit pour les ultrafiltres peut être transcrit par dualité pour les idéaux maximaux grâce au résultat :

Proposition 2.29 *[16]*

Pour que I soit un idéal maximal ***il faut et il suffit que*** *$I^{'}$ soit un ultrafiltre.*
Dans ce cas : $I^{'} = \complement_A I$.

Démonstration :

- Si I est un idéal maximal, nous savons que $I^{'}$ est un filtre propre, soit F un autre filtre propre tel que $I^{'} \subseteq F$, alors $I \subseteq F^{'}$, donc $I = F^{'}$ (car I est un idéal maximal) et par suite $I^{'} = F$, donc $I^{'}$ est un ultrafiltre.
- La réciproque se démontre de façon analogue.

- En outre, si I est un idéal maximal :
  $x \notin I \Longleftrightarrow x' \notin I' \Longleftrightarrow x \in I'$ car I' est un ultrafiltre. D'où $I' = \complement_A I$.

Définition 2.32 *[28]*
Dans un anneau commutatif quelconque on définit un idéal ***premier*** *P (propre) par la condition :*
Quels que soient x, y : $xy \in P \Longrightarrow x \in P$ ou $y \in P$.

Proposition 2.30 *[7]*
Dans le cas d'un anneau booléen il y a équivalence entre les deux propriétés :

$a)$ *I est un idéal maximal.*

$b)$ *I est un idéal premier.*

Démonstration :

- Si I est un idéal maximal et si $xy \in I$, alors $x \in I$ ou $y \in I$, sinon $x \in \complement I$ et $y \in \complement I$ donc $xy \in \complement I$ ($\complement I$ est un ultrafiltre).
- Si I est un idéal premier : Soit $x \notin I$, comme $xx' = 0 \in I$, donc $x' \in I$, alors I est maximal.

Exemple 2.17
Soient l'anneau booléen $\mathcal{P}(E)$ où E est un espace topologique, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\mathcal{V}(x)$ des voisinages de x est un filtre de $\mathcal{P}(E)$. Ceci résulte immédiatement de la définition des voisinages. Rappelons que x est dit un point isolé si $\{x\}$ est un voisinage de x, on a alors le résultat suivant : pour que $\mathcal{V}(x)$ soit un ultrafiltre, il faut et il suffit que x soit un point isolé. En effet :

- *Si x est isolé : si $A \notin \mathcal{V}(x)$, alors $x \notin A$, donc $x \in \complement A$, donc $\complement A \in \mathcal{V}(x)$.*
- *Si $\mathcal{V}(x)$ est un ultrafiltre : supposons $\{x\} \notin \mathcal{V}(x)$, alors $\complement\{x\} \in \mathcal{V}(x)$ ce qui est contradictoire.*

Dans ce cas $\mathcal{V}(x)$ est donc l'ultrafiltre principal engendré par $\{x\}$.

Considérons deux anneaux booléens A et B et f un morphisme booléen de A dans B.

Proposition 2.31 *[4]*

- *Si F est un filtre de B, alors $f^{-1}(F)$ est un filtre de A.*
- *Si I est un idéal de B, alors $f^{-1}(I)$ est un idéal de A.*

Démonstration :

Soit F un filtre de B : $f(1) = 1 \in F$, donc $1 \in f^{-1}(F)$.

Si $x \in f^{-1}(F)$ et $y \geqslant x$: $f(y) \geqslant f(x)$ et $f(x) \in F$, donc $y \in f^{-1}(F)$.

Si $x \in f^{-1}(F)$ et $y \in f^{-1}(F)$: $f(x) \in F$ et $f(y) \in F$, $f(xy) = f(x)f(y) \in F$, donc $xy \in f^{-1}(F)$.

Démonstration analogue pour un idéal.

Remarque 2.26 *[4]*

- $f^{-1}(1)$ *est un filtre de* A.
- $f^{-1}(0)$ *est un idéal de* A*, appelé* ***le noyau*** *de* f *et noté* $ker(f)$ *(comme dans tout anneau).*
- *Si* F *est un filtre propre,* $f^{-1}(F)$ *est aussi un filtre propre (de même pour un idéal), en effet si* $0 \in f^{-1}(F)$, $f(0) = 0 \in F$.
- *Si* F *est un ultrafiltre,* $f^{-1}(F)$ *est aussi un ultrafiltre (de même pour un idéal), en effet si* $x \notin f^{-1}(F)$, $f(x) \notin F$*, donc* $(f(x))' = f(x') \in F$, $x' \in f^{-1}(F)$.
- *En général, l'image directe d'un filtre (resp. d'un idéal) de* A *n'est pas un filtre (resp. un idéal) de* B*. Par exemple : soit* $f : D(6) \longrightarrow D(30)$ *un morphisme booléen définie par :*
  $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 15$ *et* $f(6) = 30$.
  On a $\{2, 6\}$ *est un filtre de* $D(6)$*, mais* $f(\{2, 6\}) = \{2, 30\}$ *n'est pas un filtre de* $D(30)$.

Proposition 2.32 *[4]*

Si f *est un épimorphisme booléen de* A *sur* B *et si* F *est un filtre de* A*, alors* $f(A)$ *est un filtre de* B*. (on a la même résultat pour un idéal).*

Démonstration :

- $1 \in F$, donc $f(1) = 1 \in f(F)$.
- Si $x \in f(F)$ et $y \geqslant x$: $x = f(x_1)$ et $y = f(y_1)$ avec $x_1 \in F$ et $y_1 \in A$
  $y = y \vee x = f(y_1) \vee f(x_1) = f(y_1 \vee x_1) \in f(F)$ car $y_1 \vee x_1 \geqslant x_1$.
- $x \in f(F)$ et $y \in f(F)$: $x = f(x_1)$ et $y = f(y_1)$ avec $x_1, y_1 \in F$, donc
  $xy = f(x_1)f(y_1) = f(x_1y_1) \in F$ car $x_1y_1 \in F$.

Finalement $f(F)$ est un filtre de B.

2.3.5 Représentation de Stone

Soit A un anneau booléen, on désigne par X l'ensemble des ultrafiltres de A, cet ensemble est appelé **espace de Stone**. Soit δ l'application de A dans $\mathcal{P}(X)$ définie par :

$$\delta : A \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$
$$x \longmapsto \delta(x)$$
$$\delta(x) = \{U \in X : x \in U\}$$

Théorème 2.10 (Théorème de Stone) *[4]*

*Pour tout anneau booléen A, δ est un **monomorphisme** booléen de A dans $\mathcal{P}(X)$.*

Preuve :

Soit U un ultrafiltre de X.

$xy \in U \Longleftrightarrow x \in U$ et $y \in U$, on en déduit : $\delta(xy) = \delta(x) \cap \delta(y)$.

$x' \in U \Longleftrightarrow x \notin U$, on en déduit : $\delta(x') = \complement\delta(x)$.

Ce qui montre que δ est un morphisme booléen.

Si $\delta(x) = \delta(y)$: $\delta(x) + \delta(y) = \delta(x + y) = \emptyset$, ou encore $\delta((x + y)') = X$, donc $(x + y)'$ appartient à tout ultrafiltre de X, donc $(x + y)' = 1$, soit $x + y = 0$, donc $x = y$. Ce qui montre que δ est injective. A est donc **isomorphe** à $\delta(A)$ qui est un sous-anneau booléen de $\mathcal{P}(X)$.

Nous appellerons δ (ou δ_A s'il faut préciser) **l'isomorphisme de Stone** relatif à A.

Remarque 2.27 *[4]*

Le théorème de Stone admet plusieurs versions qui sont équivalentes :

- *On prend X_1 l'ensemble des idéaux maximaux (ou premiers) de A et on définit δ_1 par :*
  $\delta_1(x) = \{I \in X_1 : x' \in I\}$. *$\delta_1$ est aussi un monomorphisme booléen de A dans $\mathcal{P}(X_1)$.*
- *On prend X_2 l'ensemble des morphismes booléens de A dans $\mathbb{U}$ et on définit δ_2 par :*
  $\delta_2(x) = \{f \in X_2 : f(x) = 1\}$. *$\delta_2$ est aussi un monomorphisme booléen de A dans $\mathcal{P}(X_2)$.*

Proposition 2.33 *[4]*

*Si A est un anneau booléen **fini**, alors δ est surjective. Autrement dit, A est isomorphe à $\mathcal{P}(X)$.*

Démonstration :

Si A est fini, X est aussi un ensemble fini. Soit $Y \in \mathcal{P}(X)$, si $Y = \emptyset$ alors $Y = \delta(0)$.

Si $Y \neq \emptyset$, posons $Y = \{U_1, ..., U_k\}$ et soit $F = U_1 \cap ... \cap U_k$.

F est un filtre de A, il est donc principal, posons $F = F_\alpha = A \vee \alpha$.

- $\alpha \in F$, donc $\alpha \in U_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k : Y \subseteq \delta(\alpha)$.
- Soit $U \in \delta(\alpha)$, donc $\alpha \in U$, donc $F \subseteq U$.

  Supposons $U \neq U_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, donc $U_i \nsubseteq U$ (car U_i est maximal), donc pour chaque i il existe $x_i \in U_i$ tel que $x_i \notin U$.

  Soit $x = x_1 \vee ... \vee x_k$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, $x \geqslant x_i$, donc $x \in U_i$, donc $x \in F$, donc $x \in U$ et comme U un ultrafiltre, donc l'un des $x_i \in U$, ce qui contredit le fait qu'aucun x_i n'appartienne à U.

  Alors U est l'un des U_i, d'où $\delta(\alpha) \subseteq Y$.

Ainsi, $Y = \delta(\alpha)$, donc δ est surjective.

Conclusion 2.1

1. *Le nombre d'éléments d'un anneau booléen fini A est de la forme 2^n, n est le nombre d'ultrafiltres de A. Exemples : $D(30)$ a 8 éléments, donc il contient 3 ultrafiltres car $8 = 2^3$; $D(210)$ a 16 élément, donc il contient 4 ultrafiltres car $16 = 2^4$.*
2. *Tout les anneaux booléens finis ayant le même nombre d'éléments, 2^n, sont isomorphe entre eux, et isomorphe à $\mathcal{P}(X)$ où X est un ensemble à n éléments.*
3. *Quel que soit l'entier $n \geqslant 1$, il existe des anneaux booléens ayant 2^n éléments et possédant n ultrafiltres.*

Chapitre 3

Aperçu sur les treillis flous

Ce chapitre est une initiation aux treillis flous. la définition utilisée ici est celle introduite par **Chon (Korean J. Math 17 (2009), No.4,361-374)**. et on va développer Certaines propriétés algébriques seront développes.

3.1 Notions de treillis flous

Dans cette section on va parler sur les ensembles flous, les relations binaires floues et les treillis flous.

3.1.1 Sous-ensemble flou

Définition 3.1 (Ensemble flou) *[12]*
Un sous-ensemble flou $\tilde{A}$ dans un ensemble E est caractériser par une fonction d'appartenance $\delta_{\tilde{A}} : E \longrightarrow [0,1]$, avec $[0,1]$ est l'intervalle réel.
Si x un élément de E, $\delta_{\tilde{A}}(x)$ est interprété comme le degré d'appartenance de x.
Un ensemble flou $\tilde{A}$ dans un ensemble E peut être représenté comme un ensemble de paires ordonnées d'un élément générique $x \in E$ et son degré d'appartenance, $\tilde{A} = \{(x, \delta_{\tilde{A}}(x)) \mid x \in E\}$.

Définition 3.2 (Support d'un ensemble flou) *[12]*
Le support d'un ensemble flou $\tilde{A}$ dans E, est l'ensemble notée $S(\tilde{A})$ de tous les éléments de E qui possèdent un degré d'appartenance non nul, $S(\tilde{A}) = \{x \in E \mid \delta_{\tilde{A}}(x) > 0\}$.

Exemple 3.1

Soient $E = \{a, b, c\}$ *un ensemble référentiel,* $\tilde{\mathcal{A}}_1 = \{(a, 0.3), (b, 1), (c, 0.7)\}$ *et* $\tilde{\mathcal{A}}_2 = \{(a, 0), (b, 0.9), (c, 0.8)\}$ *deux ensembles flous dans* E*, donc* $S(\tilde{\mathcal{A}}_1) = \{a, b, c\}$ *et* $S(\tilde{\mathcal{A}}_2) = \{b, c\}$.

Définition 3.3 (Le niveau de flou) ***[12]***

Soient $\tilde{\mathcal{A}}$ *un ensemble flou dans* E *et* $\alpha \in]0, 1]$*, on appelle le niveau de flou de degré* α *(ou* α*-coup) de* $\tilde{\mathcal{A}}$ *et on note* $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$ *l'ensemble définie par* $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha = \{x \in E \mid \delta_{\tilde{\mathcal{A}}}(x) \geqslant \alpha\}$.

Dans la suite pour simplifie l'écriture, on va remplacer $\delta_{\tilde{\mathcal{A}}}(x)$ par $\tilde{\mathcal{A}}(x)$.

3.1.2 Relation binaire floue

Définition 3.4 (Relation binaire floue) ***[11]***

Soient E *et* F *des ensembles non vides, une relation binaire floue* $\mathcal{R}$ *entre* E *et* F *est une application de l'espace cartésien* $E \times F$ *dans l'intervalle réel* $[0, 1]$.

Propriétés :[9]

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire floue sur E.

$-$ $\mathcal{R}$ est **réflexive** ssi $\mathcal{R}(x, x) = 1$ pour tout $x \in E$.

$-$ $\mathcal{R}$ est **symétrique** ssi $\mathcal{R}(x, y) = \mathcal{R}(y, x)$ pour tout $x, y \in E$.

$-$ $\mathcal{R}$ est **antisymétrique** ssi $(\mathcal{R}(x, y) > 0)$ et $(\mathcal{R}(y, x) > 0) \Longrightarrow x = y$ pour tout $x, y \in E$.

$-$ $\mathcal{R}$ est **transitive** ssi $\mathcal{R}(x, z) \geqslant sup_{y \in E} min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\}$ pour tout $x, y, z \in E$.

Remarque 3.1 ***[14]***

Si $\mathcal{R}$ *une relation binaire floue sur* E*. Si* $\mathcal{R}$ *est réflexive, la transitivité peut être reformulé par :*
$\mathcal{R}$ *est transitive* $\Longleftrightarrow \mathcal{R}(x, z) = sup_{y \in E} min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\}$ *pour tout* $x, y, z \in E$.
En effet, d'une parte nous savons que $\mathcal{R}(x, z) \geqslant sup_{y \in E} min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\}$ *pour tout* $x, y, z \in E$*. D'autre part,* $sup_{y \in E} min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)\} \geqslant min\{\mathcal{R}(x, x), \mathcal{R}(x, z)\} = min\{1, \mathcal{R}(x, z)\} = \mathcal{R}(x, z)$ *pour tout* $x, y, z \in E$.

Définition 3.5 ***[14]***

Une relation binaire floue $\mathcal{R}$ *sur un ensemble* E *est appelé* ***relation d'équivalence floue*** *si* $\mathcal{R}$ *est à la fois réflexive, symétrique et transitive. Une relation binaire floue* $\mathcal{R}$ *sur* E *est appelé* ***relation d'ordre partiel floue*** *si* $\mathcal{R}$ *est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive. Si* $\mathcal{R}$ *une relation d'ordre partiel* *floue sur E, alors le couple $(E, \mathcal{R})$ est appelé* ***ensemble partiellement ordonné flou****. Une relation d'ordre partiel floue $\mathcal{R}$ sur E est dite* ***ordre total flou*** *si $\mathcal{R}(x, y) > 0$ ou $\mathcal{R}(y, x) > 0$ pour tout $x, y \in E$. Si $\mathcal{R}$ une relation d'ordre total flou sur E, alors le couple $(E, \mathcal{R})$ est appelé* ***ensemble totalement ordonné flou*** *(au bien* ***chaîne floue****).*

Proposition 3.1 ***[13]***
Soient $(E, \mathcal{R})$ un ensemble partiellement ordonné flou et $x, y, z \in E$.
Si $\mathcal{R}(x, y) > 0$ et $\mathcal{R}(y, z) > 0$, alors $\mathcal{R}(x, z) > 0$.

Proposition 3.2 ***[12]***
Soient $(E, \mathcal{R})$ un ensemble partiellement ordonné flou et $x, y, z \in E$, et soit $\alpha \in]0, 1]$.
Si $\mathcal{R}(x, y) \geqslant \alpha$ et $\mathcal{R}(y, z) \geqslant \alpha$, alors $\mathcal{R}(x, z) \geqslant \alpha$.

Démonstration :
Supposons $\alpha \in]0, 1]$ tel que $\mathcal{R}(x, y) \geqslant \alpha$ et $\mathcal{R}(y, z) \geqslant \alpha$, donc $min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)\} \geqslant \alpha$, donc $sup_{y \in E} min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, z)\} \geqslant min\{\mathcal{R}(x, y), \mathcal{R}(y, x)\} \geqslant \alpha$, finalement par la définition du transitivité floue on obtient $\mathcal{R}(x, z) \geqslant \alpha$.

Définition 3.6 ***[9]***
Si $\mathcal{R}$ une relation binaire floue sur un ensemble E, la relation floue $\mathcal{R}^{-1} : E \times E \longrightarrow [0, 1]$ définie par $\mathcal{R}^{-1}(x, y) = \mathcal{R}(y, x)$ est appelée l'inverse de $\mathcal{R}$. Notez que l'inverse de toute relation d'ordre partiel flou est elle même une relation d'ordre partiel flou

3.1.3 Treillis flou

Définition 3.7 ***[10]***
Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné flou et soit B une partie de E. Un élément $u \in E$ est dit ***majorant*** *de B si $\mathcal{R}(y, u) > 0$ pour tout $y \in B$. Un majorant u_0 de B sera dit* ***borne supérieure*** *de B si $\mathcal{R}(u_0, u) > 0$ pour tout majorant u de B. Un élément $v \in E$ est dit une* ***minorant*** *de B si $\mathcal{R}(v, y) > 0$ pour tout $y \in B$. Un minorant v_0 de B sera dit* ***borne inférieure*** *(au* ***infimum****) de B si $\mathcal{R}(v, v_0) > 0$ pour tout minorant v de B.*
La borne supérieure de B sera désignée par $supB$ et borne inférieure de B sera désignée par $infB$. On note $sup\{x, y\}$ par $x \vee y$ et $inf\{x, y\}$ par $x \wedge y$ pour tout $x, y \in E$.

Proposition 3.3 *[11]*

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire floue sur un ensemble E et soit B une partie de E. Si $\mathcal{R}$ est antisymétrique, alors $supB$ (resp. $infB$) s'il existe est unique.

Démonstration :

Supposons u_0, u_1 deux supermum (resp. v_0, v_1 deux infimum) de B, alors par définition $\mathcal{R}(u_0, u_1) > 0$ et $\mathcal{R}(u_1, u_0) > 0$ (resp. $\mathcal{R}(v_0, v_1) > 0$ et $\mathcal{R}(v_1, v_0) > 0$) et comme $\mathcal{R}$ antisymétrique alors $u_0 = u_1$ (resp. $v_0 = v_1$).

Définition 3.8 (Treillis flou) *[1]*

*Si dans un ensemble ordonné flou $(E, \mathcal{R})$, $x \vee y$ et $x \wedge y$ existent pour tout $x, y \in E$, alors le couple $(E, \mathcal{R})$ est dit un **treillis flou**. Pour la suite, on note tout simplement un treillis flou $(E, \mathcal{R})$ par $\mathcal{L}$.*

Exemple 3.2

1. *Soient $E = \{x_0, y_0, z_0\}$ et $\mathcal{R}_\mathcal{L}$ une relation d'ordre partiel flou sur E tel que :*

$\mathcal{R}_\mathcal{L}(x,y)$	x_0	y_0	z_0
x_0	1	0.2	0.1
y_0	0	1	0.1
z_0	0	0	1

$x \wedge_\mathcal{L} y$	x_0	y_0	z_0
x_0	x_0	x_0	x_0
y_0	x_0	y_0	y_0
z_0	x_0	y_0	z_0

$x \vee_\mathcal{L} y$	x_0	y_0	z_0
x_0	x_0	y_0	z_0
y_0	y_0	y_0	z_0
z_0	z_0	z_0	z_0

*L'ensemble ordonné $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R}_\mathcal{L})$ est un treillis flou (voir **la figure** 3.1).*

2. *Soient $F = \{x_1, y_1, z_1, w_1\}$ et $\mathcal{R}_\mathcal{M}$ une relation d'ordre partiel flou sur F tel que :*

$\mathcal{R}_\mathcal{M}(x,y)$	x_1	y_1	z_1	w_1
x_1	1	0.3	0.1	0.4
y_1	0	1	0	0.1
z_1	0	0	1	0.3
w_1	0	0	0	1

$x \wedge_\mathcal{M} y$	x_1	y_1	z_1	w_1
x_1	x_1	x_1	x_1	x_1
y_1	x_1	y_1	x_1	y_1
z_1	x_1	x_1	z_1	z_1
w_1	x_1	y_1	z_1	w_1

$x \vee_\mathcal{M} y$	x_1	y_1	z_1	w_1
x_1	x_1	y_1	z_1	w_1
y_1	y_1	y_1	w_1	w_1
z_1	z_1	w_1	z_1	w_1
w_1	w_1	w_1	w_1	w_1

*L'ensemble ordonné $\mathcal{M} = (F, \mathcal{R}_\mathcal{M})$ est un treillis flou (voir **la figure** 3.1).*

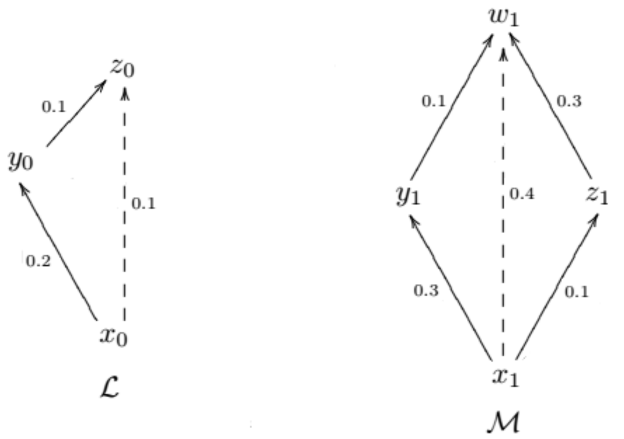


FIGURE 3.1

Proposition 3.4 *[14]*
Soient $(E, \mathcal{R})$ un ensemble partiellement ordonné flou (ou chaîne floue) et $F \subseteq E$, si $\Re = \mathcal{R}|_{F \times F}$, $\Re$ est une relation binaire floue sur F i.e. $x, y \in F : \Re(x, y) = \mathcal{R}(x, y)$, alors $(F, \Re)$ est aussi un ensemble ordonné flou (ou chaîne floue).

Définition 3.9 (Sous-treillis flou) *[11]*
Soit $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou. $\mathcal{M} = (F, \Re)$ est un sous-treillis flou de $\mathcal{L}$ si $F \subseteq E$ et $\Re = \mathcal{R}|_{F \times F}$, dans ce cas $\mathcal{M}$ est aussi un treillis flou.

Exemple 3.3
*Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R}_{\mathcal{L}})$ et $\mathcal{M} = (F, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ les deux treillis qui sont définis dans **l'exemple 3.2**, E_1 est une partie de E et F_1, F_2 sont des parties de F tels que : $E_1 = \{x_0, y_0\}$, $F_1 = \{z_1, w_1\}$ et $F_2 = \{y_1, z_1\}$.*

1. *$(E_1, \mathcal{R}_{\mathcal{L}})$ est un sous-treillis flou de $\mathcal{L}$.*
2. *$(F_1, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ est un sous-treillis flou de $\mathcal{M}$.*
3. *$(F_2, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ n'est pas un sous-treillis flou de $\mathcal{M}$ (car, $y_1 \wedge_{\mathcal{M}} z_1 = x_1 \notin F_2$ et $y_1 \vee_{\mathcal{M}} z_1 = w_1 \notin F_2$).*

Puisque les relations floues sont des ensembles flous, donc pour tout $\alpha \in]0, 1]$ on peut parler de **support** et de **niveau de flou** de degré α (au α-coup) d'une relation binaire floue.
Soient $\mathcal{R}$ une relation binaire floue sur un ensemble E et α un élément de $]0, 1]$, on a :

$$\mathcal{R}_\alpha = \{(x, y) \in E \times E : \mathcal{R}(x, y) \geqslant \alpha\} \text{ et } S(\mathcal{R}) = \{(x, y) \in E \times E : \mathcal{R}(x, y) > 0\}.$$

Proposition 3.5

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire floue sur un ensemble E.

$\mathcal{R}$ est un ordre partiel flou sur E ssi $\mathcal{R}_\alpha$ est un ordre partiel sur E pour tout $\alpha \in]0,1]$.

Démonstration : Voir **[9]** (proposition 2.4).

Proposition 3.6

Si $\mathcal{R}$ une relation binaire floue sur E tel que $(E, \mathcal{R}_\alpha)$ est un treillis pour tout $\alpha \in]0,1]$, alors $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ est un treillis flou.

Démonstration : voir **[9]** (proposition 3.5).

La réciproque n'est pas forcement vraie, pour cela voir **[11]** (exemple 33).

Proposition 3.7 ***[12]***

Si $\mathcal{R}$ un ordre partiel flou sur E, alors $S(\mathcal{R})$ est un ordre partiel sur E.

Démonstration :

Supposons $\mathcal{R}$ un ordre partiel flou sur E. Pour tout $x \in E$, $\mathcal{R}(x,x) = 1 > 0$ donc $(x,x) \in S(\mathcal{R})$. Si $(x,y) \in S(\mathcal{R})$ et $(y,x) \in S(\mathcal{R})$ c'est-à-dire $\mathcal{R}(x,y) > 0$ et $\mathcal{R}(y,x) > 0$, comme $\mathcal{R}$ est antisymétrique donc $x = y$. Si $(x,y) \in S(\mathcal{R})$ et $(y,z) \in S(\mathcal{R})$ c'est-à-dire $\mathcal{R}(x,y) > 0$ et $\mathcal{R}(y,z) > 0$, alors $\mathcal{R}(x,z) > 0$, donc $(x,z) \in S(\mathcal{R})$.

Proposition 3.8 ***[11]***

Soit $(E, \mathcal{R})$ un treillis flou, pour tout $x, y, z \in E$ on a :

(1) $\mathcal{R}(x, x \vee y) > 0$, $\mathcal{R}(y, x \vee y) > 0$, $\mathcal{R}(x \wedge y, x) > 0$, $\mathcal{R}(x \wedge y, y) > 0$.

(2) $\mathcal{R}(x,z) > 0$ *et* $\mathcal{R}(y,z) > 0 \Longrightarrow \mathcal{R}(x \vee y, z) > 0$.

(3) $\mathcal{R}(z,x) > 0$ *et* $\mathcal{R}(z,y) > 0 \Longrightarrow \mathcal{R}(z, x \wedge y) > 0$.

(4) $\mathcal{R}(x,y) > 0 \Longleftrightarrow x \vee y = y$.

(5) $\mathcal{R}(x,y) > 0 \Longleftrightarrow x \wedge y = x$.

(6) *Si* $\mathcal{R}(y,z) > 0 \Longrightarrow \mathcal{R}(x \wedge y, x \wedge z) > 0$ *et* $\mathcal{R}(x \vee y, x \vee z) > 0$.

(7) $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.

Démonstration :

- Il est simple de vérifier $(1), (2)$ et (3)
- Supposons $\mathcal{R}(x,y) > 0$, et comme $\mathcal{R}(y,y) > 0$, donc de (2) $\mathcal{R}(x \vee y, y) > 0$. D'autre part de (1) $\mathcal{R}(y, x \vee y) > 0$, comme $\mathcal{R}$ est antisymétrique alors $x \vee y = y$. Inversement, supposons $x \vee y = y$, donc $\mathcal{R}(x,y) = \mathcal{R}(x, x \vee y) > 0$ de (1) (même chose pour (5)).
- Supposons $\mathcal{R}(y,z) > 0$, on a :
  $\mathcal{R}(x \wedge y, z) \geqslant sup_{p \in E} min\{\mathcal{R}(x \wedge y, p), \mathcal{R}(p,z)\} \geqslant min\{\mathcal{R}(x \wedge y, y), \mathcal{R}(y,z)\} > 0.$
  Comme de (1) $\mathcal{R}(x \wedge y, x) > 0$ donc de (3) on obtient $\mathcal{R}(x \wedge y, x \wedge z) > 0$.
  Et : $\mathcal{R}(y, x \vee z) \geqslant sup_{p \in E} min\{\mathcal{R}(y,p), \mathcal{R}(p, x \vee z)\} \geqslant min\{\mathcal{R}(y,z), \mathcal{R}(z, x \vee z)\} > 0.$
  Comme de (1) $\mathcal{R}(x, x \vee z) > 0$ donc de (2) on obtient $\mathcal{R}(x \vee y, x \vee z) > 0$.
- On va montrer la propriété (7).On sait que $\mathcal{R}(x, x \vee (y \vee z)) > 0$ et
  $\mathcal{R}(y, x \vee (y \vee z)) \geqslant sup_{k \in E} min\{\mathcal{R}(y,k), \mathcal{R}(k, x \vee (y \vee z))\} \geqslant min\{\mathcal{R}(y, y \vee z), \mathcal{R}(y \vee z, x \vee (y \vee z))\} > 0.$
  Donc on a $\mathcal{R}(x, x \vee (y \vee z)) > 0$ et $\mathcal{R}(y, x \vee (y \vee z)) > 0$, alors d'après ce qui précède $\mathcal{R}(x \vee y, x \vee (y \vee z)) > 0$.
  On sait que $\mathcal{R}(z, x \vee (y \vee z)) \geqslant sup_{k \in E} min\{\mathcal{R}(z,k), \mathcal{R}(k, x \vee (y \vee z))\} \geqslant min\{\mathcal{R}(z, y \vee z), \mathcal{R}(y \vee z, x \vee (y \vee z))\} > 0.$
  Donc on a $\mathcal{R}(x \vee y, x \vee (y \vee z)) > 0$ et $\mathcal{R}(z, x \vee (y \vee z)) > 0$, alors d'après ce qui précède

  $$\mathcal{R}((x \vee y) \vee z, x \vee (y \vee z)) > 0 \;\; ....(*)$$

  Similairement on obtient

  $$\mathcal{R}(x \vee (y \vee z), (x \vee y) \vee z) > 0 \;\; ....(**)$$

  D'après $(*)$ et $(**)$ alors $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$. Même une méthode similaire $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.

Corollaire 3.1 ***[13]***
Soit $\mathcal{R}$ un ordre partiel flou sur E. Si $(E, \mathcal{R})$ un treillis flou, alors $(E, S(\mathcal{R}))$ est un treillis. Mais la réciproque n'est pas forcement vraie.

Exemple 3.4
Soient $E = \{x,y,z\}$ et $\mathcal{R}$ un ordre flou sur E défini comme suit : $\mathcal{R}(x,x) = \mathcal{R}(y,y) = \mathcal{R}(z,z) = 1$, $\mathcal{R}(y,x) = \mathcal{R}(z,x) = \mathcal{R}(z,y) = 0$, $\mathcal{R}(x,y) = 0.3$, $\mathcal{R}(x,z) = 0.1$ et $\mathcal{R}(y,z) = 0.8$.

On peut vérifier que $S(\mathcal{R})$ est un ordre partiel sur E, mais $\mathcal{R}$ n'est pas un ordre partiel flou sur E car ce n'est pas transitive. En effet, $0.1 = \mathcal{R}(x,z) \ngeq sup_{y\in E} min\{\mathcal{R}(x,y), \mathcal{R}(y,z)\} = min\{0.3, 0.8\} = 0.3$.

Proposition 3.9 ***[10]***

Soient $(E, \mathcal{R})$ un treillis flou et $x, y \in E$, on a :

(1) $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$.

(2) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$.

(3) $(x \vee y) \wedge x = x$, $(x \wedge y) \vee x = x$.

Démonstration :

Supposons $(E, \mathcal{R})$ un treillis flou et $x, y \in E$.

- Il est simple de vérifier (1) et (2).
- Il est clair que $\mathcal{R}(x, (x \wedge y) \vee x) > 0$. D'autre part $\mathcal{R}(x \wedge y, x) > 0$ et $\mathcal{R}(x, x) > 0$, donc $\mathcal{R}((x\wedge y)\vee x, x) > 0$. Finalement, comme $\mathcal{R}$ est antisymétrique, on obtient $(x\wedge y)\vee x = x$ (même chose pour $(x \vee y) \wedge x = x$).

3.2 Ensembles particuliers d'un treillis flou

Dans cette section on va définir quatre ensembles particuliers d'un treillis flou, qui sont les idéaux, les filtres, les α-idéaux et les α-filtres et quelques propriétés fondamentales, pour plus de détails voir **[10]**,**[11]**,**[12]** et **[14]**.

3.2.1 Idéal et Filtre d'un treillis flou

Définition 3.10

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et $I \subseteq E$, I est un ***idéal*** *de $\mathcal{L}$ si :*

(1) *Si $x \in E, y \in I$ et $\mathcal{R}(x, y) > 0$, alors $x \in I$;*

(2) *Si $x, y \in I$, alors $x \vee y \in I$.*

Définition 3.11

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et $F \subseteq E$, F est un ***filtre*** *de $\mathcal{L}$ si :*

(1) *Si $x \in E, y \in F$ et $\mathcal{R}(y, x) > 0$, alors $x \in F$;*

(2) *Si $x, y \in F$, alors $x \wedge y \in F$.*

Remarque 3.2

Si $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et G un idéal (resp. filtre) de $\mathcal{L}$, alors $\mathcal{M} = (G, \mathcal{R})$ est un sous-treillis flou de $\mathcal{L}$. En effet, d'après la condition (2) d'un idéal (resp. filtre), G est stable par $\vee$ (resp. par $\wedge$). Soient $x, y \in G$, comme $\mathcal{R}(x \wedge y, x) > 0$ (resp. $\mathcal{R}(x, x \vee y) > 0$), alors $x \wedge y \in G$ (resp. $x \vee y \in G$).

Exemple 3.5

*Soient $\mathcal{M} = (F, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ le treillis flou défini dans **l'exemple 3.2** et A, F, I sont des parties de F tels que : $A = \{x_1, y_1, z_1\}$, $F = \{z_1, w_1\}$ et $I = \{x_1, y_1\}$.*

1. *F est un filtre de $\mathcal{M}$.*
2. *I est un idéal de $\mathcal{M}$.*
3. *Mais A ni filtre ni idéal de $\mathcal{M}$.*

Proposition 3.10

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et G une partie de E tel que $L = (E, S(\mathcal{R}))$ soit un treillis.
G est un idéal (resp. filtre) de $\mathcal{L} \Longleftrightarrow G$ est un idéal (resp. filtre) de $L = (E, S(\mathcal{R}))$.

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons que G est un idéal de $\mathcal{L}$.
Soient $x \in E$ et $y \in G$ tel que $(x, y) \in S(\mathcal{R})$, donc $x \in E,\ y \in G$ et $\mathcal{R}(x, y) > 0$ et comme G est un idéal de $\mathcal{L}$, alors $x \in G$.
Soient $x \in G$ et $y \in G$, comme G est un idéal de $\mathcal{L}$ donc $x \vee_{\mathcal{R}} y \in G$, on a :
$$\begin{cases} \mathcal{R}(x, x \vee_{\mathcal{R}} y) > 0 \\ \mathcal{R}(y, x \vee_{\mathcal{R}} y) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x, x \vee_{\mathcal{R}} y) \in S(\mathcal{R}) \\ (y, x \vee_{\mathcal{R}} y) \in S(\mathcal{R}) \end{cases} \Longrightarrow (x \vee_{S(\mathcal{R})} y, x \vee_{\mathcal{R}} y) \in S(\mathcal{R}) \Longrightarrow$$
$\mathcal{R}(x \vee_{S(\mathcal{R})} y, x \vee_{\mathcal{R}} y) > 0$, comme G est un idéal de $\mathcal{L}$ alors $x \vee_{S(\mathcal{R})} y \in G$.
($\Leftarrow$) Supposons que G est un idéal de $L = (E, S(\mathcal{R}))$.
Soient $x \in E$ et $y \in G$ tel que $\mathcal{R}(x, y) > 0$, donc $x \in E,\ y \in G$ et $(x, y) \in S(\mathcal{R})$, et comme G est un idéal de L, alors $x \in G$.
Soient $x \in G$ et $y \in G$, comme G est un idéal de $L = (E, S(\mathcal{R}))$ donc $x \vee_{S(\mathcal{R})} y \in G$, on a :
$$\begin{cases} (x, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) \in S(\mathcal{R}) \\ (y, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) \in S(\mathcal{R}) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}(x, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) > 0 \\ \mathcal{R}(y, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{R}(x \vee_{\mathcal{R}} y, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) > 0 \Longrightarrow$$

$(x \vee_{\mathcal{R}} y, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) \in G$, et comme G est un idéal de $L = (E, S(\mathcal{R}))$ alors $x \vee_{\mathcal{R}} y \in G$.
Méthode analogue pour les filtres.

Proposition 3.11

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou, G un idéal de $\mathcal{L}$ et pour tout $\alpha \in]0, 1]$, $(E, \mathcal{R}_\alpha)$ soit un treillis. Alors, l'ensemble $G_\alpha = \{x \in G : \mathcal{R}(x, y) \geqslant \alpha \text{ pour tout } y \in G\}$ est un idéal de $(E, \mathcal{R}_\alpha)$.

Remarque 3.3

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et soit G une partie de E tel que $(G, \mathcal{R})$ soit un sous-treillis de $\mathcal{L}$, alors :
$\downarrow G = \{x \in E : \mathcal{R}(x, y) > 0 \text{ pour certains } y \in G\}$ est un idéal de $\mathcal{L}$, et $\uparrow G = \{x \in E : \mathcal{R}(y, x) > 0 \text{ pour certains } y \in G\}$ est un filtre de $\mathcal{L}$.
En effet, (1) Soit $z \in \downarrow G$ et $w \in E$ tel que $\mathcal{R}(w, z) > 0$, donc il existe $x \in G$ tel que $\mathcal{R}(z, x) > 0$ et $\mathcal{R}(w, z) > 0$, alors $\mathcal{R}(w, x) > 0$ i.e $w \in G$.
(2) Supposons x, y des éléments de $\downarrow G$, donc il existe $z_1, z_2 \in G$ tel que $\mathcal{R}(x, z_1) > 0$ et $\mathcal{R}(y, z_2) > 0$, donc $\mathcal{R}(x, z_1 \vee z_2) > 0$ et $\mathcal{R}(y, z_1 \vee z_2) > 0$ et par hypothèse $(G, \mathcal{R})$ est un sous-treillis de $\mathcal{L}$, donc $z_1 \vee z_2 \in G$ et $\mathcal{R}(x \vee y, z_1 \vee z_2) > 0$ i.e $x \vee y \in \downarrow G$. De même pour $\uparrow G$ est un filtre de $\mathcal{L}$.

Proposition 3.12

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et G une partie de E, alors $\downarrow G$ vérifie les propriétés suivante :

1) $G \subseteq \downarrow G$.
2) $G \subseteq W \Longrightarrow \downarrow G \subseteq \downarrow W$.
2) $\downarrow\downarrow G = \downarrow G$.

Démonstration :

1) Si $x \in G$ et $\mathcal{R}(x, x) = 1 > 0$, alors $x \in \downarrow G$.
2) Supposons $G \subseteq W$ et $y \in \downarrow G$, donc par définition, existe $z \in G$ tel que $\mathcal{R}(y, z) > 0$, comme $G \subseteq W$, donc $z \in W$ tel que $\mathcal{R}(y, z) > 0$, donc $y \downarrow W$.
3) $(\Rightarrow)$ Supposons $y \in \downarrow\downarrow G$, donc il existe $x \in \downarrow G$ tel que $\mathcal{R}(y, x) > 0$, comme $x \in \downarrow G$ alors il existe $z \in G$ tel que $\mathcal{R}(x, z) > 0$, on a $\mathcal{R}(y, x) > 0$ et $\mathcal{R}(x, z) > 0$, donc $\mathcal{R}(y, z) > 0$ i.e $y \in \downarrow G$, donc $\downarrow\downarrow G \subseteq \downarrow G$.
$(\Leftarrow)$ D'après 1) et 2) $\downarrow G \subseteq \downarrow\downarrow G$. De même, nous montrons les mêmes propriétés pour $\uparrow G$

Proposition 3.13

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et G une partie de E, alors $\uparrow G$ vérifie les propriétés suivante :

1) $G \subseteq \uparrow G$.

2) $G \subseteq W \Longrightarrow \uparrow G \subseteq \uparrow W$.

2) $\uparrow\uparrow G = \uparrow G$.

Définition 3.12

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et x un élément de E.

L'ensemble $\downarrow x = \{z \in E : \mathcal{R}(z, x) > 0\}$ est appelé ***l'idéal principal*** *de $\mathcal{L}$ engendré par x.*

L'ensemble $\uparrow x = \{z \in E : \mathcal{R}(x, z) > 0\}$ est appelé ***le filtre principal*** *de $\mathcal{L}$ engendré par x.*

3.2.2 α-Idéal et α-Filtre d'un treillis flou

Définition 3.13 (α-idéal)

*Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou, $\alpha \in]0, 1]$ et $I \subseteq E$. I est un α-**idéal** de $\mathcal{L}$ si :*

(1) *Si $x \in E, y \in I$ et $\mathcal{R}(x, y) \geqslant \alpha$, alors $x \in I$;*

(2) *Si $x, y \in I$, alors $x \vee y \in I$.*

Définition 3.14 (α-filtre)

*Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou, $\alpha \in]0, 1]$ et $F \subseteq E$. F est un α-**filtre** de $\mathcal{L}$ si :*

(1) *Si $x \in E, y \in F$ et $\mathcal{R}(y, x) \geqslant \alpha$, alors $x \in F$;*

(2) *Si $x, y \in F$, alors $x \wedge y \in F$.*

Exemple 3.6

Soient $\alpha_1 = 0.2$, $\alpha_2 = 0.3$ des éléments de $]0, 1]$ et $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R}_{\mathcal{L}}), \mathcal{M} = (F, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ les deux treillis flous qui sont définis dans ***l'exemple 3.2*** *et A une partie de E et I une partie de F tels que :*

$A = \{y_0\}$ et $I = \{z_1, w_1\}$.

− A est un α_2-filtre, α_2-idéal et α_1-filtre de $\mathcal{L}$, mais n'est pas un α_1-idéal, car $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(x_0, y_0) \geqslant \alpha_1 = 0.2$ et $x_0 \notin A$.

− I est un α_1-filtre de $\mathcal{M}$, mais n'est pas un α_1-idéal de $\mathcal{M}$, car $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(x_1, w_1) = 0.4 \geqslant \alpha_1 = 0.2$ et $x_1 \notin I$.

Proposition 3.14

Si $\alpha \leqslant \beta$ implique tout α-idéal est un β-idéal.

Démonstration :

Soit G un α-idéal et $\alpha \leqslant \beta$.

(1) Si $x \in E, y \in G$ et $\mathcal{R}(x,y) \geqslant \beta$, comme $\alpha \leqslant \beta$, donc $x \in E, y \in G$ et $\mathcal{R}(x,y) \geqslant \alpha$, et puisque G est un α-idéal, alors $x \in G$.

(2) Simple.

De même, on montre que si $\alpha \leqslant \beta$, alors tout α-filtre est un β-filtre.

Proposition 3.15

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et G un idéal (resp. filtre) de $(E, S(\mathcal{R}))$.
Alors pour tout $\alpha \in]0,1]$, G est un α-idéal (resp. α-filtre) de $\mathcal{L}$.

Démonstration :

Supposons que G est un idéal de $(E, S(\mathcal{R}))$ et $\alpha \in]0,1]$.

- Si $x \in E$ et $y \in G$ tel que $\mathcal{R}(x,y) \geqslant \alpha$, donc $x \in E$ et $y \in G$ tel que $(x,y) \in S(\mathcal{R})$, et comme G est un idéal de $(E, S(\mathcal{R}))$, alors $x \in G$.
- Si $x \in G$ et $y \in G$ et comme G est un idéal de $(E, S(\mathcal{R}))$, alors $x \vee_{S(\mathcal{R})} y \in G$.
  On a $(x, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) \in S(\mathcal{R})$ et $(y, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) \in S(\mathcal{R})$, donc $\mathcal{R}(x, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) > 0$ et $\mathcal{R}(y, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) > 0$, donc $\mathcal{R}(x \vee_{\mathcal{R}} y, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) > 0$, donc $(x \vee_{\mathcal{R}} y, x \vee_{S(\mathcal{R})} y) \in S(\mathcal{R})$ et comme $x \vee_{S(\mathcal{R})} y \in G$ avec G est un idéal de $(E, S(\mathcal{R}))$, alors $x \vee_{\mathcal{R}} y \in G$.

Remarque 3.4

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et G une partie de E tel que $(G, \mathcal{R})$ est un sous-treillis de $\mathcal{L}$.

- *$\Downarrow G_\alpha = \{x \in E : \mathcal{R}(x,y) \geqslant \alpha$ pour certains $y \in G\}$ est un α-idéal de $\mathcal{L}$.*
- *$\Uparrow G_\alpha = \{x \in E : \mathcal{R}(y,x) \geqslant \alpha$ pour certains $y \in G\}$ est un α-filtre de $\mathcal{L}$.*

Proposition 3.16

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et $G \subseteq E$, alors $\Downarrow G_\alpha$ et $\Uparrow G_\alpha$ satisfaisons les propriétés suivantes :

(1) $G \subseteq \Downarrow G_\alpha$ et $G \subseteq \Uparrow G_\alpha$

(2) $G \subseteq W \Longrightarrow \Downarrow G_\alpha \subseteq \Downarrow W_\alpha$ et $\Uparrow G_\alpha \subseteq \Uparrow W_\alpha$.

(3) $\Downarrow\Downarrow G_\alpha = \Downarrow G_\alpha$ et $\Uparrow\Uparrow G_\alpha = \Uparrow G_\alpha$.

3.3 Classes particulières de treillis flous

Dans cette section on va définir deux types de treillis flous, treillis flous distributifs et treillis flous modulaires, et on va donner la notion d'un homomorphisme de treillis flous fermés, pour plus de détails voir **[1]** et **[9]**.

3.3.1 Treillis flou distributif

Définition 3.15

*Un treillis flou $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ est dit **distributif** si*

$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ *et* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ *pour tout* $x, y, z \in E$.

Proposition 3.17 (Inégalités distributives)

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et x, y, z des éléments de E, alors

$\mathcal{R}((x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \wedge (y \vee z)) > 0$ *et* $\mathcal{R}(x \vee (y \wedge z), (x \vee y) \wedge (x \vee z)) > 0$.

Démonstration : Soient $x, y, z \in E$, on a :

$$\begin{cases} \mathcal{R}(x \wedge y, x) > 0 \\ \mathcal{R}(x \wedge y, y) > 0 \\ \mathcal{R}(y, y \vee z) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}(x \wedge y, x) > 0 \\ \mathcal{R}(x \wedge y, y \vee z) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{R}(x \wedge y, x \wedge (y \vee z)) > 0 \ \ldots\ldots\ldots(*).$$

$$\begin{cases} \mathcal{R}(x \wedge z, x) > 0 \\ \mathcal{R}(x \wedge z, z) > 0 \\ \mathcal{R}(z, y \vee z) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}(x \wedge z, x) > 0 \\ \mathcal{R}(x \wedge z, y \vee z) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{R}(x \wedge z, x \wedge (y \vee z)) > 0 \ \ldots\ldots\ldots(**).$$

De $(*)$ et $(**)$ on obtient $\mathcal{R}((x \wedge y) \vee (x \wedge z), x \wedge (y \vee z)) > 0$.

De même montrons $\mathcal{R}(x \vee (y \wedge z), (x \vee y) \wedge (x \vee z)) > 0$.

Remarque 3.5

*D'après les inégalités distributive, un treillis flou $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ est **distributif** si :*

$\mathcal{R}(x \wedge (y \vee z), (x \wedge y) \vee (x \wedge z)) > 0$ *et* $\mathcal{R}((x \vee y) \wedge (x \vee z), x \vee (y \wedge z)) > 0$.

Exemple 3.7

Soient l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou tel que $\mathcal{R}$ définie par la table suivante :

$\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ est un treillis flou distributif.

$\mathcal{R}$	a	b	c	d	e	f
a	1	0.1	0.3	0.3	0.5	0.7
b	0	1	0.2	0.2	0.4	0.6
c	0	0	1	0	0.2	0.3
d	0	0	0	1	0.2	0.3
e	0	0	0	0	1	0.2
f	0	0	0	0	0	1

FIGURE 3.2

Exemple 3.8

Toute chaîne floue est distributif.

Proposition 3.18

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et x, y, z des éléments de E.

Alors : $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \Longleftrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Démonstration : voir **[9]** proposition 3.9.

3.3.2 Treillis flou modulaire

Définition 3.16

*Un treillis flou $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ est dit **modulaire** si $\mathcal{R}(x, z) > 0$ implique $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ pour tout $x, y, z \in E$.*

Proposition 3.19 (Inégalité modulaire)

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou et x, y, z des éléments de E.

Alors : $\mathcal{R}(x, z) > 0$ *implique* $\mathcal{R}((x \vee (y \wedge z)), ((x \vee y) \wedge z)) > 0$.

Démonstration :

Supposons $\mathcal{R}(x, z) > 0$, d'après l'inégalité distributifs :

$\mathcal{R}(x \vee (y \wedge z), (x \vee y) \wedge (x \vee z)) = \mathcal{R}(x \vee (y \wedge z), (x \vee y) \wedge z) > 0$.

Remarque 3.6

*D'après l'inégalité modulaire, $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ est **modulaire** si*

$\mathcal{R}(x, z) > 0$ *implique* $\mathcal{R}((x \vee y) \wedge z, x \vee (y \wedge z)) > 0$ *pour tout* $x, y, z \in E$.

Proposition 3.20

Tout treillis flou distributif est modulaire.

Démonstration :

Soit $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ un treillis flou distributif, donc pour tout $x, y, z \in E$:

$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, supposons $\mathcal{R}(x, z) > 0$, alors $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x \vee y) \wedge z$ (car $\mathcal{R}(x, z) > 0$), donc $\mathcal{L}$ est modulaire.

Exemple 3.9

*Comme le treillis flou $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R})$ définir de **l'exemple 3.7** est distributif, alors il est modulaire.*

3.3.3 Homomorphisme de treillis flous fermés

Dans ce paragraphe nous définissons l'homomorphisme des treillis flous fermés et développons quelques résultat associés, pour plus de détails voir **[12]** et **[13]**

Définition 3.17 (Treillis flou fermé)

Un treillis flou $(E, \mathcal{R})$ est fermé s'il existe $0, 1 \in E$ tel que $\mathcal{R}(0, x) > 0$ et $\mathcal{R}(x, 1) > 0$ pour tout $x \in E$.

Définition 3.18

*Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R}_{\mathcal{L}})$ et $\mathcal{M} = (F, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ deux treillis flous fermés, une application $f : E \longrightarrow F$ est dit un **homomorphisme flou** de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{M}$ si pour tout $x, y \in E$ elle satisfait les conditions suivantes :*

(1) $f(x \vee_{\mathcal{L}} y) = f(x) \vee_{\mathcal{M}} f(y)$.

(2) $f(x \wedge_{\mathcal{L}} y) = f(x) \wedge_{\mathcal{M}} f(y)$.

(3) $f(0_{\mathcal{L}}) = 0_{\mathcal{M}}$ *et* $f(1_{\mathcal{L}}) = 1_{\mathcal{M}}$.

Exemple 3.10

*Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R}_{\mathcal{L}})$, $\mathcal{M} = (E, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ les deux treillis flous qui sont définis dans **l'exemple 3.2** et f une application de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{M}$ définie par : $f(x_0) = x_1$, $f(y_0) = y_1$ et $f(z_0) = w_1$.*

*On peut vérifier facilement que f est un homomorphisme de treillis flous fermés (voir **la figure 3.3**).*

Remarque 3.7

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R}_{\mathcal{L}})$, $\mathcal{M} = (F, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ deux treillis flous fermés et $f : E \longrightarrow F$ une application de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{M}$.

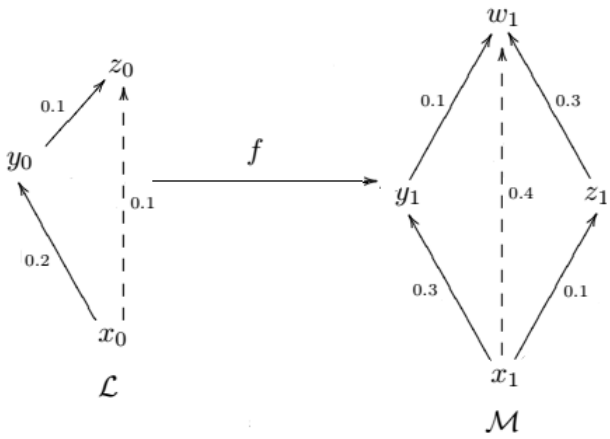


FIGURE 3.3

- *f est un **monomorphisme flou** si f homomorphisme flou + injective.*
- *f est un **épimorphisme flou** si f homomorphisme flou + surjective.*
- *f est un **isomorphisme flou** si f homomorphisme flou + bijective.*

Proposition 3.21

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R}_{\mathcal{L}})$, $\mathcal{M} = (F, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ deux treillis flous fermés et $f : E \longrightarrow F$ un homomorphisme flou de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{M}$. Pour tout $x, y \in E$, si $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(x, y) > 0$ alors $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x), f(y)) > 0$.

Démonstration :

Si $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(x, y) > 0$, $x \wedge_{\mathcal{L}} y = x$, donc $f(x) = f(x \wedge_{\mathcal{L}} y) = f(x) \wedge_{\mathcal{M}} f(y)$, alors $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x), f(y)) > 0$.

Proposition 3.22

*Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R}_{\mathcal{L}})$, $\mathcal{M} = (F, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ deux treillis flous fermés et $f : E \longrightarrow F$ une application de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{M}$, f **préserve l'ordre flou** (i.e, si $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(x, y) > 0$ alors $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x), f(y)) > 0$) ssi $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x) \vee_{\mathcal{M}} f(y), f(x \vee_{\mathcal{L}} y)) > 0$.*

Démonstration :

($\Rightarrow$) Supposons f est **préserve l'ordre flou**, on a :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(x, x \vee_{\mathcal{L}} y) > 0 \\ \mathcal{R}_{\mathcal{L}}(y, x \vee_{\mathcal{L}} y) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x), f(x \vee_{\mathcal{L}} y)) > 0 \\ \mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(y), f(x \vee_{\mathcal{L}} y)) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x) \vee_{\mathcal{M}} f(y), f(x \vee_{\mathcal{L}} y)) > 0.$$

($\Leftarrow$) Supposons $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x) \vee_{\mathcal{M}} f(y), f(x \vee_{\mathcal{L}} y)) > 0$, pour tout $x, y \in E$.

Si $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(x,y) > 0$, donc $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x) \vee_{\mathcal{M}} f(y), f(x \vee_{\mathcal{L}} y)) = \mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x) \vee_{\mathcal{M}} f(y), f(y)) > 0$, comme $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(y), f(x) \vee_{\mathcal{M}} f(y)) > 0$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}$ est antisymétrique, alors $f(y) = f(x) \vee_{\mathcal{M}} f(y)$ i.e $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x), f(y)) > 0$, donc f est **préserve l'ordre flou**.

Proposition 3.23

*Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R}_{\mathcal{L}})$, $\mathcal{M} = (F, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ deux treillis flous fermés et $f : E \longrightarrow F$ une application de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{M}$, f **préserve l'ordre flou** (i.e, si $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(x,y) > 0$ alors $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x), f(y)) > 0$) ssi $\mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x) \wedge_{\mathcal{M}} f(y), f(x \wedge_{\mathcal{L}} y)) > 0$.*

Démonstration : Preuve analogue à celle de la proposition précédente.

Définition 3.19

Soient $\mathcal{L} = (E, \mathcal{R}_{\mathcal{L}})$, $\mathcal{M} = (F, \mathcal{R}_{\mathcal{M}})$ deux treillis flous fermés et $f : E \longrightarrow F$ une application de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{M}$.

*f est un **morphisme d'ordre flou** si pour tout $x, y \in E$, f satisfait :*

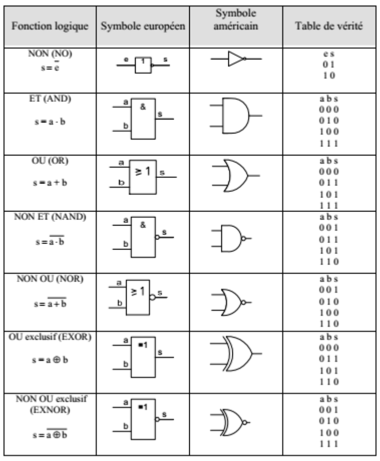
- $\mathcal{R}_{\mathcal{L}}(x,y) > 0 \Longrightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{M}}(f(x), f(y)) > 0$.
- $f(0_{\mathcal{L}}) = 0_{\mathcal{M}}$.
- $f(1_{\mathcal{L}}) = 1_{\mathcal{M}}$.

*Si f bijective, alors elle est appelé un **isomorphisme d'ordre flou**.*

Chapitre 4

Application d'algèbre de Boole "pour afficher les 10 chiffres sur un afficheur 7 segments"

L'algèbre booléenne est utilisée pour modéliser les circuits de dispositifs électroniques. Chaque entrée et chaque sortie d'un tel dispositif peut être considéré comme un élément de l'algèbre de Boole $\{0, 1\}$. Un ordinateur ou autre dispositif électronique se compose d'un certain nombre de circuit. Chaque circuit peut être conçu en utilisant les règles d'algèbre booléenne qui ont été étudiées dans **le deuxième chapitre**. Les éléments de base des circuits sont représentés sur **la figure 4.1**.



Fonction logique	Symbole européen	Symbole américain	Table de vérité
NON (NO) $s = \bar{e}$	e 1 s		e s 0 1 1 0
ET (AND) $s = a \cdot b$	a b & s		a b s 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 1 1
OU (OR) $s = a + b$	a b ≥ 1 s		a b s 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1
NON ET (NAND) $s = \overline{a \cdot b}$	a b & s		a b s 0 0 1 0 1 1 1 0 1 1 1 0
NON OU (NOR) $s = \overline{a + b}$	a b ≥ 1 s		a b s 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 0
OU exclusif (EXOR) $s = a \oplus b$	a b =1 s		a b s 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 1 0
NON OU exclusif (EXNOR) $s = \overline{a \oplus b}$	a b =1 s		a b s 0 0 1 0 1 0 1 0 0 1 1 1

FIGURE 4.1 – Symboles des portes logiques

Nous allons permettre à des multiples entrées à portes **ET** et **OU**. Les entrées de chacune de ces portes sont représentés sur le côté gauche entrant dans l'élément et dont la sortie est affichée sur le côté droit. Exemples des portes **ET** et **OU** à n entrées sont représentées sur **la figure 4.2**.

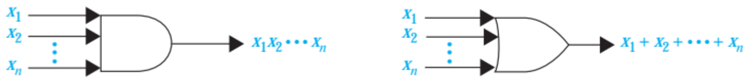


FIGURE 4.2 – Portes logiques à n entrées

Exemple 4.1

La figure 4.3 représentant des circuits qui produisent les résultats suivants :
(a) $(x+y)\bar{x}$, (b) $\bar{x}\overline{(y+\bar{z})}$ *et* (c) $(x+y+z)(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$.

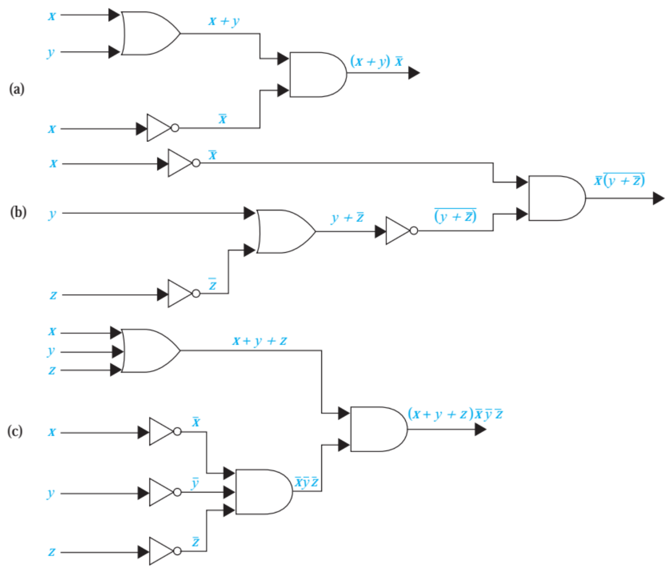


FIGURE 4.3

Exemple 4.2

*Un comité de trois personnes décide une mise au point pour une organisation. Chaque vote individuel soit **oui** ou **non** pour chaque proposition qui se pose. Une proposition est adoptée si elle reçoit au moins deux votes de oui. Concevoir un circuit logique Qui détermine si une proposition passe.*

Solution :

Soit $x = 1$, si le premier individu vote par "oui", et $x = 0$ si cet individu vote par "non", soit $y = 1$ si le second individu vote par "oui", et $y = 0$ si cet individu vote par "non", soit $z = 1$, si le troisième individu vote par "oui", et $z = 0$ si cet individu vote par "non". Alors, un circuit doit être conçu de manière que la sortie produit 1 à partir des entrées x, y et z lorsque deux ou plus de x, y et z sont 1. Une représentation de la fonction booléenne est celle qui donne ces valeurs de sortie par l'expression : $xy+xz+yz$. Le circuit qui met en œuvre cette fonction est représenté dans ***la figure 4.4****.*

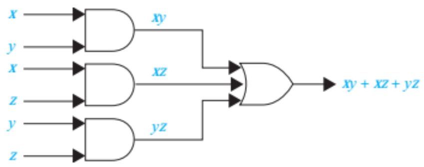


FIGURE 4.4

Définition 4.1 (Afficheur numérique 7 segments)
Les afficheurs numérique 7 segments sont un type d'afficheur très présent sur les calculatrices et les montres à affichage numérique : les caractères (des chiffres, bien que quelques lettres soient utilisées pour l'affichage hexadécimal) s'écrivent en allumant ou en éteignant des segments, au nombre de sept. Quand les 7 segments sont allumés, on obtient le chiffre 8.

On veut réaliser un circuit logique à 4 entrées qui transforme le code BCD (Décimal code binaire) en un code de langueur 7 qui permet (lorsqu'il est appliqué aux entrées d'un afficheur) de voir s'inscrire le chiffre correspondant à la combinaison binaire d'entrée. Les 7 sorties repérées de a à g commandent chacune un des 7 segments de l'afficheur. Un segment sera éclairé si la sortie du décodeur qui le commande est à l'état logique 1.

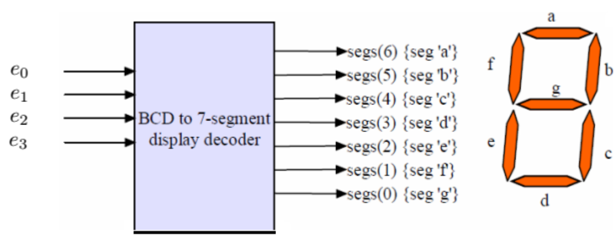


FIGURE 4.5

Remarque 4.1

*L'afficheur numérique est constitué de 7 segments repérés de "**a**" à "**g**" et à quatre entrées e_0, e_1, e_2 et e_3 permettant le codage du à afficher en binaire (code BCD). Le décodeur permet de commander les segments en fonction du digit à afficher. Par exemple pour afficher 3 il faut que $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 1$, $e = 0$, $f = 0$ et $g = 1$.*

Voici les 10 chiffres et quelques lettres représentés sur un afficheur 7 segments :

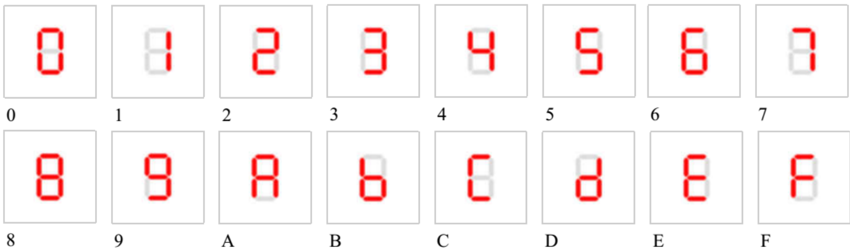


FIGURE 4.6

Programmation :

Nous allons afficher les chiffres décimales de 0 à 9 sur un afficheur numérique 7 segments. Pour cela nous donnons la table de vérité suivante :

	Code				**Segments**						
	e_3 **(2^3)**	e_2 **(2^2)**	e_1 **(2^1)**	e_0 **(2^0)**	a	b	c	d	e	f	g
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0
2	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
3	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1
4	0	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
5	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1
6	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1
7	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
8	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1
9	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1

FIGURE 4.7

À partir de cette table de vérité nous allons construire une table de Karnaugh pour chaque sortie :

$e_1e_0 \diagdown e_3e_2$	00	01	11	10
00	1	0	·	1
01	0	1	·	1
11	1	1	·	·
10	1	1	·	·

Table de karnaugh du sortie "a"

$e_1e_0 \diagdown e_3e_2$	00	01	11	10
00	1	1	·	1
01	1	0	·	1
11	1	1	·	·
10	1	0	·	·

Table de karnaugh du sortie "b"

$e_1e_0 \diagdown e_3e_2$	00	01	11	10
00	1	1	·	1
01	1	1	·	1
11	1	1	·	·
10	0	1	·	·

Table de karnaugh du sortie "c"

$e_1e_0 \diagdown e_3e_2$	00	01	11	10
00	1	1	·	1
01	0	1	·	1
11	1	0	·	·
10	1	1	·	·

Table de karnaugh du sortie "d"

$e_1e_0 \diagdown e_3e_2$	00	01	11	10
00	1	0	·	1
01	0	0	·	0
11	0	0	·	·
10	1	1	·	·

Table de karnaugh du sortie "e"

$e_1e_0 \diagdown e_3e_2$	00	01	11	10
00	1	1	·	1
01	0	1	·	1
11	0	0	·	·
10	0	1	·	·

Table de karnaugh du sortie "f"

$e_1e_0 \diagdown e_3e_2$	00	01	11	10
00	0	1	·	1
01	0	1	·	1
11	1	0	·	·
10	1	1	·	·

Table de karnaugh du sortie "g"

L'examen des tables de Karnaugh des fonctions "**a**" à "**g**" fournit les équations booléenne :

$a = e_1 + e_3 + (e_0 \cdot e_2) + (\bar{e_0} \cdot \bar{e_2}) = e_1 + e_3 + (e_0 \oplus \bar{e_2})$.

$b = \bar{e_2} + e_3 + (e_0 \cdot e_1) + (\bar{e_0} \cdot \bar{e_1}) = \bar{e_2} + e_3 + (e_0 \oplus \bar{e_1})$.

$c = e_0 + \bar{e_1} + e_2 + e_3$.

$d = e_3 + (\bar{e_0} \cdot e_1) + (e_1 \cdot \bar{e_2}) + (\bar{e_0} \cdot \bar{e_2}) + (e_0 \cdot \bar{e_1} \cdot e_2) = e_3 + (\overline{e_0 \cdot e_2} \cdot e_1) + (\overline{e_0 + e_2}) + (e_0 \cdot \bar{e_1} \cdot e_2)$.

$e = (\bar{e_0} \cdot e_1) + (\bar{e_0} \cdot \bar{e_2}) = \bar{e_0} \cdot (e_1 + \bar{e_2})$.

$f = e_3 + (\bar{e_0} \cdot \bar{e_1}) + (\bar{e_0} \cdot e_2) + (\bar{e_1} \cdot e_2) = e_3 + (\overline{e_0 + e_1}) + (\overline{e_0 \cdot e_1} \cdot e_2)$.

$g = e_3 + (\bar{e_0} \cdot e_1) + (e_1 \cdot \bar{e_2}) + (\bar{e_1} \cdot e_2) = e_3 + (\bar{e_0} \cdot e_1) + (e_1 \oplus e_2)$.

Chaque équation booléennes sera transformée en un circuit logique à quatre entrés e_0,e_1,e_2,e_3 et une sortie lié au segment correspondant dans l'afficheur numérique 7 segments.

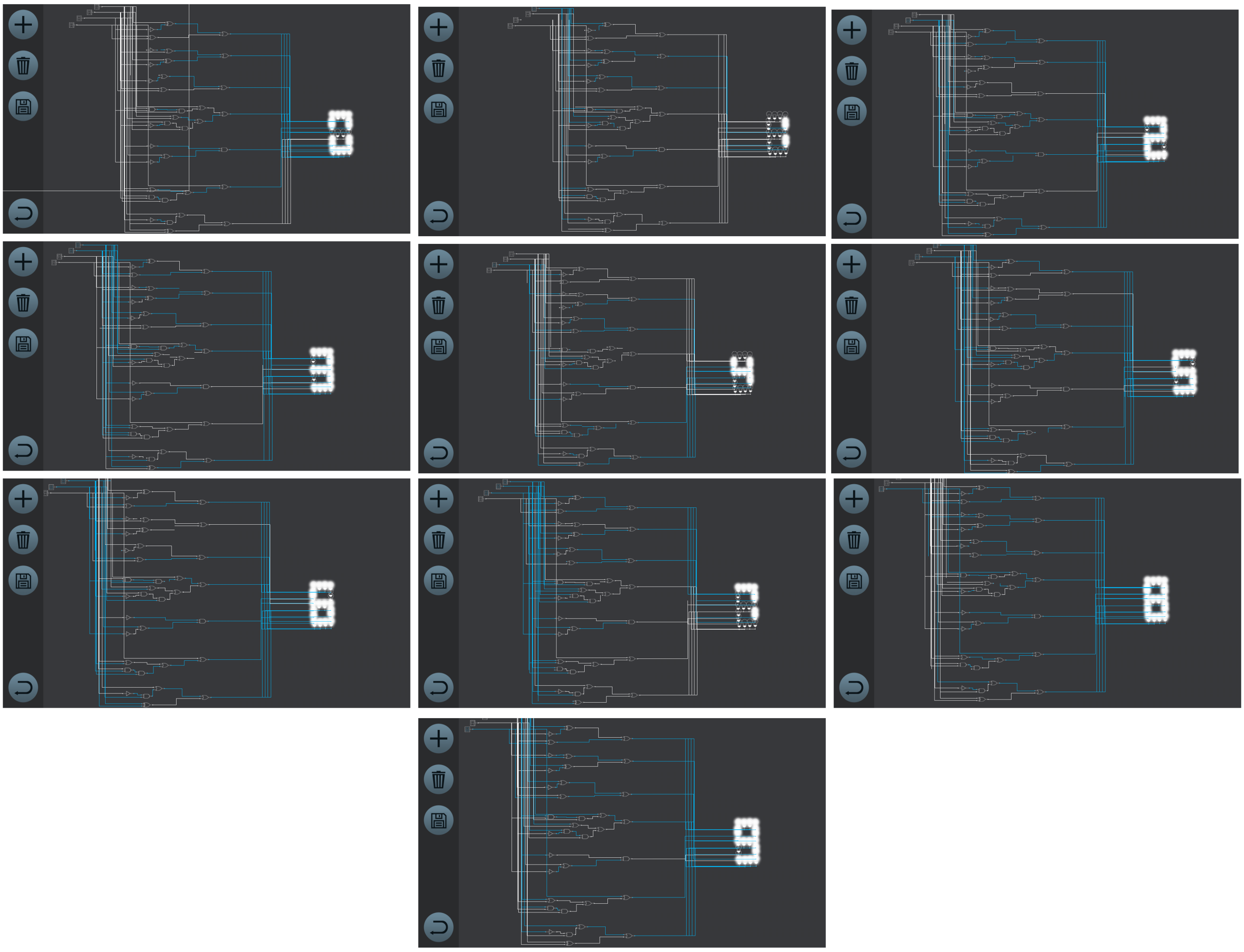


FIGURE 4.8

Bibliographie

[1] A. AMROUNE et B. DAVVAZ, *Fuzzy ordered sets and duality for finite fuzzy distributive lattice*, Iranian journal of fuzzy systems Vol. 8, No. 5, (2011) pp. 1-12.

[2] B. A. DAVEY et H. A. PERIESTLEY, *Introduction to Lattices and order*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[3] BERNARD KOLMAN, ROBERT C. BUSBY et SHARON CULTER ROSS, *Discrete Mathematical Structures*, Fourth edition, Pearson education, 2001.

[4] DANIEL PONASSE et J. C. CARREGA, *Algèbre et Toboologie boléennes*, Masson, Paris, 1979.

[5] FRANCOIS ARNAULT, *Mathématique L3 Algèbre*, Pearson education, 2009.

[6] G. GRATZER, *General lattice theory*, Academic Press, INC, 1978.

[7] GARRETT BIRKHOFF, *Lattice theory*, American Mathematical Society, 1948.

[8] HIROKI TAKAMURA, *Semisimplicity, Amalgamation Property and Finite Embeddability Property of Residuated Lattices*, submitted.

[9] INHEUNG CHON, *Fuzzy Partial Order Relation and Fuzzy Lattice*, Korean J. Math. 17 (2009), No. 4, pp. 361-374.

[10] INHEUNG CHON, *Fuzzy Lattices as Fuzzy Relation*, Korean J. Math. 23 (2015), No. 4, pp. 557-569.

[11] IVAN MEZZOMO, B. C. BERDREGAL et R. H. N. SANTIAGO, *Kinds of ideals of fuzzy lattice*, Second Brasilian Congress on Fuzzy Systems, 2012, 657-671.

[12] IVAN MEZZOMO, *On Fuzzy Ideals and Fuzzy Filters of Fuzzy Lattices*, Phd thesis, Natal/RN, December 2013.

[13] IVAN MEZZOMO et BENJAMIN BEDREGAL, *Operations on Bounded Fuzzy Lattices*, IFSA World congress and NAFIPS Annual Meeting, 2013 joint, 151-156.

[14] IVAN MEZZOMO et BENJAMIN BEDREGAL, *α-Ideals of Fuzzy Lattices*, IFSA World congress and NAFIPS Annual Meeting, 2013 joint, 157-162.

[15] JACQUES VÉLU, *Méthodes Mathématiques pour l'informatique*, 5 édition, DUNOD Paris, 2013.

[16] JEAN-LOUIS KRIVINE, *Logique Mathématique*, Masson Paris, 1993.

[17] JUDITE CHAUVIN, *Le Treillis Cambrian*, Université du Québec à Montréal, Août 2010.

[18] KENNETH A ROOS, *Discrete Mathematics*, Third edition, Englewood cliffs, New Jersey 1992.

[19] KENNETH H ROSEN, *Discrete Mathematics and its Applications*, Seventh edition, Mcgra-Whill, 2012.

[20] LOUIS FRÉCON, *Éléments de Mathématiques discrètes*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes.

[21] MAURICE POUZET, *Théorie de l'ordre : une introduction*, Août 2004.

[22] MICHEL MARCHAND, *Outils Mathématiques pour l'informatique*, 2ème édition, DBS Sciences.

[23] MR BALHADJ Abdelaziz, *Génération de Treillis et propriétés algébriques* Mémoire de Magistère, Université : Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 03/11/2011.

[24] NATHALIE CASPARD, *Ensembles Ordonnes finis : concepts, résultats*, Springer Berlin Heidelberg, 2000.

[25] RAJAB ALI BORZOOEI, *Fundamental residuated Lattices*, Quasigroups and Related Systems 22, 2014, 179-192.

[26] RALUCA CRETAN et ANTOANETA JEFLEA, *On the lattice of congruence filters of a residuated lattice*, Annals of University of Craiova, Math. Sci. Ser. Volume 33, 2006, 174-188.

[27] SEYMOUR LIPSCHUTZ, *Discrete Mathematics*, Third edition, Mcgra-Whill, 2007.

[28] STEVEN ROMAN, *Lattices and Ordred Sets*, Springer, 2008.