Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Algèbre et Mathématiques Discrètes

Thème

Isométries de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Présenté par :

Melle BOUALEM Chaima

Melle BOUAFIA Feyrouz

Devant le jury composé de :

LADJELAT Lahcene	M.A.A,	Université de M'sila	Président.
MIHOUBI Douadi	Prof,	Université de M'sila	Encadreur.
HEBOUB Lakhdar	M.A.A,	Université de M'sila	Examinateur.

Année universitaire 2021/2022.

Remerciements

Je tiens à remercier **ALLAH** qui m'a donné la force de faire ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon encadreur le professeur **Douadi Mihoubi** qui m'a dirigé dans ce travail.

Je remercie également les enseignants **Ladjelat Lahcene** et **Heboub Lakhdar** pour accepter de juger ce travail.

Je tiens à remercier Mr**. S. Abdelkebir** pour les informations.

Nous remerciements vont à tous les professeurs de département de Mathématiques.

Je ne saurais aussi oublier mes collègues en spécialité Algèbre et mathématique discret "**AMD**" - M'sila.

Dédicaces

A mon chèr Père lhadj **jiwabri**.
A ma chère Mère lhadja **Latifa**.

Pour leurs dévouements, leurs amours, leurs sacrifices et leurs encouragements, je prie le bon dieu de les bénir, en espérant qu'ils seront toujours fiers de moi.

A ma chère grand-Mère :
Messaouda.

A mes Frères et mes sœurs :
Madjed, Yassine, Nadjet, Nour, Israa.

A toute la famille, en particulier :
Zouina, Nassira, Said, Mahmoud, Mustapha.

A tous les gens m'aiment :
Akram, Samouda.
Nadjet, Messaouda, Bibia, Nessrine, Amel, Aicha, Ismaa, Oumaima, Jihad, Zahra, Soumia, Zita.

Chaima

Dédicaces

Ce travail que je dédie à mon père **djedid** Allah yarhmou.

A ma chère Mère **hadda.**

Grace à elle, ses sacrifices et ses qualités humaines qui m'ont permis de vivre cette journée.

A mon Frère et mes soeurs :
Abdelhalime, Ali, Fateh, Noura, Louiza, Naima.

A tous les gens m'aiment :
khawla, ilham.

A mon mari :
Rabeh.

Feyrouz

Table des matières

Notations

$\emptyset$: L'ensembla vide

$Ord(G)$: L'ordre d'un groupe G

$Ord(a)$: L'ordre d'un élément a

S_n : Le groupe des permutations de l'ensemble $X = \{1, 2, ..., n\}$ muni de la composition des applications

$Supp$: Support

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2)... & \sigma(n) \end{pmatrix}$: Permutation de S_n

$x \sim y$: Une relation d'équivalence

ζ : Une transposition

$Stab(x)$: Stabilisateur de l'élément x

F : Une figure F

$O_n(\mathbb{R})$: Le groupe orthogonal

$SO_n(\mathbb{R})$: Le groupe spécial orthogonal

$GL_n(\mathbb{R})$: Le groupe général linéaires

$SL_n(\mathbb{R})$: Le groupe spécial linéaires

$\circ$: Loi de composition des applications

T_v : Une translation par le vecteur v

$Aff(\mathbb{R}^n)$: Applications affines

$Isom(\mathbb{R}^n)$: Le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$

Introduction

Les symétries et les permutations en mathématiques peuvent être décrites de manière pratique par un objet algébrique appelé groupe, cette application des groupes s'étend de la géométrie à la cristallographie, tout comme les nombres peuvent être utilisés pour mesurer la taille, les groupes peuvent être utilisés pour mesurer la symétrie.

A chaque figure, nous associons un groupe, et ce groupe mesure la symétrie de cette figure. On a trois types de la symétrie : les rotations, les réflexions, et les translations.

Une isométrie de $\mathbb{R}^n$ est une application bijective $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui préserve la norme, c.à.d :
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.
Une isométrie de $\mathbb{R}^n$ peut être décomposer en une transformation orthogonal qui fixe l'origine $O_n(\mathbb{R})$ suivie par une translation.
Donc l'isométrie cas particulier de la symétrie. On montre que le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$ s'ecrit de la forme : $Isom(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n \rtimes O_n(\mathbb{R})$ où $\mathbb{R}^n$ est le groupe des translations et $O_n(\mathbb{R})$ le groupe orthogonale.

Ce mémoire est reparti en trois chapitres :
Dans le premier chapitre, nous avons donné des notions et notations utilisée par la suite : tels que Groupe, groupe symétrique S_n, action d'un groupe sur un ensemble, symétries des figures géométriques.
Dans le second chapitre on fait un rappel l'espace vectoriel et l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.
Dans le troisième chapitre, on fait une étude sur les isométries vectorielles de $\mathbb{R}^n$ et en particulier on présente le groupe de symétrie en dimension 2 et 3.

CHAPITRE 1

Notions de groupes

1.1 Groupe

Définition 1.1. *Soit G un ensemble non vide muni d'une loi de composition interne notée "$*$". L'ensemble G est un groupe pour la loi "$*$" si :*

1. La loi "$*$" est associative : $\forall\ x, y, z \in G : x * (y * z) = (x * y) * z$;

2. La loi "$*$" possède un élément neutre : $\exists e \in G, \forall x \in G, x * e = e * x = x$;

3. Tout élément $x \in G$ possède un symétrique unique $x^{'} \in G$ tel que : $x * x' = x' * x = e$.

Notation 1.1. *En général, en notation multiplicative, on notera xy le produit de x et de y, on notera x^{-1} l'inverse de x et 1_G l'élément neutre du groupe. Parfois, si le groupe est abélien, on utilisera la notation additive, $i.e.$, on notera $+$ la loi du groupe , et par $-x$ l'inverse de x et 0_G le neutre du groupe.*

Exemple 1.1. *- Le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ d'élément neutre noté $0_{\mathbb{R}}$.*
· L'inverse d'un élément x est noté $-x$.
- Le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$ d'élément neutre noté $1_{\mathbb{R}^*} = 1$ (1 usuel).
· Le symétrique de $x \in \mathbb{R}^*$ est $x^{-1} = \frac{1}{x}$.

Exemple 1.2. *soit $GL_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$: l'ensemble $GL_2(\mathbb{R})$ des matrice carrées $(2, 2)$ inversibles à coefficients dans $\mathbb{R}$ muni de la multiplication des matrices.*
- $(GL_2(\mathbb{R}), +) \Longrightarrow$ Est un groupe commutative .
- $(GL_2(\mathbb{R}), \times)$ muni du produit des matrices $A \times B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$ est un groupe où :
L'opération est associative : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

d'élément neutre : $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
dont l'inverse : $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{bmatrix}$

1.1.1 Sous-groupe

Définition 1.2. *On dit qu'une partie H non vide d'un groupe $(G, *)$ est un sous groupe de G si :*
1. $\forall (x, y) \in H \times H$, *on a* $x * y \in H$;
2. $1_G \in H$;
3. $.\forall x \in H$, *on a* $x^{-1} \in H$.

Exemple 1.3. *i)* $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}^*, \times)$ *en effet :*
- $1 \in \mathbb{R}_+^*$;
- *si* $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, *alors* $x \times y \in \mathbb{R}_+^*$;
- *si* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *alors* $x^{-1} = \frac{1}{x} \in \mathbb{R}_+^*$.

ii) $(\mathbb{Z}, +)$ *est un sous-groupe de* $(\mathbb{R}, +)$.

Proposition 1.1. *Si $(G, *)$ est un groupe et $H \subseteq G$, alors :*
H est un sous groupe de G $\Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } H \neq \emptyset, \\ \text{ii) } \forall x, y \in H, x * y^{-1} \in H \end{cases}$

Notation 1.2. *Si H est un sous-groupe de G, on notera ceci par $H \leq G$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$
on a $H \leq G \Rightarrow$ i) H sous-groupe $\rightarrow H \neq \emptyset$
ii) $\forall x, y \in H \rightarrow xy^{-1} \in H$ (stabilité)
$\Longleftarrow$)
i) $H \neq \emptyset$
ii) $H \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in G$ tel que $x \in H$, on a $xx \in H \Rightarrow xx^{-1} \in H \Rightarrow xx^{-1} = 1_G \in H$ (élément neutre)
iii) On a $1_G, y \in H \Rightarrow 1_G y^{-1} \in H \Rightarrow y^{-1} \in H$ (élément symétrique)
iv)Soit $x, y \in H \Rightarrow xy \in H$ / $x, y \in h \Rightarrow xy^{-1} \in H$ (de(iii))$\Rightarrow$de (ii) ona $x(y^{-1})^{-1} = xy \in H \Rightarrow xy \in H$ (stabilité) ■

Proposition 1.2. *Soit G un groupe, $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous groupes de G, alors $H = \cap_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de G .*

Démonstration. 1. On a $H = \cap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$ car, $\forall i \in I$ ona $1_G \in H_i \Rightarrow 1_G \in \cap_{i \in I} H_i = H$.
2. Soit $x, y \in H \Rightarrow x, y \in \cap_{i \in I} H_i \Rightarrow x, y \in H_i, \forall i \in I \Rightarrow xy^{-1} \in H_i$ car :
$H_i \leq G, \forall i \in I \Rightarrow xy^{-1} \in \cap_{i \in I} H_i = H$
$\Longleftrightarrow H = \cap_{i \in I} H_i$ est sous-groupe de G. ■

Définition 1.3. *Soit G un groupe, $\emptyset \neq B \subset G$ (B partie non vide de G) et soit $\mathcal{F} = \{H$ sous groupe de G / $B \subseteq H$*
1. Ona $\mathcal{F} \neq \emptyset$ Car $G \in \mathcal{F}(G \leq G$ et $B \leq G)$.
2. $\cap_{H \in \mathcal{F}} H$ est un sous-groupe de G appelé sous-groupe engendré par B, et en le note par $\langle B \rangle$,
$\{\langle B \rangle$ le plus petit sous-groupe de G qui contient la partie B, appelé le sous-groupe engendré par la partie $B\}$.

Exemple 1.4. *Soit le groupe* $G = (\mathbb{Z}, +)$*, avec* $B = \{3\}$*.*
On a $\langle B \rangle = \langle \{3\} \rangle = \langle 3 \rangle = \{..., -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, ...\} = \{3k, k \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$*.*
Donc $\langle \{3\} \rangle = 3\mathbb{Z}$*.*

Proposition 1.3. *L'intersection d'une famille de sous-groupes* H_i*,* $i \in I$ *un ensemble des indices, d'un groupe* G *est un sous-groupe de* G*.*

Démonstration. Soit $H = \cap_{i \in I} H_i \neq \emptyset$ car :
1. $\forall i \in I$, on a $1_G \in H_i \Rightarrow 1_G \in \cap_{i \in I} H_i$;
$\Rightarrow H \neq \emptyset$.
2. Si $x, y \in H \Rightarrow \forall i \in I$,on a $x, y \in H_i$;
$\Rightarrow \forall i \in I$, on $xy^{-1} \in H_i$;
$\Rightarrow xy^{-1} \in H$. ∎

L'ordre d'un groupe,l'ordre d'un élément

Définition 1.4. *L'ordre d'un groupe est le cardinal de son ensemble sous-jacent. Le groupe est dit fini ou infini suivant que son ordre est fini ou infini.Si un élément* a *d'un groupe* G *engendre dans* G *un sous-groupe (monogène) fini d'ordre* d*, on dit que* a *est d'ordre fini et plus précisément d'ordre* d*.*
Si le sous-groupe engendré par a *est infini, on dit que* a *est d'ordre infini. Si* a *est d'ordre fini, son ordre est le plus petit entier strictement positif* m *tel que* $a^m = e$ *(où* e *désigne l'élément neutre du groupe, et où* a^m *désigne le produit de* m *éléments égaux à* a*).*
L'ordre d'un groupe G *se note* $Ord(G)$*,* $|G|$ *ou* $\sharp G$ *et l'ordre d'un élément* a *se note* $Ord(a)$ *ou* $|a|$ *.*

Exemple 1.5. *i)* $Ord(\mathbb{R}) = \infty$ *(infini) .*
ii) Dans $(\mathbb{Z}, +)$*, tous les élément non nuls sont d'ordre infini.*
iii) Dans tous groupe G*, l'élément neutre est le seul élément d'ordre* 1*.*

1.2 Groupe symétrique S_n

1.2.1 Groupe Symétrique

Définition 1.5. *Soient* $n \in N^*$ *et* X *l'ensemble* $\{1, ..., n\}$*. On appelle permutation de* X *toute application bijective* $f : X \to X$*. On note* S_n *l'ensemble des permutations de* X *.*

Proposition 1.4. *Muni de la loi de composition des applications l'ensemble* S_n *est un groupe.*

Définition 1.6. $(S_n, \circ)$ *est appelé le groupe symétrique ou groupe de permutation de l'ensemble* X*.*

Notation 1.3. *Si* $\delta \in S_n$*. on peut représenter* δ *par un tableau :*

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2... & n \\ \delta(1) & \delta(2)... & \delta(n) \end{pmatrix}$$

L'élément neutre Id est représenté par :

$$Id = \begin{pmatrix} 1 & 2... & n \\ 1 & 2... & n \end{pmatrix}$$

et l'inverse δ^{-1} de δ par :

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \delta(1) & \delta(2)... & \delta(n) \\ 1 & 2... & n \end{pmatrix}$$

Exemple 1.6. *Soit la permutation :*

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'inverse de δ est :

$$\delta^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Proposition 1.5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(S_n, \circ)$ est un groupe fini d'ordre $n!$.*

Démonstration. Une permutation δ est entiérement par les image de $1, ..., n$, qui sont des éléments distincts de $\{1, ..., n\}$. Pour compter le nombre d'éléments δ de S_n, observons que pour l'image de 1, il ya n choix, pour l'image de 2, il y'a $n-1$ choix (car $\delta(2) \notin \{\delta(1)\}$), pour l'image de 3, il ya $n-2$ choix (car $\delta(3) \notin \{\delta(1), \delta(2)\}$) et ainsi de suite, enfin pour l'image de n il y'a 1 choix (car $\delta(n) \notin \{\delta(1), ..., \delta(n-1)\}$). Donc au total, il y'a $n! = n \cdot (n-1) ... \cdot 2 \cdot 1$ permutations de $\{1, ..., n\}$, et c'est l'ordre du groupe S_n. ■

i) Pour $n = 2$, on a $|S_2| = 2! = 2$ car

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ii) Pour $n = 3$, on a $|S_n| = 3! = 6$ car

$$S_3 = \left\{ \begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \right\}$$

1.2.2 Composition des permutations

Définition 1.7. *La composition des permutations exprimée en notation matricielle s'effectue de droite à gauche en allant de haut en bas, puis à nouveau de haut en bas et écrire :*

$$p \circ \delta(x) = p(\delta(x))$$

telle que p et δ sont deux permutations de S_n.Par exemple, on a pour

$$\delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } p = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ de } S_5$$
$$p \circ \delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

A droite ona 4 sous 1, puis que $p \circ \delta(1) = p(\delta(1)) = p(2) = 4$, donc $p \circ \delta$ envoi 1 à 4, le reste de la ligne du bas $p \circ \delta$ s'obtient de la même façon.

Proposition 1.6. *Si $n \geqslant 3$, S_n est un groupe non commutatif.*

Démonstration. Soit $n \geqslant 3$, pour montrer que S_n est non commutatif, il suffit d'exhiber deux éléments $\delta, p \in S_n$ telle que $p \circ \delta \neq \delta \circ p$, par exemple on a pour ■

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4... & n \\ 2 & 3 & 1 & 4... & n \end{pmatrix} \text{ et } \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4... & n \\ 2 & 1 & 3 & 4... & n \end{pmatrix} \in S_n$$
on a $p \circ \delta\,(1) = p\,(\delta\,(1)) = p\,(2) = 3 \neq \delta\,(p\,(1)) = \delta\,(2) = 1.$

1.2.3 Orbites et Support :

Définition 1.8 (Orbites). *Soit $\delta \in S_n$. La relation binaire définie sur $\mathbb{N}_n$ par :*
$x \sim y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, y = \delta^k(x)$
est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalences sont les orbites de δ. Si $x \in \{1, ..., n\}$ alors l'orbite de x est : $O(x) = \{\delta^k(x) \,/ k \in \mathbb{Z}\}$.

Exemple 1.7. *Pour $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\delta' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ de S_4 ona :*
pour δ on a : $O(1) = O(2) = O(3) = O(4) = \{1, 2, 3, 4\}$ et pour δ' on a : $O(1) = O(3) = \left\{ 1, \;\; 3 \right\}, O(2) = \{2\}, O(4) = \{4\}$.

Définition 1.9 (Support). *Si $\delta \in S_n$ son support est l'ensemble des élément de $\mathbb{N}_n$ qui ne sont pas invariants par δ.*

Exemple 1.8. *Avec les permutation de l'exemple précédent, $Supp(\delta) = \{1, 2, 3, 4\}$, $Supp(\delta') = \left\{ 1, \;\; 3 \right\}$*

Définition 1.10 (Ordre d'une permutation). *L'ordre d'une permutation δ est le plus petit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\delta^k = Id$.*

Transposition et cycles :
On suppose ici $n \geqslant 2$.

Définition 1.11 (Transposition). *Une transposition ζ est une permutation qui échange deux éléments i et j de $\mathbb{N}_n$, et laisse invariants les autres éléments $i.e.$, dont le support est $\{i, \; j\}$. On la note $\zeta = (i \;, \; j\;)$ ou parfois ζ_{ij}.*

$$\zeta_{ij}\,(i) = j, \zeta_{ij}(j) = i, \text{ et si } k \notin \{\, i \;, \; j \,\}, \zeta_{ij}\,(k) = k$$

Exemple 1.9. *Pour $n = 5$*

$$\zeta_{24} = (24) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Remarque 1.1. *– Il y'a* $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ *transpositions et c'est le nombre de parties de deux éléments dans l'ensemble* $\{1, 2, ..., n\}$.
– On fait remarquer qu'on a : $(i,\ j\ ) = (j,\ i\ )$.
– Toute transposition est une involution ($\zeta^2 = Id$)*, donc d'ordre* 2 *en particulier,* $(i\ ,\ j\ )^{-1} = (i\ ,\ j\ ) = (\ j\ ,\ i\ )$.
la réciproque est fausse pour $n \geq 4$ *car si* $\delta = (12)\,(34)$, $\delta^2 = Id$.

Définition 1.12 (Cycle). *Soit* $p \in \mathbb{N}$ *tel que* $2 \leq p \leq n$*. on appelle* $p-$*cycle une permutation* c *de* S_n *qui permute circulairement* p *éléments* $i_{1,}\ i_2, ..., i_p$ *de* $\mathbb{N}_n$ *et laisse les autres invariants* $i.e.$, *dont le support est* $\{i_1, ..., i_p\}$ *et tel que* $c(i_1) = i_2$, $c(i_2) = i_3, ..., c(i_{p-1}) = i_p$, *et* $c(i_p) = i_1$.
p *est la longueur de cycle* c*. On note ce cycle par* $c = (i_1\ i_2...i_p)$.

Exemple 1.10. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (253) = (532) = (325) \neq (235)$*, est un cycle de longeur* 3.

Remarque 1.2. $(i_1 i_2...i_p) = (i_2 i_3...i_p i_1) = (i_p i_1 i_2...i_{p-1})$.
Les $2-$*cycles sont les transpositions.*
Un cycle de longeur n *dans* S_n *est appelé permtation circulaire de* $\mathbb{N}_n$*, il y en a exactement* $(n-1)!$.
Le nombre de $p-$*cycles dans* S_n *est* $\binom{n}{p}\,(p-1)! = \frac{n(n-1)...(n-p+1)}{p}$.
Les cycles sont les permutations possédant exactement une orbite non réduite à un point.

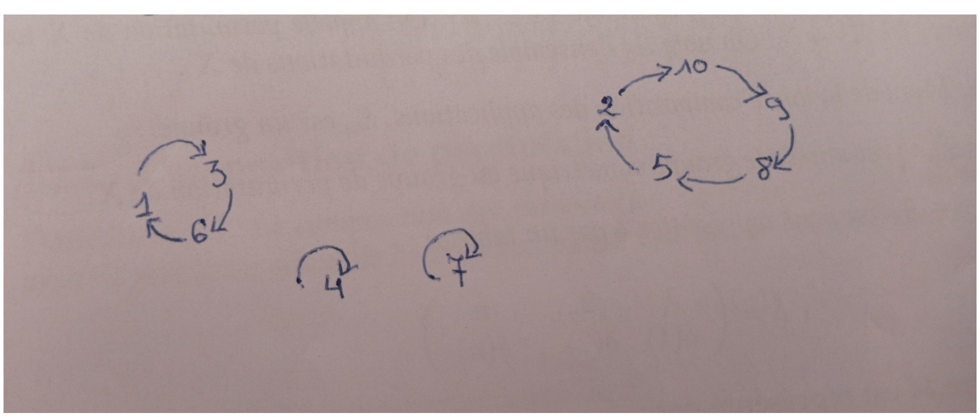
Proposition 1.7. $(i_1 i_2...i_p) = (i_1 i_p)(i_1 i_{p-1})...(i_1 i_2) = (i_1 i_2)(i_2 i_3)...(i_{p-1} i_p)$.
un $p-$*cycle d'ordre* p.

Démonstration. Il suffit de regarder directement les images de chaque entier. ■

Exemple 1.11. *Soit :*

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Représentation :



- orbite de 1 : $\{1, 3, 6\}$
- orbite de 2 : $\{2, 10, 9, 8, 5\}$
- orbite de 4 : $\{4\}$
- orbite de 7 : $\{7\}$

Alors :

$$\delta = (1\ 3\ 6)(2\ 10\ 9\ 8\ 5) = (2\ 10\ 9\ 8\ 5)(1\ 3\ 6)$$

Avec la proposition précédente, on tire d'ailleurs, par exemple :

$$\delta = (2\ 5)(2\ 8)(2\ 9)(2\ 10)(1\ 3)(36) = (2\ 10)(10\ 9)(9\ 8)(8\ 5)(1\ 6)(1\ 3)$$

1.3 Action d'un groupe

1.3.1 Action d'un groupe

Définition 1.13. *Soit $(G, \cdot)$ un groupe noté multiplicativement, d'élément neutre 1_G. Soit X un ensemble non vide. Une action du groupe G sur X est une application de $G \times X \longrightarrow X$ définie par $(g, x) \mapsto g \bullet x$ vérifiant :*
1. $\forall x \in X, 1 \bullet x = x$;
2. $\forall (g, g') \in G^2, \forall x \in X, gg' \bullet x = g \bullet (g' \bullet x)$.
On dit alors que X est un G-ensemble et que G opère (ou agit) sur X.

Théorème 1.1. *L'ensemble X est un G-ensemble si et seulement si G est homomorphe au groupe $S(X)$.*

Démonstration. Supposons que G est homomorphe au groupe $S(X)$ par le morphisme $T : G \longrightarrow S(X)$. A tout élément $g \in G$, correspond donc une bijection $T_g \in S(X)$, cette bijection donne de $x \in X$, une image que nous noterons $g \bullet x$.
Nous définissons ainsi sur X une loi de composition externe $G \times X \longrightarrow X$. Le morphisme T exige $T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$ d'où $(T_{g_1} \circ T_{g_2})(x) = g_1 \bullet (g_2 \bullet x) = (T_{g_1 g_2})(x) = g_1 g_2 \bullet x$.
De plus, si e est l'élément neutre de G, T_e est la bijection identique i_X de X, donc $e \bullet x = x$. finalement X est un G-ensemble. Réciproquement, soit X un G-ensemble, fixons $g \in G$ et soit T_g l'application $x \longrightarrow g \bullet x$ de X, ona :
$(T_{g^{-1}} \circ T_g)(x) = g^{-1} \bullet (g \bullet x) = (g^{-1} g) \bullet x = e \bullet x = x$. ■
et aussi $(T_g \circ T_{g^{-1}})(x) = x$. donc T_g et $T_{g^{-1}}$ sont des bijections réciproques. D'autre part : $T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$, c'est-à-dire que l'application $T : g \longrightarrow T_g$ de G dans $S(X)$ est un morphisme de groupes.

Exemple 1.12. *Un groupe opère sur lui-même de deux manières fondamentales :*
***par translation à gauche** cette action **simplement transitive**, c'est-à-dire **libre** et **transitive** :*

$$\left| \begin{array}{l} G \times G \to G \\ (g, x) \longrightarrow gx \end{array} \right.$$

Exemple 1.13. *Par **Automorphismes intèrieurs**, action aussi appelée **par conjugaison** :*

$$\left|\begin{array}{c} G\times G\to G \\ (g,x)\longrightarrow gxg^{-1}\end{array}\right.$$

Exemple 1.14. *Le groupe symétrique d'un ensemble X opère naturellement sur E cette action est **fidèle** est transitive :*

$$\left|\begin{array}{c} S_X\times X\to X \\ (\delta,x)\longrightarrow \delta(x)\end{array}\right.$$

Exemple 1.15. *Le groupe linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ opère sur $\mathbb{R}^n$ de la manière suivante :*
pour $A\in GL_n(\mathbb{R})$, $v\in\mathbb{R}^n$, $(A,v)\longrightarrow Av\in\mathbb{R}^n$.

1.3.2 Stabilisateurs - Orbites

Définition 1.14 (Stabilisateur). *Soit $x\in X$ où X est un $G-$ensemble. Le stabilisateur de x (aussi appelé sous-groupe d'isotropie de x) est le sous-ensemble de G : $G_x=\{g\in G\,/\,g\bullet x=x\}$. Le stabilisateur est parfois noté $Stab(x)$ ou bien G_x.*

Exemple 1.16. *Soit $E=\{1,2,3,4,5,6\}$ et supposons que G est le groupe des permutations défini par :*

$$G=\{(1),(1\ 2)(3\ 4\ 5\ 6),(3\ 5)(4\ 6),(1\ 2)(3\ 6\ 5\ 4)\}$$

Donc le stabilisateur est :

$$\left\{\begin{array}{c} Stab_G(1)=Stab_G(2)=\{(1),(3\ 5)(4\ 6)\} \\ Stab_G(3)=Stab_G(4)=Stab_G(5)=Stab_G(6)=\{(1)\}\end{array}\right.$$

Proposition 1.8. *Le stabilisateur G_x est un sous-groupe de G .*

Démonstration. En effet le stabilisateur contient 1_G car $1_G\bullet x=x$. S'il contient g et g' ona $(gg')\bullet x=g\bullet(g'\bullet x)=g\bullet x=x$. i.e., $gg'\in G_x$. Enfin, si $g\in G_x$ alors $g^{-1}\bullet x=g^{-1}\bullet(g\bullet x)=(g^{-1}g)\bullet x=1_G\bullet x=x$ d'où $g^{-1}\in G_x$. ∎

Définition 1.15 (Orbites). *L'orbites de x est le sous-ensemble suivant de X : $G\bullet x=\{g\bullet x\,/\,g\in G\}$, l'orbite est parfois notée $Orb(x)$.*

Exemple 1.17. *Soit G le groupe de permutations défini par :*

$$G=\{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(4\ 5),(1\ 2\ 3)(4\ 5),(1\ 3\ 2)(4\ 5)\}\text{ et }E=\{1,2,3,4,5\}$$

G opèrant sur l'ensemble E, les orbites sont :

$$\left\{\begin{array}{c} O_G(1)=O_G(2)=O_G(3)=\{1,2,3\} \\ O_G(4)=O_G(5)=\{4,5\}\end{array}\right.$$

1.3.3 Formule des classes

Première formule des classes

Lemme 1.1. *Soit G un groupe agissant sur un ensemble fini X*

$$\sum_{O_i \in X/G} Card\, O_i = Card\, X$$

Le sous-groupe $Stab(x) = \{g \in G, g \bullet x = x\}$ de G des éléments de G qui fixent x est appelé le stabilisateur de x. Deux élément x et $y = g \bullet x$ de la même orbite ont des stabilisateurs conjugués ($Stab(y) = gStab(x)g^{-1}$). L'application $\left| \begin{array}{l} f_x : G \longrightarrow X \\ \quad g \longrightarrow g \bullet x \end{array} \right.$ a pour image l'orbite de x. Donc g et h de G ont la même image par f_x si et seulement si ils sont dans la même classe à gouche modulo $Stab(x)$ (ie $h^{-1}g \in Stab(x)$). Par conséquent, f_x réalise une bijection entre l'ensemble $G/Stab(x)$ des classe à gouche de G modulo $Stab(x)$ et l'orbite $O(x)$ de x.

Seconde formule des classes

Lemme 1.2. *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X, pour tout $x \in X$:*

$$Card\, O(x) \times Card\, Stab(x) = Card\, G$$

Théorème de Burnside :

Théorème 1.2. *Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. Soit $g \in G$. On note $fix(g)$ l'ensemble des points fixes de g pour l'action de G sur X. Alors le nombre d'arbites vaut $1/|G| \times \sum_{g \in G} |fix(g)|$.*

1.4 Symétrie des figures géométriques

1.4.1 La symétrie

Définition 1.16. *En mathématiques, la symétrie signifie qu'une forme est identique à une autre lorsqu'elle est déplacée, tournée ou retournée. Si un objet ne présente pas de symétrie, on dit que l'objet est asymétrique. Le concept de symétrie se retrouve couramment en géométrie.*

Définition 1.17 (symétrie par rapport à une droite / par rapport à un point)**.** *Soit F une figure et d une droite. Dire que F est symétrique par rapport à d signifie que la figure symétrique de F par rapport à d est F elle-même, d est alors un axe de symétrie de F.*

- Soit F une figure et O un point. Dire que F est symétrique par rapport à O signifie que la figure symétrique de F par rapport à O est F elle-même. Le point O est alors un centre de symétrie de F.

1.4.2 Types de symétrie

La symétrie peut être observée lorsque vous retournez, tournez ou faites glisser un objet. Il existe quatre types de symétrie qui peuvent être observés dans différents cas.
- Symétrie par translation.
- Symétrie par rotation.
- Symétrie par réflection.
- Symétrie par glissement.

Symétrie par translation

Si un objet est déplacé d'une position à une autre, avec la même orientation dans le mouvement avant et arrière, on parle de symétrie de translation. En d'autres termes, la symétrie de translation est définie comme le glissement d'un objet autour d'un axe.

Symétrie par rotation

Lorsqu'un objet est tourné dans une direction particulière, autour d'un point, on parle alors de symétrie rotationnelle, également connue sous le nom de symétrie radiale. La symétrie rotationnelle existe lorsqu'une forme est tournée, et que la forme est identique à l'origine. L'angle de symétrie rotationnelle est le plus petit angle auquel la figure peut être tournée pour coïncider avec elle-même et l'ordre de symétrie est la façon dont l'objet coïncide avec lui-même lorsqu'il est en rotation.

Symétrie par réflection

Également appelée symétrie miroir, est un type de symétrie où une moitié de l'objet reflète l'autre moitié de l'objet.

Symétrie par glissement

Et la combinaison des transformations de translation et de réflexion. Une réflexion glissante est commutative par nature et le changement de l'ordre de la combinaison ne modifie pas le résultat de la réflexion glissante.

Exemple 1.18. *Les frises décoratives en architecture sont souvent des structures symétriques par translation : si on déplace la structure de la largeur d'un motif, on retrouve la même structure.*

Exemple 1.19. *Cette fleur est symétrique par rotation : si on la tourne d'un cinquième de tour, on retrouve la forme initiale.*

Exemple 1.20. *Les deux ailes des papillons (ici une vanesse du chardon) sont symétriques par réflexion : l'une est comme l'image dans un miroir de l'autre.*

CHAPITRE 2

Espace vectoriel

2.1 Espace vectoriel

Définition 2.1. *Soit $\Bbbk$ un corps donné, et soit V un ensemble non vide ayant les deux lois, addition et multiplication par un scalaire, qui font correspondre à $u, v \in V$ une somme $u + v \in V$ et à un $u \in V$ quelconque et $k \in \Bbbk$ un produit $k.u \in V$. L'ensemble V est alors appelé espace vectoriel sur $\Bbbk$ et les élément de V sont appelés vecteurs.*

Exemple 2.1. i) *Le corps des complexes $E = \mathbb{C}$ est un espace vectoriel réel(sur $\Bbbk = \mathbb{R}$) ou complexe(sur $\Bbbk = \mathbb{C}$) .*
ii) L'espace des matrices à n lignes et p colonnes $M_{n,p}(\Bbbk)$ à entrées dans $\Bbbk$ est un $\Bbbk-$espace vectoriel.

2.1.1 sous-espace vectoriel

Définition 2.2. *W est un sous-espace vectoriel de V si et seulement si :*

1. *W non vide ,*
2. *W est fermé pour l'addition c.à.d,si $v, w \in W$ alors $v + w \in W$,*
3. *W est fermé pour la multiplication par un scalaire : si $v \in W$ alors $kv \in W$ pour tout $k \in \Bbbk$.*

2.1.2 Produit scalaire

Définition 2.3. *Soient u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire de u et v noté $u \cdot v$, est le scalaire obtenu en*
multipliant les composantes correspondantes et en ajoutant les produits obtenus : $\left| \begin{array}{c} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R} \\ \langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k \end{array} \right.$

2.1.3 la norme et la distance

Définition 2.4. *La norme (ou longueur) du vecteur u notée $\|u\|$ est définie par :*
$\|u\| = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + ... + u_n^2}$.

Exemple 2.2. *On peut munir $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n$) de plusieurs normes différentes comme :*
$\|(x_1, ..., x_n)\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|$,
$\|(x_1, ..., x_n)\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}$,
$\|(x_1, ..., x_n)\|_\infty = \max\{|x_1| + ... + |x_n|\}$.

Définition 2.5. *Soit u et v des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, la distance des deux points u et v est définie par :*
$d(u, v) = \|u - v\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + ... + (u_n - v_n)^2}$

2.1.4 Le produit semi-direct

Définition 2.6. *Soient G un groupe, et H_1, H_2 deux sous-groupes de G. On dit que G est le produit semi-direct de H_1 et H_2, noté $G \simeq H_1 \rtimes H_2$ si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
1. Tout $g \in G$ s'écrit de manière unique $g = h_1 h_2$ avec $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$;
2. Pour tout $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$, $h_2 h_1 h_2^{-1} \in H_1$.

2.2 Espace euclidien

Définition 2.7. *On appelle espace vectoriel euclidien tout espace vectoriel réel, de dimension finie, muni d'un produit scalaire (c'est à dire d'une forme bilinéaire symétrique définie positive).*

Dans toute la suite, E est un espace vectoriel euclidien (de dimension n) dont le produit scalaire est noté $\langle .\, ,. \rangle$.

2.2.1 Base orthonormée

Définition 2.8. *Soient E un espace euclidien et $X = \{e_1, ..., e_n\}$une base de E. La base X est dite orthonormée lorsque $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} \mathbf{1} \ \ \mathbf{si\ i = j} \\ \mathbf{0} \ \ \mathbf{si\ i \neq j} \end{cases}$,pour tous $i, j \leq n$.*

2.2.2 Matrice orthogonale

Définition 2.9. *On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie la relation $A^T A = I_n$.*

Remarque 2.1. *1. La définition revient à dire que les colonnes (ou les lignes) de A forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.*
2. Par définition, une matrice orthogonale A est inversible et on a $A^{-1} = A^t$.

2.2.3 Le groupe général linéaire $GL_n(\mathbb{R})$ et le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{R})$

Définition 2.10. *Le groupe général linéaire d'ordre n est l'ensemble des matrices inversible de $M_n(\mathbb{R})$. On le note $GL_n(\mathbb{R})$ ou $GL(n, \mathbb{R})$, i.e.,*

$$GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \det(A) \neq 0\}$$

Définition 2.11. *Le groupe spécial linéaire d'ordre n, noté $SL_n(\mathbb{R})$ ou $SL(n, \mathbb{R})$ est :*

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}), \det(A) = 1\}$$

Remarque 2.2. *1.* $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ *si* $\det(A) = 1$ *et* $\det(B) = 1$.
2. $\det(A^{-1}) = 1$.

2.2.4 Le groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ et le groupe spécial $SO_n(\mathbb{R})$

Définition 2.12. *Le groupe orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$. On le note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n, \mathbb{R})$ telle que :*

$$O_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \ / \ AA^t = I_n\}$$

Exemple 2.3. *Quelques exemples sur les matrices orthogonales*

$$\tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}) \text{ , } \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$$

Théorème 2.1. *L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe.*

Démonstration. 1. La matrice I_n appartient à $O_n(\mathbb{R})$ car $(I_n)(I_n)^t = (I_n)(I_n) = (I_n)^2 = I_n$;
2. Pour tout $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ car $(A^{-1})(A^{-1})^t = A^t(A^t)^t = A^tA = I_n$;
3. Pour tout $(A, B) \in O_n(\mathbb{R})^2$,on a $AB \in O_n(\mathbb{R})$ car pour tout $A, B \in O_n(\mathbb{R})$ on a $(AB)(AB)^t = ABB^tA^t = AA^t = I_n$. ■

2.2.5 Matrice orthogonale positive ou négative

Proposition 2.1. *Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ alors* $\det(A) = \pm 1$.

Définition 2.13 (Matrice orthogonale positive ou négative)**.** *Une matrice orthogonale $A \in O_n(\mathbb{R})$ est dite positive (ou directe) si* $\det(A) = 1$. *Dans le cas contraire,on dit qu'elle est négative (ou indirecte).*

Définition 2.14 (Groupe spécial orthogonal d'ordre n)**.** *Le groupe spécial orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales positives de $M_n(\mathbb{R})$. On le note $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$.*

Proposition 2.2. *$O_n(\mathbb{R})$ est un sous groupe du $GL_n(\mathbb{R})$.*

CHAPITRE 3

Les isométries de $\mathbb{R}^n$

3.1 Transformation linéaire

Définition 3.1. *Une transformation linéaire ou application linéaire $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application qui préserve l'addition de vecteurs et la multiplication par un scalaire, c'est -à-dire* :
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : T(x+y) = T(x) + T(y);$
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R} : T(\alpha y) = \alpha T(y).$

Définition 3.2. *une matrice carrée $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ représente une transformation linéare $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Si nous écrivons les vecteurs $x = (x_1....., x_n)^t$ et $y = (y_1, ..., y_n)^t$ dans $\mathbb{R}^n$, comme matrices colonnes, alors la matrice A transforme le vecteur x au vecteur $y = Ax$ telle que :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2n} \\ .. & .. & .. & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

qui satisfait $A(x+y) = Ax + Ay$ et $\alpha Ax = A(\alpha x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Inversement, si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, on peut lui associer la matrice A selon T on écrivons ce que l'application T fait aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on a $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$ avec :

$$\begin{gathered} e_1 = (1, 0, ..., 0)^t \\ e_2 = (0, 1, ..., 0)^t \\ ... \\ e_n = (0, 0, ..., 1)^t \end{gathered}$$

alors

$$\begin{array}{c} T(e_1) = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{n1})^t \\ T(e_2) = (a_{12}, a_{22}, ..., a_{n2})^t \\ ... \\ T(e_n) = (a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{nn})^t \end{array}$$

donc

$$\begin{array}{rcl} T(x) & = & T(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n) \\ & = & x_1T(e_1) + x_2T(e_2) + ... + x_nT(e_n) \\ & = & (\sum_{k=1}^{n} a_{1k}x_k, ..., \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k \\ & = & Ax \end{array}$$

Définition 3.3 (Isométrie). *Une isométrie de $\mathbb{R}^n$. L'application $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une application bijective qui préserve la norme, qui vérifie :*
$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$: $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ ou bien $||Ax|| = ||x||$ si A est la matrice associée à l'application f.

Théorème 3.1. *Soit A une matrice de dimension $n \times n$, les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *Les colonnes de matrice A forment un ensemble orthonormé.*
2. *$A^{-1} = A^t$.*
3. *Pour les vecteurs x et y, $\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$.*
4. *Pour les vecteurs x et y, $||Ax - Ay|| = ||x - y||$.*
5. *Pour tout vecteur x, $||Ax|| = ||x||$.*

3.2 Le groupe $Isom(\mathbb{R}^n)$

Définition 3.4 (la translation). *Etant donné un élément $v \in \mathbb{R}^n$, on notera $Tran_v$ où $T_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la translation par le vecteur v définie par $T_v(x) = x + v$. L'ensemble de tous ces translations forme un groupe pour la composition des applications qu'on notera $Tran(\mathbb{R}^n)$. La correspondance bijective $v \to T_v$ nous montre que $Tran(\mathbb{R}^n)$ est tout simplement le groupe abélien $(\mathbb{R}^n, +)$.*

Proposition 3.1. *1. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$ ona : $|T_v(x) - T_v(y)| = |(x + v) - (y + v)| = |x - y|$.*
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n.\forall s, v \in \mathbb{R}^n$ on a $T_v \circ T_t(x) = T_v(x + t) = x + t + v = T_{t+v}(x)$ donc $T_v \circ T_t = T_{t+v}$.
3. De 2, on trouve $T_v \circ T_t = T_t \circ T_v$ car $v + t = t + v$.
4. Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on a $T_0 = Id_{\mathbb{R}^n}$, $T_v^{-1} = T_{-v}$.

Remarque 3.1. *Les translations et les éléments du groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ sont des isométries.*

Définition 3.5 (Application affine). *Une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est dite affine s'il l'on peut l'écrire comme la composition $f = T_v \circ \alpha$ d'une translation et d'une application linéaire, noté $Aff(\mathbb{R}^n)$.*

Exemple 3.1. *. Tout translation est une application affine d'application linéaire associée l'identité.*
. Les symétries et les symétries centrales son des applications affines.

Proposition 3.2. *Étant donnée une application affine $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, son ensemble de points fixes $Fix(f) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = x\}$.*

Proposition 3.3. *L'ensemble $Aff(\mathbb{R}^n)$des application affines inversibles de $\mathbb{R}^n$ est un groupe pour la composition des applications. De plus $Aff(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n \rtimes GL_n(\mathbb{R})$, où $\mathbb{R}^n$ est sous-groupe des translation et $GL_n(\mathbb{R})$ celui des applications linéaires inversibles.*

Démonstration. Par definition, tout élément $f \in Aff(\mathbb{R}^n)$ s'écrit comme la composition $f = T_v \circ \alpha$ d'un élément $\alpha \in GL_n(\mathbb{R})$. De plus, cette écriture est unique. En effet, puisque α est linéaire, $\alpha(0) = 0$, d'où ■

$$f(0) = (T_v \circ \alpha)(0) = T_v(\alpha(0)) = T_v(0) = 0 + v = v$$

Ainsi, T_v est uniquement déterminé par f, et du coup $\alpha = T_{-v} \circ f$ aussi. De plus, la conjuguaison d'une translation T_v par un élément $\alpha \in GL_n(\mathbb{R})$ satisfait $\alpha(T_v(\alpha^{-1}(x))) = \alpha(\alpha^{-1}(x) + v) = \alpha(\alpha^{-1}(x)) + \alpha(v) = x + \alpha(v) = T_{\alpha(v)}(x)$
En d'autre termes, $\alpha \circ T_v \circ \alpha^{-1} = T_{\alpha(v)}$.Il découle de cette égalité que la composition de deux applications affine satisfait
$(T_v \circ \alpha) \circ (T_{v'} \circ \alpha') = T_v \circ (\alpha \circ T_{v'} \circ \alpha^{-1}) \circ \alpha \circ \alpha' = T_{v+\alpha(v')} \circ (\alpha \circ \alpha')$ telle que $(\alpha \circ T_{v'} \circ \alpha^{-1}) = T_{\alpha(v')}$
Ainsi, $Aff(\mathbb{R}^n)$ est le groupe produit semi-direct $\mathbb{R}^n \rtimes GL_n(\mathbb{R})$.
Insistons sur une conséquence de cette preuve : la composition de deux application affines est donnée par la formule

$$(T_v \circ \alpha) \circ (T_{v'} \circ \alpha') = T_{v+\alpha(v')} \circ (\alpha \circ \alpha') \ldots\ldots\ldots.(*)$$

Cette formule est évidemment trés utile pour le calcule des compositions d'applications affines, en particulier d'isométries.

Théorème 3.2. *Tout isométrie de $\mathbb{R}^n$ est une application affine, De plus, une application linéaire $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si et seulement si sa matrice dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ est un élément de $O_n(\mathbb{R})$.*

Définition 3.6 (Le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$)**.** *Le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$ noté $Isom(\mathbb{R}^n)$ (dit aussi le groupe euclidien $E(n)$) est l'ensemble des transformations de $\mathbb{R}^n$ qui s'écrivent de la forme : $F(x) = Ax + v$ où $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$ qu'on note aussi tout simplement par (A, v).*

Proposition 3.4. *1. Tout isométrie de $\mathbb{R}^n$ qui fixe l'origine est donnée par un élément de $O_n(\mathbb{R})$.*
2. Le groupe $Isom(\mathbb{R}^n)$ est muni du produit semi-direct définit par :

$(A, v_1) \cdot (B, v_2) = (AB, Av_2 + v_1)$ où $A, B \in O(n, \mathbb{R})$, $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ avec $(I, 0)$ est l'identité du groupe et l'inverse de (A, x) est $(A^{-1}, -A^{-1}x)$,et on a : $Isom(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n, +) \rtimes O(n, \mathbb{R})$ où $(\mathbb{R}^n, +)$ est le groupe des translation de $\mathbb{R}$.

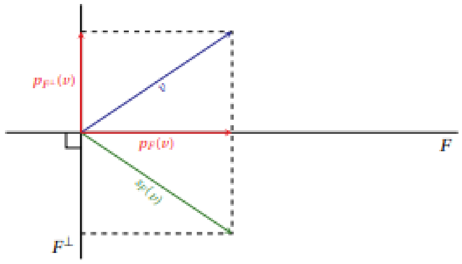
3.3 Les symétries orthogonales

3.3.1 Le cas de droite

Définition 3.7 (Symétrie orthogonale)**.** *: Soit F un sous-espace vectoriel de E. La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie $S_F : E \longrightarrow E$ par rapport à F et parallèlement à $F^{\perp}$.*

Remarque 3.2. *On a* $S_F = P_F - P_{F^\perp} = 2P_F - Id_E$.

Illustration : On peut représenter la symétrie orthogonale d'un vecteur avec le schéma ci-dessous :



Proposition 3.5. *Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.*

Définition 3.8 (Réflexion)**.** *Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.*

3.4 Classification des isométries vectorielles

3.4.1 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

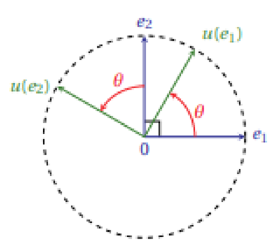
Proposition 3.6. *Soit* $u \in SO_n(\mathbb{R})$ *une isométrie positive. Il existe un réel* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que pour toute base orthonormée directe* B *de* $\mathbb{R}$*, on a*

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Illustration : Si $B = (e_1, e_2)$, on a par définition les relations

$$\begin{cases} u(e_1) = \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ u(e_2) = -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2 \end{cases}$$

On en déduit que u est une rotation d'angle θ



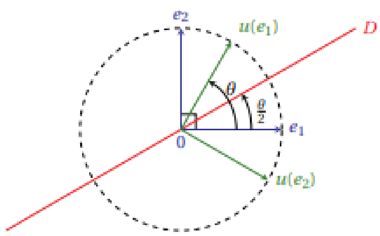
Remarque 3.3. *En particulier :*

$$SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Proposition 3.7. *Soit $u \in O_n(\mathbb{R}) \backslash SO_n(\mathbb{R})$ une isométrie négative. Pour toute base orthonormée directe B de $\mathbb{R}$, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Illustration : Comme dans le cas précédent, en notant $B = (e_1, e_2)$, on peut représenter la situation sur le graphique ci-dessous. On en déduit que u est une réflexion dont l'axe D est tournée de$\frac{\theta}{2}$ par rapport à la droite $Vect(e_1)$.



Remarque 3.4. *En particulier :*

$$O_2(\mathbb{R}) \backslash SO_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Remarque 3.5. *Si on change l'orientation du plan choisi au début, le réel θ est remplacé par son opposé dans les deux propositions précédentes. (Changer l'orientation revient à changer le sens positif de rotation choisi) .*

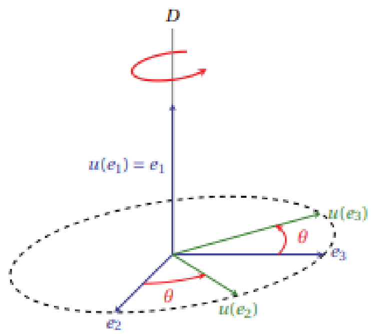
Conclusion 3.3. *1. les éléments de $SO_n(\mathbb{R})$ sont les rotations .*
2. les éléments de $O_n(\mathbb{R}) \backslash SO_n(\mathbb{R})$ sont les réflexions .

3.4.2 Isométries vectorielles en dimension 3

Proposition 3.8. *Soit $u \in SO_n(\mathbb{R})$ une isométrie positive. Il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe B de $\mathbb{R}$ tels que :*

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Illustration : En notant $B = (e_1, e_2, e_3)$ on en déduit que u est la rotation d'axe D dirigé par le vecteur e_1 et d'angle θ.

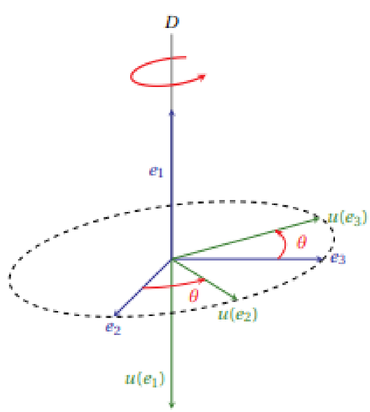


Proposition 3.9. *Soit $u \in O_n(\mathbb{R}) \backslash SO_n(\mathbb{R})$ une isométrie négative. Il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe B de $\mathbb{R}$ tels que :*

$$Mat_B(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Illustration : En notant $B = (e_1, e_2, e_3)$, on en déduit que l'isométrie u est la composée commutative entre :

1. la rotation d'axe D dirigé par e_1 et d'angle θ .
2. la réflexion par rapport au plan $D^\perp = Vect(e_2, e_3)$.



Remarque 3.6. *Dans le cas où l'angle θ de la rotation est nulle, l'isométrie négative est simplement la réflexion par rapport au plan $D^\perp = Vect(e_2, e_3)$.*

Conclusion

Ce travail concerne les isométrie de $\mathbb{R}^n$.
Après avoir présenter dans la première partie les concepts fondamentaux nécessaires pour la réalisation de ce travail tels que : le groupe S_n, l'action d'un groupe sur un ensemble et l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Dans la deuxième partie on a fait une étude sur le groupe des isométries de $\mathbb{R}^n$, noté $Isom(\mathbb{R}^n)$. Tout isométrie de $\mathbb{R}^n$ se décompose sous la forme $F(x) = Ax + v$ où A appartient au groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^n$.
Finalement, on montre que $Isom(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{R}^n, +) \rtimes O_n(\mathbb{R})$ où $(\mathbb{R}^n, +)$ est le groupe des translation de $\mathbb{R}^n$ et $\rtimes$ est le produit semi direct.

Bibliographie

[1] Adrien Fontaine. Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications. (21 décembre 2013).

[2] B.fatima zahra. Groupe de symétrie en dimension 2 et 3 et application. Mémoire, Master, université de M'sila, (2014, 2015).

[3] B.nabila. Sur le produit en couronne de groupes. Mémoire, Master, universié de M'sila, (2017, 2018).

[4] B.selikh, A.mohammed. Action d'un groupe et symétrie. Mémoire, Master, université de M'sila, (2016, 2017).

[5] Christophe mourongane. (2009, 2010). Théorie des groupes et géométrie. Cours de l'université de rennes1.

[6] David cimasoni. (printemps 2014). Cours de géométrie I.

[7] Denis diderot. Géométrie euclidienne. université paris 7. (2005, 2006).

[8] D.mihoubi. Cours $3^{ième}$ année licence. Introduction à la théorie des groupes, université de M.boudiaf M'sila, (2018, 2019).

[9] Jean-louis. Le groupe symétrique, cours internet http :\\www.maths-france.fr.2018

[10] J.larochette. Groupe symétrique. lycéé carnot. (version du 24 janvier 2018).

[11] Mcgraw-hill inc. Algebre lineaire, cours et problèmes, est traduit de : Theory and problems of linear algebra. New york1973

[12] Pierre lissy. Groupes opérant sur un ensemble. Exemples et applications. (21 décembre 2013)..

[13] Seymour lipschutz. Algebre linéaire. Cours et problémes .

[14] Thomas W. Judson. Stephen F. Austin. Abstract Algebra, Theory and Applications. August 27, 2010.

[15] William j. gilbert. W. keith nicholson. Modern algebra with applications.

[16] X. arhan, A. chassaniol. Groupe opérant sur un ensemble, exemple et applications. (1 avril 2012).

ملخص

عملنا الحالي (مذكرة ماستر جبرورياضيات متقطعة) يتعلق بدراسة نوع من التحويلات النقطية في R^n من بينها التقايسات .التقايس هو تحويل يحافظ على المسافات بحيث يتكون من تحويل متعامد متبوعا بإنسحاب.

كلمات مفتاحية : التقايس - الزمر - عمل الزمر- المسافة - الفضاء الشعاعي.

Résumé

Notre travail actuel (mémoire de fin d'étude master algèbre et mathématiques discrètes) consernent l'étude geunre de transformations ponctuelles de R^n parmi lesquelles se trouvent l'isométries. L'isométrie est une transformation qui conserve les distances peut être décomposer en une transformation orthogonal suivie par une translation.

Mots-clés : Isométrie - groupe - action d'un groupe - distance - espace vectorielle.

Abstract

Our present work (memory of master algebra and discrete mathematics) consists in the study of punctual transformations of R^n among which are isometries. The isometry is a transformation that preserves distances can be decomposed into an orthogonal transformation followed by a translation.

Key-words : Isometry - group - group action - distance - vector space.