UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Équations aux dérivées partielles et applications

Par
Latrach Fatima Zohra

Sujet

Une solution asymptotique pour une équation d'onde en dimension 1 perturbée

Devant le jury :

Mr. B. Bougherara	MCB. Univ de M'sila	Président
Mr. A. Sengouga	MCA. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. A. Mokhtari	MCB. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2017 / 2018

Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier *Allah*, Le Tout Puissant, de m'avoir donné la santé, la volonté et la patience pour mener à terme ma formation de Master.

Je remercie :

Monsieur *Abdelmouhcene Sengouga* qui m'a fourni le sujet de ce mémoire et m'a guidée de ses précieux conseils et suggestions, et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de ce travail.

Monsieur *Brahim Bougherara* qui m'a fait l'honneur de bien vouloir accepter la présidence de ce mémoire. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma déférence et de ma profonde gratitude.

Monsieur l'examinateur *Abdelhak Mokhtari* qu'il veuille trouver ici l'expression de mon profond respect pour avoir eu l'amabilité de vouloir bien faire partie du jury de mon mémoire.

Je remercie du fond de mon cœur, mes parents qui m'ont soutenue, encouragée et motivée tout au long de mes études.

Je remercie mon mari, mes frères et mes sœurs pour leur soutien.

Je remercie tout ma famille et mes amis.

Enfin, je ne pourrais terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

Dédicaces

A mon père

Mohamed

A ma mère

Oum Elkhair

A mes sœurs et mes frères

Khadra, Afaf, Chaima, Mabkhot, Noureddine, Abd Elhamid, Issa et Belkacem

A mon mari

Djamel

A mes amis

Amina Z, Zoubida S, Amina Z, et May B

A tout ma famille et mes amis

et

A toi . . .

Table des matières

Introduction

Une variété de problèmes physiquement intéressants implique le calcul des valeurs propres et des fonctions propres d'un opérateur auto-adjoint linéaire. Un exemple particulièrement simple qui illustre cette idée est celui des vibrations transversales de petites amplitudes sur un support élastique. Ce phénomène est décrit par l'équation d'onde

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

où t est le variable de temps, et x est le variable de l'espace. En appliquant la méthode de séparation des variables, on est amené à résoudre un problème simple de valeurs propres à une dimension.

Dans ce travail, on considère le cas où le modèle mathématique de la corde vibrante prend aussi en compte la présence d'une petite force de rappel linéaire et dépendant de x. Plus précisément, on considère l'équation d'onde perturbée suivante

$$u_{tt} - u_{xx} + \varepsilon u \sin x = 0.$$

Ce problème a été considéré dans le livre de J. Kevorkian et J. D. Cole [4]. La méthode de séparation des variables dans ce cas, mène à un problème de valeurs propres perturbé. On a bien détaillé les calculs qui donnent la solution du problème de valeurs propres par deux approches. Ensuite, ses vecteurs et valeurs propres sont utilisés pour trouver une expression asymptotique de la solution de l'équation d'onde. De plus, on a comparé la solution obtenue par la méthode asymptotique avec la solution numérique du problème.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans le premier chapitre, on donne un rappel sur quelques espaces de Hilbert et sur les séries de Fourier, on résout l'équation d'onde non perturbée et on rappelle quelques notions d'analyse asymptotique.

Dans le deuxième chapitre, en appliquant la méthode de séparation des variables à l'équation d'onde perturbée, on obtient un problème de valeurs propres perturbé ainsi que la solution de l'équation d'onde perturbée.

Enfin, dans le troisième chapitre, on démontre l'efficacité de l'approche asymptotique en comparant la solution asymptotique avec la solution numérique obtenue par la méthode de différences finies.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Espaces $L^2(a,b)$, $H^1(a,b)$ et $H_0^1(a,b)$

Soient a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$

L'espace $L^2(a,b)$

C'est l'espace de Hilbert définie par

$$L^2(a,b) = \left\{ u : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, f \text{ mesurable et } \int_a^b |u(x)|^2 \, dx < +\infty \right\}.$$

muni de la norme

$$||u||_{L^2(a,b)} = \left(\int_a^b |u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $H^1(a,b)$

C'est l'espace de Hilbert définie par

$$H^1(a,b) = \left\{ u \in L^2(a,b)\,,\, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(a,b)\ ;\ \forall i = 1, \cdots, n \right\}.$$

muni de la norme

$$||u||_{H^1(a,b)} = \left(||u||^2_{L^2(a,b)} + ||\nabla u||^2_{(L^2(a,b))^n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $H_0^1(a,b)$

On définit d'abord l'espace $\mathcal{D}(a,b)$ par

$$\mathcal{D}(a,b) = \{ u \in C^\infty(a,b)\,,\, \exists K \subset (a,b) \text{ compact}\,;\, u = 0 \text{ sur } K^c \}.$$

et on définit

$$H_0^1(a,b) = \text{L'adhérencede } \mathcal{D}\,(a,b) \ \text{ dans } H^1(a,b).$$

1.2 Série de Fourier

1.2.1 Série complète de Fourier

La série complète de Fourier, ou simplement la série de Fourier, d'une fonction $f \in L^1\,(-l,l)$ définie sur l'intervalle $-l < x < l$, est définie comme

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi x}{l} + B_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1.1}$$

où, A_0, les A_n et les B_n sont données par

$$A_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \tag{1.2}$$

$$A_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1.3}$$

$$B_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots). \tag{1.4}$$

Si $f \in L^2\,(-l,l)$, on a le résultat classique suivant

$$\lim_{N\longrightarrow+\infty}\int_{-l}^{l}\left|f\,(x) - \sum_{n=1}^{N}\left(A_n\cos\frac{n\pi x}{l} + B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\right|^2 dx = 0.$$

Dans ce sens, on écrit

$$f\,(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi x}{l} + B_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

1.2.2 Série sinus de Fourier

La série sinus de Fourier, d'une fonction $f \in L^2\,(0,l)$ définie sur l'intervalle $0 < x < l$, est définie comme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.5}$$

avec

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \tag{1.6}$$

1.3 Résolution de l'équation d'onde avec séparation des variables

1.3.1 Equation d'onde

L'équation d'onde est une équation de deuxième ordre en temps, qui s'écrit comme

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \qquad \text{pour } 0 < x < l. \tag{1.7}$$

Cette équation modélise les petites vibrations d'une corde élastique de longueur $l > 0$, en supposant que le poids soit négligeable et qu'il n'y ait pas de charges externes.

Nous considérons d'abord le cas où les extrémités de la corde sont fixées, i.e., on impose des conditions de Dirichlet homogènes

$$u(0,t) = 0 = u(l,t), \tag{1.8}$$

et l'état initiale est décrit par les conditions initiales régulieres

$$u(x,0) = f(x)\ ,\ u_t(x,0) = g(x). \tag{1.9}$$

1.3.2 Equation d'onde avec dispersion

Les effets de dispersion sont très importants dans les phénomènes de propagation des ondes. Dans notre modèle pour la corde vibrante, lorsque la corde est sous l'action d'une force de rappel élastique verticale qui dépend de u, l'équation du mouvement devient

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} + F(u) = 0, \qquad (\lambda > 0). \tag{1.10}$$

- Si $F(u) = \lambda u$, où λ est une constante positive, on a l'équation linéaire de Klein-Gorden.
- Dans le chapitre suivant, on considère le cas $F(u) = \varepsilon u \sin x$, où, ε est un petit paramètre.

1.3.3 Séparation des variables

La méthode que nous utiliserons consiste à construire une solution générale de (1.7)−(1.9) sous la forme d'une combinaison linéaire de solutions spéciales faciles à trouver. Une solution séparée est une solution qui s'écrit sous la forme

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{1.11}$$

Première étape En remplaçant la forme (1.11) dans l'équation d'onde (1.7), on obtient

$$X(x)T''(t) = c^2X''(x)T(t).$$

On divise par $-c^2XT$, on trouve

$$-\frac{T''}{c^2T} = -\frac{X''}{X} = \lambda.$$

Ceci définit une quantité λ, qui doit être une constante (car $\dfrac{\partial\lambda}{\partial x} = 0$ et $\dfrac{\partial\lambda}{\partial t} = 0$). Alternativement, nous pouvons remarquer que λ ne dépend pas de x à cause de la première expression, et ne dépend pas de t à cause de la seconde expression, de sorte qu'elle ne dépende d'aucune variable.

On doit prend $\lambda > 0$, pour obtenir des solutions bornées en temps. Soit $\lambda = \beta^2$, où $\beta > 0$. Alors, l'équation ci-dessus est une paire d'équations différentielles ordinaires séparées pour $X(x)$ et $T(t)$.

On a

$$\begin{cases} -\dfrac{X''}{X} = \beta^2, \\ -\dfrac{T''}{c^2T} = \beta^2, \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{cases} X'' + \beta^2X = 0, \\ T'' + c^2\beta^2T = 0. \end{cases} \tag{1.12}$$

Ces $E.D.O_s$ sont faciles à résoudre, et les solutions sont écrites par

$$X(x) = C\cos\beta x + D\sin\beta x, \tag{1.13}$$

$$T(t) = A\cos\beta ct + B\sin\beta ct. \tag{1.14}$$

où A, B, C et D sont des constantes.

Deuxième étape En imposant les conditions aux limites (1.8) sur la solution séparée, ils vient

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 = X(l), \\ X(0) &= C = 0,\ X(l) = D\sin\beta l = 0. \end{aligned}$$

Nous ne sommes certainement pas intéressés par la solution évidente $C = D = 0$. Nous devons donc avoir $\beta l = n\pi$, i.e.

$$\beta = \frac{n\pi}{l},$$

Donc

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \text{ et } X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.15}$$

Sont des solutions distinctes. Chaque fonction sinus peut être multipliée par une constante arbitraire.

En utilisant (1.14), on déduit qu'il existe un nombre infini de solutions séparées de (1.7) et (1.8), une pour chaque n, sont données par

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}, \qquad (n = 1, 2, \cdots).$$

où, A_n et B_n sont des constantes arbitraires.

Par superposition, la somme des solutions est encore une solution de (1.7) et (1.8)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi ct}{l} + B_n \sin\frac{n\pi ct}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{1.16}$$

La formule (1.16) résout (1.9) ainsi que (1.7) et (1.8) pour $t = 0$, à condition que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.17}$$

et

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\pi c}{l} B_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{1.18}$$

où, les A_n et B_n sont données par

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \\ B_n &= \frac{2}{n\pi c}\int_0^l g(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \end{aligned}$$

1.4 Problème de valeurs propres

1.4.1 Position du problème

Dans l'intervalle $(0, l)$, on considère le problème de valeurs propres suivant.

Définition 1.1 *λ est appelé une valeur propre pour le problème de Dirichlet, s'il existe une fonction $u \neq 0$, solution faible au problème*

$$\begin{cases} -u'' = \lambda u & \text{dans } (0, l), \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases} \tag{1.19}$$

u est alors appelé une fonction propre correspondant à la valeur propre.

Remarque 1.2 *Si u est une fonction propre du problème (1.19), alors μu est aussi une solution pour chaque réel μ, c'est-à-dire que la solution du problème (1.19) n'est pas unique.*

1.4.2 Résolution du problème

Notez que λ est nécessairement positif, car une solution faible à (1.19) est une fonction satisfaisant

$$u \in H_0^1(0,l) : \int_0^l u' v' dx = \lambda \int_0^l uv dx, \qquad \forall v \in H_0^1(0,l), \, u \neq 0, \tag{1.20}$$

Prendre $v = u$, ça donne

$$\int_0^l u'^2 dx = \lambda \int_0^l u^2 dx. \tag{1.21}$$

Par conséquent $\lambda > 0$, puisque $u' = 0$ p. p impliquerait $u = 0$.

La première équation de (1.19), est une équation différentielle linéaire du second ordre qui possède un sous-espace de solutions de dimension 2. Il est alors facile de comprendre que la solution générale de cette équation est donnée par

$$u = A \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) + B \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right), \qquad A,B \in \mathbb{R} \tag{1.22}$$

(Puisque $\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$, $\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$ sont des solutions indépendantes).

Afin de correspondre aux conditions aux limites de (1.19), nous devons avoir

$$B = 0, \ \sin\left(\sqrt{\lambda} l\right) = 0.$$

Ainsi, les valeurs propres possibles du problème sont données par λ_k,, tel que

$$l\sqrt{\lambda_k} = k\pi \iff \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \qquad k = 1,2,3\cdots \tag{1.23}$$

Ils forment une séquence discrète dénombrable. Les fonctions propres correspondantes sont alors données par

$$u_k = A_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \tag{1.24}$$

Ils sont simples dans le sens où les espaces propres -les espaces des fonctions propres- sont de dimension 1. Si l'on veut choisir comme base de fonctions propres celle qui a L^2 -norme égale à 1- on dit qu'il s'agit d'une fonction propre normalisée, on doit choisir A_k, tel que

$$A_k^2 \int_0^l \sin^2\frac{k\pi x}{l} dx = 1,$$

qui conduit à

$$u_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Il est clair que la plus petite valeur propre est donnée par

$$\boxed{\lambda_1 = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2,} \tag{1.25}$$

et la première fonction propre est

$$\boxed{u_1 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi x}{l}.}$$

1.5 Eléments d'analyse asymptotiques

1.5.1 Symboles d'ordre

Pour définir une approximation asymptotique, nous devons d'abord introduire des symboles d'ordre. La raison en est que nous nous intéresserons à la façon dont les fonctions se comportent lorsque un paramètre, typiquement ε, devient petit.

Définition 1.3 *1.$f = O(\phi)$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ signifie qu'il y a des constantes k_0 et ε_1 (indépendantes de ε), de sorte que*

$$|f(\varepsilon)| \leq k_0 |\phi(\varepsilon)|, \qquad \textit{pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_1.$$

Nous disons que "f" est grand Oh de "ϕ" lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

2.$f = o(\phi)$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ signifie que pour tout δ positif il y a un ε_2 (indépendant de ε), de sorte que

$$|f(\varepsilon)| \leq \delta |\phi(\varepsilon)|, \qquad \textit{pour } 0 < \varepsilon < \varepsilon_2.$$

Nous disons que "f" est petit oh de "ϕ" lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$.

1.5.2 Approximation asymptotique

Définition 1.4 *Etant donné $f(\varepsilon)$ et $\phi(\varepsilon)$, nous disons que $\phi(\varepsilon)$ est une approximation asymptotique à $f(\varepsilon)$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, chaque fois que $f = \phi + o(\phi)$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$. Dans ce cas, nous écrivons*

$$f \sim \phi \qquad \textit{lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

En particulier, nous avons cela $f \sim \phi$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$, si

$$\lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 1. \tag{1.26}$$

1.5.3 développements asymptotiques

Définition 1.5 1.*Les fonctions* $\phi_0(\varepsilon)$,$\phi_1(\varepsilon)$,$\cdots$ *forment une séquence asymptotique ou sont bien ordonnées, lorsque* $\varepsilon \longrightarrow 0$ *si, et seulement si* $\phi_{m+1} = o(\phi_m)$ *lorsque* $\varepsilon \longrightarrow 0$ *pour tous* m.

2.*Si* $\phi_0(\varepsilon)$,$\phi_1(\varepsilon)$,$\cdots$ *est une séquence asymptotique, alors* $f(\varepsilon)$ *a une développement asymptotique à* n *termes, par rapport à cette séquence si, et seulement si*

$$f = \sum_{k=0}^{m} a_k\phi_k + o(\phi_m), \qquad \text{pour } m = 0, 1, \cdots, n \text{ lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{1.27}$$

où les a_k *sont indépendants de* ε. *Dans ce cas, nous écrivons*

$$f \sim a_0\phi_0(\varepsilon) + a_1\phi_1(\varepsilon) + \cdots + a_n\phi_n(\varepsilon), \qquad \text{lorsque } \varepsilon \longrightarrow 0. \tag{1.28}$$

les ϕ_k *sont appelés les fonctions d'échelle.*

Exemple 1.6 *Si on prend l'échelle*

$$\phi_k = \varepsilon^k,\ k = 0, 1, \cdots$$

Alors, (1.28) *s'écrit*

$$f(x, \varepsilon) \sim a_0(x) + a_1(x)\varepsilon + a_2(x)\varepsilon^2 + \cdots + a_n(x)\varepsilon^n.$$

1.5.4 Uniformité

Définition 1.7 *Supposons que* $f(x, \varepsilon)$ *et* $\phi(x, \varepsilon)$ *sont des fonctions continues pour* $x \in I$ *et* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. *Dans ce cas,* $\phi(x, \varepsilon)$ *est une approximation asymptotique uniformément valide de* $f(x, \varepsilon)$ *pour* $x \in I$ *lorsque* $\varepsilon \longrightarrow 0$ *si, étant donné une constante positive* δ, *il y a un* ε_2 *(indépendant de* x *et* ε*), tel que*

$$|f - \phi| \leq \delta\,|\phi|, \qquad \text{pour } x \in I \text{ et } 0 < \varepsilon < \varepsilon_2.$$

Le point critique dans cette définition, est qu'il est possible de trouver un intervalle ouvert près de $\varepsilon = 0$ *(spécifiquement,* $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$*), de sorte que l'inégalité est valable pour toutes les valeurs de* x *qui sont à l'étude. C'est essentiellement l'idée utilisée pour définir la convergence uniforme.*

Remarque 1.8 *Voir le livre de* M. H. Holmes [2] *et* J. Kevorkian, J. D. Cole [4], *pour plus de détaille sur les notions d'analyse asymptotique.*

Chapitre 2

Equation des ondes perturbée

2.1 Position du problème

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation d'onde avec un terme de dispersion linéaire et dépendant de le variable spatiale

$$u_{tt} - u_{xx} + \varepsilon u \sin x = 0, \qquad 0 \leq x \leq \pi. \tag{2.1}$$

Le paramètre $\varepsilon > 0$, est supposé petit.

Dans ce modèle, on suppose que le support élastique de l'onde (i.e., la corde) exerce une force de rappel proportionnelle à $\sin x$. Nous supposons que la corde est fixée aux extrémités $x = 0$, $x = \pi$

$$u(0, t; \varepsilon) = u(\pi, t; \varepsilon) = 0, \tag{2.2}$$

et on prend des conditions initiales régulieres pour le déplacement et la vitesse

$$u(x, 0; \varepsilon) = f(x), \tag{2.3}$$

$$u_t(x, 0; \varepsilon) = g(x). \tag{2.4}$$

2.2 Séparation des variables et problème de valeurs propres perturbé

La séparation des variables conduit à un problème de valeurs propres tout comme pour le cas non perturbé. Nous supposons que la solution s'écrit sous la forme

$$u(x, t; \varepsilon) = X(x; \varepsilon)T(t; \varepsilon). \tag{2.5}$$

En calculant les dérivées, on obtient

$$u_{tt} = \frac{d^2T}{dt^2}X(x;\varepsilon) \ , \ u_{xx} = \frac{d^2X}{dx^2}T(t;\varepsilon),$$

et l'équation (2.1), devient

$$\frac{d^2T}{dt^2}X(x;\varepsilon) - \frac{d^2X}{dx^2}T(t;\varepsilon) + \varepsilon X(x;\varepsilon)T(t;\varepsilon)\sin x = 0.$$

On divise par $-TX$, on obtient

$$-\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} = -\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} + \varepsilon \sin x = \lambda = constant. \tag{2.6}$$

Pour avoir des solutions bornées en t, il faut que $\lambda > 0$. Donc $X(x;\varepsilon)$ est solution du problème de valeurs propres perturbé suivant

$$\begin{cases} L_\varepsilon(X) \equiv -\dfrac{d^2X}{dx^2} + \varepsilon\,(\sin x)\,X = \lambda X, \\ X(0;\varepsilon) = 0, \\ X(\pi;\varepsilon) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

On définit, le produit scalaire de deux fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ définies en $(0,\pi)$, par

$$(\alpha,\beta) = \int_0^\pi \alpha(x)\beta(x)dx.$$

L'opérateur linéaire L dans (2.7) est auto-adjoint dans le sens suivant.

Proposition 2.1 *Soient $u(x)$ et $v(x)$ sont deux solutions quelconques du problème de valeurs propres, c'est-à-dire $L_\varepsilon(u) = \lambda u$ ou $L_\varepsilon(v) = \lambda v$. Alors*

$$(u, L_\varepsilon(v)) = (L_\varepsilon(u), v). \tag{2.8}$$

Démonstration. Pour prouver (2.8), considérons $(u, L_\varepsilon(v))$ pour notre exemple (2.7). On a

$$(u, L_\varepsilon(v)) = -\int_0^\pi u(x)v''(x)dx + \varepsilon\int_0^\pi u(x)v(x)\sin x dx,$$

L'intégration du premier terme du côté droit par parties, donne

$$(u, L_\varepsilon(v)) = -\left. u(x)v'(x)\right|_0^\pi + \int_0^\pi u^{'}(x)v'(x)dx + \varepsilon\int_0^\pi u(x)v(x)\sin x dx,$$

On a $u(0) = u(\pi) = 0$, donc

$$(u, L_\varepsilon(v)) = \int_0^\pi u'(x)v'(x)dx + \varepsilon\int_0^\pi u(x)v(x)\sin x dx,$$

On intègre par parties encore, et on utilise le fait que $v(0) = v(\pi) = 0$, on trouve

$$\begin{aligned}(u, L_\varepsilon(v)) &= u'(x)v(x)|_0^\pi - \int_0^\pi u''(x)v(x)dx + \varepsilon \int_0^\pi u(x)v(x)\sin x dx,\\ &= -\int_0^\pi u''(x)v(x)dx + \varepsilon \int_0^\pi u(x)v(x)\sin x dx.\end{aligned}$$

Alors

$$(u, L_\varepsilon(v)) = (L_\varepsilon(u), v).$$

■

Corollaire 2.2 *Soient u_m et u_n deux fonctions propres de L_ε associées respectivement aux valeurs propres distinctes λ_m et λ_n. Alors, u_m et u_n sont orthogonales, i.e.*

$$(u_m, u_n) = 0.$$

Démonstration. Pour prouver cette condition d'orthogonalité, nous notons

$$(u_m, L(u_n)) = (u_m, \lambda_n u_n) = \lambda_n (u_m, u_n),$$

Mais puisque L est auto-adjoint, nous avons aussi

$$(u_m, L(u_n)) = (L(u_m), u_n) = (\lambda_m u_m, u_n) = \lambda_m (u_m, u_n),$$

Nous avons montré que

$$\lambda_n (u_m, u_n) = \lambda_m (u_m, u_n),$$

Par conséquent, si $\lambda_m \neq \lambda_n$, nous devons avoir

$$(u_m, u_n) = 0.$$

■

Remarque 2.3 *Les idées ci-dessus s'appliquent à des opérateurs plus généraux que celui en* (2.7) *et à des variables plus indépendantes, Voir* [1, 6].

2.3 Solution asymptotique du problème de valeurs propres

Dans cette section, on veut résoudre asymptotiquement le problème (2.7) avec deux méthodes.

2.3.1 Valeurs et fonctions propres du problème non perturbé

Les valeurs propres du problème non perturbé

$$\begin{cases} L_0(X) \equiv -\dfrac{d^2X}{dx^2} = \lambda X, \\ X(0;0) = 0, \\ X(\pi;0) = 0. \end{cases}$$

sont

$$\boxed{\lambda_n^{(0)} = n^2, \qquad \text{pour } n = 1, 2, \cdots}$$

les fonctions propres orthogonales associées sont $c_n \sin nx$, où les constantes c_n sont arbitraires. Il est commode de choisir $c_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$ pour travailler des fonctions propres normalisées

$$\boxed{\xi_n^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \qquad \text{pour } n = 1, 2, \cdots} \tag{2.9}$$

a pour lequel

$$\begin{aligned} \left\|\xi_n^{(0)}\right\|^2_{L^2(0,\pi)} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos 2nx dx \\ &= \frac{1}{\pi}x\Big|_0^\pi - \frac{1}{n\pi}\sin 2nx\Big|_0^\pi = 1. \end{aligned}$$

2.3.2 Valeurs et fonctions propres du problème perturbé I

Pour le problème perturbé (2.7), on suppose que les valeurs propres $\lambda_n(\varepsilon)$, et les fonctions propres $\xi_n(x;\varepsilon)$, ont les développements régulières

$$\lambda_n(\varepsilon) = n^2 + \varepsilon\lambda_n^{(1)} + O(\varepsilon^2), \tag{2.10}$$

$$\xi_n(x;\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx + \varepsilon\xi_n^{(1)}(x) + O(\varepsilon^2), \tag{2.11}$$

Substituer ces développements en (2.7), donne

$$L(\xi_n) = \lambda_n\xi_n = -\frac{d^2\xi_n}{dx^2} + \varepsilon\sin x\xi_n,$$

On a

$$\frac{d\xi_n}{dx} \sim n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nx + \varepsilon\frac{d\xi_n^{(1)}}{dx} \text{ et } -\frac{d^2\xi_n}{dx^2} \sim n^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx - \varepsilon\frac{d^2\xi_n^{(1)}}{dx^2},$$

Donc, (2.11) s'écrit

$$n^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx - \varepsilon\frac{d^2\xi_n^{(1)}}{dx^2} + \varepsilon\sin x\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx + \varepsilon\xi_n^{(1)}(x)\right)$$
$$= \left(n^2 + \varepsilon\lambda_n^{(1)} + O(\varepsilon^2)\right)\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx + \varepsilon\xi_n^{(1)}(x) + O(\varepsilon^2)\right),$$

D'où

$$n^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx - \varepsilon\frac{d^2\xi_n^{(1)}}{dx^2} + \varepsilon\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x\sin nx$$
$$= n^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx + n^2\varepsilon\xi_n^{(1)}(x) + \varepsilon\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda_n^{(1)}\sin nx + O(\varepsilon^2).$$

L'équation d'ordre $O(\varepsilon)$, est donnée par

$$-\frac{d^2\xi_n^{(1)}}{dx^2} + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x\sin nx = n^2\xi_n^{(1)}(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda_n^{(1)}\sin nx,$$

i.e.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi_n^{(1)}}{dx^2} + n^2\xi_n^{(1)}(x) = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\lambda_n^{(1)}\sin nx + \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin x\sin nx, \\ \xi_n^{(1)}(0) = \xi_n^{(1)}(\pi) = 0, \qquad \text{pour tout } n = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{2.12}$$

Résolution de l'équation différentielle (2.12)

La solution homogène, est donnée sous la forme

$$\xi_{nh}^{(1)} = A_n\cos nx + B_n\sin nx.$$

Pour trouver la solution particulière, on développe le produit $\sin x\sin nx$ dans le second membre de (2.12), il vient

$$\frac{d^2\xi_n^{(1)}}{dx^2} + n^2\xi_n^{(1)}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda_n^{(1)}\sin nx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n-1)x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n+1)x. \tag{2.13}$$

Donc, la solution particulière est la somme des trois fonctions suivantes

$$\begin{aligned} \xi_{np_1}^{(1)} &= C_n x\sin nx + C_n' x\cos nx, \\ \xi_{np_2}^{(1)} &= D_n\cos(n-1)x + D_n'\sin(n-1)x, \\ \xi_{np_3}^{(1)} &= E_n\cos(n+1)x + E_n'\sin(n+1)x, \end{aligned}$$

On a

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2\xi^{(1)}_{nh}}{dx^2} &= -n^2A_n\cos nx - n^2B_n\sin nx,\\
\frac{d^2\xi^{(1)}_{np_1}}{dx^2} &= (2nC_n - n^2C'_nx)\cos nx + (-2nC'_n - n^2C_nx)\sin nx,\\
\frac{d^2\xi^{(1)}_{np_2}}{dx^2} &= -(n-1)^2D_n\cos(n-1)x - (n-1)^2D'_n\sin(n-1)x,\\
\frac{d^2\xi^{(1)}_{np_3}}{dx^2} &= -(n+1)^2E_n\cos(n+1)x - (n+1)^2E'_n\sin(n+1)x,
\end{aligned}
$$

En substituant ces formules dans (2.13), on trouve

$$
\begin{aligned}
&2nC_n\cos nx - 2nC'_n\sin nx + (2n-1)D_n\cos(n-1)x\\
&\quad + (2n-1)D'_n\sin(n-1)x - (2n+1)E_n\cos(n+1)x - (2n+1)E'_n\sin(n+1)x\\
&\qquad = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda^{(1)}_n\sin nx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n-1)x - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n+1)x,
\end{aligned}
$$

Par identification, on obtient

$$
\left\{\begin{array}{lcl}
2nC_n &=& 0,\\
-2nC'_n &=& -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda^{(1)}_n,\\
(2n-1)D_n &=& \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\\
(2n-1)D'_n &=& 0,\\
-(2n+1)E_n &=& -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\\
-(2n+1)E'_n &=& 0,
\end{array}\right.
\Longrightarrow
\left\{\begin{array}{lcl}
C_n &=& 0,\\
C'_n &=& \frac{1}{2n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lambda^{(1)}_n,\\
D_n &=& \frac{1}{2(2n-1)}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\\
D'_n &=& 0,\\
E_n &=& \frac{1}{2(2n+1)}\sqrt{\frac{2}{\pi}},\\
E'_n &=& 0,
\end{array}\right.
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\xi^{(1)}_n(x) = A_n\cos nx + B_n\sin nx + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\lambda^{(1)}_n}{2n}x\cos nx&\\
+ \frac{1}{2(2n-1)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n-1)x + \frac{1}{2(2n+1)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n+1)x&,
\end{aligned}
$$

D'où, la solution générale est

$$
\boxed{\begin{array}{l}\xi^{(1)}_n(x) = A_n\cos nx + B_n\sin nx + \frac{\lambda^{(1)}_n}{n\sqrt{2\pi}}x\cos nx +\\ \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2\pi}}\cos(n-1)x + \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2\pi}}\cos(n+1)x.\end{array}} \tag{2.14}
$$

Les conditions aux limites $\xi^{(1)}_n(0) = \xi^{(1)}_n(\pi) = 0$, déterminent A_n et $\lambda^{(1)}_n$, mais les B_n restent arbitraires.

- **Calcul des A_n** : On a

$$\xi_n^{(1)}(0) = 0 \Longleftrightarrow A_n + \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2\pi}} = 0,$$

Donc

$$\boxed{A_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{(2n-1)} + \frac{1}{(2n+1)}\right] = \frac{-4n}{\sqrt{2\pi}\,(4n^2-1)}.} \tag{2.15}$$

- **Calcul des $\lambda_n^{(1)}$** : On a

$$\xi_n^{(1)}(\pi) = 0 \Longleftrightarrow \frac{-4n(-1)^n}{\sqrt{2\pi}\,(4n^2-1)} + \frac{\lambda_n^{(1)}(-1)^n\pi}{n\sqrt{2\pi}} = \frac{-1}{(2n-1)\sqrt{2\pi}}(-1)^{n-1} - \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2\pi}}(-1)^{n+1},$$

Si n pair

$$\frac{-4n}{\sqrt{2\pi}\,(4n^2-1)} + \frac{\lambda_n^{(1)}\pi}{n\sqrt{2\pi}} = \frac{4n}{\sqrt{2\pi}\,(4n^2-1)},$$

Donc

$$\boxed{\lambda_n^{(1)} = \frac{8n^2}{(4n^2-1)\,\pi}.} \tag{2.16}$$

Si n impair

$$\frac{4n}{\sqrt{2\pi}\,(4n^2-1)} - \frac{\lambda_n^{(1)}\pi}{n\sqrt{2\pi}} = -\frac{4n}{\sqrt{2\pi}\,(4n^2-1)}.$$

On trouve la même résultat (2.16).

- **Calcul des B_n** : L'indétermination du B_n est une conséquence directe du fait qu'une fonction propre à un multiplicateur constant arbitraire. Nous pouvons fixer cette constante en normalisant les fonctions propres perturbées, comme nous l'avons fait avec $\xi_n^{(0)}$. Rappelons que

$$\xi_n(x;\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx + \varepsilon\xi_n^{(1)}(x) + O(\varepsilon^2) = \xi_n^{(0)} + \varepsilon\xi_n^{(1)} + O(\varepsilon^2),$$

Donc

$$\begin{aligned} \|\xi_n\|^2_{L^2(0,\pi)} &= (\xi_n, \xi_n) \\ &= (\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(0)}) + (\xi_n^{(0)}, \varepsilon\xi_n^{(1)}) + (\varepsilon\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(0)}) + O(\varepsilon^2) \\ &= (\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(0)}) + 2\varepsilon(\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

On imposant la condition d'orthogonalité

$$(\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}) = 0, \tag{2.17}$$

On obtient directement

$$(\xi_n, \xi_n) = 1 + O(\varepsilon^2).$$

Multipliant l'développement (2.14) de $\xi_n^{(1)}$ par $\xi_n^{(0)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$, on trouve

$$\begin{aligned}
\xi_n^{(1)}(x).\xi_n^{(0)}(x) &= B_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin^2 nx + A_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\cos nx + \\
&\frac{\lambda_n^{(1)}}{n\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\cos nx\sin nx + \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n-1)x\sin nx \\
&+\frac{1}{(2n+1)\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n+1)x\sin nx \\
&= \frac{1}{2}B_n\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{1}{2}B_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos 2nx + A_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\cos nx \\
&+\frac{\lambda_n^{(1)}}{n\pi}x\cos nx\sin nx + \frac{1}{(2n-1)\pi}\cos(n-1)x\sin nx \\
&+\frac{1}{(2n+1)\pi}\cos(n+1)x\sin nx,
\end{aligned}$$

On intègre le résultat de 0 à π

$$\begin{aligned}
(\xi_n^{(1)},\xi_n^{(0)}) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}B_n - \frac{1}{2}B_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \cos 2nxdx + A_n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\pi \sin 2nxdx \\
&+\frac{\lambda_n^{(1)}}{n\pi}\int_0^\pi x\cos nx\sin nxdx + \frac{1}{(2n-1)\pi}\int_0^\pi \cos(n-1)x\sin nxdx \\
&+\frac{1}{(2n+1)\pi}\int_0^\pi \cos(n+1)x\sin nxdx, \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

On a

$$\int_0^\pi \cos 2nxdx = \int_0^\pi \sin 2nxdx = 0.$$

Pour les trois derniers intégraux, on applique l'intégration par partie.

En effet

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2n-1)\pi}\int_0^\pi \cos(n-1)x\sin nxdx &= \frac{-1}{n(2n-1)\pi}\cos(n-1)x\cos nx\Big|_0^\pi \\
&-\frac{n-1}{n(2n-1)\pi}\int_0^\pi \sin(n-1)x\cos nxdx \\
&= \frac{-1}{2n(2n-1)\pi}[\cos(2n-1)x+\cos(-x)]\Big|_0^\pi \\
&-\frac{n-1}{n(2n-1)\pi}\int_0^\pi \sin(n-1)x\cos nxdx \\
&= 0 - \frac{n-1}{n(2n-1)\pi}\int_0^\pi \sin(n-1)x\cos nxdx,
\end{aligned}$$

Une autre intégration, donne

$$\begin{aligned}
-\frac{n-1}{n(2n-1)\pi}\int_0^\pi \sin(n-1)x\cos nx dx &= -\frac{n-1}{n^2(2n-1)\pi}\sin(n-1)x\sin nx\Big|_0^\pi \\
&\quad +\frac{(n-1)^2}{n^2(2n-1)\pi}\int_0^\pi \cos(n-1)x\sin nx dx \\
&= \frac{n-1}{2n^2(2n-1)\pi}\left[\cos(-x)-\cos(2n-1)x\right]\Big|_0^\pi \\
&\quad +\frac{(n-1)^2}{n^2(2n-1)\pi}\int_0^\pi \cos(n-1)x\sin nx dx \\
&= \frac{(n-1)^2}{n^2(2n-1)\pi}\int_0^\pi \cos(n-1)x\sin nx dx.
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{(2n-1)\pi}\int_0^\pi \cos(n-1)x\sin nx dx = \frac{(n-1)^2}{n^2(2n-1)\pi}\int_0^\pi \cos(n-1)x\sin nx dx,$$

D'où

$$\int_0^\pi \cos(n-1)x\sin nx dx = 0.$$

De même, en utilisant l'intégration par partie deux fois, on peut démontrer que

$$\int_0^\pi \cos(n+1)x\sin nx dx = 0.$$

Si on impose (2.17), l'équation (2.18) est réduit à

$$(\xi_n^{(1)},\xi_n^{(0)}) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}B_n + \frac{\lambda_n^{(1)}}{n\pi}\int_0^\pi x\cos nx\sin nx dx = 0.$$

Comme $\lambda_n^{(1)}$ est donnée par (2.16), et $\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$, alors

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}B_n = -\frac{4n}{(4n^2-1)\pi^2}\int_0^\pi x\sin 2nx dx$$

i.e.

$$B_n = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{5}{2}}\frac{n}{(4n^2-1)}\int_0^\pi x\sin 2nx dx,$$

L'intégration par partie, donne

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi x\sin 2nx dx &= -\frac{x}{2n}\cos 2nx\Big|_0^\pi + \frac{1}{2n}\int_0^\pi \cos 2nx dx \\
&= -\frac{\pi}{2n} + \frac{1}{4n^2}\sin 2nx\Big|_0^\pi,
\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{B_n = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{5}{2}}\left(\frac{\pi}{2n}\right)\frac{n}{(4n^2-1)} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{(4n^2-1)}.} \tag{2.19}$$

Finalement, le développement asymptotique des valeurs propres, est donné par

$$\boxed{\lambda_n(\varepsilon) = n^2 + \varepsilon \frac{8n^2}{(4n^2-1)\pi} + O(\varepsilon^2).}$$

et le développement asymptotique des fonctions propres, est donné par

$$\boxed{\begin{aligned}\xi_n(x;\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx + \varepsilon \Bigg[& A_n \cos nx + B_n \sin nx + \frac{\lambda_n^{(1)}}{n\sqrt{2\pi}} x \cos nx + \\ & \frac{1}{(2n-1)\sqrt{2\pi}} \cos(n-1)x + \frac{1}{(2n+1)\sqrt{2\pi}} \cos(n+1)x \Bigg] + O(\varepsilon^2).\end{aligned}}$$

où, A_n, B_n et $\lambda_n^{(1)}$ données par (2.15), (2.19), et (2.16) respectivement.

2.3.3 Valeurs et fonctions propres du problème perturbé II

Dans de nombreuses applications, la complexité de l'opérateur L ne permet pas d'avoir un résultat explicite tel que (2.14). Une solution moins directe de $\xi_n^{(1)}$, est encore possible si l'on exprime cette fonction par une série de fonctions propres non perturbées.

Dans notre cas, on suppose que

$$\xi_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj} \sin jx, \tag{2.20}$$

où, les coefficients a_{nj} sont à déterminer.

En dérivant terme par terme, on obtient

$$\frac{d^2\xi_n^{(1)}}{dx^2} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{+\infty} j^2 a_{nj} \sin jx,$$

En remplaçant cette formule dans (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d^2\xi_n^{(1)}}{dx^2} + n^2\xi_n^{(1)}(x) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{+\infty} j^2 a_{nj} \sin jx + n^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj} \sin jx \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda_n^{(1)} \sin nx + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x \sin nx,\end{aligned}$$

Pour calculer les a_{nj}, nous multiplions cette expression par $\sin kx$, on trouve

$$\sum_{j=1}^{+\infty} (-j^2+n^2) a_{nj} \sin jx \sin kx = -\lambda_n^{(1)} \sin nx \sin kx + \sin x \sin nx \sin kx,$$

et on intègre terme par terme de 0 à π

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{+\infty} (-j^2+n^2) a_{nj} \int_0^\pi \sin jx \sin kx dx \\ &\qquad = -\lambda_n^{(1)} \int_0^\pi \sin nx \sin kx dx + \int_0^\pi \sin x \sin nx \sin kx dx.\end{aligned}$$

En utilisant l'orthogonalité des fonctions $\sin nx$ dans l'intervalle $(0, \pi)$, on obtient

$$\int_0^\pi \sin jx \sin kx dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j \neq k \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si} \quad j = k \end{cases}$$

Donc, l'expression précédente est réduite à

$$\left(\frac{\pi}{2}\right) a_{nk}(-k^2 + n^2) = -\lambda_n^{(1)} \int_0^\pi \sin nx \sin kx dx + \int_0^\pi \sin x \sin nx \sin kx dx,$$

i.e.

$$a_{nk}(-k^2 + n^2) = -\frac{2}{\pi}\lambda_n^{(1)} \int_0^\pi \sin nx \sin kx dx + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin nx \sin kx dx. \tag{2.21}$$

– **Calcul des a_{nk} si $k \neq n$:**

En utilisant l'orthogonalité des $\sin nx$ pour simplifier le côté droite, on obtient

$$a_{nk}(-k^2 + n^2) = 0 + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin nx \sin kx dx, \qquad \text{si } k \neq n$$

D'où

$$a_{nk} = \frac{2}{\pi(n^2 - k^2)} \int_0^\pi \sin x \sin nx \sin kx dx, \qquad \text{si } k \neq n$$

Reste à évaluer cette intégrale, on a

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin x \sin nx \sin kx dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin x \cos(n-k)x dx - \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin x \cos(n+k)x dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin(1+n-k)x dx + \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin(1-n+k)x dx \\ &- \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin(1+n+k)x dx - \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin(1-n-k)x dx. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin(1+n-k)x dx &= -\frac{1}{4(1+n-k)} \cos(1+n-k)x \Big|_0^\pi \\ &= \frac{-(-1)^{1+n-k} + 1}{4(1+n-k)} \\ &= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-k} + 1}{4(1+n-k)} & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } k \neq n-1, \\ 0 & \text{si} \quad k = n \pm 1, \end{cases} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_0^\pi \sin(1-n+k)x dx &= -\frac{1}{4(1-n+k)} \cos(1-n+k)x \Big|_0^\pi \\ &= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k-n} + 1}{4(1-n+k)} & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } k \neq n-1, \\ 0 & \text{si} \quad k = n \pm 1. \end{cases} \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(1+n+k)xdx &= \frac{1}{4(1+n+k)}\cos(1+n+k)x\Big|_0^\pi \\
&= \begin{cases} \dfrac{-(-1)^{n+k}-1}{4(1+n+k)} & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } k \neq n-1, \\ 0 & \text{si} \quad k = n \pm 1, \end{cases}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(1-n-k)xdx &= \frac{1}{4(1-n-k)}\cos(1-n-k)x\Big|_0^\pi \\
&= \begin{cases} \dfrac{-(-1)^{-n-k}-1}{4(1-n-k)} & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } k \neq n-1, \\ 0 & \text{si} \quad k = n \pm 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, si $k \neq n+1$ et $k \neq n-1$, le second membre de (2.22) est égale à

$$\begin{aligned}
&\frac{(-1)^{n-k}+1}{4(1+n-k)} + \frac{(-1)^{k-n}+1}{4(1-n+k)} - \frac{(-1)^{n+k}+1}{4(1+n+k)} - \frac{(-1)^{-(n+k)}+1}{4(1-n-k)} \\
&= \frac{((-1)^{k-n}+1)(1+k-n) + ((-1)^{k-n}+1)(1-k+n)}{4(1-(k-n)^2)} - \\
&\frac{((-1)^{n+k}+1)(1-k-n) + ((-1)^{n+k}+1)(1+k+n)}{4(1-(k+n)^2)} \\
&= \frac{(-1)^{n+k}+1}{2((k+n)^2-1)} - \frac{(-1)^{k-n}+1}{2((k-n)^2-1)},
\end{aligned}$$

D'où, si $k \neq n$, on a

$$\boxed{a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n^2-k^2)}\left[\dfrac{(-1)^{n+k}+1}{(k+n)^2-1} - \dfrac{(-1)^{k-n}+1}{(k-n)^2-1}\right] & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } k \neq n-1, \\ 0, & \text{si} \quad k = n \pm 1. \end{cases}} \tag{2.23}$$

– **Calcul des $\lambda_n^{(1)}$:**

Si $k = n$: dans (2.21), on trouve

De (2.21), on trouve

$$0 = -\frac{2}{\pi}\lambda_n^{(1)}\int_0^\pi \sin^2 nxdx + \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin^2 nxdx,$$

et comme

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2 nxdx = 1,$$

on déduit que

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin^2 nxdx,$$

Comme $\sin^2 nx = \frac{1}{2}(1-\cos 2nx)$, on obtient

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x dx - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos 2nx dx = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin x \cos 2nx dx,$$

Reste à évaluer le dernier intégrale, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x \cos 2nx dx &= -\cos 2nx \cos x|_0^\pi - 2n\int_0^\pi \cos x \sin 2nx dx \\ &= -\frac{1}{2}\left[\cos(2n+1)x + \cos(2n-1)x\right]\Big|_0^\pi - 2n\int_0^\pi \cos x \sin 2nx dx \\ &= 2 - 2n\int_0^\pi \cos x \sin 2nx dx,\end{aligned}$$

Une autre intégration par partie, donne

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x \cos 2nx dx &= 2 - 2n \sin 2nx \sin x|_0^\pi + 4n^2\int_0^\pi \sin x \cos 2nx dx \\ &= 2 - 4n^2\int_0^\pi \sin x \cos 2nx dx,\end{aligned}$$

i.e.

$$\int_0^\pi \sin x \cos 2nx dx = \frac{2}{1-4n^2}.$$

Donc

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{(1-4n^2)\pi},$$

i.e.

$$\boxed{\lambda_n^{(1)} = \frac{8n^2}{(4n^2-1)\pi},}$$

Donc, on retrouve l'expression précédemment dérivée (2.16), pour $\lambda_n^{(1)}$.

– **Calcul des a_{nn} :**

À ce stade, les a_{nn} sont arbitraires. Nous fixons ces coefficients en imposant la condition d'orthogonalité $(\xi_n^{(0)}, \xi_n^{(1)}) = 0$, en utilisant (2.20), cela veut dire

$$\int_0^\pi \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx.\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj}\sin jx\right) dx = 0. \tag{2.24}$$

En utilisant l'orthogonalité des fonctions $\sin nx$ dans $(0,\pi)$, on doit avoir

$$\boxed{a_{nn} = 0, \qquad \text{pour } n = 1, 2, ...}$$

Donc

$$\boxed{\xi_n^{(1)}(x) = \sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj}\sin jx.}$$

avec

$$a_{nj} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n^2-j^2)}\left[\dfrac{(-1)^{n+j}+1}{(j+n)^2-1} - \dfrac{(-1)^{j-n}+1}{(j-n)^2-1}\right] & \text{si} \quad j \neq n+1 \text{ et } j \neq n-1, \\ 0. & \text{si} \quad j = n \pm 1 \text{ ou } j = n. \end{cases} \tag{2.25}$$

Finalement, le développement asymptotique des valeurs propres, est donné par

$$\boxed{\lambda_n\left(\varepsilon\right) = n^2 + \varepsilon \frac{8n^2}{\left(4n^2-1\right)\pi} + O(\varepsilon^2).}$$

et le développement asymptotique des fonctions propres est donné par

$$\boxed{\xi_n(x;\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx + \varepsilon\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj}\sin jx.}$$

avec, a_{nj} est donné par (2.25).

2.4 Solution asymptotique de l'équation d'onde I

Pour résoudre le problème de la valeur initiale (2.1) − (2.4), nous exprimons $u(x,t;\varepsilon)$ comme une série des fonctions propres ξ_n, i.e.

$$u(x,t;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n(t;\varepsilon)\xi_n(x;\varepsilon). \tag{2.26}$$

En substituant cela en (2.1), et en notant que ξ_n satisfait (2.7), et que

$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^2\rho_n}{dt^2}\xi_n,\ u_{xx} = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n \frac{d^2\xi_n}{dx^2},$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^2\rho_n}{dt^2}\xi_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \rho_n\left(-\frac{d^2\xi_n}{dx^2} + \varepsilon\sin x\xi_n\right) = 0.$$

De (2.7), on a

$$-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^2\xi_n}{dx^2} + \varepsilon\sin x\xi_n = \lambda_n\xi_n,$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d^2\rho_n}{dt^2}\xi_n + \lambda_n\rho_n\xi_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{d^2\rho_n}{dt^2} + \lambda_n\rho_n\right)\xi_n = 0,$$

Comme les ξ_n sont orthogonales, on déduit que

$$\frac{d^2\rho_n}{dt^2} + \lambda_n\rho_n = 0, \qquad \text{pour } n = 1, 2, \cdots$$

C'est une équation différentielle homogène pour chaque $n = 1,2,\cdots$, dont la solution s'écrit sous la forme

$$\rho_n(t;\varepsilon) = \alpha_n(\varepsilon)\sin\sqrt{\lambda_n}t + \beta_n(\varepsilon)\cos\sqrt{\lambda_n}t. \tag{2.27}$$

Puisque nous avons déterminé λ_n et ξ_n à $O(\varepsilon)$, il est approprié de développer α_n et β_n en termes de ε, et de ne retenir que les termes jusqu'à $O(\varepsilon)$. Ainsi, nous supposons que

$$\alpha_n(\varepsilon) = \alpha_n^{(0)} + \varepsilon\alpha_n^{(1)} + O(\varepsilon^2), \tag{2.28}$$

$$\beta_n(\varepsilon) = \beta_n^{(0)} + \varepsilon\beta_n^{(1)} + O(\varepsilon^2). \tag{2.29}$$

et on veut obtenir le développement asymptotique suivante u correcte à l'ordre $O(\varepsilon)$.

Pour trouver $\alpha_n^{(0)}$, $\alpha_n^{(1)}$, $\beta_n^{(0)}$ et $\beta_n^{(1)}$, on rappelle que

$$\xi_n(x;\varepsilon) = \xi_n^{(0)}(x) + \varepsilon\xi_n^{(1)}(x) + O(\varepsilon^2).$$

Ensuite, on utilise (2.28) et (2.29) dans (2.26), on trouve

$$\begin{aligned} u(x,t;\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\Big\{\Big[\big(\alpha_n^{(0)} + \varepsilon\alpha_n^{(1)} + O(\varepsilon^2)\big)\sin\sqrt{\lambda_n}t + \Big(\beta_n^{(0)} + \varepsilon\beta_n^{(1)} + O(\varepsilon^2)\Big)\cos\sqrt{\lambda_n}t\Big] \\ &\qquad\qquad \times\Big(\xi_n^{(0)}(x) + \varepsilon\xi_n^{(1)}(x) + O(\varepsilon^2)\Big)\Big\} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\alpha_n^{(0)}\sin\sqrt{\lambda_n}t + \beta_n^{(0)}\cos\sqrt{\lambda_n}t + \varepsilon\alpha_n^{(1)}\sin\sqrt{\lambda_n}t + \varepsilon\beta_n^{(1)}\cos\sqrt{\lambda_n}t\Big) \\ &\qquad\qquad \times\Big(\xi_n^{(0)}(x) + \varepsilon\xi_n^{(1)}(x)\Big) + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} u(x,t;\varepsilon) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\alpha_n^{(0)}\sin\sqrt{\lambda_n}t + \beta_n^{(0)}\cos\sqrt{\lambda_n}t\Big)\xi_n^{(0)}(x) \\ &+ \varepsilon\sum_{n=1}^{+\infty}\Big\{\Big(\alpha_n^{(1)}\sin\sqrt{\lambda_n}t + \beta_n^{(1)}\cos\sqrt{\lambda_n}t\Big)\xi_n^{(0)}(x) + \Big(\alpha_n^{(0)}\sin\sqrt{\lambda_n}t + \beta_n^{(0)}\cos\sqrt{\lambda_n}t\Big)\xi_n^{(1)}(x)\Big\} \\ &+ O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

De (2.10), on a

$$\lambda_n(\varepsilon) = n^2 + \varepsilon\lambda_n^{(1)} + O(\varepsilon^2), \qquad \text{où} \ \ \lambda_n^{(1)} = \frac{8n^2}{(4n^2-1)\,\pi}.$$

En particulier

$$\sqrt{\lambda_n}\,(\varepsilon) = \left[n^2\left(1 + \frac{\varepsilon}{n^2}\frac{8n^2}{(4n^2-1)\,\pi} + O\left(\varepsilon^2\right)\right)\right]^{\frac{1}{2}} = n + \varepsilon\frac{4n}{(4n^2-1)\,\pi} + O\left(\varepsilon^2\right).$$

Pour simplifier les notations, on pose

$$\boxed{\omega_n^{(1)}(\varepsilon) = n + \varepsilon \frac{4n}{(4n^2-1)\,\pi} + O(\varepsilon^2),} \tag{2.30}$$

Donc, $u(x,t;\varepsilon)$ s'écrit

$$\begin{aligned} u(x,t;\varepsilon) \quad = \quad & \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n^{(0)} \sin \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t + \beta_n^{(0)} \cos \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t\right) \xi_n^{(0)}(x) + \\ & \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left[\alpha_n^{(1)} \sin \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t + \beta_n^{(1)} \cos \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t\right] \xi_n^{(0)}(x) + \right. \\ & \left. \left[\alpha_n^{(0)} \sin \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t + \beta_n^{(0)} \cos \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t\right] \xi_n^{(1)}(x) \right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Remarque 2.4 *Il est important de noter qu'en approchant* $\sin\sqrt{\lambda_n}t$ *et* $\cos\sqrt{\lambda_n}t$ *par* $\sin \omega_n^{(1)} t$ *et* $\cos \omega_n^{(1)} t$*, respectivement, on évite les non-uniformités pour* t *large. Par exemple, le développement de Taylor lorsque* $\varepsilon \to 0$*, donne*

$$\sin\sqrt{\lambda_n}t = \sin\left(nt + \varepsilon \frac{4nt}{(4n^2-1)\,\pi}\right) = \sin nt + (\varepsilon t)\, \frac{4n}{(4n^2-1)\,\pi} \cos nt + O(\varepsilon^2).$$

qui est uniformément valide à l'ordre $O(\varepsilon)$ *dans tout intervalle*

$$I(\varepsilon) : 0 \le t \le T(\varepsilon) \ \textit{tant que} \ T(\varepsilon) = O(1) \ \textit{lorsque} \ \varepsilon \to 0.$$

i.e., le deuxième terme $(\varepsilon t)\, \frac{4n}{(4n^2-1)\pi} \cos nt = O(\varepsilon)$*, est négligeable par rapport à* $\sin nt = O(1)$*. Il ne peut pas être uniforme si* $T(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{-1}\right)$*, dans ce cas* $(\varepsilon t)\, \frac{4n}{(4n^2-1)\pi} \cos nt = O(1)$ *qui est le même ordre de* $\sin nt$*. D'autre part, l'approximation*

$$\sin\sqrt{\lambda_n}\,(\varepsilon)\,t = \sin \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t + O\left(\varepsilon^2\right)$$

est uniformément valide à $O\left(\varepsilon\right)$ *en* $I(\varepsilon)$*, avec* $T(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{-1}\right)$*.*

Calcul des α_n et β_n

Appliquons les conditions initiales (2.3) et (2.4) à l'expression (2.31).

Pour $t = 0$, on a

$$\begin{aligned} u\,(x,0,\varepsilon) = & \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n^{(0)} \sin(0) + \beta_n^{(0)} \cos(0)\right) \xi_n^{(0)}(x) \\ & + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left[\alpha_n^{(1)} \sin(0) + \beta_n^{(1)} \cos(0)\right] \xi_n^{(0)}(x) + \left[\alpha_n^{(0)} \sin(0) + \beta_n^{(0)} \cos(0)\right] \xi_n^{(1)}(x) \right\} \\ & \qquad + O(\varepsilon^2) = f(x), \end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n^{(0)}\xi_n^{(0)}(x)+\varepsilon\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\beta_n^{(1)}\xi_n^{(0)}(x)+\beta_n^{(0)}\xi_n^{(1)}(x)\right)+O(\varepsilon^2)=f(x). \tag{2.32}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}u_t(x,t;\varepsilon)=&\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha_n^{(0)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\cos\omega_n^{(1)}(\varepsilon)t-\beta_n^{(0)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\sin\omega_n^{(1)}(\varepsilon)t\right]\xi_n^{(0)}(x)\\&+\varepsilon\sum_{n=1}^{+\infty}\Big\{\left[\alpha_n^{(1)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\cos\omega_n^{(1)}(\varepsilon)t-\beta_n^{(1)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\sin\omega_n^{(1)}(\varepsilon)t\right]\xi_n^{(0)}(x)\\&\qquad+\left[\alpha_n^{(0)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\cos\omega_n^{(1)}(\varepsilon)t-\beta_n^{(0)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\sin\omega_n^{(1)}(\varepsilon)t\right]\xi_n^{(1)}(x)\Big\}+O(\varepsilon^2),\end{aligned}$$

et pour $t=0$, on a

$$\begin{aligned}u_t(x,0;\varepsilon)=&\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\alpha_n^{(0)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\cos(0)-\beta_n^{(0)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\sin(0)\right]\xi_n^{(0)}(x)+\\&\varepsilon\sum_{n=1}^{+\infty}\Big\{\left[\alpha_n^{(1)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\cos(0)-\beta_n^{(1)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\sin(0)\right]\xi_n^{(0)}(x)+\\&\qquad\left[\alpha_n^{(0)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\cos(0)-\beta_n^{(0)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\sin(0)\right]\xi_n^{(1)}(x)\Big\}+O(\varepsilon^2)=g(x),\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n^{(0)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\xi_n^{(0)}(x)+\varepsilon\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\alpha_n^{(1)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\xi_n^{(0)}(x)+\alpha_n^{(0)}\omega_n^{(1)}(\varepsilon)\xi_n^{(1)}(x)\right)+O(\varepsilon^2)=g(x). \tag{2.33}$$

En utilisant l'expression de $\omega_n^{(1)}(\varepsilon)$, donnée par (2.30), on obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n+\varepsilon\frac{4n}{(4n^2-1)\,\pi}\right)\alpha_n^{(0)}\xi_n^{(0)}(x)\\&+\varepsilon\sum_{n=1}^{+\infty}\left(n+\varepsilon\frac{4n}{(4n^2-1)\,\pi}\right)\left(\alpha_n^{(1)}\xi_n^{(0)}(x)+\alpha_n^{(0)}\xi_n^{(1)}(x)\right)+O(\varepsilon^2)\\=&\sum_{n=1}^{+\infty}n\alpha_n^{(0)}\xi_n^{(0)}(x)\\&+\varepsilon\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{4n}{(4n^2-1)\,\pi}\alpha_n^{(0)}\xi_n^{(0)}(x)+n\alpha_n^{(1)}\xi_n^{(0)}(x)+n\alpha_n^{(0)}\xi_n^{(1)}(x)\right)+O(\varepsilon^2)=g(x),\end{aligned}$$

D'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty}n\alpha_n^{(0)}\xi_n^{(0)}(x)+\varepsilon\sum_{n=1}^{+\infty}\left\{n\alpha_n^{(0)}\xi_n^{(1)}(x)+\left(n\alpha_n^{(1)}+\frac{4n}{(4n^2-1)\,\pi}\alpha_n^{(0)}\right)\xi_n^{(0)}(x)\right\}+O(\varepsilon^2)=g(x). \tag{2.34}$$

Calcul des $\beta_n^{(0)}$ et $\beta_n^{(1)}$ De (2.32), on a

$$O(1) : \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(0)} \xi_n^{(0)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(0)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx = f(x),$$

qui est la série sinus de Fourier pour la fonction f. Cela nous permet de calculer les coefficients $\beta_n^{(0)}$ par la formule

$$\boxed{\beta_n^{(0)} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx.} \tag{2.35}$$

Comme il n'y a pas de $O(\varepsilon)$ termes du côté droit de (2.32), la série multipliée par ε sur le côté gauche doit disparaître, i.e.

$$O(\varepsilon) : \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\beta_n^{(1)} \xi_n^{(0)}(x) + \beta_n^{(0)} \xi_n^{(1)}(x) \right) = 0.$$

En utilisant les expressions de $\xi_n^{(0)}$ et $\xi_n^{(1)}$ donnée par (2.9) et (2.20), on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\beta_n^{(1)} \sin nx + \beta_n^{(0)} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj} \sin jx \right) = 0. \tag{2.36}$$

On multiplie cette expression par $\sin kx$, on trouve

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(1)} \sin nx \sin kx + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(0)} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj} \sin jx \sin kx \right) = 0.$$

On pose

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(1)} \sin nx \sin kx \text{ et } B = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(0)} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj} \sin jx \sin kx \right),$$

et on intègre cette expression de 0 à π, on obtient

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(1)} \int_0^{\pi} \sin nx \sin kx dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \beta_k^{(1)}, & \text{si} \quad n = k \\ 0, & \text{si} \quad n \neq k \end{cases}$$

D'autre part

$$B = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(0)} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj} \int_0^{\pi} \sin jx \sin kx dx \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(0)} a_{nk} + \left(\sum_{j=1, j\neq k}^{+\infty} a_{nj} \int_0^{\pi} \sin jx \sin kx dx \right)$$

et en utilisant l'orthogonalité des $\sin nx$, le dernier somme est réduite à zéro, donc

$$B = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(0)} a_{nk}.$$

Donc, (2.36) s'écrit

$$\int_0^{\pi} A dx + \int_0^{\pi} B dx = \frac{\pi}{2} \beta_k^{(1)} + \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(0)} a_{nk} = 0,$$

ce qui permet de déterminer les $\beta_k^{(1)}$ par la formule

$$\boxed{\beta_k^{(1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(0)} a_{nk}.} \tag{2.37}$$

puisque $\beta_n^{(0)}$ et a_{nk} sont données par (2.35) et (2.23).

Calcul des $\alpha_n^{(0)}$ et $\alpha_n^{(1)}$ De (2.34), on a

$$O(1) : \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n^{(0)} \xi_n^{(0)}(x) = g(x),$$

et en utilisant l'expression de $\xi_n^{(0)}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n^{(0)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx = g(x),$$

qui est la série sinus de Fourier pour la fonction $g(x)$. Donc

$$\boxed{\alpha_n^{(0)} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} g(x) \sin nx dx.} \tag{2.38}$$

Comme il n'y a pas de termes à $O(\varepsilon)$ du côté droit de (2.34), la série multipliée par ε sur le côté gauche doit disparaître, i.e.

$$O(\varepsilon) : \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ n\alpha_n^{(0)} \xi_n^{(1)}(x) + \left(n\alpha_n^{(1)} + \frac{4n}{(4n^2-1)\pi} \alpha_n^{(0)} \right) \xi_n^{(0)}(x) \right\} = 0,$$

En utilisant les expressions de $\xi_n^{(0)}$ et $\xi_n^{(1)}$ donnée par (2.9) et (2.20), on a

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ n\alpha_n^{(0)} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj} \sin jx + \left(n\alpha_n^{(1)} + \frac{4n}{(4n^2-1)\pi} \alpha_n^{(0)} \right) \sin nx \right\} = 0.$$

On multiplie cette expression par $\sin kx$, on trouve

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n^{(0)} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj} \sin jx \sin kx + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\alpha_n^{(1)} + \frac{4n}{(4n^2-1)\pi} \alpha_n^{(0)} \right) \sin nx \sin kx = 0,$$

On pose

$$\begin{aligned} A' &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n^{(0)} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj} \sin jx \sin kx \right), \\ B' &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\alpha_n^{(1)} + \frac{4n}{(4n^2-1)\pi} \alpha_n^{(0)} \right) \sin nx \sin kx, \end{aligned}$$

On intègre cette expression de 0 à π, on obtient

$$\begin{aligned} A^{'} &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n^{(0)} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj} \int_0^{\pi} \sin jx \sin kx dx \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n^{(0)} a_{nk} \int_0^{\pi} \sin^2 kx dx + \sum_{j=1, j\neq k}^{+\infty} a_{nj} \int_0^{\pi} \sin jx \sin kx dx, \end{aligned}$$

La somme où $j \neq k$ est réduit à zéro, donc

$$A^{'} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n^{(0)} a_{nk}.$$

De même

$$\begin{aligned} B^{'} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n\alpha_n^{(1)} + \frac{4n}{(4n^2-1)\,\pi} \alpha_n^{(0)} \right) \int_0^{\pi} \sin nx \sin kx dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(k\alpha_k^{(1)} + \frac{4k}{(4k^2-1)\,\pi} \alpha_k^{(0)} \right). \end{aligned}$$

Enfin, on a

$$\int_0^{\pi} A dx + \int_0^{\pi} B dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n^{(0)} a_{nk} + \frac{\pi}{2} \left(k\alpha_k^{(1)} + \frac{4k}{(4k^2-1)\,\pi} \alpha_k^{(0)} \right) = 0,$$

Alors, les $\alpha_k^{(1)}$ sont données par

$$\boxed{\alpha_k^{(1)} = -\frac{1}{k} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n^{(0)} a_{nk} \right) - \frac{4k}{(4k^2-1)\,\pi} \alpha_k^{(0)},} \tag{2.39}$$

où les $\alpha_n^{(0)}$ et les a_{nk} sont données par (2.38) et (2.23).

Donc, la solution du problème perturbé (2.1) − (2.4) est donnée par

$$\begin{aligned} u(x,t;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n^{(0)} \sin \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t + \beta_n^{(0)} \cos \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t \right) \xi_n^{(0)}(x) + \\ \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left[\alpha_n^{(1)} \sin \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t + \beta_n^{(1)} \cos \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t \right] \xi_n^{(0)}(x) + \right. \\ \left. \left[\alpha_n^{(0)} \sin \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t + \beta_n^{(0)} \cos \omega_n^{(1)}(\varepsilon)t \right] \xi_n^{(1)}(x) \right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

avec, $\xi_n^{(0)}(x)$, $\xi_n^{(1)}(x)$, $\omega_n^{(1)}$, $\alpha_n^{(0)}$, $\alpha_k^{(1)}$, $\beta_n^{(0)}$ et $\beta_k^{(1)}$ sont donnés par (2.9), (2.20), (2.30), (2.38), (2.39), (2.35) et (2.37) respectivement.

Remarque 2.5 *Une caractéristique du problème linéaire (2.1), est que les amplitudes modales $\rho_n(t)$ obéissent à des équations d'oscillateur découplées, si on exprime la solution en* *fonction des fonctions propres perturbées $\xi_n(x;\varepsilon)$. De plus, la fréquence $\omega_n(\varepsilon)$ d'oscillation pour chaque mode est connue une fois le problème de valeurs propres (2.7) a été résoudre. Cela nous permet d'exprimer la solution sous la forme (2.31), qui reste uniformément valide pour t dans l'intervalle $0 \leq t \leq T(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$.*

2.5 Solution asymptotique de l'équation d'onde II

Il est aussi possible d'exprimer la solution de u en termes de fonctions propres non perturbées $\sin nx$, au prix de ne pas découpler les modes et de ne pas connaître la fréquence a priori. Pour illustrer cela, supposons une solution de (2.1) pour $u(x,t;\varepsilon)$ dans la formulaire

$$u(x,t;\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(t;\varepsilon) \sin nx. \tag{2.40}$$

qui satisfait automatiquement les deux conditions aux limites (2.2). Substituer cette série en (2.1), et en utilisant l'orthogonalité donne immédiatement le système linéaire couplé :

On a

$$u_{tt}(x,t;\varepsilon) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \ddot{\gamma}_n(t;\varepsilon) \sin nx,\ u_{xx}(x,t;\varepsilon) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \gamma_n(t;\varepsilon) \sin nx,$$

Donc, de (2.1) on a

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \ddot{\gamma}_n(t;\varepsilon) \sin nx + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \gamma_n(t;\varepsilon) \sin nx + \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(t;\varepsilon) \sin nx \sin x = 0,$$

avec

$$u(0,t;\varepsilon) = u(\pi,t;\varepsilon) = 0,$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \ddot{\gamma}_n(t;\varepsilon) \sin nx \sin kx + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \gamma_n(t;\varepsilon) \sin nx \sin kx$$
$$+ \varepsilon \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(t;\varepsilon) \sin nx \sin kx \sin x = 0.$$

On multiplie cette équation par $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$, on trouveEn intégrant et en utilisant l'orthogonalité des $\sin nx$ sur $(0,\pi)$, on déduit que

$$\begin{aligned} A'' &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \ddot{\gamma}_n(t;\varepsilon) \int_0^\pi \sin nx \sin kx dx = \ddot{\gamma}_k(t;\varepsilon), \\ B'' &= \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \gamma_n(t;\varepsilon) \int_0^\pi \sin nx \sin kx dx = k^2 \gamma_k(t;\varepsilon), \end{aligned}$$

Reste à calculer

$$C'' = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\gamma_n(t;\varepsilon)\int_0^\pi \sin nx \sin kx \sin x dx,$$

On pose

$$\begin{aligned}
b_{kn} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin x \sin nx \sin kx dx,\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin x\cos(n-k)xdx - \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin x \cos(n+k)xdx\right)\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(1+n-k)xdx + \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(1-n+k)xdx\right.\\
&\quad \left. -\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(1+n+k)xdx - \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(1-n-k)xdx\right),
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(1+n-k)xdx &= -\frac{1}{4(1+n-k)}\cos(1+n-k)x\Big|_0^\pi\\
&= \frac{-(-1)^{1+n-k}+1}{4(1+n-k)}\\
&= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-k}+1}{4(1+n-k)} & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } n-1,\\ 0 & \text{si} \quad k = n \pm 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(1-n+k)xdx &= -\frac{1}{4(1-n+k)}\cos(1-n+k)x\Big|_0^\pi\\
&= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{k-n}+1}{4(1-n+k)} & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } n-1,\\ 0 & \text{si} \quad k = n \pm 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(1+n+k)xdx &= \frac{1}{4(1+n+k)}\cos(1+n+k)x\Big|_0^\pi\\
&= \begin{cases} \dfrac{-(-1)^{n+k}-1}{4(1+n+k)} & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } n-1,\\ 0 & \text{si} \quad k = n \pm 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(1-n-k)xdx &= \frac{1}{4(1-n-k)}\cos(1-n-k)x\Big|_0^\pi\\
&= \begin{cases} \dfrac{-(-1)^{-n-k}-1}{4(1-n-k)} & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } n-1,\\ 0 & \text{si} \quad k = n \pm 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, si $k \neq n+1$ et $k \neq n-1$, on a

$$\begin{aligned} b_{kn} &= \frac{(-1)^{n-k}+1}{4(1+n-k)} + \frac{(-1)^{k-n}+1}{4(1-n+k)} - \frac{(-1)^{n+k}+1}{4(1+n+k)} - \frac{(-1)^{-(n+k)}+1}{4(1-n-k)} \\ &= \frac{((-1)^{k-n}+1)(1+k-n)+((-1)^{k-n}+1)(1-k+n)}{4(1-(k-n)^2)} \\ &- \frac{((-1)^{n+k}+1)(1-k-n)+((-1)^{n+k}+1)(1+k+n)}{4(1-(k+n)^2)} \\ &= \frac{(-1)^{n+k}+1}{2((k+n)^2-1)} - \frac{(-1)^{k-n}+1}{2((k-n)^2-1)}, \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} b_{kn} &= \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left[\dfrac{(-1)^{n+k}+1}{2((k+n)^2-1)} - \dfrac{(-1)^{k-n}+1}{2((k-n)^2-1)}\right] & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } n-1, \\ 0 & \text{si} \quad k = n \pm 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{(-1)^{n+k}+1}{(k+n)^2-1} - \dfrac{(-1)^{k-n}+1}{(k-n)^2-1}\right] & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } n-1, \\ 0 & \text{si} \quad k = n \pm 1. \end{cases} \end{aligned}$$

En utilisant les valeurs de A'', B'' et C'' dans (**??**), on obtient le système couplé qui donne γ_k

$$\ddot{\gamma}_k + k^2\gamma_k + \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} b_{kn}\gamma_n = 0, \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{2.41}$$

Un développement asymptotique régulier de (2.41), conduit à des termes γ_k proportionnels à $t \sin nt$ et $t \cos nt$ à $O(\varepsilon)$, et n'est donc pas uniformément valide à $O(\varepsilon)$ si $T(\varepsilon) = O(\varepsilon^{-1})$.

Bien qu'il soit possible de dériver une développement de perturbation uniformément valide de la solution de (2.41) pour $T = O(\varepsilon^{-1})$, en utilisant une procédure à échelle multiple, voir J. Kevorkian, J. D. Cole [4], l'développement (2.26) basée sur des fonctions propres perturbées est significativement plus élégante et directe.

Remarque 2.6 *Si le terme de perturbation est non linéaire, on ne peut plus déduire un problème de valeurs propres perturbé tel que (2.7). Par exemple, si au lieu de $\varepsilon u \sin x$ dans (2.1), nous avons le terme εu^2, nous ne pouvons pas séparer les variables. Nous pouvons cependant rechercher une solution de la forme (2.40), et dériver un système couplé non linéaire d'équations d'oscillateur pour les γ_n.*

Chapitre 3

Quelques résultats numériques

Dans ce chapitre, on test la validité de l'expression asymptotique (2.31) de la solution du problème (2.1) − (2.4). Pour cela on compare cette solution asymptotique avec la solution obtenue par la méthode des différences finies. On prend les exemples suivants

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + \varepsilon u \sin x = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u\left(0, t; \varepsilon\right) = u\left(\pi, t; \varepsilon\right) = 0, & \\ u\left(x, 0; \varepsilon\right) = f\left(x\right), & \\ u_t\left(x, 0; \varepsilon\right) = g\left(x\right) = 0. & \end{cases} \tag{3.1}$$

On prend trois valeurs de f :

$$f\left(x\right) = \begin{cases} \sin 2x, & \text{si } x \leq 0.5\pi, \\ 0, & \text{si } x > 0.5\pi, \end{cases}, \quad f\left(x\right) = \sin 6x \quad \text{et} \quad f\left(x\right) = x\left(\pi - x\right).$$

3.1 Résolution par séparation des variables

D'après le chapitre précédent, la solution asymptotique de (3.1) est donnée sous la forme

$$\begin{aligned} u(x,t;\varepsilon) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\alpha_n^{(0)} \sin \omega_n^{(1)}(\varepsilon) t + \beta_n^{(0)} \cos \omega_n^{(1)}(\varepsilon) t\right) \xi_n^{(0)}(x) + \\ \varepsilon \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \left[\alpha_n^{(1)} \sin \omega_n^{(1)}(\varepsilon) t + \beta_n^{(1)} \cos \omega_n^{(1)}(\varepsilon) t\right] \xi_n^{(0)}(x) + \right. \\ \left. \left[\alpha_n^{(0)} \sin \omega_n^{(1)}(\varepsilon) t + \beta_n^{(0)} \cos \omega_n^{(1)}(\varepsilon) t\right] \xi_n^{(1)}(x) \right\} + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\omega_n^{(1)}(\varepsilon) &= n + \varepsilon \frac{4n}{(4n^2-1)\,\pi} + O(\varepsilon^2), \\
\alpha_n^{(0)} &= \frac{1}{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi g(x) \sin nx dx, \\
\beta_n^{(0)} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx, \\
\xi_n^{(0)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \\
a_{nk} &= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi(n^2-k^2)} \left[\dfrac{(-1)^{n+k}+1}{(k+n)^2-1} - \dfrac{(-1)^{k-n}+1}{(k-n)^2-1} \right] & \text{si} \quad k \neq n+1 \text{ et } k \neq n-1, \\ 0 & \text{si} \quad k = n \pm 1 \text{ ou } k = n \end{cases} \\
\alpha_k^{(1)} &= -\left(\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n^{(0)} a_{nk} \right) - \frac{4k}{(4k^2-1)\,\pi} \alpha_k^{(0)}, \\
\beta_k^{(1)} &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n^{(0)} a_{nk}, \\
\xi_n^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{+\infty} a_{nj} \sin jx.
\end{aligned}$$

Algorithme

`Données initiales:`

N `(nombre d'itération),` t_0 `(le temps initiale),`

T `(le temps final),` f, g, ε, x.

`Résolution:`

`Pour` $1 \leq i \leq N$

$\omega_i^{(1)} \longleftarrow i + \varepsilon \dfrac{4i}{(4i^2-1)\,\pi}$;

$\alpha_i^{(0)} \longleftarrow \dfrac{1}{i}\sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^\pi g(x) \sin(ix)\, dx$;

$\beta_i^{(0)} \longleftarrow \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \displaystyle\int_0^\pi f(x) \sin(ix)\, dx$;

$\xi_i^{(0)} \longleftarrow \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \sin(ix)$;

`Pour` $1 \leq k \leq N$

`Si` $k \neq i-1$ `et` $k \neq i+1$ `et` $k \neq i$

$a_{ik} \longleftarrow \dfrac{1}{\pi(i^2-k^2)} \left(\dfrac{(-1)^{i+k}+1}{(k+i)^2-1} - \dfrac{(-1)^{k-i}+1}{(k-i)^2-1} \right)$;

`Sinon`

$a_{ik} = 0$;

pour $1 \leq k \leq N$

$\alpha_k^{(1)} \longleftarrow -\dfrac{1}{k}\sum_{i=1}^{+\infty} i\alpha_i^{(0)} a_{ik} - \dfrac{4k}{(4k^2-1)\,\pi}\alpha_k^{(0)}$;

$\beta_k^{(1)} \longleftarrow -\sum_{i=1}^{+\infty} \beta_i^{(0)} a_{ik}$;

Pour $1 \leq i \leq N$

$\xi_i^{(1)} \longleftarrow \sum_{j=1}^{+\infty} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} a_{ij} \sin(jx)$;

$u \longleftarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\alpha_i^{(0)} \sin\left(\omega_i^{(1)} t\right) + \beta_i^{(0)} \cos\left(\omega_i^{(1)} t\right)\right) \xi_i^{(0)} +$
$\varepsilon \left(\left(\alpha_i^{(1)} \sin\left(\omega_i^{(1)} t\right) + \beta_i^{(1)} \cos\left(\omega_i^{(1)} t\right)\right) \xi_i^{(0)} +\right.$
$\left.\left(\alpha_i^{(0)} \sin\left(\omega_i^{(1)} t\right) + \beta_i^{(0)} \cos\left(\omega_i^{(1)} t\right)\right) \xi_i^{(1)}\right)$;

Ecrire u;

Dessiner u;

Stop.

3.2 Résolution par différences finies

La méthode des différences finies est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles, qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Une discrétisation des opérateurs différentiels (dérivées premières, secondes,...etc., partielles ou non), peut être obtenue par les formules de Taylor.

Le schéma explicite

Etant donnés un pas de discrétisation $\triangle x = h$, et un pas de discrétisation en temps $\triangle t = k$.

On cherche à calculer u_i^{j+1}.

Soient

$$t = jk,\ x = ih, \qquad j = 1, \cdots, M+1\ ,\ i = 1, \cdots, N+1.$$

Le schéma explicite s'obtient en approchant les dérivées u_{tt} et u_{xx} par les équations différentielles

$$\begin{aligned} u_{tt} &\approx \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{k^2}, \\ u_{xx} &\approx \frac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2}, \end{aligned}$$

et en approchant u et u_t, par

$$\begin{aligned} u &\approx u_i^j, \\ u_t &\approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}. \end{aligned}$$

Donc, le schéma est de la forme

$$\begin{cases} \dfrac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{k^2} - \dfrac{u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j}{h^2} + \varepsilon u_i^j \sin(ih) = 0, \qquad 0 \leq i \leq \dfrac{\pi}{h}, \\ u_0^j = u_{N+1}^j = 0, \\ u_i^0 = f(ih), \\ \dfrac{u_i^1 - u_i^0}{k} = 0. \end{cases}$$

D'où

$$u_i^{j+1} = \left(2 - 2\lambda - \varepsilon k^2 \sin(ih)\right) u_i^j + \lambda \left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j\right) - u_i^{j-1}.$$

avec

$$\lambda = \frac{k^2}{h^2}.$$

Donc, la solution est sous la forme matricielle

$$U = A - B,$$

avec, les vecteurs U et B, sont donnés par

$$U = \begin{pmatrix} u_1^{j+1} \\ u_2^{j+1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{j+1} \\ u_N^{j+1} \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} u_1^{j-1} \\ u_2^{j-1} \\ \vdots \\ u_{N-1}^{j-1} \\ u_N^{j-1} \end{pmatrix},$$

et la matrice A, est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} \mu(1) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda & \mu(2) & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \lambda & \mu(N-1) & \lambda \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & \mu(N) \end{pmatrix},$$

avec

$$\mu(i) = 2 - 2\lambda - \varepsilon k^2 \sin(ih), \qquad i = 1, \cdots, N.$$

Remarque 3.1 *Nous n'avons pas étudié la stabilité et l'erreur de troncature de cette méthode.*

L'algorithme

`Données initiales:`

N `(nombre de discrétisation),` M `(nombre de discrétisation du temps),`

h `(le pas de` x`),` k `(le pas de` t`),` t_0 `(le temps initiale),` tf `(le temps finale),`

ε.

`Résolution:`

`Pour` $1 \leq j \leq M$

`Pour` $1 \leq i \leq N$

$\lambda \longleftarrow \frac{k^2}{h^2}$;

$u_i^{j+1} \longleftarrow (2 - 2\lambda - \varepsilon k^2 \sin(ih))\, u_i^j + \lambda \left(u_{i+1}^j + u_{i-1}^j\right) - u_i^{j-1}$;

`Ecrire` u_i^{j+1};

`Dessiner` u_i^{j+1};

`Stop.`

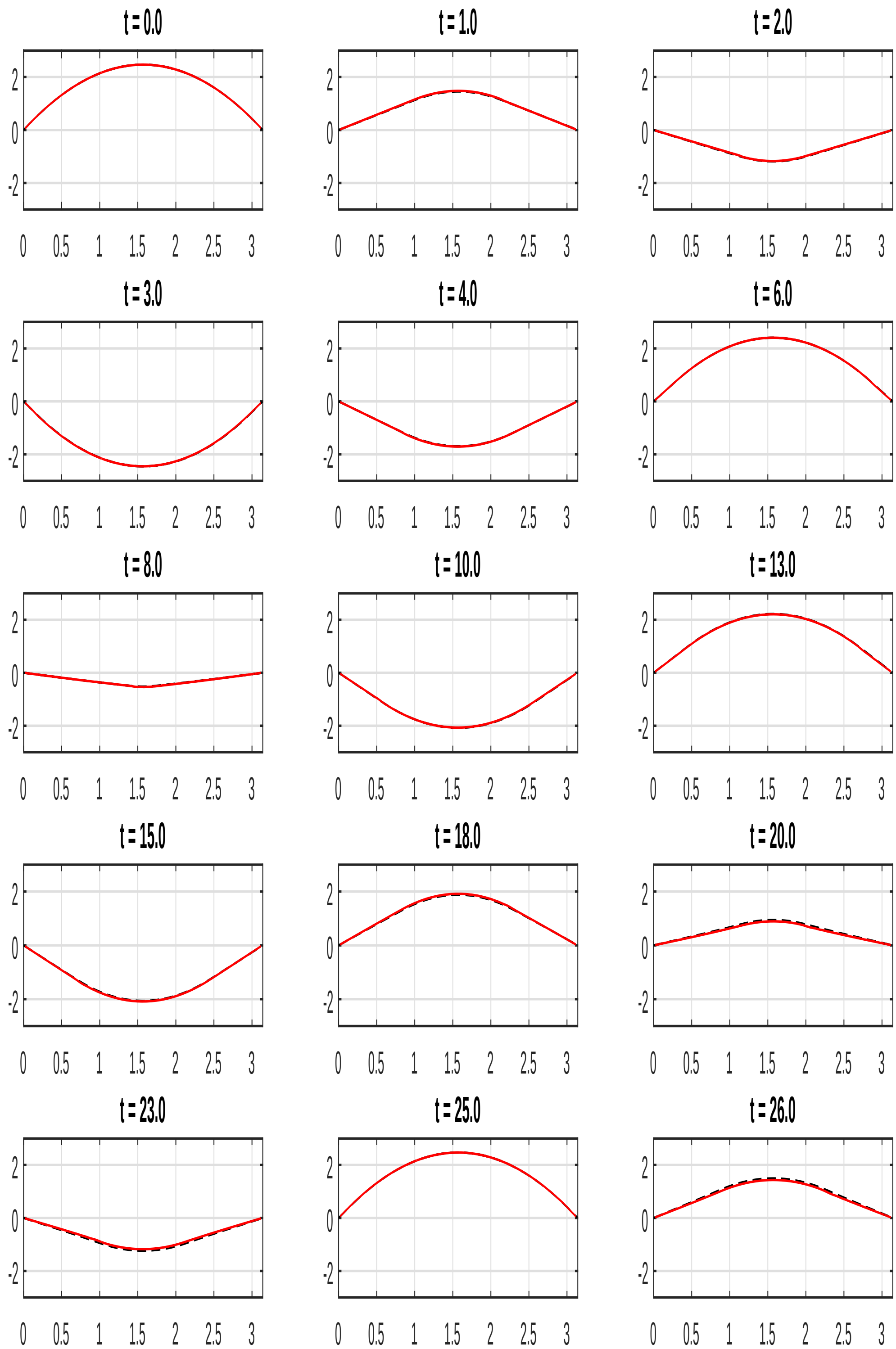

FIGURE 3.1 – Comparaison du solution par différence finis (–) et solution asymptotique (- -) pour $\varepsilon = 0.01$, $f(x) = x(\pi - x)$ et $g = 0$.

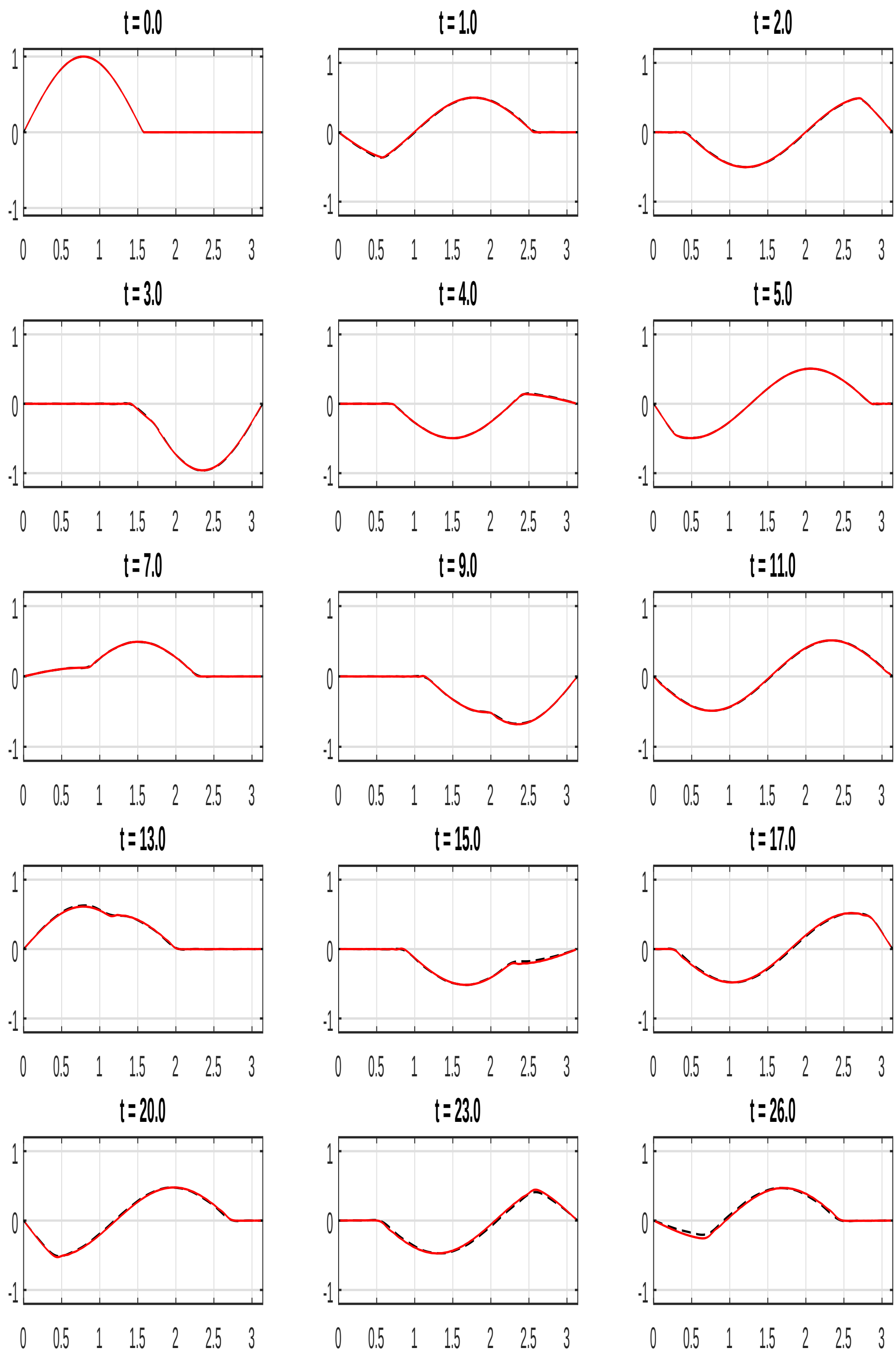

FIGURE 3.2 – Comparaison du solution par différence finis (–) et solution asymptotique (- -) pour $\varepsilon = 0.01$, $f(x) = \chi_{[0,\pi/2]} \sin 2x$ et $g = 0$.

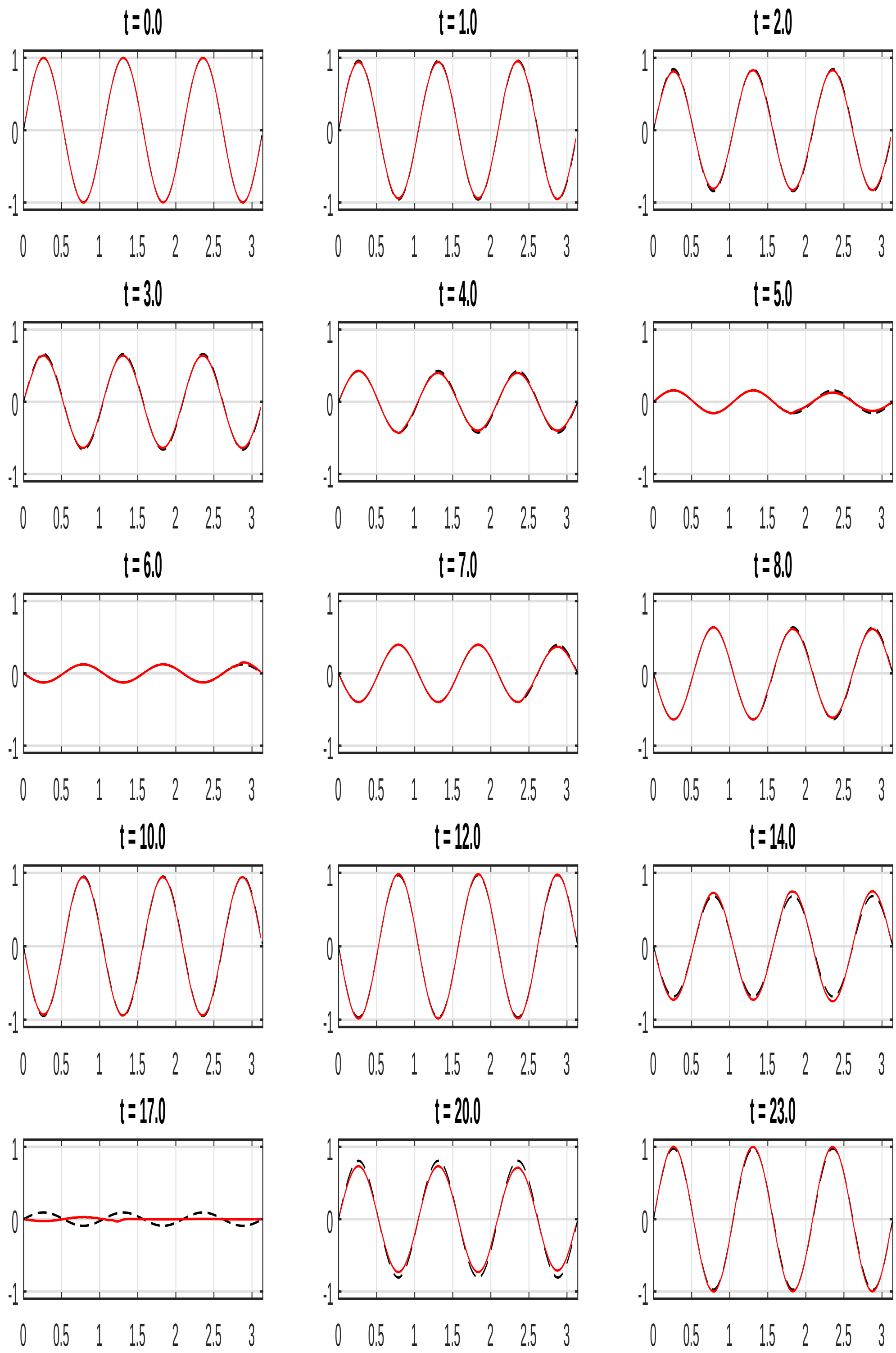

FIGURE 3.3 – Comparaison du solution par différence finis (–) et solution asymptotique (- -) pour $\varepsilon = 0.01$, $f(x) = \sin 6x$ et $g = 0$.

Bibliographie

[1] M. Chipot, *Elliptic equations : An introductory course.* Birkhäuser. Advanced Texts. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2009.

[2] M. H. Holmes, *Introduction to perturbation methods.* Springer Science, Business Media, New York, 2013.

[3] R. J. Leveque, *Finite difference methods for ordinary and partial differential equation : steady-state end time-dependent problems.* Vol 98 Siam, 2007.

[4] J. Kevorkian, J. D. Cole, *Multiple scale and singular perturbation methods.* Springer-Verlag, NewYork, 1996.

[5] S. Salsa, *Partial differential equations in action.* Springer Verlag, Italia, Milano, 2008.

[6] W. A. Strauss, *Partial differential equations.* John Wiley & Sons,Inc. 2008.

[7] A. Tveito, R. Winther, *Introduction to partial differential equations, A Computational Approach.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

ملخص:

في هذا العمل، ندرس معادلة موجة مضطربة في مجال ذي طول محدود. نحصل على نشر مقارب للحل من خلال فصل المتغيرات وحل مسألة القيم الذاتية المضطربة. علاوة على ذلك، فإننا نقارن هذا الحل مع الحل العددي الذي تم الحصول عليه باستخدام طريقة الفروق المحدودة.

كلمات مفتاحية:

معادلة الموجة المضطربة، مسألة القيم الذاتية، فصل المتغيرات، التوسع المقارب، الفروق المحدودة.

Résumé:

Dans ce travail, nous considérons une équation d'onde perturbée dans un intervalle de longueur finie. Nous obtenons une expansion asymptotique de la solution en séparant les variables et en résolvant un problème de valeurs propres perturbé. De plus, nous comparons cette solution avec la solution numérique obtenue par la méthode des différences finies.

Mots clés :

Equation d'onde perturbée, Problème de valeurs propres, Séparation des variables, Expansion asymptotique, Différences finies.

Abstract:

In this work, we consider a perturbed wave equation in an interval with finite length. We obtain an asymptotic expansion of the solution by separating the variables and solving a perturbed eigenvalue problem. Moreover, we compare this solution with the numerical solution obtained by the finite difference method.

Key words:

Perturbed wave equation, Eigenvalues problem, Separation of variables, Asymptotic expansion, Finite differences.