

المسيلة في : 15 ديسمبر 2024

رقم: 517 / ق.ه.ك / 2024

## شهادة إدارية

بخصوص مطبوعة الدروس الخاصة بالأستاذ

مكي حمزة

بناءً على محضر اللجنة العلمية لقسم الهندسة الكهربائية تحت رقم: 365/ق.ه.ك/2024 المنعقد بتاريخ

06 نوفمبر 2024 والمتضمن تعين الخبراء: الأستاذ زغلاش سمير أستاذ بجامعة المسيلة الأستاذ جريوي علي

أستاذ بجامعة المسيلة، والأستاذ بن دايدة عبد المالك أستاذ محاضر "أ" بجامعة باتنة 02 وذلك لتقييم

مطبوعة الدروس الخاصة بالأستاذ مكي حمزة أستاذ محاضر "أ" بقسم الهندسة الكهربائية لجامعة

المسيلة تحت عنوان: " Techniques de commande avancée "

وبعد إطلاع رئيس اللجنة العلمية ورئيس القسم على التقارير الواردة و التي كانت كلها ايجابية، وعليه فإن

اللجنة لا ترى مانعا أن تتخذه سندا في تدريس طلبة السنة الثانية ماستر تحكم كهربائي، شعبة كهروتقني

، ميدان علوم و تكنولوجيا و أن تعتمد في أي تقييم للمسار العلمي للأستاذ المعني.

رئيس القسم

رئيس اللجنة العلمية



درداف المبروك

بوكرة عبد الرحمان



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Mohamed BOUDIAF- M'sila

Faculté de Technologie

Département de Génie Electrique

# Polycopie de Cours

Spécialité :

Master 2 Electromécanique

Intitulé :

# Techniques de Commande Avancée

Présenté par l'enseignant:

**Dr Hemza MEKKI**

# Chapitre I

## Généralités sur les systèmes non linéaires

### I.1. INTRODUCTION

Un système non linéaire commandé est un ensemble d'équations (différentielles par exemple) non linéaires décrivant l'évolution temporelle des variables constitutives du système sous l'action d'un nombre fini de variables indépendantes appelées entrées ou variables de commande, ou simplement commandes, que l'on peut choisir librement pour réaliser certains objectifs.

On en connaît de nombreux exemples parmi les systèmes mécaniques ou chimiques: satellites, avions, automobiles, machines-outils, régulateurs thermiques, réacteurs chimiques, procédés biotechnologiques ou agro-alimentaires...

Les entrées peuvent être choisies en boucle ouverte, c'est-à-dire ne dépendant que du temps, ou en boucle fermée, c'est-à-dire comme des fonctions des variables mesurées, appelées observations, qui tiennent compte de l'état du système à chaque instant.

### I.2. REPRESENTATION DES SYSTEMES LINEAIRES

Supposons que l'on dispose d'un modèle linéaire d'un procédé sous la forme d'une représentation d'état, la représentation d'état de ces systèmes, quand ils sont à temps continus, s'écrit de la manière suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Ou  $x$ ,  $u$  et  $y$  représentant respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système, tel que:  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $u \in \mathfrak{R}^m$  et  $y \in \mathfrak{R}^p$ ;  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont des matrices de dimensions  $n \times n$ ,  $n \times m$ ,  $p \times n$  et  $p \times m$  respectivement

### I.3. REPRESENTATION DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Un phénomène est dit non linéaire lorsque ses grandeurs caractéristiques reliées entre elles ne varient pas proportionnellement l'une par rapport à l'autre. Son comportement peut alors être décrit par une expression, un modèle ou des équations faisant intervenir les variables autrement qu'au premier degré [2].

Aucun système physique n'est complètement linéaire, les méthodes linéaires ne sont donc applicables que dans un domaine de fonctionnement restreint. Certains systèmes sont impossibles à modéliser, même localement à des systèmes linéaires [2].

La représentation générale d'un système non linéaire est de la forme:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u(t) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Où  $x$ ,  $u$  et  $y$  représentent respectivement les vecteurs d'état, de commande et de sortie du système.  $f(x)$ ,  $g(x)$  et  $h(x)$  sont des fonctions non linéaires du vecteur d'état décrivant le système [3].

\*\* La forme la plus utilisée pour la représentation des systèmes non linéaires est la suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{I.3})$$

Où  $t$  est le temps,  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  et  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  représentent respectivement les vecteurs d'état et de commande (d'entrée), tel que:  $f : \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m \times \mathfrak{R}_+ \rightarrow \mathfrak{R}^n$  est une fonction non linéaire.

## I.4. POINTS D'EQUILIBRE

Le point  $x_e(t) \in \mathfrak{R}^n$  est dit point d'équilibre du système non linéaire non forcé :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{I.6})$$

Si

$$\dot{x}(t) = f(x_e, t) = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (\text{I.7})$$

Si  $x_e$  est un point d'équilibre du système (I.6) alors l'équation différentielle :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), t) \quad \forall t \geq t_e, \quad x(t_e) = x_e \quad (\text{I.8})$$

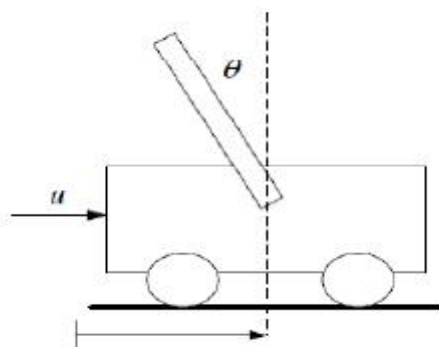
admet une solution unique :

$$x(t) = x_e \quad \forall t \geq t_e \quad (\text{I.9})$$

## I.5. EXEMPLE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

Dans cette section, nous allons donner quelques modèles des systèmes non linéaires. Ces exemples incluent le pendule inversé.

Le système pendule inversé à modéliser est représenté par la figure I.2. En exerçant une force horizontale  $u(t)$  sur le chariot, celui-ci se déplace en translation de  $x$  mètre et provoque une déviation du pendule de  $\theta$  radians.



**Figure I.2.** Pendule inversé

Le modèle dynamique peut s'écrire [5]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{(m_c + m)g \sin x_1 - mlx_2^2 \cos x_1 \sin x_1}{l(4/3(m_c + m) - m \cos^2 x_1)} + \frac{\cos x_1}{l(4/3(m_c + m) - m \cos^2 x_1)} u(t) + d(t) \end{cases} \quad (I.11)$$

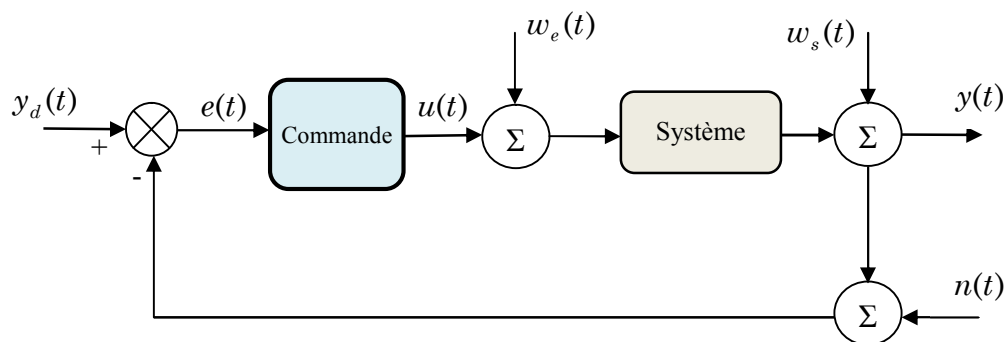
$$\begin{cases} \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{4/3mlx_2^2 \sin x_1 + mg \cos x_1 \sin x_1}{l(4/3(m_c + m) - m \cos^2 x_1)} + \frac{4}{3.(4/3(m_c + m) - m \cos^2 x_1)} u(t) + d(t) \end{cases}$$

Ou  $x_1$  position angulaire,  $x_2$  vitesse angulaire,  $x_3$  position de chariot,  $x_4$  vitesse de chariot,  $g$  la gravité,  $m_c$  la mass de chariot,  $m$  la mass de pendule,  $l$  la languere de pendule centre de mass et  $d(t)$  est un bruit.

### I.6. COMMANDE DES SYSTEMES NON LINEAIRES

La commande est l'ensemble des opérations qui amènent automatiquement un procédé d'un état particulier à un état désiré  $y_d(t)$  [5].

Un système commandé est soumis à des perturbations et des variations paramétriques telles que les frottements, vent, bruit de mesure, etc. Voir la figure I.3.



**Figure I.3.** Schéma de principe d'une commande d'un système non linéaire

Les signaux utilisés dans cette figure sont :

- $y_d(t)$  : consigne ou signal de référence.
- $y(t)$  : signal de sortie ou réponse de référence.
- $e(t)$  : erreur de suivi.
- $u(t)$  : signal de commande.
- $w_e(t)$  : perturbations de la commande.
- $w_s(t)$  : perturbations de la sortie.
- $n(t)$  : bruit de mesure perturbations de la sortie.

Si la consigne  $y_d(t)$  une constante dans le temps, nous parlons de régulation si non la commande est un asservissement ou poursuite des trajectoires. Par ailleurs, la commande d'un système a comme objectif d'atteindre les performances suivantes :

- a) *La stabilité*
- b) *La robustesse*
- c) *La rapidité*
- d) *La précision*

## I.7. LINEARISATION AU TOUR D'UN POINT DE FONCTIONNEMENT

Les premières tentatives d'approche des systèmes non linéaires sont basées sur la linéarisation au tour d'un point de fonctionnement. En fait, la linéarisation d'un système non linéaire ne donne qu'une description partielle du transfert entrée/sortie. Pour ce fait nous allons illustrer par un exemple cette mauvaise caractéristique :

### Exemple d'un satellite

Soit un satellite rigide non sphérique propulsé par un couple :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2 x_3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_3 + b_2 u \\ \dot{x}_3 = a_3 x_1 x_2 \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

Avec  $u$  est bornée  $|u| \leq 1$ , satellite non sphérique  $a_3 \neq 0$  et  $a_1 b_2^2 \neq a_2 b_1^2$ . Pour ce système :

$$\dot{x} = f(x) + g(x, u) \quad (\text{I.13})$$

$$\text{Avec : } f(x) = \begin{pmatrix} a_1 x_2 x_3 \\ a_2 x_1 x_3 \\ a_3 x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad g(x, u) = \begin{pmatrix} b_1 u \\ b_2 u \\ 0 \end{pmatrix}$$

On linéarise au tour d'un point de fonctionnement  $x_0(0,0,0)$  :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (\text{I.14})$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 x_3 & a_1 x_2 \\ a_2 x_3 & 0 & a_2 x_1 \\ a_3 x_2 & a_3 x_1 & 0 \end{pmatrix}_{x=x_0} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \frac{\partial g(x,u)}{\partial u} \Big|_{x=x_0} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Etude de la commandabilité :

$$Q_c = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{I.15}$$

$\det Q_c = 0 \Rightarrow$  le système linéarisé n'est pas commandable alors que le système non linéaire est commandable.

### I.8 DEFERENCE ENTRE SYSTEMES LINEAIRE ET NON LINEAIRE

Pour les systèmes linéaires la loi de commande est donnée par retour d'état :

$$u = -K^T x + w \tag{I.16}$$

Qu'on peut la trouver par :

- (a) placement de pole,
- (b) optimisation par la résolution de l'équation de Riccati,
- (c) les régulateurs RST...

Pour les systèmes non linéaires la synthèse d'une stratégie de commande non linéaire (Backstepping, SMC...) est indispensable.

$$u = u(x) \tag{I.17}$$

**Tableau I.1** Différences entre les systèmes linéaires et non linéaires

Système linéaire	Système non linéaire
$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x + D \cdot u \end{cases}$	$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u(t) \\ y = h(x) \end{cases}$
Transformée de Laplace	Géométrie différentiel
Espace d'état	Variété d'état ou différentiable
Fonctions de transfert	Série génératrice
La commande $u = -k^T x + w$	La commande $u = u(x)$

## **I.9 CONCLUSION**

Ce chapitre permis de présenté une brève introduction, motivation et état de l'art sur les systèmes non linaires pour amener et justifier les choix et l'orientation de ce cours. Il est question donc de rappeler les différentes notions théoriques, définitions et concepts relatifs à ces domaines. Étant donné que l'objectif de ce cours est l'application des techniques de commande aux systèmes non linéaires, des notions élémentaires de la géométrie différentielle doit s'impose. Ce si fera l'objectif de chapitre suivant.

## Chapitre II

# Commande par Linéarisation entrée/sortie

### III.1. NOTION DE DEGRE RELATIF

Soit un système non linéaire analytique (SISO) :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.1})$$

Le nombre  $r$  est dit degré relatif au point  $x_0$  si :

- $L_g L_f^k h(x) = 0 \quad \forall x \in \text{voisinage de } x_0 \text{ et } k < r-1$
- $L_g L_f^{r-1} h(x_0) \neq 0$

#### III.1.1. Exemple oscillateur de Vonderpol :

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ 2\omega\xi(1-\mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 \end{pmatrix}}_{f(x)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{g(x)} u \quad (\text{III.2})$$

Calculer le degré relatif dans les deux cas :  $y = h(x) = x_1$  et  $y = h(x) = \sin x_2$

1<sup>er</sup> Cas : on commence avec  $k = 0$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Pour  $k = 1$

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ * \end{bmatrix} = x_2$$

$$L_g L_f h(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0, \text{ On arrête et on prend } r-1 = 1 \Rightarrow r = 2 \quad \forall x$$

2<sup>eme</sup> Cas : on commence avec  $k = 0$

$$L_g h(x) = \frac{\partial h}{\partial x^T} g = \begin{bmatrix} 0 & \cos x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \cos x_2 \neq 0$$

On arrête et on prend  $r-1 = 0 \Rightarrow r = 1$

### III.1.2. Illustration simple pour interpréter la notion de degré relatif

Soit  $x^0 = x(t^0)$  l'état du système à l'instant  $t^0$ ,  $y(t)$  la sortie du système et supposons qu'on s'intéresse aux dérivées respectives par rapport au temps  $y^k(t)$  pour  $k = 1, 2, \dots$  à l'instant  $t = t^0$  on obtient :  $y(t^0) = h(x(t^0)) = h(x^0)$

$$y'(t) = \frac{dh}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dh}{dx} (f(x) + g(x)u) = \underbrace{\frac{dh}{dx} f(x)}_{L_f h(x)} + \underbrace{\frac{dh}{dx} g(x)u}_{L_g h(x)}$$

$$y'(t) = L_f h(x) + L_g h(x)u \quad (\text{III.3})$$

**Hypothèse  $r > 1$  :**

Si le degré relatif  $r$  est supérieur à  $1 \forall t$ , tel que  $x(t)$  voisin de  $x^0$  pour  $t$  voisin de  $t^0$  c-à-d on a  $L_g h(x) = 0 \Rightarrow y'(t) = L_f h(x)$

$$y^{(2)}(t) = \frac{d(L_f h(x))}{dx^T} \frac{dx}{dt} = \frac{d(L_f h(x))}{dx^T} (f(x) + g(x)u)$$

$$= \underbrace{\frac{d(L_f h(x))}{dx^T} f(x)}_{L_f^2 h(x)} + \underbrace{\frac{d(L_f h(x))}{dx^T} g(x)u}_{L_g L_f h(x)}$$

$$y''(t) = L_f^2 h(x) + L_g L_f h(x)u \quad (\text{III.4})$$

**Hypothèse  $r > 2 \Rightarrow L_g L_f h(x) = 0$**

$$\Rightarrow y''(t) = L_f^2 h(x)$$

⋮

De la même façon on continue à dériver successivement, on obtient l'étape  $k$  :

$$y^{(k)}(t) = L_f^{(k)} h(x) \quad (\text{III.5})$$

Pour tout  $k < r$  et voisinage de  $t^0$

$$y^{(r)}(t^0) = L_f^r h(x^0) + L_g L_f^{r-1} h(x^0) u(t^0) \quad (\text{III.6})$$

La commande figure explicitement avec  $L_g L_f^{r-1} h(x^0) \neq 0$ .

Le degré relatif est exactement égale au nombre de fois qu'on dérive la sortie  $y(t)$  par rapport au temps à l'instant  $t^0$ , jusqu'au l'apparition de la commande.

### III.1.3. Exemple

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2\omega\xi(1 - \mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

1)  $y = h(x) = x_1$  on dérive la sortie :

$$\dot{y} = \dot{x}_1 = x_2$$

$$\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = 2\omega\xi(1 - \mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 + u$$

La commande apparait explicitement  $\Rightarrow$  le degré relatif  $r = 2$

2)  $y = h(x) = \sin x_2$  on dérive la sortie :

$$\dot{y} = \dot{x}_2 \cos x_2 = \cos x_2 (2\omega\xi(1 - \mu x_1^2)x_2 - \omega^2 x_1 + u)$$

La commande apparait  $\Rightarrow$  le degré relatif  $r = 1$

**Lemme :**

Les vecteurs  $dh(x^0), dL_f h(x^0), \dots, dL_f^{r-1} h(x^0)$  sont linéairement indépendants (démonstration voir ISIDORI [2], [6]).

**III.1.4. Proposition**

Si un système possède un degré relatif  $r$  au point  $x^0$  donc  $r \leq n$  et soit :

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= h(x) \\ \Phi_2(x) &= L_f h(x) \\ &\vdots \\ \Phi_r(x) &= L_f^{r-1} h(x) \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

Si  $r < n$ , il est toujours possible de trouver  $(n - r)$  fonctions :

$$\begin{aligned} \Phi_{r+1}(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{aligned} / \Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix} \quad (\text{III.8})$$

Présente une *matrice Jacobiene* non singulière au point  $x^0$  avec  $\det J \neq 0$ . Il est aussi possible de choisir  $\Phi_{r+1}(x)$  jusqu'à  $\Phi_n(x)$  de manière à avoir  $L_g \Phi_i(x) = 0 \forall r+1 \leq i < n$  et  $x$  voisin de  $x^0$  [8].

**a) Exemple:**

Soit le système non linéaire:

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{f_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{x_2} \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} u \quad (\text{III.9})$$

1<sup>er</sup> cas :  $\alpha = 1$ , 2<sup>ème</sup> cas  $\alpha = 0$  et  $y = h(x) = x_3$

- Ecrire les champs de vecteurs correspondant.
- Calculer le champ de vecteur  $[f_0 \ f_1]$  crochet de Lie.
- Calculer le degré relatif

- Déterminer le difféomorphisme
- Déterminer le système en  $Z$  (forme canonique)

**b) Solution:**

- Les champs de vecteurs :

$$F_1 = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$F_2 = e^{x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha \frac{\partial}{\partial x_2}$$

- Le crochet de Lie  $[f_0 \quad f_1]$

$$[f_0 \quad f_1] = \frac{\partial f_1}{\partial x^T} f_0(x) - \frac{\partial f_0}{\partial x^T} f_1(x)$$

$$[f_0 \quad f_1] = \begin{pmatrix} 0 & e^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 e^{x_2} + e^{x_2} \\ -x_2 e^{x_2} - \alpha x_1 \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

- Le degré relatif

Pour  $\alpha = 1$ :  $y = x_3 \Rightarrow \dot{y} = \dot{x}_3 = x_2 \Rightarrow \ddot{y} = \dot{x}_2 = x_1 x_2 + u$  dans ce cas  $r = 2$

Pour  $\alpha = 0$ :  $\ddot{y} = \dot{x}_1 x_2 + x_1 \dot{x}_2 = (-x_1 + e^{x_2} u) x_2 + x_1 x_2^2 \Rightarrow r = 3$

- le difféomorphisme

Pour  $\alpha = 1$  ( $r = 2$ )

$$z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_3$$

$$z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_2$$

On a  $r < n \Rightarrow L_g \Phi_3(x) = 0$

$$L_g \Phi_3(x) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x^T} g = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_1} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} & \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

On choisit  $z_3 = \Phi_3(x) = -e^{x_2} + x_1 + 1$  avec  $\Phi(0) = 0$

$$\Phi(x) = \begin{cases} z_1 = x_3 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = -e^{x_2} + x_1 + 1 \end{cases} \Rightarrow \Phi^{-1}(x) = \begin{cases} x_1 = e^{z_2} + z_3 - 1 \\ x_2 = z_2 \\ x_3 = z_1 \end{cases}$$

Pour  $\alpha = 0$  ( $r = 3$ )

$$z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_3$$

$$z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_2$$

$$z_3 = \Phi_3(x) = L_f^2 h(x) = x_1 x_2$$

$$\Phi(x) = \begin{cases} z_1 = x_3 \\ z_2 = x_2 \\ z_3 = x_1 x_2 \end{cases} \Rightarrow \Phi^{-1}(x) = \begin{cases} x_1 = z_3 / z_2 \\ x_2 = z_2 \\ x_3 = z_1 \end{cases}$$

- Le système en  $Z$  :

Pour  $\alpha = 1$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \dot{x}_3 = z_2 \\ \dot{z}_2 = (e^{z_2} + z_3 - 1)z_2 + u \\ \dot{z}_3 = -(1 + z_2 e^{z_2})(-1 + z_3 e^{z_2}) \rightarrow \text{dynamique des zéros} \end{cases}$$

Pour  $\alpha = 0$

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \dot{z}_3 = -z_3 + z_3^2 / z_2 + z_2 e^{z_2} u \end{cases}$$

c) Forme canonique

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_r = b(z) + a(z)u \\ \dot{z}_{r+1} = q_{r+1}(z) \\ \vdots \\ \dot{z}_n = q_n(z) \end{cases} \rightarrow \text{dynamique des zéros} \quad (\text{III.10})$$

d) Exemple:

Soit le système non linéaire:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} x_1 x_2 - x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2(1 + x_3) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \quad y = h(x) = x_4 \quad (\text{III.11})$$

- Le degré relatif

$$y = h(x) = x_4 \dots \ddot{y} = 2x_1 \dot{x}_1 + \dot{x}_2 \Rightarrow r = 2 \quad \forall x_3 \neq -1$$

- le difféomorphisme

$$z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_4$$

$$z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_1^2 + x_2$$

Il faut trouver  $\Phi_3(x)$  et  $\Phi_4(x)$  pour compléter le difféomorphisme ( $n = 4$ )

$$L_g \Phi_3(x) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial x^T} g = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_2} (2 + 2x_3) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial x_3} = 0$$

On choisit  $z_3 = \Phi_3(x) = -2x_3 - x_3^2 + x_2$  avec  $\Phi(0) = 0$

$$L_g \Phi_4(x) = \frac{\partial \Phi_4}{\partial x^T} g = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_2} (2 + 2x_3) + \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_3} = 0$$

On choisit  $z_4 = \Phi_4(x) = x_1$

- Le système en Z :

1<sup>ere</sup> méthode : (après développement de calcul)

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = -4z_4^4 + 2z_4^2 z_2 + z_4 + 2\sqrt{1 - z_3 + z_2 - z_4^2} - u \\ \dot{z}_3 = z_4 + 2\left(-1 + \sqrt{1 + z_2 - z_4 - z_3}\right) + 2\left(-1 + \sqrt{1 + z_2 - z_4 - z_3}\right)^2 \\ \dot{z}_4 = z_4 z_2 - 2z_4^3 \end{cases} \quad (\text{III.12})$$

2<sup>eme</sup> méthode : (la méthode de Jacobienne)

On a  $z_1 = x_4$  et  $z_2 = x_1^2 + x_2$

Dans ce cas on propose  $z_3 = x_3$  et  $z_4 = x_1$

$$J = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \Phi_4}{\partial x_4} \end{pmatrix} \quad (\text{III.13})$$

$$\Rightarrow J = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2x_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(J) = -1 \neq 0$  donc la proposition de  $z_3$  et  $z_4$  est correcte.

$$\Phi(x) = \begin{cases} z_1 = x_4 \\ z_2 = x_1^2 + x_2 \\ z_3 = x_3 \\ z_4 = x_1 \end{cases} \Rightarrow \Phi^{-1}(x) = \begin{cases} x_1 = z_4 \\ x_2 = z_2 - z_4^2 \\ x_3 = z_3 \\ x_4 = z_1 \end{cases}$$

Donc le système en Z est :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = 2z_4(z_4(z_2 - z_4^2) - z_4^3) + z_4 + 2(1 + z_3)u \\ \dot{z}_3 = -z_3 + u \\ \dot{z}_4 = z_4z_2 - 2z_4^3 \end{cases} \quad (\text{III.14})$$

### III.2. LINEARISATION EXACTE PAR BOUCLAGE (SYSTEME SISO)

Soit le système SISO la structure du régulateur qui convient  $u = \alpha(x) + \beta(x)v$  avec  $v$  références externes :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\alpha(x) + g(x)\beta(x)v \\ y = h(x) \end{cases} \quad (\text{III.15})$$

$\alpha(x)$  et  $\beta(x)$  caractérisent la commande, sont définies dans  $\mathcal{R}^n$  avec  $\beta(x) \neq 0$

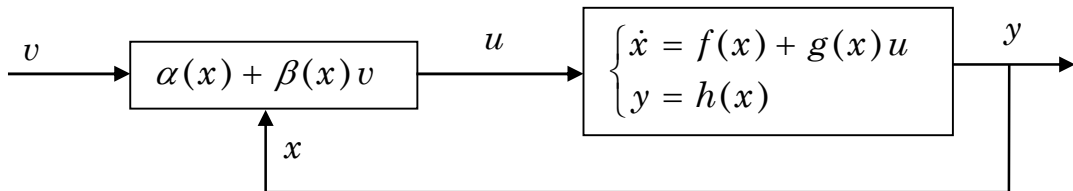


Figure III.1. Boucle de linéarisation d'un système

Pour trouver la commande il faut trouver d'abord la forme normale. Soit un système non linéaire de degré relatif  $r = n$  en un point  $x = x_0$  le changement de base est donné par la construction de vecteur :

$$z = \Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(x) \\ L_f h(x) \\ \vdots \\ L_f^{n-1} h(x) \end{pmatrix} \quad (\text{III.16})$$

D'après (III.10) nous avons  $\dot{z}_n = b(z) + a(z)u = v$  puisque  $\dot{z}_r = \dot{z}_n$ , dans ce cas :

$$u = \frac{v - b(z)}{a(z)} = \frac{v - b(\Phi(x))}{a(\Phi(x))} \quad (\text{III.17})$$

Le système en BF (la linéarisation exacte  $r = n$ )

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 \\ \dot{z}_2 = z_3 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} = z_n \\ \dot{z}_n = v \end{cases} \Rightarrow \dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & & & 1 \\ 0 & \dots & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (\text{III.18})$$

C'est une forme linéaire et commandable, nous avons  $b(z) = L_f^n h(x)$  et  $a(z) = L_g L_f^{n-1} h(x)$  donc :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} (-L_f^n h(x) + v) \tag{III.19}$$

$$v = Kz = k_0 z_1 + k_1 z_2 + \dots + k_{n-1} z_n$$

Le gain K peut trouver grâce au placement de pôle ou par optimisation (Riccati) A partir de (III.16) v prend la forme :

$$v = k_0 h(x) + k_1 L_f h(x) + \dots + k_{n-1} L_f^{n-1} h(x) \Rightarrow v = \sum_{i=0}^{n-1} k_i L_f^i h(x) \tag{III.20}$$

Donc la commande (III.19) devienne :

$$u = \frac{1}{L_g L_f^{n-1} h(x)} (-L_f^n h(x) + \sum_{i=0}^{n-1} k_i L_f^i h(x)) \tag{III.21}$$

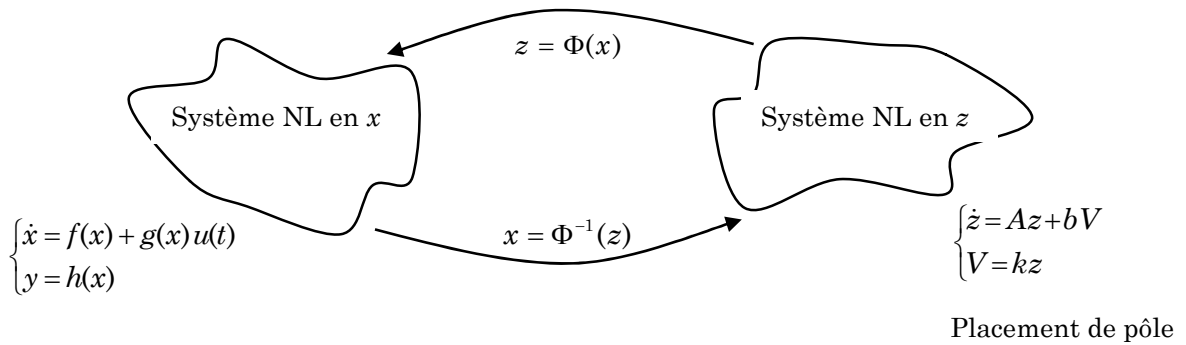


Figure III.2. Résumé de la commande avec linéarisation exacte

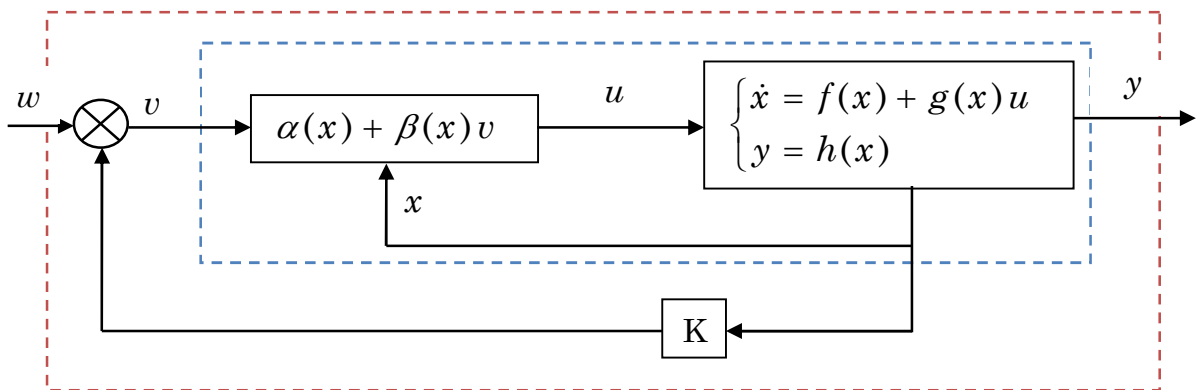


Figure III.3. Boucle de commande d'un système avec retour d'état

### III.2.1. Exemple

Soit le système non linéaire:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 + x_2^2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{x_2} \\ e^{x_2} \\ 0 \end{pmatrix} u \quad ; \quad y = h(x) = x_3 \tag{III.22}$$

1- Le degré relatif :

$$\dot{y} = \dot{x}_3 = x_1 - x_2$$

$$\ddot{y} = -x_1 - x_2^2$$

$$\ddot{y} = -2x_2(x_1 + x_2^2) - 2e^{x_2}u \Rightarrow r = 3$$

2- le difféomorphisme

$$z_1 = \Phi_1(x) = h(x) = x_3$$

$$z_2 = \Phi_2(x) = L_f h(x) = x_1 - x_2$$

$$z_3 = \Phi_3(x) = L_f^2 h(x) = -x_1 - x_2^2$$

3- le système en  $z$  :

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_3 = x_1 - x_2 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = -x_1 - x_2^2 = z_3$$

$$\dot{z}_3 = -2x_2(x_1 + x_2^2) - (1 + 2x_2)e^{x_2}u = v$$

4- La commande :

$$u = \frac{-2x_2(x_1 + x_2^2) - v}{(1 + 2x_2)e^{x_2}}$$

$$\text{Avec : } v = k_0 h(x) + k_1 L_f h(x) + \dots + k_{n-1} L_f^{n-1} h(x)$$

### III.2.2. Lemme

Le problème de linéarisation exact dans l'espace d'état est solvable si-si existe un voisinage  $u$  de  $\dot{x}$  et une fonction réelle  $\lambda(x)$  définie dans  $u$

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = \lambda(x) \end{cases} \quad (\text{III.23})$$

a un degré relatif  $r = n$  au point  $\dot{x}$  (voir [6]).

### III.2.3. Théorème

Soit le système  $\dot{x} = f(x) + g(x)u$  la solution au problème de linéarisation exact dans l'espace d'état au voisinage d'un point  $\dot{x}$  existe si-si :

- $\text{rang}[g(\dot{x}) \quad ad_{fg}(\dot{x}) \quad \dots \quad ad_{fg}^{n-1}(\dot{x})] = n$  avec  $ad_{fg}(x) = [f \quad g]$
- La distribution  $\Delta(x) = \text{span}\{g(x), ad_{fg}(x), \dots, ad_{fg}^{n-2}(x)\}$  est involutive au voisinage de  $\dot{x}$

## III.3. COMMANDE PAR BOUCLAGE NON LINEAIRE (SYSTEME MIMO)

Soit le système MIMO suivant :

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x) u_i \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_1 = h_1(x) \\ \vdots \\ y_m = h_m(x) \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

Ou  $f(x), g(x), \dots, g_m(x)$  sont des champs de vecteurs et  $h_1(x), \dots, h_m(x)$  sont analytiques définie au voisinage de  $x_0$

### III.3.1 Notion de degré relatif vectoriel

Le système est dit de degré relatif vectoriel  $\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$  au point  $x_0$  si :

- $L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0 \quad 1 \leq i, j \leq m \text{ et } \forall k \leq r_i$  pour tout  $x$  au voisinage de  $x_0$
- La matrice carrée définie par (III.36) est non singulière au voisinage de  $x_0$ , le degré relatif  $r_i$  de la  $i^{\text{ème}}$  sortie  $h_i$  est le nombre de fois qu'il faut dériver la sortie  $y_i$  pour faire apparaitre au moins une entré.

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix} \quad (\text{III.36})$$

### III.3.2 La forme normale

Difféomorphisme  $\Phi^1(x), \Phi^2(x), \dots, \Phi^m(x)$  tel que  $\Phi^i(x) = [\Phi_1^i(x) \dots \Phi_{r_i}^i(x)]$

$$\text{Si } r < n \text{ les nouvelles coordonnées : } \begin{cases} z_1^i = \Phi_1^i = h_i(x) \\ z_2^i = \Phi_2^i = L_f h_i(x) \\ \vdots \\ z_{r_i}^i = \Phi_{r_i}^i = L_f^{r_i-1} h_i(x) \end{cases}$$

Les  $(n-r)$  fonctions manquantes  $\Phi_{r+1}(x), \dots, \Phi_n(x)$  sont choisit de manière à avoir  $L_{g_j} \Phi_i(x) = 0$  pour  $r+1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$

$$\begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{r_i-1}^i = z_{r_i}^i \\ \dot{z}_{r_i}^i = \left[ L_f^{r_i} h_i(x) + \sum_{j=1}^m L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x) u_j \right] = \Phi^{-1}(x) \end{cases} \quad (\text{III.37})$$

$$\xi^i(x) = [\xi_1^i, \xi_2^i \dots \xi_{r_i}^i(x)]^T = [\Phi_1^i \dots \Phi_{r_i}^i]^T ; \quad \eta = [\eta_1, \dots, \eta_r]^T = [\Phi_{r+1}(x) \dots \Phi_n(x)]^T$$

Dans ce cas le système devient :

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1^i = \xi_2^i \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{r_i-1}^i = \xi_{r_i}^i \\ \dot{\xi}_{r_i}^i = b_i(\xi, \eta) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(\xi, \eta) u_j \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

$$\dot{\eta} = q(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^m p_i(\xi, \eta) u_i = q(\xi, \eta) + P(\xi, \eta)U$$

$$\begin{cases} q_1(\xi, \eta) = L_f \Phi_{r+1} \\ \vdots \\ q_{n-r}(\xi, \eta) = L_f \Phi_n \end{cases} \quad (\text{III.39})$$

Linéarisation exact par retour d'état statique :

$$\begin{cases} \dot{z}_1^i = z_2^i \\ \dot{z}_2^i = z_3^i \\ \vdots \\ \dot{z}_{r_i-1}^i = z_{r_i}^i \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

$$\text{Avec : } \dot{z}_i^i = b_i(z) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(z) u_j = V \quad i = 1, \dots, m$$

$$V = b + A.U \Rightarrow U = A^{-1}(V - b) \quad (\text{III.41})$$

$$\text{Avec : } b = [L_f^{r_1} h_1(x) \dots L_f^{r_m} h_m(x)]^T$$

Dans ce cas en aura le système :

$$\begin{cases} \dot{Z} = A.Z + B.V \\ Y = C.Z \end{cases} \quad (\text{III.42})$$

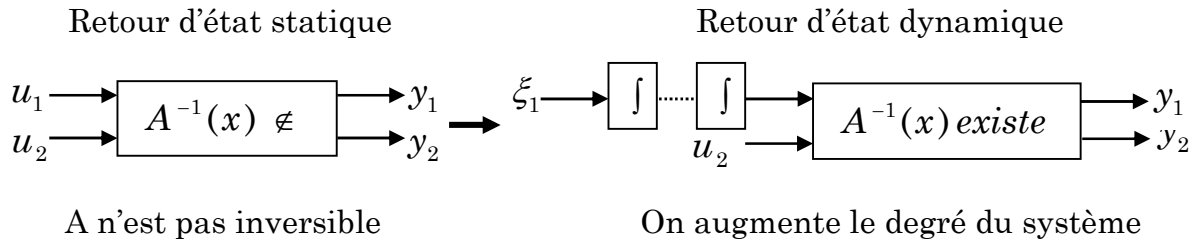
$$\text{Avec : } A = \text{diag}(a_i), B = \text{diag}(b_i), C = \text{diag}(c_i)$$

$$a_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}; b_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; c_i = [1 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0]_{1 \times r_i}$$

C'est la forme canonique de *Brunowsky*

### Remarques

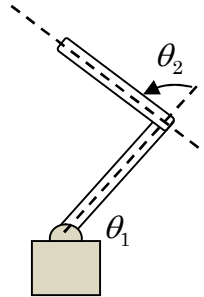
- Dans le cas ou la matrice A n'est pas inversible il faut faire un retour d'état dynamique c-à-d:



- Le degré relatif d'un système MIMO est  $r = \sum r_i$  avec  $r_i$  le degré relatif de la sortie (on dérive jusqu'au l'obtention d'au moins une commande).
- Si  $\sum r_i = n$  le système peut être exacte linéarisable.

**III.3.3 Exemple d'un retour d'état statique**

Soit le système MIMO (Figure III.4). On choisit :  $x^T = [\theta_1 \ \dot{\theta}_1 \ \theta_2 \ \dot{\theta}_2]$  ;  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$



**Figure III.4.** Bras manipulateur à deux degré de libertés

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{1 + \sin^2 x_3} (x_4^2 \sin x_3 + 2x_2 x_4 \sin x_3 - g(x_1 + x_3) - 2g \cos x_1) + \frac{1 + \cos x_3}{1 + \sin^2 x_3} \times \\ &\quad (x_2^2 \sin x_3 + g \cos(x_1 + x_3)) + \frac{1}{1 + \sin^2 x_3} u_1 - \frac{1 + \cos x_3}{1 + \sin^2 x_3} u_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (***)u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \frac{1 + \cos x_3}{1 + \sin^2 x_3} (x_4^2 \sin x_3 + 2x_2 x_4 \sin x_3 - g \cos(x_1 + x_3) - 2g \cos x_1) + \frac{3 + 2 \cos x_3}{1 + \sin^2 x_3} \times \\ &\quad (-x_2^2 \sin x_3 + g \cos(x_1 + x_3)) - \frac{1 + \cos x_3}{1 + \sin^2 x_3} u_1 + \frac{3 + 2 \cos x_3}{1 + \sin^2 x_3} u_2 = f_4(x) + (')u_1 + (''')u_2 \end{aligned}$$

Calculer la commande U :

**1<sup>ère</sup> cas**  $y = h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$  ; **2<sup>ème</sup> cas**  $y = h(x) = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

**Solution (1<sup>ère</sup> cas)**

$$y_1 = h_1(x) = x_1 = \theta_1 \Rightarrow r_1 = 2$$

$$y_2 = h_2(x) = x_3 = \theta_2 \Rightarrow r_2 = 2$$

$r = r_1 + r_2 = 4 = n \rightarrow$  Le système est exactement linéarisable.

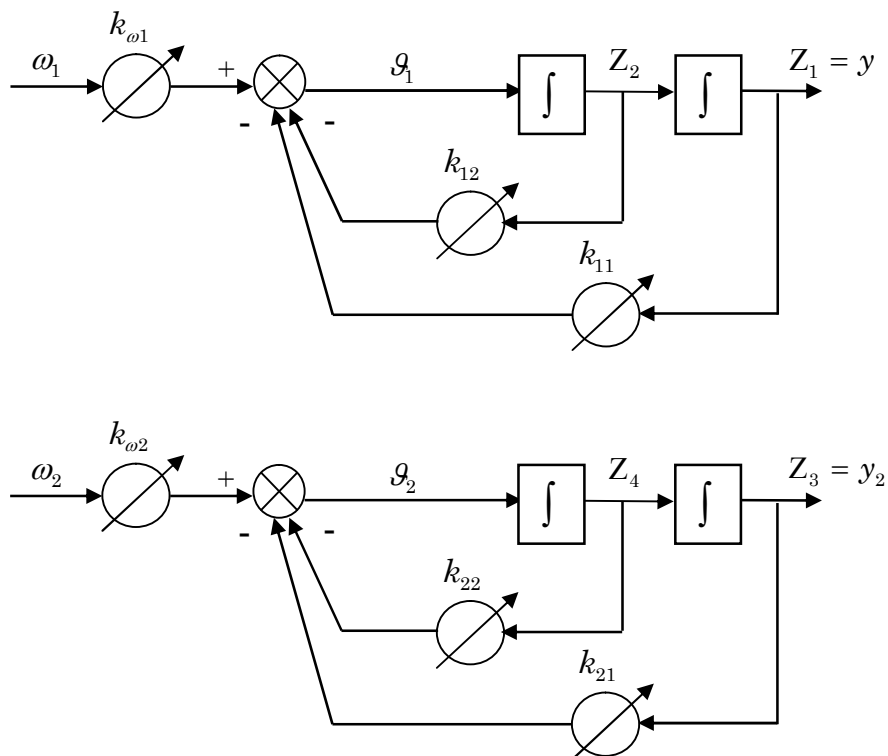
Le difféomorphisme

$$\begin{cases} z_1^1 = \Phi_1^1(x) = h_1(x) = x_1 = Z_1 \\ z_2^1 = \Phi_2^1(x) = L_f h_1(x) = x_2 = Z_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^2 = \Phi_1^2(x) = h_2(x) = x_3 = Z_3 \\ z_2^2 = \Phi_2^2(x) = L_f h_2(x) = x_4 = Z_4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = Z_2 \\ \dot{Z}_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (***)u_2 = \mathcal{G}_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{Z}_3 = Z_4 \\ \dot{Z}_4 = f_4(x) + (')u_1 + (''')u_2 = \mathcal{G}_2 \end{cases}$$



**Figure III.5.** Systèmes en  $Z$

La forme canonique de *Brunowsky*

$$b(x) = \begin{bmatrix} L_f^2 h_1(x) \\ L_f^2 h_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2(x) \\ f_4(x) \end{bmatrix}$$

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f h_1(x) & L_{g_2} L_f h_1(x) \\ L_{g_1} L_f h_2(x) & L_{g_2} L_f h_2(x) \end{bmatrix} \quad g_1(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 + \sin^2 x_3 \\ 0 \\ -\frac{1 + \cos x_3}{1 + \sin^2 x_3} \end{bmatrix} \quad g_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1 + \cos x_3}{1 + \sin^2 x_3} \\ 0 \\ \frac{3 + 2 \cos x_3}{1 + \sin^2 x_3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x_3} \begin{bmatrix} 1 & -(1 + \cos x_3) \\ -(1 + \cos x_3) & 3 + 2 \cos x_3 \end{bmatrix}$$

D'après (III.41) la loi de commande est donné par :  $U = A^{-1}(V - b)$

$$\begin{aligned} u_1 &= -(x_4^2 \sin x_3 + 2x_2 x_4 \sin x_3 - g \cos(x_1 + x_3) - 2g \cos x_3) \\ &\quad + (1 + \cos x_3) \mathcal{G}_2 + (3 + 2 \cos x_3) \mathcal{G}_1 \\ u_2 &= (x_2^2 \sin x_3 + g \cos(x_1 + x_3)) + (1 + \cos x_3) \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 \end{aligned}$$

Placement de pôles (voir figure III.5)

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1 = -k_{11} Z_1 - k_{12} Z_2 + k_{\omega 1} \omega_1 \\ \mathcal{G}_2 = -k_{21} Z_3 - k_{22} Z_4 + k_{\omega 2} \omega_2 \end{cases}$$

1<sup>er</sup> sous système

$$\dot{Z}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{11} & -k_{12} \end{bmatrix} Z^1 + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{\omega 1} \end{bmatrix} \omega_1 \Rightarrow \frac{y_1(s)}{\omega_1(s)} = \frac{k_{\omega 1}}{s^2 + s k_{12} + k_{11}}$$

$$\Rightarrow y_1(\infty) = \lim_{s \rightarrow \infty} s y_1(s) = \frac{k_{\omega 1}}{k_{11}} \omega_1$$

$$y_1(\infty) = \omega_1 \rightarrow \text{l'erreur nulle en régime permanent} \Rightarrow k_{\omega 1} = k_{11}$$

2<sup>ème</sup> sous système

$$\dot{Z}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{21} & -k_{22} \end{bmatrix} Z^2 + \begin{bmatrix} 0 \\ k_{\omega 2} \end{bmatrix} \omega_2$$

La même raisonnement nous donne :  $k_{\omega 2} = k_{21}$

Placement de pôles

$$(s + p_1)(s + p_2) = s^2 + (p_1 + p_2)s + p_1 p_2$$

- 1<sup>er</sup> sous système  $p_1 = p_2 \Rightarrow k_{11} = p_1^2; k_{12} = 2p_1$
- 2<sup>ème</sup> sous système  $p_1 = p_2 \Rightarrow k_{21} = p_1^2; k_{22} = 2p_1$

**2<sup>ème</sup> cas :**

$$y_1 = h_1(x) = x_2 \Rightarrow r_1 = 1 \text{ puisque } \dot{y}_1 = \dot{x}_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (**)u_2$$

$$y_2 = h_2(x) = x_3 = \theta_2 \Rightarrow r_2 = 2$$

$r = r_1 + r_2 = 3 < n \rightarrow$  Le système est partiellement linéarisable.

Le difféomorphisme

$$\begin{cases} z_1^1 = h_1(x) = x_2 = Z_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1^2 = h_2(x) = x_3 = Z_2 \\ z_2^2 = L_f h_2(x) = x_4 = Z_3 \end{cases}$$

Compléter le difféomorphisme

$$L_g \Phi_4(x) = L_g z_4 = 0 \text{ on choisit } Z_4 = \sin x_1 \det \left[ \frac{\Phi(x)}{dx} \right] \neq 0$$

Donc la forme canonique de *Brunowsky* est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{Z}_1 = \dot{x}_2 = f_2(x) + (*)u_1 + (**)u_2 = \mathcal{G}_1 \\ \dot{Z}_2 = \dot{x}_3 = x_4 = Z_3 \\ \dot{Z}_3 = \dot{x}_4 = f_4(x) + (')u_1 + (''')u_2 = \mathcal{G}_2 \\ \dot{Z}_4 = \dot{x}_1 \cos x_1 = Z_1 \cos\{\arcsin(Z_4)\} \text{ avec } \dot{x}_1 = x_2 = Z_1 \end{cases}$$

La loi de commande est donné par :

$$\begin{aligned} u_1 &= -(x_4^2 \sin x_3 + 2x_2 x_4 \sin x_3 - g \cos(x_1 + x_3) - 2g \cos x_3) \\ &\quad + (1 + \cos x_3) \mathcal{G}_2 + (3 + 2 \cos x_3) \mathcal{G}_1 \\ u_2 &= (x_2^2 \sin x_3 + g \cos(x_1 + x_3)) + (1 + \cos x_3) \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 \end{aligned}$$

### III.4. CONCLUSION

Ce chapitre permet de résoudre le problème de régulation par retour d'état linéarisant. Ainsi la linéarisation (entrée/sortie) exacte dans l'espace d'état au voisinage d'un point de fonctionnement des systèmes non linéaires de type SISO et MIMO. Il est question de rappeler les différentes notions de base afin de faire face à ce problème.

Dans le but de synthétiser une commande non linéaire il faut passer par l'étape d'étude de stabilité ou le chapitre suivant introduit des notions de base de stabilité selon la théorie de Lyapunov.

## Chapitre III

# Commande par Backstepping

### V.1. INTRODUCTION

La plupart des systèmes physiques (procédés) qui nous entourent sont non linéaires. Bien souvent, ces non linéarités sont faibles ou ne sont pas visibles sur la plage d'opérations de ces procédés. Le souci constant d'améliorer les performances des systèmes commandés conduit à des modélisations de plus en plus précises qui permettent de répondre sur une plus large plage d'opérations. C'est à ce moment que les non linéarités se font sentir et rendent les outils d'analyse et/ou de synthèse des lois de commande, utilisés dans le domaine linéaire, caduques et absolument incapables de rendre compte de certains phénomènes. C'est pourquoi, depuis quelques années, beaucoup de recherche ont été effectuées dans le domaine de la commande des systèmes non linéaires. Le backstepping [9, 17] fait partie de ces nouvelles méthodes de commande. Cette approche consiste à trouver une fonction de Lyapunov qui permet de déduire une loi de commande pour le système tout en assurant la stabilité globale de la commande.

Ce chapitre présent, dans un premier temps, une brève introduction sur les notions théoriques de stabilité des systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte ces notions de bases sont nécessaires à la compréhension des subtilités de la théorie du backstepping et, dans un deuxième temps, il introduit la synthèse d'une commande par backstepping dédiée au machine asynchrone (MAS) basée sur le principe de l'orientation du flux rotoriques.

### V.2. DESIGN PAR BACKSTEPPING

Le design d'un contrôleur pour un système non linéaire de la forme :

$$\dot{x} = \varphi(x, \theta, u, t) \quad (\text{III.1})$$

Où le vecteur d'état  $x$  est de dimension élevée, peut souvent s'avérer une tâche difficile, voire impossible. La technique du backstepping offre une méthode systématique pour répondre à ce type de problème. Elle combine la notion de fonction de contrôle de Lyapunov (fcl) avec une procédure récursive de design. Cela permet de surmonter l'obstacle de la dimension et d'exploiter la souplesse de conception dans le cas scalaire pour résoudre les problèmes de commande pour des systèmes d'ordre plus élevé. Ne faisant pas nécessairement appel à la

linéarisation, le backstepping permet, quand il y en a, de conserver les non-linéarités utiles qui, souvent, aident à conserver des valeurs finies du vecteur d'état. Cette technique suppose que l'on est en mesure de trouver au moins pour un système scalaire, une loi de commande  $u$  et une fonction de contrôle de Lyapunov  $V(x)$  qui stabilise son origine. [18]-[20].

La méthode consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. A chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. À la dernière étape, la loi de commande est trouvée. Celle-ci permet de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation.

Contrairement à la plupart des autres méthodes, le backstepping n'a aucune contrainte au niveau du type de non linéarité. Cependant, le système doit se présenter sous la forme dite paramétrique pure. Les équations d'un tel système sont données par

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \varphi_1(x_1)^T \mathcal{G} + \psi_1(x_1)x_2 \\
 \dot{x}_2 &= \varphi_2(x_1, x_2)^T \mathcal{G} + \psi_2(x_1, x_2)x_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{x}_{n-1} &= \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})^T \mathcal{G} + \psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})x_n \\
 \dot{x}_n &= \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \mathcal{G} + \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n)u \\
 y &= x_1
 \end{aligned} \tag{III.2}$$

Où  $\mathcal{G}$  est un vecteur de paramètres constants,  $\varphi_i$  et  $\psi_i$  sont des fonctions non linéaires connues.  $\varphi_i(0) = 0$  et  $\psi_n(x) \neq 0 \forall x \in \mathfrak{R}^n$

Dans le cas où le système à commander fait partie de la classe plus restrictive des systèmes dits à forme paramétrique stricte ( $\psi_i = 1$ ), les propriétés de poursuite et de régulation obtenues sont globales [15]. Pour les systèmes à forme paramétrique pure, l'étendue de la validité de ces propriétés dépend du domaine de définition des transformations géométriques (difféomorphismes) qui permettent de ramener le système sous la forme stricte. Dans le cas où ce domaine est  $\mathfrak{R}^n$ , les propriétés sont également globales.

### Remarque (Simplification)

Pour toutes les méthodes qui seront présentées, la procédure de design restera la même, pour les systèmes d'ordre  $n \geq 3$ . Afin de simplifier les expressions, les systèmes utilisés seront d'ordre 3. Les résultats généraux (ordre  $n$ ) seront toutefois donnés. Il faut noter que le nombre des étapes, nécessaires à la construction de la commande, de la fcl et éventuellement de la loi d'adaptation, est égal à l'ordre du système [7, 15, 21].

### V.2.1 Algorithme de base

Afin d'illustrer le principe de la méthode du backstepping, on considère le cas des systèmes non linéaires de la forme [22]:

$$\dot{x}_1 = \varphi_1(x_1)^T \mathcal{G} + \psi_1(x_1) x_2 \quad (\text{III.3})$$

$$\dot{x}_2 = \varphi_2(x_1, x_2)^T \mathcal{G} + \psi_2(x_1, x_2) x_3 \quad (\text{III.4})$$

$$\dot{x}_3 = \varphi_3(x_1, x_2, x_3)^T \mathcal{G} + \psi_3(x_1, x_2, x_3) u \quad (\text{III.5})$$

Le vecteur des paramètres  $\mathcal{G}$  est supposé connu. On désire faire suivre à la sortie  $y = x_1$  le signal de référence  $y_r$  où  $\dot{y}_r$ ,  $\ddot{y}_r$  et  $\ddot{y}_r$  sont supposées connues et uniformément bornées. Le système étant du troisième ordre, le design s'effectue en trois étapes.

#### Étape 1

On considère d'abord l'équation (V.3), où la variable d'état  $x_2$  est traitée comme une commande (*fictive* !) et l'on définit la première valeur désirée  $x_1^d = \alpha_0 = y_r$ .

La première variable d'erreur se définit par :

$$e_1 = x_1 - x_1^d = x_1 - \alpha_0 \quad (\text{III.6})$$

Avec ces variables, le système (V.3) s'écrit :

$$\dot{e}_1 = \dot{x}_1 - \dot{\alpha}_0 = \varphi_1(x_1)^T \mathcal{G} + \psi_1(x_1) x_2 - \dot{\alpha}_0 \quad (\text{III.7})$$

Pour un tel système, il a été montré dans chapitre précédent (IV.16) que la fonction quadratique

$$V_1(e_1) = \frac{1}{2} e_1^2 \quad (\text{III.8})$$

Constitue un bon choix de fcl. Sa dérivée, le long de la solution de (V.8), est donnée par :

$$\dot{V}_1(e_1) = e_1 \cdot \dot{e}_1 = e_1 \cdot (\varphi_1(x_1)^T \mathcal{G} + \psi_1(x_1) x_2 - \dot{\alpha}_0) \quad (\text{III.9})$$

Un choix judicieux de  $x_2 u$  rend  $\dot{V}_1(e_1)$  négative et assure la stabilité asymptotique de l'origine du sous-système. Prenons comme valeur de  $x_2$  la fonction  $\alpha_1$  telle que:

$$\varphi_1(x_1)^T \mathcal{G} + \psi_1(x_1) \alpha_1 - \dot{\alpha}_0 = -k_1 e_1 \quad , \quad k_1 > 0 \quad (\text{III.10})$$

Ce qui donne :

$$x_2^d = \alpha_1 = \frac{1}{\psi_1(x_1)} (\varphi_1(x_1)^T \mathcal{G} + \dot{\alpha}_0 - k_1 e_1) \quad (\text{III.11})$$

La dérivée s'écrit alors:

$$\dot{V}_1(e_1) = -k_1 e_1^2 \leq 0 \quad (\text{III.12})$$

d'où la stabilité asymptotique de l'origine de (V.6).

### Étape 2

On considère les sous-systèmes (V.6)-(V.7) et l'on définit la nouvelle variable d'erreur

$$e_2 = x_2 - x_2^d = x_2 - \alpha_1 \quad (\text{III.13})$$

qui représente l'écart entre la variable d'état  $x_2$  et sa valeur désirée  $\alpha_1$ . À cause du fait que  $x_2$  ne peut être forcée à prendre instantanément une valeur désirée, en l'occurrence  $\alpha_1$ , l'erreur  $e_2$  n'est pas, instantanément, nulle. Le design dans cette étape consiste, alors, à forcer  $e_2$  à s'annuler avec une certaine dynamique, choisie au préalable.

Les équations du système à commander, dans l'espace  $(e_1, e_2)$ , s'écrivent :

$$\dot{e}_1 = \varphi_1^T \mathcal{G} + \psi_1 \cdot (e_2 + \alpha_1) - \dot{\alpha}_0 \quad (\text{III.14})$$

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = \varphi_2^T \mathcal{G} + \psi_2 x_3 - \dot{\alpha}_1 \quad (\text{III.15})$$

pour lequel on choisit comme fonction de Lyapunov

$$V_2(e_1, e_2) = V_1 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (\text{III.16})$$

Cette dernière a pour dérivée, le long de la solution de (III.14)-( III.15)

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(e_1, e_2) &= e_1 (\varphi_1^T \mathcal{G} + \psi_1 \cdot (e_2 - \alpha_1) - \dot{\alpha}_0) + e_2 (\varphi_2^T \mathcal{G} + \psi_2 x_3 - \dot{\alpha}_1) \\ &= e_1 (\varphi_1^T \mathcal{G} + \psi_1 \alpha_1 - \dot{\alpha}_0) + e_2 (\varphi_2^T \mathcal{G} + \psi_2 x_3 - \dot{\alpha}_1 + \psi_1 e_1) \quad (\text{V.17}) \\ &= -k_1 e_1^2 + e_2 (\varphi_2^T \mathcal{G} + \psi_2 x_3 - \dot{\alpha}_1 + \psi_1 e_1) \end{aligned}$$

Le choix de la valeur désirée de  $x_3$  devient évident. Ce dernier est donné par :

$$x_3^d = \alpha_2 = \frac{1}{\psi_2} (-k_2 e_2 - \varphi_2^T \mathcal{G} + \dot{\alpha}_1 - \psi_1 e_1) \quad (\text{III.18})$$

où  $k_2 > 0$ ,  $\dot{\alpha}_1$  calculée analytiquement.

$$\dot{\alpha}_1 = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial y_r} \dot{y}_r + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{y}_r} \ddot{y}_r \quad (\text{III.19})$$

Un tel choix permet de réduire la dérivée :

$$\dot{V}_2 \leq -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 \leq 0 \quad (\text{III.20})$$

ce qui assure la stabilité asymptotique de l'origine de (V.14) et (V.15).

### Étape 3

Le système (V.3)-(V.5) est maintenant considéré dans sa globalité. La variable d'erreur

$$e_3 = x_3 - x_3^d = x_3 - \alpha_2 \quad (\text{III.21})$$

est définie, ce qui permet d'écrire les équations du système, dans l'espace des erreurs  $(e_1, e_2, e_3)$

$$\dot{e}_1 = \varphi_1^T \mathcal{G} + \psi_1 \cdot (e_2 + \alpha_1) - \dot{\alpha}_0 \quad (\text{III.22})$$

$$\dot{e}_2 = \varphi_2^T \mathcal{G} + \psi_2 \cdot (e_3 + \alpha_2) - \dot{\alpha}_1 \quad (\text{III.23})$$

$$\dot{e}_3 = \varphi_3^T \mathcal{G} + \psi_3 u - \dot{\alpha}_2 \quad (\text{III.24})$$

Avec comme fonction de Lyapunov :

$$V_3(e_1, e_2, e_3) = V_2 + \frac{1}{2} e_3^2 \quad (\text{III.25})$$

la dérivée, le long de la solution de (III.22)-( III.24), devient :

$$\dot{V}_3(e_1, e_2, e_3) = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 + e_3 (\varphi_3^T \mathcal{G} + \psi_3 u - \dot{\alpha}_2 + \psi_2 e_2) \quad (\text{III.26})$$

À présent, on est en présence de la vraie commande (qui, contrairement à  $x_2$  et  $x_3$ , peut être instantanément forcée à prendre n'importe quelle valeur désirable-physiquement réalisable-). Un bon choix de celle-ci est donné par :

$$u = \frac{1}{\psi_3} (-k_3 e_3 - \varphi_3^T \mathcal{G} + \dot{\alpha}_2 - \psi_2 e_2) \quad (\text{III.27})$$

Où  $k_3 > 0$ ,  $\dot{\alpha}_2$  calculée analytiquement. Avec ce choix, on a :

$$\dot{V}_3 \leq -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 \leq 0 \quad (\text{III.28})$$

D'où la stabilité asymptotique de l'origine de (III.22)-( III.24). Ceci se traduit par la stabilité, en boucle fermée, du système originel (III.14)-( III.15) et le réglage à zéro de l'erreur de poursuite  $y - y_r$ . Les deux principaux objectifs du design sont alors atteints.

### Remarque

Les paramètres de design  $k_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), sont directement liés à la position de pôles de la boucle fermée. Leur choix permet de faire un placement des pôles, fixant ainsi la dynamique en régulation de cette boucle.

### V.2.2. Exemple

Soit à stabiliser l'origine le système :

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_1^3 + x_2 \quad (\text{III.29})$$

$$\dot{x}_2 = x_3 \quad (\text{III.30})$$

$$\dot{x}_3 = u \quad (\text{III.31})$$

#### Étape 1

Le sous-système (3.29) est considéré en premier lieu. Étant donné que  $\alpha_0 = 0$ , on prend comme fonction de commande de Lyapunov

$$V_1(x_1) = \frac{1}{2} x_1^2 \quad (\text{III.32})$$

Sa dérivée, le long de la solution de (V.32), est donnée par :

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1 \cdot \dot{x}_1 = x_1(x_1^2 - x_1^3 + x_2) \quad (\text{III.33})$$

Avec le choix (qui préserve les non-linéarités utiles, ie  $-x_1^3$ .)

$$x_2^d = \alpha_1 = -x_1^2 - x_1 \quad (\text{III.34})$$

la dérivée s'écrit :

$$\dot{V}_1(x_1) = x_1(x_1^2 - x_1^3 - x_1^2 - x_1) = -x_1^4 - x_1^2 \leq -x_1^2 \quad (\text{III.35})$$

Ce qui implique que l'origine de (V.29) est globalement asymptotiquement stable.

#### Étape 2

Cette fois, on considère (III.29)-( III.30) et l'on définit la nouvelle variable :

$$e_2 = x_2 - \alpha_1 = x_2 + x_1^2 + x_1 \quad (\text{III.36})$$

Le sous-système (III.29)-( III.30) s'écrit alors :

$$\dot{x}_1 = -x_1 - x_1^3 + \alpha_1 + e_2 \quad (\text{III.37})$$

$$\dot{e}_2 = \dot{x}_2 - \dot{\alpha}_1 = x_3 - \dot{\alpha}_1 \quad (\text{III.38})$$

Si l'on prend pour fcl

$$V_2(x_1, e_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} e_2^2 \quad (\text{III.39})$$

sa dérivée le long de la solution de (III.37)-( III.38) est donnée par :

$$V_2(x_1, e_2) = x_1 \dot{x}_1 + e_2 \dot{e}_2 = -x_1^4 - x_1^2 + e_2(x_3 - \dot{\alpha}_1 + x_1) \quad (\text{III.40})$$

Il suffit, à présent, de choisir la valeur désirée  $\alpha_2$  de  $x_3$  pour rendre négative cette dérivée. Un tel choix est donné par :

$$\dot{x}_3^d = \alpha_2 = \dot{\alpha}_1 - x_1 - k_2 e_2 \quad (\text{III.41})$$

Où :  $\dot{\alpha}_1 = -(2x_1 + 1)\dot{x}_1 = -(2x_1 + 1)(x_1^2 - x_1^3 + x_2)$

### Étape 3

Tout le système (III.29)-(III.31) est maintenant considéré. On définit la nouvelle variable d'erreur

$$e_3 = x_3 - x_3^d = x_3 - \alpha_2 \quad (\text{III.42})$$

Ce qui permet d'écrire le système (III.29)-( III.31) sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_1^3 + \alpha_1 + e_2 \\ \dot{e}_2 &= x_3 - \dot{\alpha}_1 + \alpha_2 \\ \dot{e}_3 &= u - \dot{\alpha}_2 \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Le choix de la fcl :

$$V_2(x_1, e_2, e_3) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}e_2^2 + \frac{1}{2}e_3^2 \quad (\text{III.44})$$

et le calcul de sa dérivée le long de la trajectoire de (III.43), de la même manière qu'à l'étape 2, permet d'obtenir la commande qui assure la stabilité asymptotique de l'origine du système. Après calcul et simplification (avec  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ ), cette commande est donnée par :

$$u = \dot{\alpha}_2 - e_2 - e_3 = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} \dot{x}_2 - e_2 - e_3 \quad (\text{III.45})$$

$$\Rightarrow u = \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} (x_1^2 - x_1^3 + x_2) + \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_2} x_3 - (x_2 - \alpha_1) - (x_3 - \alpha_2) \quad (\text{III.46})$$

## V.3 COMMANDE PAR BACKSTEPPING BASEE SUR LE PRINCIPE DE LA COMMANDE VECTORIEL

L'approche du backstepping, que nous allons appliquer pour la commande de la machine asynchrone, est basée sur le principe de l'orientation du flux rotorique [23]. Dans ce qui va suivre, nous allons tout d'abord présenté dans un premier temps un bref historique du backstepping. Dans un deuxième temps donner le principe de la commande vectorielle, Finalement, l'application du backstepping à la commande de la machine.

### V.3.1 Introduction au backstepping

Le backstepping a été développé par Kanellakopoulos [25] et inspiré par les travaux de Feurer & Morse [26] d'une part et Kokotovic & Sussmann [20] d'autre part. Elle offre une méthode systématique pour effectuer le design d'un contrôleur pour Les systèmes non linéaires. L'idée consiste à calculer une loi de commande afin de garantir que la dérivée d'une certaine fonction (de Lyapunov) soit définie positive et que se dérivée soit toujours négative. La méthode consiste à fragmenter le système en un ensemble de sous-systèmes imbriqués d'ordre décroissant. Le calcul de la fonction de Lyapunov s'effectue, ensuite, récursivement en partant de l'intérieur de la boucle. A chaque étape, l'ordre du système est augmenté et la partie non stabilisée lors de l'étape précédente est traitée. À la dernière étape, la loi de commande est trouvée. Celle-ci permet de garantir, en tout temps, la stabilité globale du système compensé tout en travaillant en poursuite et en régulation.

### V.3.2 Modèle le la MAS

Le modèle de la machine asynchrone dans le repère  $(d-q)$  est donné par [24]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 + \dot{\theta}_s x_2 + a_2 x_3 + b u_1 \\ \dot{x}_2 = -\dot{\theta}_s x_1 + a_1 x_2 + a_4 x_3 x_4 + b u_2 \\ \dot{x}_3 = a_8 x_3 + a_{10} x_1 \\ \dot{x}_4 = a_{14} x_2 x_3 + a_{15} x_4 + d C_r \end{cases} \quad (\text{III.47})$$

Avec :

$$x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [i_{sd} \ i_{sq} \ \Phi_d \ \omega_r]^T ; \ \Phi_d = \Phi_{rd} ; \ \dot{\theta}_s = \frac{d\theta_s}{dt} = \omega_r + a_7 \cdot \frac{x_2}{x_3}$$

### V.3.3 Application du backstepping à la commande de la MAS

La technique de commande par backstepping est une méthode de synthèse en non linéaire quand il est difficile d'appliquer la méthode directe de lyapunov. L'application du backstepping à la commande de la machine est divisée en deux étapes [11, 23, 24].

#### Etape 1

Cette première étape consiste à identifier les erreurs  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  qui représentent respectivement l'erreur entre la vitesse électrique réelle  $\omega_r$  et la vitesse électrique de référence  $\omega_r^d$  ainsi que le module du flux rotorique  $\Phi_d$  et celui de référence  $\Phi_d^d$ .

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= x_4^d - x_4 \\ \varepsilon_2 &= x_3^d - x_3 \end{aligned} \quad (\text{III.48})$$

La dérivée de l'erreur est donnée par:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= \dot{x}_4^d - \dot{x}_4 = \dot{x}_4^d - a_{14} \cdot x_2 x_3 - a_{15} x_4 - dC_r \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \dot{x}_3^d - \dot{x}_3 = \dot{x}_3^d - a_8 x_3 - a_{10} x_1\end{aligned}\quad (\text{III.49})$$

La première fonction de Lyapunov est définie par:

$$V_1 = \frac{1}{2} (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \quad (\text{III.50})$$

On choisie les fonctions stabilisantes comme suit:

$$\begin{aligned}(x_2)_{ref} &= \frac{1}{a_{14} x_3} (k_1 \varepsilon_1 + \dot{x}_4^d) - a_{15} x_4 - dC_r \\ (x_1)_{ref} &= \frac{1}{a_{10}} (k_2 \varepsilon_2 + \dot{x}_3^d - a_8 x_3)\end{aligned}\quad (\text{III.51})$$

$$\text{Ou : } x_3 = \sqrt{\Phi_{r\alpha}^2 + \Phi_{r\beta}^2} > 0$$

Alors la dynamique des erreurs est donnée par:

$$\dot{\varepsilon}_1 = -k_1 \varepsilon_1 ; \dot{\varepsilon}_2 = -k_2 \varepsilon_2 \quad (\text{III.52})$$

La dérivée de la fonction de lyapunov par rapport au temps est:

$$\dot{V}_1 = -k_1 z_1^2 - k_2 z_2^2 \leq 0 \quad (\text{III.52})$$

Avec :  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$

## Etape 2

Dans cette étape, on définit deux nouvelles erreurs des composantes du courant statorique données par :

$$\varepsilon_3 = (x_2)_{ref} - x_2 = \frac{1}{a_{14} x_3} (k_1 \varepsilon_1 + \dot{x}_4^d) - a_{15} x_4 - dC_r - x_2 \quad (\text{III.53})$$

$$\varepsilon_4 = (x_1)_{ref} - x_1 = \frac{1}{a_{10}} (k_2 \varepsilon_2 + \dot{x}_3^d - a_8 x_3) - x_1 \quad (\text{III.54})$$

Alors l'équation (III.49) sera de la forme:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_1 &= -k_1 \varepsilon_1 + a_{14} \cdot \varepsilon_3 \\ \dot{\varepsilon}_2 &= -k_2 \varepsilon_2 + a_{10} \cdot \varepsilon_4\end{aligned}\quad (\text{V.55})$$

La dérivée de (III.53) et (III.54) nous donne:

$$\dot{\varepsilon}_3 = (\dot{x}_2)_{ref} - \dot{x}_2 = (\dot{x}_2)_{ref} - f_2(x) - bu_2 \quad (\text{III.56})$$

$$\dot{\varepsilon}_4 = (\dot{x}_1)_{ref} - \dot{x}_1 = (\dot{x}_1)_{ref} - f_1(x) - bu_1 \quad (\text{III.57})$$

Où :  $f_1(x) = a_1x_1 + \dot{\theta}_s x_2 + a_2x_3$  et  $f_2(x) = -\dot{\theta}_s x_1 + a_1x_2 + a_5x_3x_4$

Pour définir les lois de commande, on adopte une nouvelle fonction de lyapunov décrite par l'expression suivante:

$$V_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 + \varepsilon_4^2) \quad (\text{III.58})$$

Ainsi la dérivée de la fonction de lyapunov finale est :

$$\dot{V}_2 = \varepsilon_1 \dot{\varepsilon}_1 + \varepsilon_2 \dot{\varepsilon}_2 + \varepsilon_3 \dot{\varepsilon}_3 + \varepsilon_4 \dot{\varepsilon}_4 \quad (\text{III.59})$$

Sa dérivée est donnée par:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & -k_1 \varepsilon_1^2 - k_2 \varepsilon_2^2 - k_3 \varepsilon_3^2 - k_4 \varepsilon_4^2 + \varepsilon_3 (k_3 \varepsilon_3 + (\dot{x}_2)_{ref} - f_2(x) - bu_2) \\ & + \varepsilon_4 (k_4 \varepsilon_4 + (\dot{x}_1)_{ref} - f_1(x) - bu_1) \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

Où :  $k_3 > 0$ ,  $k_4 > 0$

On choisie la commande comme suit :

$$\begin{aligned} u_1 = V_{sd} &= \frac{1}{b} ((\dot{x}_1)_{ref} + k_4 \varepsilon_4 - f_1(x)) \\ u_2 = V_{sq} &= \frac{1}{b} ((\dot{x}_2)_{ref} + k_3 \varepsilon_3 - f_2(x)) \end{aligned} \quad (\text{III.61})$$

La dérivée de l'erreur  $\varepsilon_3$  et  $\varepsilon_4$  sera comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_3 &= -k_3 \varepsilon_3 - a_{14} x_3 \varepsilon_1 \\ \dot{\varepsilon}_4 &= -a_{10} \varepsilon_2 - k_4 \varepsilon_4 \end{aligned} \quad (\text{III.61})$$

Donc à partir de l'équation (III.55) et (III.61) on peut écrire :

$$\dot{\zeta} = A \zeta \quad (\text{III.62})$$

Avec :

$$A = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & a_{14} & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & a_{10} \\ -a_{14} x_3 & 0 & -k_3 & 0 \\ 0 & -a_{10} & 0 & -k_4 \end{bmatrix} \text{ et } \zeta = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}$$

## V.4 STRUCTURE GENERALE DE LA COMMANDE

La figure (III.4) représente le principe de la commande par backstepping de la machine asynchrone. La première étape de la commande par backstepping consiste à générer les courants de référence  $(i_{sd})_{ref}$  et  $(i_{sq})_{ref}$ , représentant la

commande fictive. L'erreur entre ces références et les grandeurs réelles des courants résulte de nouvelles erreurs  $\varepsilon_3$  et  $\varepsilon_4$ . Enfin on adapte la loi de commande  $V_{sd}$  et  $V_{sq}$  à partir de l'équation (V.61) pour assurer la stabilité de la machine.

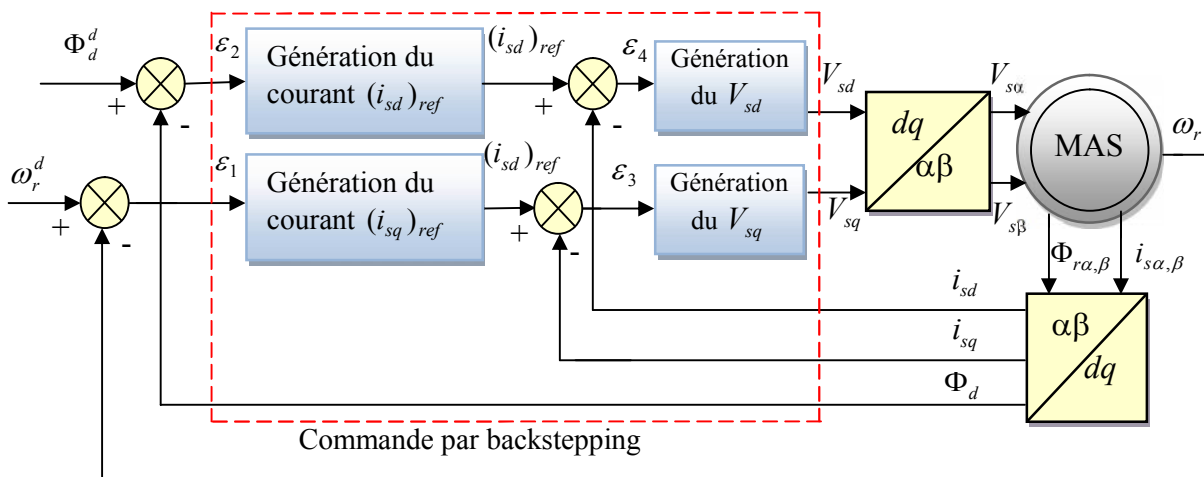


Figure V.1 Principe de la commande par backstepping de la machine asynchrone.

**Remarque**

Il suffit de manipuler les quatre gains de réglages  $k_i$  ( $i=1,2,\dots$ ) pour aboutir aux meilleurs résultats. Néanmoins cette commande présente une insuffisance quant au rejet de l'effet des défauts malgré l'augmentation de la robustesse (cette dernière a permis de diminuer l'erreur sur la vitesse et le flux mais n'annule pas l'effet de défauts sur les courants dans le cas de la MAS).

**V.5 CONCLUSION**

Ce chapitre donne quelques notions théoriques de stabilité des systèmes non linéaires ces notions de bases sont nécessaires à la compréhension des subtilités de la commande par backstepping basé sur la théorie de Lyapunov et, dans un deuxième temps, il introduit la synthèse d'une commande par backstepping pour un système académique (avec un exemple de base) pour la bonne compréhension de cette commande. En fin, l'application de cette stratégie de commande aux machines asynchrones (MAS) basée sur le principe de l'orientation du flux rotoriques fait l'objet de la dernière partie.

# Chapitre IV

## Commande par Mode Glissant

### III.1 INTRODUCTION

Dans le domaine de la commande des machines électriques des efforts considérables en recherche ont été fournis durant ces dernières décennies. La technique la plus connue a été développée par Hasse et Blaschke (Vas, 1990) sous le nom de la commande vectorielle (CV). Cependant, cette commande peut être affectée par les variations paramétriques ou autres facteurs liés à la structure du modèle, ce qui conduira à la détérioration des performances de la commande. En effet, la recherche d'autres approches plus robustes et plus efficaces s'est imposée afin de satisfaire les exigences industrielles. Ainsi, de nouveaux concepts avaient vu le jour, tels que la commande par mode glissant (SMC) qui a suscité l'intérêt de beaucoup de chercheurs en automatique (Edwards et Spurgeon, 1998); (Utkin *et al.*, 1999); (Fridman *et al.*, 2011), (Shtessel *et al.*, 2014), (Azar *et al.*, 2015). Cette commande présente beaucoup d'avantages, en particulier l'insensibilité du système aux variations paramétriques ainsi que le rejet efficace des perturbations. Aussi, elle se caractérise par sa simplicité en termes de synthèse et de mise en œuvre pratique.

Dans ce même contexte et en se basant sur cette technique, nous proposons dans ce chapitre une approche de conception des systèmes de commande robuste. Tout d'abord, nous synthétisons une commande par mode glissant (SMC) dotée d'une action intégrale qui servira à maintenir les variables (courants, flux et vitesse) à leurs références désirées et aussi de compenser l'effet du couple de charge et des perturbations paramétriques.

### III.2 COMMANDE PAR MODE GLISSANT (SMC)

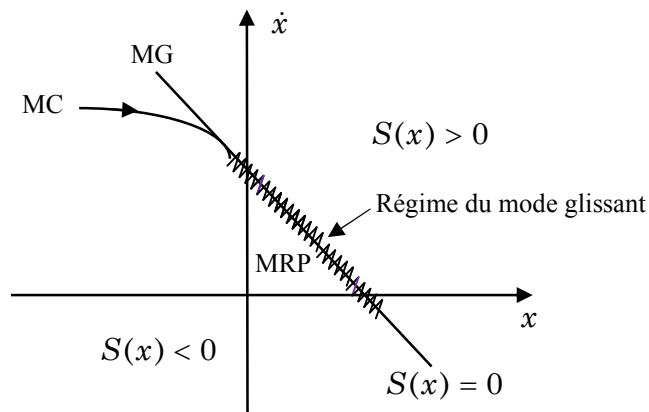
#### III.2.1 Généralités et principes

La commande par modes glissants (SMC) est une technique initialement développée dans les années 1950 et popularisée par l'article précurseur d'Utkin (Utkin, 1977). C'est une stratégie de commande devenue très efficace en théorie de commande moderne grâce à sa simplicité et à sa robustesse face aux variations paramétriques (Utkin *et al.*, 1999). Avec le développement croissant de l'électronique de puissance, cette approche de commande a connu beaucoup de succès dans le domaine des machines électriques.

Dans cette commande à structure variable, la trajectoire d'état est amenée vers une surface appelée surface de glissement. Puis cette trajectoire est forcée à rester au voisinage de celle-ci à l'aide de la loi de commutation. Les modes glissants sont très utilisés en automatique non linéaire pour la commande, l'observation et l'estimation de paramètres. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux ouvrages (Edwards et Spurgeon, 1998 ; Fridman *et al.*, 2011).

La trajectoire dans le plan de phase est constituée de trois parties correspondant à trois modes différents comme présente la figure 1 (Slotine, 1984 ; Gao et Hung, 1993 ; Hung *et al.*, 1993) :

- Le mode de convergence (MC): C'est le mode durant lequel la variable à régler se déplace à partir de n'importe quel point initial dans le plan de phase et se dirige vers la surface de commutation  $S(x) = 0$  et l'atteint dans un temps fini. Ce mode est caractérisé par la loi de commande et le critère de convergence.
- Le mode de glissement (MG): C'est le mode durant lequel la variable d'état a atteint la surface de glissement et tend vers l'origine du plan de phase. La dynamique de ce mode est caractérisée par le choix de la surface de glissement  $S(x) = 0$ .
- Le mode de régime permanent (MRP): Ce mode est ajouté pour l'étude de la réponse du système autour de son point d'équilibre. Il caractérise la qualité et la performance de la commande (Gao et Hung, 1993).



**Figure III.1** Les différents modes de trajectoire dans le plan de phase.

### III.2.2. Conception de la commande SMC

La conception de la commande par mode de glissement prend en compte les problèmes de stabilité et de performances. En général, pour réaliser ce type de commande trois étapes doivent être suivies:

**a) Choix de la surface de glissement:**

La surface la plus utilisée pour obtenir le régime de glissement qui garantit la convergence de l'état vers sa référence donnée par Slotine (Slotine, 1984), est définie par:

$$S(x) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda\right)^{r-1} e(x) \quad (\text{IV.1})$$

Où  $\lambda$ ,  $r$  et  $e(x) = (x_{ref} - x)$  représentent respectivement, une constante positive, le degré relatif et l'écart entre la variable à régler et sa référence.

Dans notre cas, l'objectif est de synthétiser une commande par mode glissement avec une surface convenablement choisie (Mekki *et al.*, 2015). A cet effet et comme présenté dans (Bouri *et Thomasset.*, 2001) et (Eker *et Akinal.*, 2008), la SMC avec une surface à action intégrale donne des résultats meilleurs dans tous les points de fonctionnement. L'erreur statique est suffisamment réduite par rapport aux autres stratégies de commande sans action intégrale et la dynamique est satisfaisante. Selon (Bouri *et Thomasset.*, 2001), (Eker *et Akinal.*, 2008) et (Mekki *et al.*, 2015), la surface de glissement peut être sous la forme:

$$S(t) = e(t) + m_i \int_0^t e(\tau) d\tau \quad (\text{IV.2})$$

$m_i$  représentent des constantes positives.

**b) Conditions de convergence et d'existence:**

Les conditions d'existence et de convergence sont les critères qui permettent aux différentes dynamiques du système de converger vers la surface de glissement et d'y rester indépendamment de la perturbation. Il existe deux considérations pour assurer le mode de convergence.

1. *Fonction directe de commutation*: C'est la première condition de convergence qui a été proposée et étudiée par (Emelyanov., 1967) et (Utkin., 1977). Il s'agit de donner à la surface une dynamique convergente vers zéro. Elle est donnée par:

$$S(x)\dot{S}(x) < 0 \quad (\text{IV.3})$$

2. *Fonction de LYAPUNOV*: C'est la deuxième condition de convergence. La fonction de Lyapunov est une fonction scalaire positive ( $V(x) > 0$ ) pour les variables d'état du système. Nous définissons la fonction de Lyapunov comme suit :

$$V(x) = \frac{1}{2} S^2(x) \quad (\text{IV.4})$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\dot{V}(x) = S(x)\dot{S}(x) \quad (\text{IV.5})$$

Pour que la fonction  $V(x)$  puisse décroître et converger vers zéro, il suffit de s'assurer que sa dérivée soit négative ( $\dot{V}(x) < 0$ ). Ceci n'est valable que si la condition (III.3) est vérifiée.

### c) Synthèse de la commande :

L'obtention d'un régime de glissement suppose une commande discontinue. La surface de glissement devrait être attractive des deux côtés. De ce fait, si cette commande discontinue est indispensable, il n'empêche nullement qu'une partie continue lui soit ajoutée. La partie continue est amenée à réduire autant que possible l'amplitude de la partie discontinue. En présence d'une perturbation, la partie discontinue a essentiellement pour rôle de vérifier les conditions d'attractivité. Afin d'obliger le système à suivre la trajectoire imposée, il suffit de rendre  $S = 0$  attractive. Pour cela, on ajoute une commande  $U_n$  à la commande équivalent  $U_{eq}$  sous la forme :

$$U = U_{eq} + U_n \quad (\text{IV.6})$$

La condition nécessaire pour que les états du système suivent la trajectoire définie par les surfaces de glissement est  $S = 0 \Rightarrow \dot{S} = 0$  ce qui nous ramène à définir la commande équivalente  $U_{eq}$ .

Tandis que la loi de commande qui assure l'attractivité  $U_n$  est donnée par :

$$U_n = -k \text{sign}(S) \quad (\text{IV.7})$$

## III.3 COMMANDE SMC

Les approches SMC utilisent des techniques de commande robustes (Niemann et Stoustrup., 2005), (Benosman *et al.*, 2009), (Mekki *et al.*, 2014.b), (Djehali *et al.*, 2013) pour que le système en boucle fermée reste insensible à certains défauts en utilisant des paramètres de commande constants. Une liste de dysfonctionnements potentiels est supposée connue a priori comme les défauts de conception de base et tous les modes de défaillance. Les conditions de fonctionnement du système sont considérées comme normales au stade de la conception (Jiang *et al.*, 2012). Par conséquent, quand une panne survient, le contrôleur doit être capable de maintenir la stabilité du système avec une dégradation acceptable dans les performances. Aussi l'efficacité de cette stratégie, qui suppose généralement un répertoire très restrictif de défauts, dépend de la robustesse du système nominal en boucle fermée.

L'objectif visé par notre application est de concevoir une commande SMC pour forcer la vitesse  $\Omega$  et le flux  $\varphi_d$  de la MAS à suivre leurs références désirées  $\Omega^*$  et  $\varphi_d^*$  respectivement, avec de bonnes performances sous l'effet indésirable du couple de charge  $C_r$  et des perturbations paramétriques qui introduisent des termes indésirables  $\delta_i(x, \delta a_i)$  dans les modèles sains (voir

(II.13) et (II.15)). Le problème consiste à concevoir un dispositif de commande robuste ne nécessitant aucun schéma de détection de défauts (FDI) ni aucune reconfiguration de la loi de commande. Ces techniques sont généralement simples dans leur mise en œuvre. La méthode SMC proposée utilise un contrôleur fixe. Les défauts sont considérés comme des incertitudes représentées par les termes  $\delta_i(x, \delta a_i)$  et sont prises en compte dans la conception de la loi de commande. Afin d'atteindre l'objectif de la commande, nous utilisons une stratégie robuste de type SMC avec une surface intégrale de manière à ce que le système en boucle fermée reste insensible à un ensemble connu de défauts.

### Définition:

Un domaine de fonctionnement  $\lambda$  est défini comme suit (Djehali *et al.*, 2013):

Si  $i_d^{\max}$ ,  $i_q^{\max}$ ,  $\varphi_d^{\max}$ ,  $\Omega^{\max}$ ,  $C_r^{\max}$ ,  $H_i^{\max}$  sont respectivement les valeurs maximales des courant, flux, vitesse, couple de charge et les variations paramétriques, alors  $|i_d| \leq i_d^{\max}$ ,  $|i_q| \leq i_q^{\max}$ ,  $|\varphi_d| \leq \varphi_d^{\max}$ ,  $|\Omega| \leq \Omega^{\max}$ ,  $|C_r| < C_r^{\max}$  et  $|\delta_i(x, \delta a_i)| \leq H_i^{\max}$ .

### Hypothèse 1:

- a) Les états de la MSAP et/ou MAS sont dans le domaine de fonctionnement  $\lambda$ .
- b) Les références désirées du flux ( $\varphi_d^*$ ) et de la vitesse ( $\Omega^*$ ) sont dans le domaine de fonctionnement  $\lambda$ .
- c) Le couple de charge réelle ( $C_r$ ) est supposé être limité par une valeur maximale fixe ( $C_r^{\max}$ ). Cette valeur maximale est choisie conformément aux caractéristiques réalistes de couple  $|C_r| < C_r^{\max}$ .
- d) La variation des résistances rotoriques ou statoriques  $\delta R_i$  reste dans le domaine de fonctionnement  $\lambda$ .

A partir de l'hypothèse 1, les fonctions  $\delta_i(x, \delta a_i) : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ , sont bornées comme suit  $|\delta_i(x, \delta a_i)| \leq H_i^{\max}$  (Djehali *et al.*, 2013).

### III.3.1. Application de la commande SMC aux MSAP

Considérons les résultats présentés dans le chapitre précédent (II.15), où les calculs ont mené vers le nouveau modèle de la MSAP en présence de perturbations paramétriques :

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_d \\ \dot{i}_q \\ \dot{\omega}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 i_d + a_2 i_q \omega_r + b_1 u_d + \delta_1(x) \\ a_3 i_q + a_4 \omega_r + a_5 i_d \omega_r + b_2 u_q + \delta_2(x) \\ a_6 i_q + a_7 \omega_r + d C_r + \delta_3(x) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

Pour la conception d'une stratégie SMC dédiée à la MSAP, les surfaces de glissement suivantes sont choisies (voir Gouichiche *et al.*, 2013 et Mekki *et al.*, 2015):

$$\left( \begin{array}{l} S_1(t) = \omega_r - \omega_r^{ref} + m_1 \int (\omega_r - \omega_r^{ref}) dt \\ S_2(t) = i_q - i_q^{ref} + m_2 \int (i_q - i_q^{ref}) dt \\ S_3(t) = i_d - i_d^{ref} + m_3 \int (i_d - i_d^{ref}) dt \end{array} \right) \quad (IV.9)$$

Où,  $\omega_r^{ref}, i_d^{ref}, i_q^{ref}$  représente la vitesse et les courants de références;  $m_1, m_2, m_3$  sont des constantes positives.

### a) Régulateur de la vitesse

En utilisant le théorème des modes glissants (Utkin., 1977), la condition nécessaire pour que les états du système suivent les trajectoires désirées est  $S_1(t) = 0$  i.e :

$$\dot{S}_1(t) = (\dot{\omega}_r - \dot{\omega}_r^{ref}) + m_1(\omega_r - \omega_r^{ref}) = 0$$

Dans ce cas, la commande équivalente est donné par:

$$i_q^{eq} = \frac{1}{a_6} (-a_7 \omega_r - dC_r + \dot{\omega}_r^{ref} - \delta_3(x) - m_1(\omega_r - \omega_r^{ref})) \quad (IV.10)$$

La loi de commande assurant l'attractivité est donnée par:

$$i_q^{at} = -k_1 \text{sign}(S_1) \quad (IV.11)$$

avec  $k_1 > 0$ .

Une combinaison appropriée entre (III.10) et (III.11) conduit à définir le régulateur (SMC) de la vitesse:

$$i_q^{ref} = \frac{1}{a_6} (-a_7 \omega_r - dC_r + \dot{\omega}_r^{ref} - \delta_3(x) - m_1(\omega_r - \omega_r^{ref})) - k_1 \text{sign}(S_1) \quad (IV.12)$$

### b) Régulateurs de Courants

Dans ce cas, les conditions nécessaires pour que les états suivent la trajectoire désirée est  $S_2(t) = 0$  et  $S_3(t) = 0$ . Nous avons donc :

$$\left( \begin{array}{l} \dot{S}_2(t) = \dot{i}_q - \dot{i}_q^{ref} + m_2(i_q - i_q^{ref}) = 0 \\ \dot{S}_3(t) = \dot{i}_d - \dot{i}_d^{ref} + m_3(i_d - i_d^{ref}) = 0 \end{array} \right)$$

Selon la dérivée des surfaces des courants, nous pouvons générer  $u_d^{eq}$  et  $u_q^{eq}$  comme suit:

$$\left( \begin{array}{l} u_q^{eq} = \frac{1}{b_2} (\dot{i}_q^{ref} - a_3 i_q - a_4 \omega_r - a_5 i_d \omega_r - \delta_2(x) - m_2 (i_q - i_q^{ref})) \\ u_d^{eq} = \frac{1}{b_1} (\dot{i}_d^{ref} - a_1 i_d - a_2 i_q \omega_r - \delta_1(x) - m_3 (i_d - i_d^{ref})) \end{array} \right) \quad (IV.13)$$

La loi de commande attractive directe et en quadrature est donnée par:

$$\left( \begin{array}{l} u_q^{at} = -k_2 \text{sign}(S_2) \\ u_d^{at} = -k_3 \text{sign}(S_3) \end{array} \right) \quad (IV.14)$$

avec  $k_2$  et  $k_3$  sont des constantes positives qui doivent être convenablement choisis. Selon (III.13)-(III.14) et la preuve de stabilité 1, la loi de commande (SMC) globale aura la forme:

$$\left( \begin{array}{l} u_q^{nom} = \frac{1}{b_2} (\dot{i}_q^{ref} - a_3 i_q - a_4 \omega_r - a_5 i_d \omega_r - m_2 (i_q - i_q^{ref})) - k_2 \text{sign}(S_2) \\ u_d^{nom} = \frac{1}{b_1} (\dot{i}_d^{ref} - a_1 i_d - a_2 i_q \omega_r - m_3 (i_d - i_d^{ref})) - k_3 \text{sign}(S_3) \end{array} \right) \quad (IV.15)$$

### c) Analyse de stabilité en boucle fermée

L'objectif de la commande est de forcer la vitesse à suivre sa référence ( $\omega_r \rightarrow \omega_r^{ref}$ ) et maintenir en même temps  $i_d \rightarrow 0$  sous l'effet des variations paramétriques et du couple de charge (III.8).

Si  $e_d, e_q$  et  $e_\omega$  désignant respectivement les erreurs sur les courants et la vitesse, alors leurs dynamiques peuvent être exprimées par:

$$\left( \begin{array}{l} \dot{e}_d = a_1 i_d + a_2 i_q \omega_r + b_1 u_d + \delta_1(x) - \dot{i}_d^{ref} \\ \dot{e}_q = a_3 i_q + a_4 \omega_r + a_5 i_d \omega_r + b_2 u_q + \delta_2(x) - \dot{i}_q^{ref} \\ \dot{e}_\omega = a_6 i_q + a_7 \omega_r + a_8 i_d i_q + dC_r + \delta_3(x) - \dot{\omega}_r^{ref} \end{array} \right) \quad (IV.16)$$

Prenons  $k_1 = \frac{k_\omega}{a_6}$  dans (III.12).

A partir de cette dernière et de  $\dot{e}_\omega$  (III.16), on obtient:

$$\dot{e}_\omega = -k_\omega \text{sign}(S_1) + \delta_3(x) - m_1 e_\omega \quad (IV.17)$$

Dans le même contexte, considérons  $k_2 = \frac{k_q}{b_2}$  et  $k_3 = \frac{k_d}{b_1}$ . Selon (III.15) et (III.16);

$\dot{e}_q$  et  $\dot{e}_d$  prennent la forme:

$$\left( \begin{array}{l} \dot{e}_q = -k_q \text{sign}(S_2) + \delta_2(x) - m_2 e_q \\ \dot{e}_d = -k_d \text{sign}(S_3) + \delta_1(x) - m_3 e_d \end{array} \right) \quad (IV.18)$$

**Preuve de la stabilité 1.**

Considérons la fonction de Lyapunov suivante:

$$V = \frac{1}{2}e_d^2 + \frac{1}{2}e_q^2 + \frac{1}{2}e_\omega^2 \quad (\text{IV.19})$$

La dérivée de  $V$  par rapport au temps sera:

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_d(-k_d \text{sign}(S_3) + \delta_1(x) - m_3 e_d) + e_q(-k_q \text{sign}(S_2) + \delta_2(x) - m_2 e_q) \\ & + e_\omega(-k_\omega \text{sign}(S_1) + \delta_3(x) - m_1 e_\omega) \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

avec  $m_i$  ( $i = 1, \dots, 3$ ) des coefficients positifs pris tels que :

$$m_1 \gg |k_\omega \text{sign}(S_1) + \delta_3(x)|_{\max}, \quad m_2 \gg |k_q \text{sign}(S_2) + \delta_2(x)|_{\max}, \quad m_3 \gg |k_d \text{sign}(S_3) + \delta_1(x)|_{\max}.$$

avec ce choix, la dérivée de la fonction de Lyapunov (IV.20) devient:

$$\dot{V} < -m_3 e_d^2 - m_2 e_q^2 - m_1 e_\omega^2 \quad (\text{IV.21})$$

Finalement (IV.21) prouve que  $\dot{V} \leq 0$ , ce qui implique que l'erreur est globalement uniformément bornée. Par conséquent, l'analyse de la convergence de la vitesse ( $\omega_r \rightarrow \omega_r^{ref}$ ) et des courants ( $i_d \rightarrow i_d^{ref}$ ;  $i_q \rightarrow i_q^{ref}$ ) peut être établie.

**Remarque 1.** La commande découplée de la vitesse  $\omega_r$  et des courants  $i_d, i_q$  est atteinte selon (IV.12) et (IV.15), ces lois de commande annulent l'effet des perturbations inconnues provenant des variations paramétriques et du couple  $C_r$ . Une fois que l'annulation ait lieu, la dynamique globale de  $i_d, i_q$  et  $\omega_r$  est simplifiée et il est facile de choisir les gains (SMC) correspondants.

**Remarque 2.** La fonction  $\text{sign}(x)$  introduit le phénomène de chattering indésirable en raison des brusques changements dans le signal de commande (Boyuan *et al.*, 2016). La fonction de saturation  $\text{sat}(x)$  est donc utilisée pour éliminer cet effet indésirable:

$$\text{sat}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x > \zeta \\ \text{sign}(x) & \text{if } -\zeta \leq x \leq \zeta \\ -1 & \text{if } x < -\zeta \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

où  $\zeta$  est la largeur de la bande limite.



**Figure III.2** Fonctions typiques: (a)  $\text{sign}(x)$ , (b)  $\text{sat}(x)$

**Remarque 3:** Dans la pratique, seules les tensions, les courants et la vitesse du rotor sont disponibles à la mesure, tandis que pour le flux cela n'est pas évident. En effet, la majorité des travaux sont orientés vers l'estimation de cette variable. Dans ce chapitre, l'estimation du flux rotorique sera effectuée à l'aide d'un observateur à grand gain (Khalil, 2008), (Ghanes, *et al.*, 2008), (Benzineb *et al.*, 2010), (Haj Brahim, *et al.*, 2011), (Mekki. *et al.*, 2012).

### III.6 CONCLUSION

Ce chapitre concerne la conception d'une nouvelle stratégie de commande par mode glissant (SMC) dédiée aux moteurs électriques. Nous avons montré que la commande par mode glissant avec surface de glissement intégrale présente une robustesse par rapport au couple de charge et aux perturbations paramétriques.

# Bibliographie

- [1] T. Amieur, "Commande des systèmes non linéaires par mode glissant flou", Magister en Automatique, Université Mohamed Kheider de Biskra, 2009.
- [2] J. J. E. Slotine, W. Li, "Applied nonlinear control", Prentice-Hall, USA, 1991.
- [3] Frank L. Lewis, Chaouki T. Abdallah, D. M. Dawson, "Control of robot manipulators", Macmillan Publishing Company, Inc, USA, 1993.
- [4] H. Berghuis, "Model-based Robot Control: from Theory to Practice", University of Twente, Enschede, Netherlands, 1993.
- [5] F.Z. Daikh, "Contribution des approches non linéaires de l'intelligence artificielle pour la stabilisation robuste des systèmes non linéaires", Thèse de Doctorat, université d'Oran 1, 2015.
- [6] A. Isidori, "Nonlinear control systems II", Springer-Verlag, London, 1999.
- [7] H. K. Khalil, "Nonlinear Systems", Prentice-Hall, 2002.
- [8] H. Nijmeijer, "Nonlinear dynamical control systems", Springer, New York, 1990.
- [9] Z. Gao, P. Antsaklis, "Stability of the pseudo-inverse method for reconfigurable control". *International Journal of Control* 53(3), 717-729. 1991.
- [10] J. Jouffroy, "Stabilité et systèmes non linéaires Réflexions sur l'analyse de contraction". Thèse de Doctorat, Université de Savoie, Octobre 2002.
- [11] L.N. Paquin, 'Application du backstepping à une colonne de flottation'. Mémoire M.Sc, Faculté des études supérieures de l'université Laval, Canada, Juillet 2000.
- [12] A. Benaskeur, 'Systèmes non linéaires, Technical Report', No. 97-1 1, GR4II31, Université Laval. 1997.
- [13] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic, 'Nonlinear and Adaptive Control Design', Wiley Inter-science Publication. 1995.
- [14] E.D. Sontag, 'A universal construction of artstein's theorem on nonlinear stabilization'. *System and Control Letters*, 13:117-123. 1989.
- [15] J. Levin, 'Analysis and control of nonlinear systems', 1999.
- [16] A. Benaskeur, 'Aspects de l'application du backstepping adaptatif à la commande décentralisée des systèmes non linéaires'. Thèse PhD - Université Laval, 2000.
- [17] H. Tan, J. Chang, 'Adaptative backstepping control of induction motor with uncertainties', Proceedings of the American control conference, San diego, California, June 1999.
- [18] I. Kanellakopoulos, P. V.Kokotovic, A. S. Morse, 'Systematic design of adaptive control for feedback linearizable systems', *IEEE Transactions On Automatic Control*, 36(11), 1241-1253. 1991.
- [19] J. Tsiniias, 'Sufficient lyapunov-like conditions for stabilization', *Math. Contr. Signal. Syst.* vol.2, pp. 343-351, 1989.
- [20] P. V. Kokotovic, H. J. Sussmann,, 'A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems'. *Systems & Control Letters*, 13, 125-133. 1989.

## *Bibliographie*

- [21] K. J. Astrom, B. Wittenmark, 'Adaptive Control', Second Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1995.
- [22] H. Mekki, 'Diagnostic et Commande Tolérante en Mode Dégradé des Systèmes d'Entraînements Electriques' Thèse de Doctorat, Spécialité Automatique, ENP d'Alger, Mars 2018.
- [22] M. Chakir, 'Commande robuste tolérante aux défauts application à la MSAP'. Mémoire de magister, Spécialité Automatique, ENP d'Alger, Juin 2006.
- [24] H. Mekki, O. Benzineb, D. Boukhetala, M. Tadjine, M. Benbouzid, 'Sliding mode based fault detection, reconstruction and fault tolerant control scheme for motor systems'. ISA Transactions. Vol. 52(1), pp. 340–351, 2015.
- [25] I. Kanellakopoulos, P.V.Kokotovic, A.S.Morse, 'Systematic design of adaptive controllers for feedback linearizable systems'. IEEE Transaction On Automatic Control Vol. 36(11), 1241-1253. 1991.