REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Analyse Mathématique et Numérique

Thème

Comparaison entre Runge-Kutta et méthode de Trapèze Pour un Probléme Initiale

---

Présentée par :
MOKRANE Hayet

Devant le jury composé de :

DILMI Mustapha M.C.B . Univ de M'sila **Président**.

Mostefa NADIR Prof . Univ de M'sila **Encadreur** .

Gagui Bachir M.C.A . Univ de M'sila **Examinateur**.

Année universitaire 2019/2020

Remerciements

Tout d'abord , Je remercie Allah le tout puissant de m'avoir donnée la patience , *archever ce travail et de m'avoir donné la capacité d'écrire et de réfléchir .* Je lève la main vers le ciel et dis "*Merci mon Dieu*". je tiens à présenter toute ma gratitude et mes remerciements à mon familly.Je tiens à remercie Monsieur Mostefa.NADIR directeur de mon mémoire.

Mes remerciements à mes amis rencontrés à l'université.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie , qui se sont sacrifie pour mon bonheur et ma réussite, à mes parents.

A mes charmantes soeurs.

A tout la famille.

Je dédie aussi mon travail aux personnes les plus chères de mon coeur.

Table des matières

Introduction

La science des mathématique est une vaste mer el la base de toutes les science sur les quelles une personne s'appuie dans la vie , une science ne peut être établie sans s'appuyer sur les mathématiques et comprend de nombreuses branches et parmi ces branches se trouve *les mathématiques numériques* oŭ *L'analyse numérique.*

L'analyse numérique est l'une des branches des mathématiques et de l'informatiques ,l'analyse numérique étant basée sur le principe de la création de l'analyse et de la mise en oeuvre d'un certain nombre d'algorithmes pour parvenir à des solutions numériques à des problèmes mathématiques.

beaucoup des problémes né sont pas résovables par les méthodes analytiques connues ,c´est à cause de cela que sont apprues les méthodes numériques.

L'objectif de ce travail est d'expliquer les méthodes les plus numériques par exemple runge kutta et euler et taylor qui peuvent être utilisées pour résoudre des équations différentielles linéaires avec cofficients est des fonctions continues du premier type qui ne peuvent être résolues analytiqument ,la forme génerale d'une équation différentielle linéaire est :

$$\begin{cases} x'(t) + a(t)x(t) = c(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

car on obtient les résultats les plus approximatifs de la solution exacte on transforme l'équation différentielle en équation Volterra intégrale,sa devient sur forme :

$$\varphi(t) = g(t) + \int_0^x k(t,x)\varphi(x)dx \qquad 0 \leq x \leq b$$

en géneral, il n'est pas possible de résoudre une équation intégrale analytiqument .donc, on tourne la résoudre par les méthodes numériques comme trapéze et simpson , newton ...

dans un travail nous étudions les solutions numériques de l'équation différentielle et de certaines équations intégrales linéaires à noyau continue , cette thése consiste en une introduction et trois chapitre.

Dans premier chapitre : nous parlons sur les opérateur compacts et du théoreme et définitions.

Le deuxième chapitre : on donne le théoreme de cauchy lipschizienne pour l'existence et l'unicité de l'équation differentielle

lineaire de premier ordre , et on résoudre le probléme initiale numériqument par la méthodes de runge kutta d'ordre deux.

le troisime chapitre : on tranformée cette probléme à une équation intégral de volterra .on applique la méthodes de Trapèze

pour la résolution numérique de l'équation intégral de Volterra.

on termine notre mémoire par une conclusion génerale.

Chapitre 1

L'opérateur compact

1.1 Opérateur Linéaire Compact :

Définition 1.1.1 *soient* E et F *deux espaces vectoriels normés .un opérateur linéaire continue* T *de* E *dans* F *est dit compact s'il envoie tout ensemble bornée* B *dans* E *à un ensemble relativement compact* $T(B)$ *dans* F*. Autrement dit , la fermeture* $\overline{T(B)}$ *est compact.*

1.1.1 ensemble relativement compact :

un ensemble $B \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de B , il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F.

Théorème 1.1.1 *une combinaison linéaire* $T = \alpha T_1 + \beta T_2$ *tel que* T_1 *et* T_2 *des opérateurs compact est un opérateur compact.*

Preuve. soit $\{\varphi_n\}$ une suite borné de E et soit $\{T\varphi_n\}$ une suite de F,alors

$$T\varphi_n = \alpha T_1 \varphi_n(x) + \beta T_2\, \varphi_n(x) \text{ , avec } \varphi_n \in E \text{ , } n \in \mathbb{N}$$

T_1 et T_2 étant compacts,on peut extraire de $\{T_1\varphi_n\}$ et de $\{T_2\varphi_n\}$ deux sous suites convergentes qui donne par leur somme une sous suite convergente de $\{T\varphi_n\}$,donc T est compact. ■

Théorème 1.1.2 *Le produit TH de deux opérateurs bornée T et H est compact si l'un des opérateurs T ou H est compact.*

Preuve. soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de E ,alors si H est un opérateur borné la suite $H\varphi_n(x)$ est aussi bornée ,et de la capacité de l'opérateur T il existe une sous suite de $T(H\varphi_n(x))$ qui converge,ce qui implique que TH est compact.D'autre part si H est compact on peut extraire de la suite $H\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $H\varphi_{n(k)}(x)$,et de la continuité de l'opérateur T car il est borné la suite $T(H\varphi_{n(k)}(x))$ converge,ce qui implique que TH est compact. ■

Théorème 1.1.3 *Un opérateur lineaire $T : E \to F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E ,la suite $T\varphi_n$ contient une sous suite convergente de F.*

Théorème 1.1.4 *soit E un espace normé et F un espace de banach, et soit $\{T_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F, convergente en norme vers l'opérateur linéaire T de E dans F*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$$

Alors T est copmact.

Preuve. soit $\{\varphi_n\}$ une suite bornée de E ,l'opérateur T_1 étant compact,on peut extraire de la suite $\{T_1\varphi_n\}$ une sous suite convergente ; soit $\{\varphi_n^1\}$ une sous suite de $\{\varphi_n\}$ telle que ,$\{T_1\varphi_n^1\}$ soit convergente.De la même façan, on peut extraire de la suite $\{T_2\varphi_n^1\}$ une sous suite convergente,car T_2 est compact ; soit $\{\varphi_n^2\}$ une sous suite de $\{\varphi_n^1\}$ telle que la suite $\{T_2\varphi_n^2\}$ soit convergente.Remarquons que, la suite $\{T_1\varphi_n^2\}$ est une sous suite de la suite convergente $\{T_1\varphi_n^1\}$ qui à son tour convergente .En raisonnant de la même façan , pour les opérateurs $T_1, T_2, ..., T_P, ...$,on détermine les suite $\{\varphi_n^1\}, \{\varphi_n^2\}, ..., \{\varphi_n^p\}, ...$ il est à remarque que la suite $\{\varphi_n^p\}$ est une sous suite de toutes les suites qui lui précèdent et que les suites $\{T_k\varphi_n^k\}$ sont convergentes pour $(k = 1, 2, ..., p)$ .Comme l'espace Y est complet , pour la compacité de l'opérateur T il suffit de montrer que la suite $\{T\varphi_n^p\}$ est un suite cauchy,alors

$$\|T\varphi_n^p - T\varphi_n^q\| \leq \|T\varphi_n^p - T_n\varphi_n^p\| + \|T_n\varphi_n^p - T_n\varphi_n^q\| + \|T_n\varphi_n^q - T\varphi_n^q\|$$

Soit $\|\varphi_n\| \leq M$ choisissons n de sorte que l'on a $\|T - T_n\| < \frac{\varepsilon}{3M}$, ensuite choisissons N tel que pour tous les $p > N$ et $q > N$,on a la relation $\|T_n\varphi_n^p - T_n\varphi_n^q\| < \frac{\varepsilon}{3}$ car la suite $\{T_n\varphi_n^p\}$ est convergente.Dans ces conditions , on aura pour tout p et q suffisamment grands.

$$\|T\varphi_n^p - T\varphi_n^q\| < \varepsilon$$

■

Théorème 1.1.5 *soit T un opérateur borné de E dans F,à image $T(E)$ de dimension finie.alors T est compact.*

Preuve. En effet,car l'opérateur T transforme tout ensemble borné B de E à un ensemble borné $T(B)$ dans un espace de dimension finie $T(E)$ ce qui implique que $T(B)$ est précompact. ■

Théorème 1.1.6 *soit B un sous espace fermé d'un espace normé E, tel que $B \neq E$,alors il existe un élément $\varphi \in E$,avec $\|\varphi\| = 1$ tel que pour tout $\Phi \in B$, on a*

$$\|\varphi - \Phi\| \geq \alpha \text{ , avec } 0 < \alpha < 1$$

Preuve. en effet , soit f un élément de E tel que $f \notin B$ alors on a

$$\inf_{\varphi \in E} \|f - \Phi\| = \beta > 0$$

choisisons un élément $\Psi \in B$ tel que

$$\beta \leq \|f - \Psi\| \leq \frac{\beta}{\alpha}$$

soit φ le vecteur donné par

$$\varphi = \frac{f - \Psi}{\|f - \Psi\|}$$

alors le vecteur φ est de norme égale à l'unité ($\|\varphi\| = 1$).De plus, on a

$$\begin{aligned} \|\varphi - \Phi\| &= \frac{1}{\|f - \Psi\|} \|f - \{\Psi + (\|f - \Psi\| \Phi)\}\| \\ &\geq \frac{\beta}{\|f - \Psi\|} \geq \alpha \end{aligned}$$

■

Théorème 1.1.7 *L'opérateur identique I de E dans F est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

Théorème 1.1.8 *T un opérateur compact est un opérateur borné . La réciproque est fausse.*

Preuve. :En effet, si on désigne par

$$B(0,1) = \{x \in X \ , \|x\| \leq 1\}$$

la boule fermé de rayon l'unité,alors l'ensemble $\overline{T(B(0,1))}$ est compact donc borné c'est-à-dire

$$\|Tx\| < \infty \text{ et par conséquent , } \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| < \infty$$

ce qui signifie que l'opérateur T est borné.Réciproquement l'opérateur identique I de E dans E est borné mais il n'est pas compact. ■

Théorème 1.1.9 *L'opérateur intégral T de $C(B)$ dans $C(B)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

Preuve. soit E un ensemble borné de $C(B)$ alors , on a

$$\|\varphi\| \leq M \text{ pour tout } \varphi \in E$$

De plus,

$$|T\varphi(x)| \leq M\,|B| \max_{x,y\in B} |k(x,y)|\,,\ \ \forall x \in B \text{ et } \varphi \in E$$

cela veut dire que $T(E)$ est borné.L'opérateur k est uniformement continu sur le compact $B \times B$, d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y, z \in B, |x - y| < \delta \Longrightarrow |k(x,z) - k(y,z)| < \frac{\varepsilon}{M\,|B|}$$

d'où

$$|T\varphi(x) - T\varphi(y)| < \varepsilon \text{ pour tout } \varphi \in E \text{ et } x, y \in B, \text{ avec } |x - y| < \delta.$$

Ceci exprime que l'ensemble $T(E)$ est équicontinu , d'où $T(E)$ est relativement compact d'aprés le théoreme d'Arzela -Ascoli

alors T est compact. ∎

1.1.2 Noyau faiblement singulier :

on appelle noyau singulier la fonction k continue sur $B \times B \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sauf peut être aux points $x = y$ et telle que ,

$$\forall x, y \in B\ ,\ x \neq y,\ \exists M > 0,\ \ |k(x,y)| < \frac{M}{|x-y|^{n-\alpha}}\ ,\ 0 < \alpha \leq n$$

Théorème 1.1.10 *L'opérateur intégral T de $C(B)$ dans $C(B)$ à noyau faiblement singulier est un opérateur compact.*

Preuve. Il est à remarque que l'opérateur

$$T\varphi(x) = \int_B k(x,y)\varphi(y)dy\ ,\ x, y \in B$$

existe comme une intégrale impropre, car

$$|k(x,y)\varphi(x)| \leq M \|\varphi\| |x-y|^{\alpha-n}$$

De plus , on a

$$\int_B |x-y|^{\alpha-n} dy \leq w_n \int_0^d \rho^{\alpha-n}\rho^{n-1}d\rho = \frac{w_n}{\alpha}d^\alpha$$

où w_n désigne la surface de la sphère unité dans $\mathbb{R}^n$, et d la diamètre de l'ensemble B.Construisons maintenant une suite d'opérateurs compacts T_p, convergente vers l'opérateur T et telle que , on a

$$\lim_{p\to\infty} \|T - T_p\| = 0$$

soit h une fonction continue par morceau , definie sur $[0, \infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, par

$$h(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ 2t-1 \text{ si } \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \\ 1 \;\; \text{si } 1 \leq t \leq \infty \end{cases}$$

le noyau k_p défini sur $B \times B$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, par

$$k_p(x,y) = \begin{cases} h(p|x-y|) \;\; \text{si } x \neq y \\ 0 \text{ si } x = y \end{cases}$$

est un noyau continu pour tout $p \in \mathbb{N}$ et par coséquent,les opérateurs intégraux T_p sont compacts.De plus,

$$\begin{aligned} |T\varphi(x) - T_p\varphi(x)| &= \left| \int_{B\cap|x-y|<\frac{1}{p}} \{1 - h(p|x-y|)\} k(x,y)\varphi(y)dy \right| \\ &\leq M\|\varphi\| w_n \int_0^{\frac{1}{p}} \rho^{\alpha-n}\rho^{n-1}d\rho \\ &\leq M\|\varphi\| \frac{w_n}{\alpha p^\alpha} \text{ , } x \in B \end{aligned}$$

il est aisé de remarquer que la suite des opérateurs $T_p\varphi$ converge uniformement vers $T\varphi$ quand $p \to \infty$,d'où l'opérateur $T\varphi$ est un élément de $C(B)$, de plus

$$\|T - T_p\| \leq M\frac{w_n}{\alpha p^\alpha} \to 0 \text{ lorsque } p \to \infty$$

cela implique que l'opérateur T est compact. ■

Théorème 1.1.11 *:L'opérateur intégrale T de $C(\partial B)$ dans $C(\partial B)$ à noyau continu ou à noyau faiblement singulier est un opérateur compact sur $C(\partial B)$ si ∂B est de classe C^1.*

Chapitre 2

La résolution Numérique d'un problème initiale :

2.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre :

Définition 2.1.1 *:on appelle équation linéaire du premier ordre toute équation differentielle linéaire par rapport à la fonction inconnue et sa dérivée.Autrement dit, les fonctions* $x(t)$ *et* $x'(t)$ *sont du premier dégré :*

$$x^{'} + a(t)\ x = b(t)$$

où $a(t)$ *et* $b(t)$ *sont des fonctions continues de la variable indépendante* t *ou des constantes connues .*

2.1.1 Probléme initiale (Pb de Cauchy) :

on appelle problème initial où problème de Cauchy pour l'équation differentielle :

$$x^{'}(t) = f(t, x) \qquad (1)$$

le probléme suivante :

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2.1.1}$$

parmi toutes les solutions de l'équation (1) trouver la solution satisfaisants à la condition initiale $x(t_0) = x_0$.

2.2 La solution du problème de Cauchy

Proposition 2.2.1 *: pour tout* $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}$ *le problème de Cauchy(2.1.1)est équivalente à l'équation intégrale*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

Preuve. si x est une solution de problème (2.1.1),alors x est continue car dérivable et par intégration , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds &= \int_{t_0}^{t} x^{'}(s)ds \\ &= x(t) - x(t_0) \end{aligned}$$

si

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

alors x est dérivable

d'ou :

$$\begin{cases} x^{'} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Ainsi on a obtenue l'équivalence dans les deux sens . ∎

2.2.1 théoreme de Cauchy Lipschizienne :

Définition 2.2.1 *: $fonction$ lipschizienne :soit une fonction definie par*

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

on dite que f est un fonction Lipschizienne,s'ilexiste un constante $k > 0$ telle que pour tout t :

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k \ \ |x_1 - x_2| \qquad \forall \ (x_1, x_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Théorème 2.2.1 *supposons que la fonction $f(t, x)$ est continue et satisfait la condition de Lipschitzienne dans le domaine D definie par :*

$$D = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |t - t_0| \leq T \ , \ \|x - x_0\| < K\}$$

et soit l'ensemble

$$M = \max\{\|f(t, y)\| ; (t, y) \in D\}$$

alors le probleme (1) admet une solution unique définie sur l'intervalle $|t - t_0| \leq T_1$, $T_1 :=$ $\min\left\{T \ , \frac{K}{M}\right\}$

Preuve.

1. L'existence :

considérons d'abord l'intervalle $[t_0, t_0 + T_1]$ la preuve de l'intervalle $[t_0 - T_1, t_0]$ est similaire définir l'operateur intégral

$$z(t) = \Psi(x(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \quad , \quad t \in [t_0, t_0 + T_1]$$

mettre :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x - x_0\| \leq K\}$$

et dénote par $C(\ [t_0, t_0+T_1]\ ,X)$ l'espace des fonctions continues de $[t_0, t_0+T_1]$, en X avec une norme uniforme observez que si $x \in C(\ [t_0, t_0+T_1]\ , X)$ alors :

$$\|z(t) - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x(s))\| \, ds \leq MT_1 \leq M\frac{K}{M} = K$$

et il s'ensuit que l'operateur Ψ prend les fonctions de la forme $C([t_0, t_0+T_1], X)$ en $C([t_0, t_0+T_1], X)$ définie la séquence de fonctions $x_{n+1}(t) \in C(\ [t_0, t_0+T_1]\ ,X)$ par la formule

$$x_{n+1}(t) = \Psi(x_n(t)) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))ds \ ,n = 0, 1, .., où\ x_0(t) = x_0 \qquad (2.2.2)$$

alors nous avons la limite

$$\|x_n(t) - x_{n-1}(t)\| \leq \frac{ML^{n-1}(t-t_0)^n}{n!}$$

nous prouvons (3) par récurrence par rapport à n. dépuis

$$\|x_1 - x_0\| \leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_0(s))\| \, ds \leq M(t - t_0)$$

cette limite est vraie pour n=1, en supposons maintenant que (3) est vraie pour n, nous avons

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1}(t) - x_n(t)\| &\leq \int_{t_0}^{t} \|f(s, x_n(s)) - f(s, x_{n-1}(s))\| \, ds \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} \|x_n(s) - x_{n-1}(s)\| \, ds \\
&\leq L\int_{t_0}^{t} \frac{ML^{n-1}(s-t_0)^n}{n!} ds = \frac{ML^n(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à (3) avec n remplacé par n+1 . il résulte de (3) que :

$$\sum_{K=1}^{\infty}\|x_n(t)-x_{n-1}(t)\|\leq\frac{M}{L}\sum_{K=1}^{\infty}\frac{(L(t-t_0))^n}{n!}$$

et comme la série du côté droit est uniformément convergente sur l'intervalle avec la fonction $\frac{M(exp(L(t-t_0)-1)}{L}$, nous pouvons également conclure que la serie

$$x_0(t)+\sum_{K=1}^{\infty}(x_k(t)-x_{k-1}(t))$$

dont n la somme partielle est égale à $x_n(t)$ également uniformément convergente sur l'intervalle $[t_0,t_0+T_1]$.Noter par $\bar{x}(t)$ la limite de la suite $x_n(t)$ puisque :

$$\|f(s,x_m(s))-f(s,x_n(s))\|\leq\|x_m(s)-x_n(s)\|$$

L'intégrale $\int_{t_0}^{t}f(s,x_n(s))ds$ est uniforment convergente pour $t\in[t_0,t_0+T_1]$, passant à la limite de (2) comme $n\to\infty$ il s'ensuit que $\bar{x}(t)$ satisfait l'équation intégrale

$$\bar{x}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\bar{x}(s))ds\qquad t\in[t_0,t_0+T_1]$$

par conséquent, $\bar{x}(t)$ satisfait également le problème de valeur initiale équivalente qui prouve l'éxistence.

$2-L'unicite$:on utilise le lemme de (Gronwalle - Bellman) ■

Lemme 2.2.1 *de Gronwel :soit* $[a,b[\subset\mathbb{R}$, $L\in\mathbb{R}$ *et* z *,*g *deux fonctions continue sur* $[a,b[$ *à valeurs réelles .On suppose que*

- g est positive
- L'inégalité suivante est vérifiée

$$z(t)\leq L(t)+\int_{a}^{t}g(s)z(s)ds,\forall a\leq t\leq b$$

Alors, on a l'estimastion

$$z(t) \leq L\exp(\int_a^t g(s)dt),\ \forall\ a \leq t \leq b.$$

Proposition 2.2.2 *:la fonction $f(t,x)$ posséde une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ bornée dans le domaine D en effet, l'éxistence d'une dérivée $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \leq M$ bornée dans D implique*

$$\begin{aligned} |f(t,x_1) - f(t,x_2)| &= \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| |x_1 - x_2| \\ &\leq M\,|x_1 - x_2| \end{aligned}$$

2.3 La résolution numérique d'un probleme de valeur initial du premier ordre :

2.3.1 Introduction :

pour résoudre les équations différentielles,il existe plusieurs méthodes : les méthodes *analytique* et méthodes *numériques*.

les méthodes *analytique* né sont pas suffisante pour résoudre les problèmes d'équations différentielles et n'est possible que dans un nombre de cas trés rest reints.

la résolution de la plupart des équations différentielles requiert donc l'utilisation des méthodes *numériques* chacune de ces méthodes peut être appliquée à la résolution de la plupart des équations différentielles .

parmi ces méthodes on citera quelques une dans ce qui suite .Parmi ces méthodes *numériques* la méthodes de "*Runge Kutta*".

2.3.2 la méthode de Runge Kutta :

est un méthode d'analyse numérique d'approximation de solutions d'équations différentielle,elle est été nommeé ainsi en l'honneur des mathématiciens "*carl runge*" et

$''martin\ wilhelm\ kutta''$ les quels élaborévent . la méthode en 1901 reposent sur le principe de l'itération , c'est-à-dire qui une prémiere estimation ,de plus de la solution est utilisée pour calculer une seconde estimation plus précise , et ainsi de suite.

Runge Kutta d'ordre 2 :

soit de nouveau la problème de cauchy :

$$\begin{cases} x^{'}(t) = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \forall\ t \in [a,b]$$

découpons le segment $[a,b]$ à l'aide des points en N parties égales $(a \leq x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = b)$

et on a

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1} = h$$

alors :

$$h = \frac{b-a}{n}$$

on reprend l'algorithme de taylor en ecrivant la second équation de la manière suivantes :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2} f(t_n, x_n) + \frac{h}{2}[f(t_n, x_n) + h\frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + h\frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x}.f(t_n, x_n)]$$

selon le développement de taylor on a, à des termes en h prés

$$[f(t_n, x_n) + h\frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial t} + h\frac{\partial f(t_n, x_n)}{\partial x}.f(t_n, x_n)] = f(t_n + h, x_n + hf(t_n, x_n))$$

Ainsi ,on obtient L'algorithme de la methode de Runge Kutta d'ordre 2 :

$$\begin{cases} k_1 = h\ f(t_n, x(t_n)) \\ k_2 = h\ f(t_n + \frac{h}{2}, x(t_n) + \frac{k_1}{2}) \\ x(t_{n+1}) = x(t_n) + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) + 0(h^3) \end{cases}$$

runge kutta d'ordre 2 est un moyen précis de trouver une solution approximative aux équations differentielles .

Exemple 2.3.1 *: Résoudre le probleme initial suivant utilisant la méthode de runge kutte d'ordre 2 :*

$$\begin{cases} x'(t) = e^{-2t} - (x(t) + x^2(t)) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

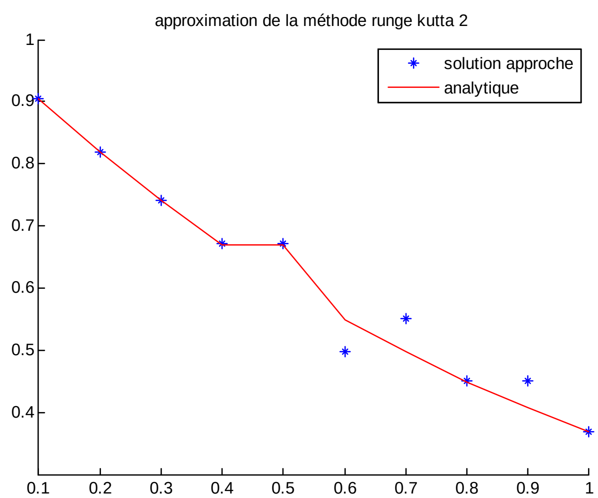
sachant que la solution exacte est

$$x(t) = e^{-t}$$

Solution 2.3.1 *:a=0 ; b=1 ; N=10 ; h=$\frac{b-a}{N}$; t=[a : h : b]; telle que h le pas . a,b les bords de l'intervalle N : le nombre de la subdivision en applique le schéma suivant :*

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ t_{i+1} = t_i + h \end{cases}$$

la valeur de t	*la solution exacte*	*la solution approchée*	*l'erreur*
$1.000000e-001$	$9.048374e-001$	$9.054365e-001$	$5.991196e-004$
$2.000000e-001$	$8.187308e-001$	$8.196936e-001$	$9.628270e-004$
$3.000000e-001$	$7.408182e-001$	$7.419921e-001$	$1.173848e-003$
$4.000000e-001$	$6.703200e-001$	$6.716052e-001$	$1.285154e-003$
$5.000000e-001$	$6.703200e-001$	$6.716052e-001$	$1.285154e-003$
$6.000000e-001$	$5.488116e-001$	$4.978956e-001$	$1.334537e-003$
$7.000000e-001$	$4.965853e-001$	$5.501462e-001$	$1.310331e-003$
$8.000000e-001$	$4.493290e-001$	$4.505976e-001$	$1.268658e-003$
$9.000000e-001$	$4.065697e-001$	$4.505976e-001$	$1.216338e-003$
$1.000000e-000$	$3.678794e-001$	$3.690374e-001$	$1.157990e-003$



Exemple 2.3.2 *résoudre le probleme suivante :*

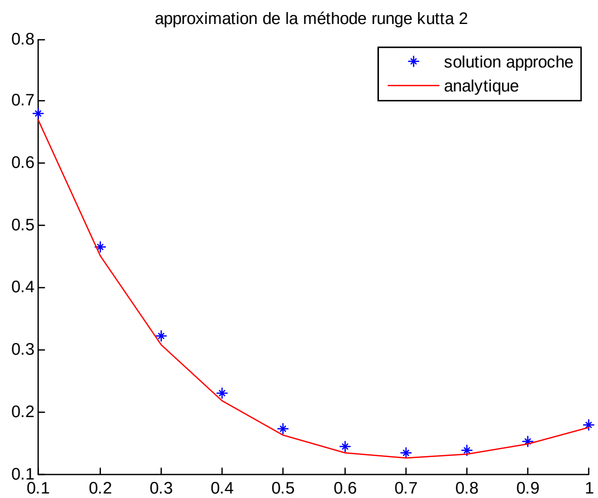
$$\begin{cases} x' = t^2 - 4x \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

avec la solution exacte est :

$$x_e = \frac{31}{32}e^{-4t} + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8}t + \frac{1}{32}$$

Solution 2.3.2 *on a N=10 ;a=0 ;b=1 ;h=*$\frac{b-a}{N}$

la valeur de t	*la solution exacte*	*la solution approchée*	*l'erreur*
$1.000000e-001$	$6.706225e-001$	$6.805000e-001$	$9.877455e-003$
$2.000000e-001$	$4.515374e-001$	$4.650400e-001$	$1.350257e-002$
$3.000000e-001$	$3.080319e-001$	$3.219272e-001$	$1.389531e-002$
$4.000000e-001$	$2.168373e-001$	$2.296105e-001$	$1.277324e-002$
$5.000000e-001$	$1.623561e-001$	$1.734351e-001$	$1.107908e-002$
$6.000000e-001$	$1.341330e-001$	$1.434359e-001$	$9.302876e-003$
$7.000000e-001$	$1.251597e-001$	$1.328364e-001$	$7.676659e-003$
$8.000000e-001$	$1.307384e-001$	$1.370288e-001$	$6.290372e-003$
$9.000000e-001$	$1.477199e-001$	$1.528796e-001$	$5.159699e-003$
$1.000000e-000$	$1.739933e-001$	$1.782581e-001$	$4.264822e-003$



Chapitre 3

La résolution numérique d'une équation intégrale de Volterra :

3.1 Introduction :

les équations intégrales sont utiliseés le plus souvent pour obtenir la solution de problèmes issus d'un modèle différentielle.la transformation vers le modéle intégral s'appelle $'$*méthode intégrale*$'$. l'idée de base de quelques équations differentielles est de chercher la solution sous forme d'une représentation intégrale.

les équations intégrales sont une des branches les plus importantes des mathematique, parmi les quelles les equations intégrales linéaires de Volterra.Ces equations jouent un role majeur dans divers domaines scientifiques tel que :la biologie , la chimie quantique ou la physique,pour trouver des solutions analytiques ou numérique.

dans ce chapitre on étudie le sujet $'$*équation intégrale lineaire de volterra de* second espéce$'$.

Les equations intégrales lineaires :

Définition 3.1.1 *on appelle équations intégrales lineaires des équations fonctionnelles de la forme :*

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{\Omega} k(t,x)\varphi(x)dt$$

ou φ est l'inconnue , k appelle le noyau de l'equation intégrale et f sont des fonctions donneés $\Omega = ([a,b],[a,x])$, λ un paramétre .Ou sous forme d'operateurs

$$(I - \lambda A)\varphi(t) = f(t)$$

ou I est un application identitie.

Les équations intégrales linéaires de Volterra :

les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans les quelles le noyau k est tel que

$$k(t,x) = 0 \ \ pour \ t > x$$

avec la limite d'intégration $b = x$

la forme standard des équations intégrales lineaires de Volterra sont de la forme

$$h(t)\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^x k(t,x)\varphi(t)dt \tag{3.1.1}$$

des équations intégrales lineaires de Volterra sont de deux types :

1. si la fonction $h(x) = 1$, alors l'equation (1) devient tout simplement :

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^x k(t,x)\varphi(t)dx$$

   et s'appelle l'equation intégrale lineaire de volterra de seconde espéce.

2. si $h(x) = 0$,alors 'equation (1) s'ecrit

$$f(t) + \lambda \int_a^x k(t,x)\varphi(x)dx = 0$$

cette equation est appelle l'equation intégrale lineaire de Volterra de premier espéce.

Exemple 3.1.1 *:1- $\varphi(t) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\varphi(t)dx$ est un équation equation intégrale linéaire de Volterra du second espèce.*

2- $x = \int_0^x \exp(x-t)\varphi(t)dt$ est une equation intégrale lineaire de Volterra du premier espéce.

dans un chapitre on va etudie le sujet " equation intégrale linéaire de Volterra du second Espéce".

3.1.1 les equation integrale lineaire de volterra de seconde espéce

une equation intégrale lineaire de Volterra du seconde espéce est donne par :

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^x k(t,x)\varphi(x)dx \tag{3.1.2}$$

ou φ est la fonction inconnue

1. si la fonction $f(x) = 0$, l'equation (2) s'ecrit comme :

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^x k(t,x)\varphi(x)dx$$

elle est appelle equation intégrale linéaire homogéne de volterra du second spèce.

Exemple 3.1.2 *: $\varphi(x) = \int_0^x \varphi(t)\ dt$ est une équation intégrale linéaire homogene de volterra de second espése.*

L'existence et l'uncité de solution de equation intégrale de Volterra :

Théorème 3.1.1 *on considére l'équation intégrale lineaire de Volterra :*

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^x k(t,x)\varphi(x)dx \qquad x \in [0,T] \tag{3.1.3}$$

dont les conditions suivantes sont remplies

1. *f(t) est un fonction continue sur* $0 \leq x \leq T$
2. *le noyau* $k(t,x)$ *est continue sur* $0 \leq x \leq T$
3. *le noyau* $k(t,x)$ *satisfait la condition de Lipschitz*

$$|k(t,x_1) - k(t,x_2)| \leq L\,|x_1 - x_2|$$

pour tout $0 \leq t \leq x \leq T$*,ces conditions sont suffisantes pour assures que l'equation (1) admet une solution unique et continue .*

3.1.2 Transformation d'un problème initiale à une équation intégrale de Volterra :

Dans de nombreux cas, les systémes d'equations différentielles que l'on rencontre en science peuvent se mettre sous la forme d'une equation différentielle ordinaire ordre du type

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) \\ x(0) = a \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T$$

oú $x(t)$ est la fonction que l'on recherche, x_0 sa valeur initiale et f une fonction connue suffisamment régulière pour que l'existence et l'unicité de la solution ne pose pas de problème .Notez que $x(t)$ peut ětre un scalaire ou un vecteur .on note h ce pas et x_n la valeur approchée de $x(t_n)$ pour les différents instants $t_n = nh$ en intégrants l'équation differentielle entre t_n et t_{n+1} on a la relation

$$\begin{aligned} x(t_{n+1}) - x(t_n) &= \int_{t_n}^{t_n+h} f(t, x(t))dt && (3.1.4) \\ x(t_{n+1}) &= x(t_n) + \int_{t_n}^{t_n+h} f(t, x(t))dt && (3.1.5) \end{aligned}$$

D'autre part, il aise de remerquer que cette équation intégrale est lineaire si $f(t, x(t))$ a la forme $f(t, x(t)) = a(t)x(t)$.

on applique à l'intégrale (3.1.5) par la méthode de Trapèze.

3.1.3 Approximation de la solution du l'équation intégrale de Volterra

La methde de Trapèze :

Tout d'abord pour evalue numériqument de l'integral $I(f) = \int_a^b f(t)$, on divise l'intervalle borné $[a, b]$ en n partie

$[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, t_n]$ de mëme longueur $h = \frac{b-a}{n}$ et on considěre les points d'intégrations

$$t_0 = a \ , \ t_1 = t_0 + h \ , \ ..., \ t_i = t_0 + ih \ \overline{i = 0.n} \ , \ t_n = b$$

si $n = 1$, $t_0 = a$, $t_1 = b$, on obtient

$$I(f) = \int_a^b f(t)dt \simeq \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$$

c'est la formule simple de Trapèze sur $[a, b]$.

Donc , sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, $0 \leq i \leq n-1$

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \simeq \frac{(t_{i+1} - t_i)}{2}(f(t_i) + f(t_{i+1}))$$

alors,

$$\begin{aligned}
I(f) &= \int_a^b f(t)dt = \int_{a=t_0}^{t_1} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt + ... + \int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt \\
&\simeq \frac{h}{2} \sum_{i=0}^{n-1}(f(t_i) + f(t_{i+1})) \\
&\simeq \frac{h}{2} \left(f(t) + 2f(t_1) + 2f(t_2) + ... + 2f(t_{n-1}) + f(t_n)\right)
\end{aligned}$$

D'ou

$$I_n(f) = \int_a^b f(t)dt = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2 \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i)]$$

c'est la formule de Trapèze.

L'erreur de cette méthode : si $f \in C^2([a,b])$

$$|R(h)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M$$

tel que

$$M = \max_{t \in [a,b]} \left| f^{''} \right|$$

Exemple 3.1.3 *Résoudre l'équation suivant par la méthode de Trapèze*

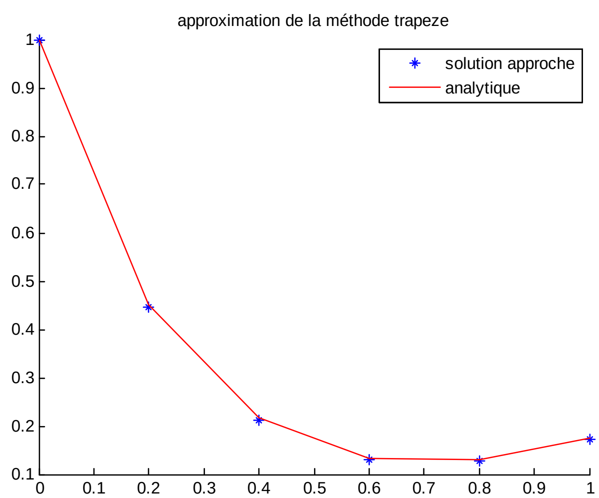
$$\begin{cases} x^{'} = t^2 - 4x \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \textit{[0,1]}$$

Solution 3.1.1 *on a*

$$\begin{aligned}\int_0^t x'(t)dt &= \int_0^t t^2 dt - 4\int_0^t x(t)dt \\ x(t) - x(0) &= \frac{1}{3}t^3 - 4\int_0^t x(t)dt \\ x(t) &= 1 + \frac{1}{3}t^3 - 4\int_0^t x(t)dt\end{aligned}$$

par la méthode de Trapèze on obtient

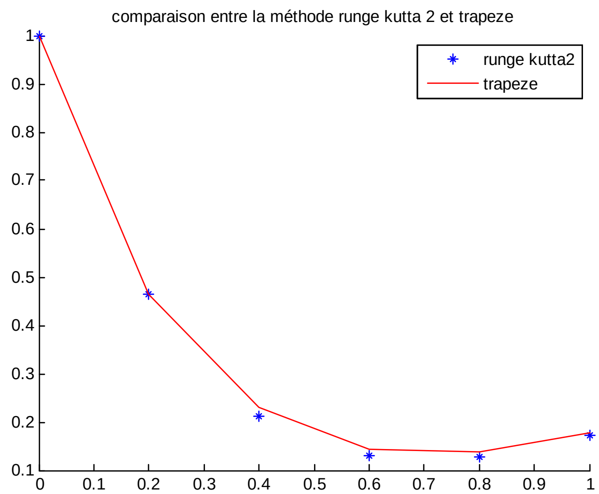
la valeur de t	*la solution exacte*	*approx de solution*	*l'erreur*
$0.000e+000$	$1.000000e+000$	$1.000000e+000$	$0.000000e+000$
$2.000e-001$	$4.515374e-001$	$4.465741e-001$	$4.963360e-003$
$4.000e-001$	$2.168373e-001$	$2.122737e-001$	$4.563589e-003$
$6.000e-001$	$1.341330e-001$	$1.309179e-001$	$3.215093e-003$
$8.000e-001$	$1.307384e-001$	$1.286487e-001$	$2.089678e-003$
$1.000e+000$	$1.739933e-001$	$1.726402e-001$	$1.353109e-003$



3.1.4 Comparaison entre la méthode de Trapèze et Runge Kutta

on a

$Valeur\ de\ t$	$Runge - kutta\ 2$	$Trapèze$	$L'erreur$
	$la\ solution\ approche\ x_r$	$La\ solution\ approche\ x_t$	$\lvert x_r - x_t \rvert$
$0.000e+000$	$1.000000e+00$	$1.000000e+00$	$0.000e+000$
$2.000e-001$	$4.650400e-001$	$4.465741e-001$	$1.84659e-002$
$4.000e-001$	$2.296105e-001$	$2.122737e-001$	$1.73368e-002$
$6.000e-001$	$1.434359e-001$	$1.309179e-001$	$1.2518e-002$
$8.000e-001$	$1.370288e-001$	$1.286487e-001$	$8.3801e-003$
$1.000e+000$	$1.782581e-001$	$1.726402e-001$	$5.6179e-003$



Remarque 3.1.1 *:*

Notez d'aprés les résultats précédents que les deux méthodes donnent presque les mêmes résultats .En ce sens que, les solutions approximatives de ces deux méthodes sont proches, nous disons donc que la méthode de Trapèze et Runge-Kutta sont les meilleures et précises méthodes pour résoudre un problème de valeur initiale du premier ordre.

Conclusion

Dans ce travail , nous avons résolu l'équation différentielle du premier ordre avec des valeurs initiales en utilisant la méthode de Runge Kutta 2 , puis nous convertissons l'équation differetielle en une équation intégrale de Volterra pour la résoudre dans une méthode de Trapèze , pour constater que les deux méthodes donnent les mêmes résultats.

Bibliographie

[1] Boyer.F, *Equation differentielle ordinaire ,Analyse théorique et numérique,* université de provence -un paul cézanne.

[2] M.Belloufi *Cours d'analyse numérique*,université de souk-ahras, avril 2015.

[3] Goatin.P, *Analyse Numérique* ,Université de Sud Toulon - var,france.

[4] Y.Hammoum *Mémoire de Master en Mathématique* , Université Abou Baker Belkaid-Tlemcen,2017.

[5] Z.JACKIE WICS, *General Linear Methods for Ordinary Differential Equations.*

[6]W.V. Lovitt., *Linear Intégral Equation* ,New York , 1950

[7]M.Nadir *Analyse fonctionnelle* , Université de M'sila,2004.

[8]M.NADIR, *Cours sur les équations differentielle* , Université de M'sila,2004

[9] K.Mimoune *Equations Intégrales Lineaire de Volterra,*Université de Mohammed-khider Biskra,Juin 2019.

[10] A.Rahmoune *Equation Intégrale Lineaire et Non Lineaire / Analyse et Technique de Resolution,*16 August 2016.

[11] Roussel.J *cours sur Les Outils et Méthodes Scientifiques* ,Janvier 2011.

Résume :

Dans ce travail, Nous avons résolu l'équation differentielle du premier ordre avec des valeurs initiales en utilisant la méthode Runge-Kutta, puis nous convertissons l'équation differentielle en équations intégrales de volterra pour la résoudre dans une méthode du Trapeze premier degré pour trouver que les deux méthodes sont améliorées, en d'autre termes elles donnent les meme résults.

Mots clé :

Equation differentielle lineaire du premier ordre, méthode de Runge-Kutta d'ordre deux, Equation integrale lineaire de Volterra, méthode de Trapèze.

Abstract :

In this study , I have solved the first ordre differential equation using Runge-kutta method . Moreover ,the differential equation was transformed to an integral equation of Volterra, to be solved by the Trapeze methode of the first order. therefore, the findings revealed that both methods used in the research lead to the same results.

Key Words :

First-ordre linear differential equation, Runge-Kutta method the fourth order, Linear integral equation of Volterra, Trapèze method

---

ملخص:

في هذا العمل ,قمنا بحل المعادلة التفاضلية من الدرجة الاولى ذات القيم الابتدائية باستعمال طريقة رانج كيتا . ثم نقوم بتحويل المعادلة التفاضلية الى معادلة تكاملية من نوع فولتيرا لنقوم بحلها بطريقة ترباز لنجد ان الطريقتين تؤديان الى نفس النتائج

الكلمات المفتاحية

المعادلة التفاضلية الخطية من الدرجة الاولى , طريقة رونج كوتا من الرتبة الرابعة , المعادلة التكاملية الخطية من النوع فولتيرا , طريقة ترباز .