



**UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA**

**Faculté des Mathématiques et de l'Informatique**

**Département de Mathématiques**



## **MEMOIRE DE FIN D'ETUDE**

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

**Domaine : Mathématiques et Informatique**

**Filière : Mathématiques**

**Option : Analyse fonctionnelle**

**Par**

**Bouchouachi Rania**

**Sujet**

**Sur la multiplication de Fourier dans les espaces  
de Besov et Lizorkin-Triebel,  
le cas Hirschmann**

**Devant le jury :**

Mr. Moussai Madani

Prof. Univ de M'sila Président

Mme. Bissar Samira

Maa. Univ de M'sila Rapporteur

Mme. Meliani Saliha

Maa. Univ de M'sila Examineur

**Promotion : 2016 / 2017**

# *Remerciements*

*Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.*

*Je tiens à remercier mon promoteur : **Bissar Samira** pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience.*

*Je remercie, Pr. **Moussai Madani** pour l'honneur qu'il me fait en président le jury de ce mémoire.*

*Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.*

*Je remercie aussi tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.*

*Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers; ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.*

*Merci .*

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Quelques résultats préliminaires</b>	<b>4</b>
1.1 Décomposition de Littlewood-Paley . . . . .	4
1.2 Inégalités principales . . . . .	6
1.3 Espaces de Besov et Lizorkin-Triebel . . . . .	7
1.3.1 Espace de Besov . . . . .	7
1.3.2 Espace de Lizorkin-Triebel . . . . .	8
1.4 Exemple des fonctions dans l'espace de Besov . . . . .	9
1.5 L'interpolation . . . . .	12
1.5.1 L'interpolation dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ . . . . .	12
1.5.2 L'interpolation dans $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$ . . . . .	12
1.5.3 L'interpolation réelle . . . . .	12
1.6 Multiplication ponctuelle . . . . .	13
<b>2 Multiplication de Fourier</b>	<b>14</b>
2.1 Rappel sur la multiplication de Fourier dans $L^p$ . . . . .	14
2.2 La multiplication de Fourier dans les espaces $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$ . . . . .	20
2.3 La classe $\tilde{M}_p$ . . . . .	22
2.4 La classe $\tilde{M}_{p,q}$ . . . . .	27

<b>3</b>	<b>Théorème Hirschmann</b>	<b>29</b>
3.1	Théorème de Hirschmann dans $L^p$ . . . . .	29
3.2	Théorème de Hirschmann dans $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$ . . . . .	33
	<b>Conclusion</b>	<b>36</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>36</b>

# Notations

- Pour  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$

La dérivée partielle  $\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \dots \partial^{\alpha_n} x_n}$  est notée  $\partial^\alpha f$ , si  $f$  est une fonction de deux variables  $(x; y)$  on note  $\partial_x^\alpha f$  et  $\partial_y^\alpha f$ .

- Pour  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  sa transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}f(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-ix\xi) f(x) dx$$

et sa transformée de Fourier inverse est

$$\mathcal{F}^{-1}f(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(ix\xi) f(\xi) d\xi$$

- Soit  $k \in \mathbb{Z}^n$ ,  $\tau_h$  est l'opérateur de translation  $\tau_h f(\cdot) = f(\cdot - h)$ .
- $f * g(\cdot) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y) g(y) dy$  est la convolution des fonctions  $f$  et  $g$ .
- Soient  $A_1$  et  $A_2$  deux espaces, on dit que  $A_1 \hookrightarrow A_2$  s'il existe  $c > 0$ , telle que :  $\|f\|_{A_2} \leq c \|f\|_{A_1}$ , ( $\forall f \in A_1$ ).
- $p'$  est l'exposant conjugué de  $p$  où  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .
- Si  $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ ,  $\text{supp } f$  est le support de  $f$ .
- $E'$  est l'espace dual de  $E$ .
- Soit  $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n)$  est l'espace de Hölder des fonctions  $f$  bornées telle que

$$\|f\|_{\mathcal{C}^r} = \|f\|_\infty + \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^r} < \infty.$$

- $L^p$  est l'espace des fonctions mesurables  $f$  telles que

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

- $\ell_q$  est l'espace des suites  $(a_k)_k$  telle que

$$\|(a_k)\|_{\ell_q} = \left( \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^q \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  à support compact.
- $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  est le dual de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ .
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$  à décroissances rapides .
- $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des distributions tempérées.
- $H$  est un espace linéaire complexe de Hausdorff et  $A_0, A_1$  deux espaces quasi-Banach complexe telle que  $A_0 \subset H$  et  $A_1 \subset H$ .

· Soit  $0 < \theta < 1, 0 < q < \infty, (A_0, A_1)_{\theta, q}$  est l'espace d'interpolation réel.

- $H_p^s$  ( Espace de Bessel ) est l'espace des fonctions  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  où

$$\|f\|_{H_p^s} = \left\| \left( (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\xi) \right)^\vee(x) \right\|_p < \infty \quad (s \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty).$$

- $W_p^m$  (Espace de Sobolev ) est l'espace des fonctions  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  où

$$\|f\|_{W_p^m} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_p < \infty \quad (1 \leq p \leq \infty, m = 1, 2, 3, \dots).$$

- Opérateur de différences :

$$\begin{aligned} \Delta_h f(x) &= f(x+h) - f(x), & x, h \in \mathbb{R} \\ \Delta_h^m f(x) &= \Delta_h^{m-1}(\Delta_h f(x)) \\ \Delta_h^m f(x) &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (-1)^k f(x + (m-k)h). \end{aligned}$$

# Introduction

Depuis longtemps les espaces de Sobolev  $H_p^s$ ,  $W_p^m$ , ... ont fait l'objet de plusieurs travaux de recherche. Les espaces de Lizorkin-Triebel  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  sont des espaces qui contiennent les Sobolev, puisque l'on dispose de l'égalité  $W_p^m = F_{m,2}^s$  (voir [Fr]). Ils contiennent aussi les espaces Potentiel de Bessel  $H_p^s$ , puisque la aussi on a  $H_p^s = F_{p,2}^s$  (voir [Fr]).

Certaines théories ont été étudiées dans les  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  comme, par exemple, la résolution de certaines équations aux dérivées partielles avec des données dans  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , la continuité de certains opérateurs pseudo-différentiels sur  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , ...etc.

Dans ce travail, nous allons étudier les deux problèmes suivants :

- Le premier est l'étude du théorème de Hirschmann dans les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel.
- Le deuxième est l'étude de la fonction des multiplicateurs de Fourier pour les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel.

Le travail est organisé en trois chapitres :

Dans le premier, on rappelle quelques propriétés sur les espaces de Besov, Lizorkin-Triebel et quelques résultats qu'on utilisera par la suite, nous donnons aussi quelques exemples des fonctions dans les espaces de Besov.

Dans le deuxième chapitre, on va étudier les multiplications de Fourier pour les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel et quelques propriétés de l'espace des multiplicateurs de Fourier pour les  $L^p$ ,  $B_{p,q}^s$ ,  $F_{p,q}^s$ .

Le troisième chapitre est consacré au théorème de Hirschmann dans les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel.

# Chapitre 1

## Quelques résultats préliminaires

Dans ce chapitre on va rappeler les notions essentielles qu'on va utiliser par la suite à savoir particulier les espaces de Besov, Lizorkin-triebel, quelque propriétés principales, quelque exemple des fonctions dans l'espaces de Besov.

### 1.1 Décomposition de Littlewood-Paley

Soient  $\theta \in D(\mathbb{R}^n)$  telle que

1.  $\text{supp } \theta \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^{-1} \leq |\xi| \leq 2\}$ ,
2.  $\phi(\xi) \geq 0$  pour  $2^{-1} \leq |\xi| \leq 2$ ,
3.  $0 \leq \theta(x) \leq 1, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

On pose

$$\varphi(x) = \frac{\theta(\xi)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta(2^{-j}\xi)}, \quad \xi \neq 0,$$

On pose  $\psi(\xi) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(2^{-k}\xi)$ , on obtient une fonction  $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , telle que:

$$\text{supp } \psi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq 2\} \text{ et } 0 \leq \psi \leq 1.$$

Alors, on a

$$\psi(\xi) + \sum_{k \geq 1} \varphi(2^{-k}\xi) = 1, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.1.1)$$

La relation (1.1.1) est appelé la partition de l'unité.

A cette partition on associe une suite d'opérateurs de convolutions  $\Delta_k, Q_j$  par :

$$\Delta_k : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

et

$$Q_j : S'(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

telle que

$$\begin{aligned} (\Delta_k f)(x) &= (\mathcal{F}^{-1}\varphi(2^{-k}\cdot) * f)(x) \\ &= 2^{kn} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\varphi(2^{-k}(x-y)) f(y) dy, \quad k \geq 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (Q_j f)(x) &= (\mathcal{F}^{-1}\psi(2^{-j}\cdot) * f)(x) \\ &= 2^{jn} \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{F}^{-1}\psi(2^j(x-y)) f(y) dy, \quad j \geq 0 \end{aligned}$$

Avec la notation  $\Delta_0 = Q_0$ , alors

$$Q_j \hat{f}(\xi) = \psi(2^{-j}\xi) \hat{f}(\xi) \quad (\text{pour } j \geq 0) \quad \text{et} \quad \Delta_k \hat{f}(\xi) = \varphi(2^{-k}\xi) \hat{f}(\xi) \quad (\text{pour } k \geq 1).$$

Ecrivons la relation (1.1.1) au point  $2^{-j}\xi$ , alors

$$\psi(2^{-j}\xi) + \sum_{k=j+1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) = 1.$$

En multipliant par  $\hat{f}$  on obtient

$$\psi(2^{-j}\xi) \hat{f} + \sum_{k=j+1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) \hat{f} = \hat{f}. \quad (1.1.2)$$

En appliquant l'application  $\mathcal{F}^{-1}$  sur (1.1.2), on obtient

$$f = Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f, \quad (\forall j \in \mathbb{N}). \quad (1.1.3)$$

Pour  $j = 0$ , on trouve

$$\psi(\xi) \hat{f} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(2^{-k}\xi) \hat{f} = \hat{f},$$

i.e.

$$f = Q_0 f + \sum_{k \geq 1} \Delta_k f,$$

alors

$$f = \sum_{k \geq 0} \Delta_k f. \quad (1.1.4)$$

On remplaçant  $f$  dans (1.1.3), on obtient

$$Q_j f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f = \sum_{k=0}^j \Delta_k f + \sum_{k=j+1}^{\infty} \Delta_k f.$$

Donc

$$Q_j f = \sum_{k=0}^j \Delta_k f.$$

La relation (1.1.4) est la décomposition de  $f$  du type de Littlewood-Paley, elle converge dans  $S'$ .

## 1.2 Inégalités principales

### **Théorème 1.2.1** (*Inégalité de Hölder*)

Soient  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 \leq p, q \leq \infty$  et  $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}\right)$  alors:

$$(fg) \in L^r(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

### **Théorème 1.2.2** (*Inégalité de Young*)

Soient  $p, q, r \in [1; +\infty]$  telle que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ , avec  $r \geq p$  et  $r \geq q$  alors pour toute  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  on a:

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad \|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

### **Théorème 1.2.3** (*Inégalité de Bernstein*)

Soient  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  et  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , il existe  $c_0 = c(\alpha, p, q, n) > 0$ , telle que pour toute  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , avec  $\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| < R\}$ , on a

$$\|f^{(\alpha)}\|_q \leq c_0 R^{n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)+|\alpha|} \|f\|_p.$$

## 1.3 Espaces de Besov et Lizorkin-Triebel

### 1.3.1 Espace de Besov

**Définition 1.3.1** Soient  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  et  $s \in \mathbb{R}$ , L'espace de Besov  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des fonctions  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \begin{cases} \left( \sum_{j \geq 0} 2^{sjq} \|\Delta_j f\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}} & \text{si } q \neq \infty \\ \sup_{j \geq 0} \left( 2^{js} \|\Delta_j f\|_p \right) & \text{si } q = \infty \end{cases}$$

La définition précédente définit la norme de manière discrète. Nous disposons d'autres normes "continues" équivalentes, cf. voir. [2], [3], [7]

**Proposition 1.3.1** Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Si  $0 < s < m$  l'espace de Besov  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  admet une norme équivalente :

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \|f\|_p + \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\|\Delta_h^m f\|_p}{|h|^s} \right)^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

**Preuve.** Voir le livre de Triebel [2]. ■

**Remarque 1.3.1** L'intégrale par rapport à  $h$  peut être changée par  $\left( \int_{|h| \leq \varepsilon} \left( \frac{\|\Delta_h^m f\|_p}{|h|^s} \right)^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}}$  pour tout  $\varepsilon > 0$  ( en particulier  $\varepsilon = 1$  ), car la partie de l'intégrale lorsque  $|h| > \varepsilon$  est facilement majorée par  $\|f\|_p$ .

D'ou

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} = \|f\|_p + \left( \int_{|h| \leq 1} \left( \frac{\|\Delta_h^m f\|_p}{|h|^s} \right)^q \frac{dh}{|h|^n} \right)^{\frac{1}{q}}$$

avec la modification habituelle pour  $q = +\infty$ .

**Proposition 1.3.2** Soient  $s \in \mathbb{R}$  et,  $0 < p, q \leq \infty$  telle que :

1.  $B_{p,q}^s$  est un espace quasi-Banach (Banach si  $\min(p, q) \geq 1$ ).
2.  $B_{\infty, \infty}^s = C^s$  si  $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , ( $C^s$  est l'espace de Hölder).

**Preuve.** Voir [7] ■

**Proposition 1.3.3** soient  $s_0, s_1, s \in \mathbb{R}$ ,  $0 < p_0, p_1, p, q_0, q_1, q \leq \infty$  telle que :

1.  $B_{p,q_0}^{s_0} \hookrightarrow B_{p,q_1}^{s_1}$  si  $s_0 > s_1$ .
2.  $B_{p,q_0}^s \hookrightarrow B_{p,q_1}^s$  si  $q_0 \leq q_1$ .
3.  $B_{p_0,q_0}^{s_0} \hookrightarrow B_{p_1,q_1}^{s_1}$  si  $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$  et  $0 < p_0 < p_1 \leq \infty$ .

**Preuve.** Voir [7] ■

### 1.3.2 Espace de Lizorkin-Triebel

**Définition 1.3.2** Soient  $1 \leq p < \infty$ ,  $1 \leq q \leq \infty$  et  $s \in \mathbb{R}$ , l'espace de Lizorkin-Triebel  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  est l'ensemble des fonctions  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$  telle que

$$\|f\|_{F_{p,q}^s} = \begin{cases} \left\| \left( \sum_{j \geq 0} 2^{sjq} |\Delta_j f|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_p & \text{si } q \neq \infty. \\ \left\| \sup_{j \geq 0} 2^{js} |\Delta_j f| \right\|_p & \text{si } q = \infty \end{cases} .$$

**Proposition 1.3.4** Soient  $s \in \mathbb{R}$  et  $0 < q \leq \infty$ , telle que :

1.  $F_{p,q}^s$  est un espace quasi-Banach (espace de Banach si  $\min(p, q) \geq 1$ ).
2.  $F_{p,2}^0 = L^p(\mathbb{R}^n)$  si  $1 < p < \infty$ .
3.  $F_{p,2}^m = W_p^m(\mathbb{R}^n)$  si  $1 < p < \infty$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ .
4.  $F_{p,2}^s = H_p^s(\mathbb{R}^n)$  si  $1 < p < \infty$ .
5.  $F_{p,p}^s = B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n)$  si  $1 \leq p < \infty$ .

**Preuve.** Voir [4] ■

**Proposition 1.3.5** Soient  $s_0, s_1, s \in \mathbb{R}$  et  $0 < q_0, q_1, q \leq \infty$ ,  $0 < p_0, p_1, p < \infty$  telle que :

1.  $F_{p,q_0}^{s_0} \hookrightarrow F_{p,q_1}^{s_1}$  si  $s_0 > s_1$ .
2.  $F_{p,q_0}^s \hookrightarrow F_{p,q_1}^s$  si  $q_0 \leq q_1$ .
3.  $F_{p_0,q_0}^{s_0} \hookrightarrow F_{p_1,q_1}^{s_1}$  si  $s_0 - \frac{n}{p_0} = s_1 - \frac{n}{p_1}$  et  $0 < p_0 < p_1 < \infty$ .

**Preuve.** Voir [7] ■

## 1.4 Exemple des fonctions dans l'espace de Besov

**Exemple 1.4.1**  $f(x) = vp \frac{1}{x}$  (la valeur principale de  $\frac{1}{x}$ ).

On a

$$\mathcal{F}f(\xi) = -i\pi \operatorname{sgn}\xi \quad (1.4.1)$$

$$\operatorname{supp} \widehat{\Delta_j f} \subset \{\xi \in \mathbb{R} / |\xi| \leq 2^{j+1}\}$$

d'après l'inégalité de Bernstein on obtient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c_1 2^{j(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})} \|\Delta_j f\|_2, \quad (p \geq 2). \quad (1.4.2)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \|\Delta_j f\|_2 &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\| \widehat{\Delta_j f} \right\|_2 && (\text{Plancherel}) \\ &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \left\| \varphi(2^{-j} \cdot) \widehat{f} \right\|_2 \\ &= \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \|\varphi(2^{-j} \cdot)\|_2 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} 2^{\frac{j}{2}} \|\varphi\|_2 \\ &= c_2 2^{\frac{j}{2}} \end{aligned}$$

car  $\varphi \in D(\mathbb{R})$ .

En remplaçant dans (1.4.2), on obtient

$$\|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(1 - \frac{1}{p})}, \quad c = c_1 c_2 \text{ constante}$$

d'où

$$2^{sj} \|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(s + \frac{1}{p'})}.$$

La série  $\sum_{j \geq 0} 2^{j(s + \frac{1}{p'})q}$ ,  $1 \leq q \leq +\infty$  converge si  $s < -\frac{1}{p'}$ , ce qui donne  $vp \frac{1}{x} \in B_{p,q}^s(\mathbb{R})$

dans les deux cas suivants :

1.  $s = -\frac{1}{p'}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $q = +\infty$  et  $\|f\|_{B_{p,+\infty}^{-\frac{1}{p'}}} \leq \sup_{j \geq 0} 2^{-\frac{1}{p'}j} \|\Delta_j f\|_p$
2.  $s < -\frac{1}{p'}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $q = +\infty$  et  $\|f\|_{B_{p,\infty}^s} < +\infty$

**Preuve.** de (1.4.1).

soient  $g \in S'(\mathbb{R})$ ,  $\varphi \in S(\mathbb{R})$ , on a

$$\mathcal{F}(xg)(\xi) = i \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}g(\xi)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \widehat{x f}, \varphi \rangle &= \langle f, x \widehat{\varphi} \rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} e^{ix \cdot 0} \widehat{\varphi}(x) dx \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1} \widehat{\varphi}(0) \\ &= 2\pi \varphi(0) \\ &= 2\pi \langle \delta, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

■

D'où

$$\mathcal{F}(xf)(\xi) = i \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}f(\xi) = 2\pi \delta \quad (\delta \text{ mesure de Dirac}),$$

ce qui donne

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2i\pi H(\xi) + a, \quad a \text{ constante}$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside puisque  $\delta = H'$  en effet

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0), \quad \varphi \in D(\mathbb{R}).$$

$f$  est impaire donc  $\widehat{f}$  est impaire ( $\mathcal{F}f(\xi) = -\mathcal{F}f(-\xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ ),

d'où

$$a = i\pi (H(\xi) + H(-\xi)) = i\pi, \quad \text{avec } H(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \geq 0 \\ 0 & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

donc

$$\mathcal{F}f(\xi) = -2i\pi H(\xi) + i\pi = \begin{cases} -i\pi & \text{si } \xi \geq 0 \\ i\pi & \text{si } \xi < 0 \end{cases} = -i\pi \operatorname{sgn} \xi.$$

**Exemple 1.4.2**  $f = \delta$  (mesure de Dirac)

soit  $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$  on a

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle$$

d'où

$$\Delta_j \hat{\delta} = \varphi(2^{-j} \cdot)$$

Comme dans l'exemple (1.4.1), on obtient  $2^{sj} \|\Delta_j \delta\|_p \leq c 2^{j(s+\frac{n}{p})}$ .

la série  $\sum_{j \geq 0} 2^{j(s+\frac{n}{p'})q}$  converge si  $s < \frac{-n}{p'}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , ce qui donne  $\delta \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  dans les cas suivants :

1.  $s = -\frac{n}{p'}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $q = +\infty$ .
2.  $s < -\frac{n}{p'}$ ,  $1 \leq p, q \leq +\infty$ .

**Exemple 1.4.3**  $f = \mathcal{F}^{-1}g$  telle que  $g(x) = |x|^{-\sigma}$ .

On a

$$\Delta_j \hat{f}(\xi) = \varphi(2^{-j}\xi) \hat{f}(\xi) = |\xi|^{-\sigma} \varphi(2^{-j}\xi).$$

$\text{supp } \varphi(2^{-j} \cdot) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n / 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$  alors on peut pose  $|\xi| = 2^j$ ,

d'où

$$\Delta_j \hat{f} = \varphi(2^{-j} \cdot) 2^{-j\sigma}.$$

Comme dans l'exemple 1.4.1, on obtient

$$2^{sj} \|\Delta_j f\|_p \leq c 2^{j(\frac{n}{p'})} \text{ avec } c > 0,$$

ce qui donne

$f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  dans les cas suivants :

- 1)  $s = -\frac{n}{p'}$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $q = +\infty$
- 2)  $s < -\frac{n}{p'}$ ,  $1 \leq p, q \leq +\infty$

## 1.5 L'interpolation

### 1.5.1 L'interpolation dans $L^p(\mathbb{R}^n)$

**Théorème 1.5.1** (*Riesz – Thorin*)

Soient  $\theta \in ]0, 1[$  et  $p_0, p_1 \in [1, +\infty]$  telle que  $p_0 \neq p_1$  et  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ .

Alors on a

$$[L^{p_0}(\mathbb{R}^n), L^{p_1}(\mathbb{R}^n)]_{\theta} = L^p(\mathbb{R}^n).$$

**Preuve.** :Voir [2]. ■

### 1.5.2 L'interpolation dans $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$

**Proposition 1.5.1** Soit  $T$  un opérateur linéaire de  $H$  dans lui même telle que

$$\|Tf\|_{A_0} \leq c_0 \|f\|_{A_0}, \quad \forall f \in A_0$$

$$\|Tf\|_{A_1} \leq c_1 \|f\|_{A_1}, \quad \forall f \in A_1.$$

Alors  $T$  envoie  $(A_0, A_1)_{\theta,q}$  dans lui même avec

$$\|Tf\|_{(A_0, A_1)_{\theta,q}} \leq c \|f\|_{(A_0, A_1)_{\theta,q}},$$

où

$$c \leq c_0^{1-\theta} c_1^{\theta}, \quad 0 < \theta < 1 \text{ et } 0 < q \leq +\infty$$

### 1.5.3 L'interpolation réelle

Les théorèmes suivants sont tous démontré dans le livre de Triebel [4]

**Théorème 1.5.2** soient  $q_0, q_1, q \in ]0, +\infty]$ ,  $0 < \theta < 1$  et  $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$  telle que  $s_0 \neq s_1$  et  $s = (1 - \theta) s_0 + \theta s_1$ .

(i) Si  $0 < p \leq +\infty$ , alors

$$(B_{p,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

(ii) Si  $0 < p < +\infty$ , alors

$$(F_{p,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), F_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,q} = F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n).$$

**Théorème 1.5.3** soient  $p_0, p_1 \in ]0, +\infty[$ ,  $0 < \theta < 1$  et  $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$  et  $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$ ,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Alors

$$(B_{p_0,p_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n), B_{p_1,p_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n))_{\theta,p} = B_{p,p}^s(\mathbb{R}^n).$$

## 1.6 Multiplication ponctuelle

**Définition 1.6.1** Soit  $E$  un espace de Banach de distribution contenant  $D(\mathbb{R}^n)$  comme sous espace dense,  $A \in D'(\mathbb{R}^n)$  est dite multiplicateur ponctuel de  $E$  (ou multiplicateur), s'il existe une constante  $c > 0$ , telle que pour toute  $\varphi \in C^\infty \cap E$ , on a  $A\varphi \in E$  et

$$\|A\varphi\|_E \leq c \|\varphi\|_E.$$

L'espace linéaire des multiplicateurs sera noté  $M(E)$  muni par la norme

$$\|A\|_{M(E)} = \{\|A\varphi\|_E; \|\varphi\|_E = 1, \text{ pour tout } \varphi \in C^\infty \cap E\}.$$

**Proposition 1.6.1 :**

(i)  $(M(E), \|\cdot\|_{M(E)})$  est un espace de Banach.

(ii) Si  $D \subset M(E)$  alors  $M(E)$  est une algèbre,

$$(\text{au sens si } A_1, A_2 \in M(E) \implies A_1 A_2 \in M(E)).$$

(iii)  $M(L^p) = L^\infty$ , pour  $1 \leq p \leq \infty$ .

# Chapitre 2

## Multiplication de Fourier

Ce chapitre contient des définitions et quelques propriétés de l'espace des multiplicateurs de Fourier pour les espaces  $L^p$ ,  $B_{p,q}^s$ ,  $F_{p,q}^s$  respectivement, tous les résultats de ce chapitre sont tirés des livres suivants:

Bourdaud [1], Triebel [2], Renst et Sickel [7].

### 2.1 Rappel sur la multiplication de Fourier dans $L^p$

Soient  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  et  $m \in S'(\mathbb{R}^n)$  alors on a  $\check{m} * f \in S'(\mathbb{R}^n)$ , d'où l'opérateur  $T : f \mapsto \check{m} * f$  est bien défini de  $S(\mathbb{R}^n)$  dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ . Or, comme  $S(\mathbb{R}^n)$  dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  (si  $1 \leq p \leq \infty$ ) alors nous avons l'opérateur  $T$  peut-être prolongé à un opérateur continu de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  dans lui même.

**Définition 2.1.1** soient  $p \in [1, +\infty]$  et  $m \in S'(\mathbb{R}^n)$ . On dit que  $m$  est un multiplicateur de Fourier pour  $L^p(\mathbb{R}^n)$  s'il existe une constante  $c > 0$  dépendant uniquement de  $p$  et  $n$ , telle que

$$\left\| \check{m} * f \right\|_p \leq c \|f\|_p, \quad \text{pour toute } f \in S(\mathbb{R}^n).$$

**Remarque 2.1.1** L'ensemble de tous les multiplicateurs de Fourier pour  $L^p(\mathbb{R}^n)$  sera noté par  $M_p$ , on le munit par la norme:

$$\|m\|_{M_p} = \sup_{\|f\|_p=1} \left\| \check{m} * f \right\|_p.$$

**Remarque 2.1.2** On peut aussi définir l'espace  $M_p$  par :

$$M_p = M(\mathcal{F}L^p)$$

où

$$\mathcal{F}L^p = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathcal{F}L^p} = \|\mathcal{F}^{-1}f\|_p < +\infty \right\}$$

**Théorème 2.1.1** Les propriétés suivantes sont satisfaites :

(i)  $M_1 = M_\infty = \mathcal{F}B$ ,  $B$  est l'espace des mesures bornées.

(ii)  $M_2 = L^\infty$ .

**Preuve.** :

(i) On démontre que

(1)  $M_1 \subset M_\infty$

Par la densité de  $S(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , on a l'opérateur

$$T : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^n) \tag{2.1.1}$$

$$f \mapsto \hat{m} * f$$

se prolonge à un opérateur  $\tilde{T}$  linéaire et borné sur  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

On utilise la Formule de dualité  $(L^1(\mathbb{R}^n))' = L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors la restriction de l'opérateur dual  $(\tilde{T})'$  de  $\tilde{T}$  à  $S(\mathbb{R}^n)$  coïncide avec  $\hat{m} * (\cdot)$ , d'où  $m \in M_\infty$ .

(2)  $\mathcal{F}B \subset M_1$

Soit  $\mu \in B$ , on a  $\forall f \in D(\mathbb{R}^n)$  :

$$\int |\mu * f(x)| dx \leq \int \int |f(x-y) d\mu(y)| dx \leq \|\mu\|_B \|f\|_1,$$

d'où

$$\hat{\mu} \in M_1.$$

(3)  $M_\infty \subset \mathcal{F}B$

Soient  $m \in M_\infty$  et  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ . On écrit

$$\langle \check{m}, f \rangle = \int \check{m}(y) \tilde{f}(-y) dy = \check{m} * \tilde{f}(0) = \langle \delta_{x=0}, \check{m} * \tilde{f} \rangle,$$

où  $\tilde{f}(x) = f(-x)$  et  $\delta$  la mesure de Dirac.

Considérons la suite  $(\phi_k) \subset S(\mathbb{R}^n)$ , telles que

(4)

$$\phi_k \longrightarrow \delta_{x=0} \quad (\text{dans } S'(\mathbb{R}^n)), \quad \|\phi_k\|_1 = 1$$

Alors par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} \left| \langle \phi_k, \check{m} * \tilde{f} \rangle \right| &\leq \|\phi_k\|_1 \left\| \check{m} * \tilde{f} \right\|_\infty = \left\| \check{m} * \tilde{f} \right\|_\infty \\ &\leq \|m\|_{M_\infty} \left\| \tilde{f} \right\|_\infty; \end{aligned}$$

en faisant  $k \rightarrow +\infty$ , on obtient

$$\left| \langle \check{m}, f \rangle \right| \leq \|m\|_{M_\infty} \left\| \tilde{f} \right\|_\infty$$

il vient que  $\check{m} \in (C^0(\mathbb{R}^n))'$  "le dual de  $C^0(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions bornées", or nous avons

$$(C^0(\mathbb{R}^n))' = B \text{ d'où } M_1 \subset \mathcal{FB}.$$

D'après (1) et (2) et (3) on obtient

$$M_1 = M_\infty = \mathcal{FB}$$

Exemple de la suite  $(\phi_k)$  :

Soit  $\phi \in D(\mathbb{R}^n)$  (*fixi*) qui vaut 1 pour  $|x| \leq \frac{1}{2}$ , on pose  $\phi_k(x) = k\phi(kx) \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

**Preuve. de l'égalité**  $(C^0(\mathbb{R}^n))' = B$ .

Si  $\mu \in B$ , alors

$$|\langle \mu, f \rangle| \leq \int |f| |d\mu| < +\infty \quad (\forall f \in C^0),$$

d'où

$$\mu \in (C^0(\mathbb{R}^n))'.$$

Inversement, soit  $g \in (C^0(\mathbb{R}^n))'$ , alors  $|\langle g, f \rangle| < +\infty$  pour toute  $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ . Considérons la mesure  $\nu$  telle que  $d\nu = g(x) dx$ , alors pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$  ensemble mesurable on a

$$\left| \int_A d\nu \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A g(x) dx \right| = |\langle g, \chi_A \rangle| < +\infty \quad \text{car} \quad \chi_A \in C^0(\mathbb{R}^n),$$

donc  $\nu \in B$ .

**Preuve. de (4)**

(4) est une conséquence immédiate du lemme suivant :

**Lemme 2.1.1** Soit  $g \in L^1$ . Soit  $u \in L^\infty$  une fonction continue en 0. Alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^n \int_{\mathbb{R}^n} u(x) g(kx) dx = u(0).$$

■

**Preuve.** On démontre que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^n \int_{\mathbb{R}^n} (u(x) - u(0)) g(kx) dx.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ , on pose  $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(1+\|g\|_1)}$  alors il existe  $R > 0$  telle que

$$|x| \leq R \implies |u(x) - u(0)| \leq \varepsilon'$$

ce que implique

$$\left| \int_{|x| \leq R} (u(x) - u(0)) k^n g(kx) dx \right| \leq \varepsilon' \int_{\mathbb{R}^n} k^n g(kx) dx \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| > R} (u(x) - u(0)) k^n g(kx) dx \right| &\leq 2 \|u\|_\infty \int_{|x| > R} k^n |g(kx)| dx \\ &\leq 2 \|u\|_\infty \int_{|X| > R} |g(X)| dX, \end{aligned}$$

si  $k \rightarrow +\infty$  alors  $\int_{|X| > Rk} |g(X)| dX \rightarrow 0$ .

Ce qui donne

$$\left| \int_{|x| > R} (u(x) - u(0)) k^n g(kx) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$k^n \left| \int_{|x| > R} (u(x) - u(0)) g(kx) dx \right| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

D'où le résultat. ■ ■

(ii) Soit  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  et  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , alors par la formule de Plancherel et l'inégalité de

Hölder on a

$$\left\| \overset{\vee}{m} * f \right\|_2 = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|m\|_\infty \left\| \hat{f} \right\|_2 = \|m\|_\infty \|f\|_2$$

d'où  $L^\infty \subset M_2$

Inversement, soit  $m \in M_2$ , on a

$$\left\| \overset{\vee}{m} * f \right\|_2 \leq c \|f\|_2, \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n).$$

On pose  $\hat{f} = \chi_A$ ,  $A$  est un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^n$ .

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} \left| \int_A m(x) dx \right| &\leq \|m\chi_A\|_2 \|\chi_A\|_2 \\ &\leq c \|\chi_A\|_2 \|\chi_A\|_2 = c_0 \text{mes}(A). \end{aligned}$$

On obtient

$$\left| \frac{1}{\text{mes}(A)} \int_A m(x) dx \right| \leq c_0, \quad c_0 \text{ constante.}$$

Pour tout ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^n$ , cela entraîne  $m \in L^\infty$ , en effet, on sait que

$$\|m\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess } |m(x)| = \sup_{\|g\|_1=1} |\langle m, g \rangle|.$$

Or pour toute fonction simple  $g = \sum_{k=1}^N a_k e^{ib_k} \chi_{A_k}$  où  $a_k > 0$  et  $b_k \in \mathbb{R}$  et  $(A_k)$  ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^n$ , 2 à 2 disjoints, alors nous avons  $\sum_{k=1}^N a_k \text{mes}(A_k) = 1$  car  $\|g\|_1 = 1$  et on obtient

$$|\langle m, g \rangle| = \sum_{k=1}^N a_k |\langle m, \chi_{A_k} \rangle| \leq c_0 \sum_{k=1}^N a_k \text{mes}(A_k) = c_0,$$

d'où  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . ■

**Théorème 2.1.2** Soient  $p, q, p_0, p_1 \in [1, +\infty]$  et  $\theta \in ]0, 1[$ , alors on a les propriétés suivantes :

(i)  $M_p = M_{p'}$

(ii)  $M_{p_0} \cap M_{p_1} \subset M_q$  où

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \text{et} \quad \|m\|_{M_q} \leq \|m\|_{M_{p_0}}^{1-\theta} \|m\|_{M_{p_1}}^\theta$$

(iii)  $M_1 \subset M_p \subset M_q \subset M_2$  si  $1 \leq p \leq q \leq 2$

(vi)  $M_p$  est une algèbre de Banach.

**Preuve.** (i) Pour  $p = 1$  on a  $M_1 = M_\infty$  (Théorème 2.1.1).

Pour  $1 < p < +\infty$  on a  $S(\mathbb{R}^n)$  dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  d'où l'opérateur

$$T : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$$

$$f \longmapsto \check{m} * f$$

se prolonge à un opérateur  $\tilde{T}$  linéaire et borné sur  $L^p$ .

On utilise la formule de dualité  $(L^p(\mathbb{R}^n))' = L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ , alors la restriction de l'opérateur dual  $(\tilde{T})'$  de  $\tilde{T}$  à  $S(\mathbb{R}^n)$  coïncide avec  $\hat{m} * (\cdot)$  d'où  $m \in M_{p'}$ , Ce qui donne  $M_p \subset M_{p'}$ .

Pour l'inclusion inverse, on utilise la même méthode.

Ce qui donne le résultat.

(ii) Soient  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  et  $m \in M_{p_0} \cap M_{p_1}$  alors

$$\left\| \overset{\vee}{m} * f \right\|_{p_0} \leq \|m\|_{M_{p_0}} \|f\|_{p_0} \quad \text{et} \quad \left\| \overset{\vee}{m} * f \right\|_{p_1} \leq \|m\|_{M_{p_1}} \|f\|_{p_1},$$

par le théorème d'interpolation dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  (théorème de Riesz-Thorin),

on a

$$\left\| \overset{\vee}{m} * f \right\|_q \leq \|m\|_{M_{p_0}}^{1-\theta} \|m\|_{M_{p_1}}^\theta \|f\|_q, \quad \text{telle que} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

d'où

$$m \in M_q \quad \text{et} \quad \|m\|_{M_q} \leq \|m\|_{M_{p_0}}^{1-\theta} \|m\|_{M_{p_1}}^\theta.$$

Ce qui donne le résultat.

(iii) On appliquons (i) et (ii) pour  $p_0 = p \in [1, 2]$  et  $p_1 = p' \in [2, +\infty]$  et  $p \leq q \leq p'$  on obtient

$$M_p = M_p \cap M_{p'} \subset M_q \quad \text{et} \quad \|m\|_{M_q} \leq \|m\|_{M_p}^{1-\theta} \|m\|_{M_{p'}}^\theta = \|m\|_{M_p} \quad (p \leq q).$$

(vi) Soient  $m_1, m_2 \in M_p$  et  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ . Comme

$$\begin{aligned} \left\| (m_1 m_2)^\vee * f \right\|_p &= \left\| \overset{\vee}{m_1} * \left( \overset{\vee}{m_2} * f \right) \right\|_p \\ &\leq \|m_1\|_{M_p} \left\| \left( \overset{\vee}{m_2} * f \right) \right\|_p \\ &\leq \|m_1\|_{M_p} \|m_2\|_{M_p} \|f\|_p, \end{aligned}$$

alors

$$m_1 m_2 \in M_p \quad \text{et} \quad \|m_1 m_2\|_{M_p} \leq \|m_1\|_{M_p} \|m_2\|_{M_p}.$$

■

## 2.2 La multiplication de Fourier dans l'espaces $B_{p,q}^s$ et

$$F_{p,q}^s$$

Soit  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ , l'opérateur  $T : f \mapsto \check{m} * f$  défini de  $S(\mathbb{R}^n)$  dans  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  peut être prolongé à un opérateur continu sur  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  puisque l'espace  $S(\mathbb{R}^n)$  dense dans  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  ( $p, q \in ]1, +\infty[$  et  $s \in \mathbb{R}$ ).

**Définition 2.2.1** Soient  $p, q \in ]0, +\infty]$ , et  $s \in \mathbb{R}$ . Une fonction  $m \in S'(\mathbb{R}^n)$  est dit multiplicateur de Fourier pour  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , s'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\left\| \check{m} * f \right\|_{B_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s}$$

pour tout  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 2.2.2** Soient  $0 < p < +\infty$ ,  $0 < q \leq \infty$  et  $s \in \mathbb{R}$ . Une fonction  $m \in S'(\mathbb{R}^n)$  est dit multiplicateur de Fourier pour  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  s'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\left\| \check{m} * f \right\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)}$$

pour tout  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 2.2.3** Soient  $p, q \in ]0, +\infty]$ , et  $s \in \mathbb{R}$ . Une fonction  $m \in S'(\mathbb{R}^n)$  est dit multiplicateur de Fourier homogène pour  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , s'il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\left\| (m(a.\!))^\vee * f \right\|_{B_{p,q}^s} \leq c \|f\|_{B_{p,q}^s}, \quad \forall a > 0$$

pour tout  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ .

Le théorème suivant donne un exemple des espaces des multiplicateurs de Fourier pour  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Théorème 2.2.1** Soient  $s \in \mathbb{R}$ ,  $p, q \in ]0, +\infty]$  et  $x > n \left( \frac{1}{\min(p,1)} - \frac{1}{2} \right)$ . Alors

$$\left\| \check{m} * f \right\|_{B_{p,q}^s} \leq c \|m\|_{H_2^x} \|f\|_{B_{p,q}^s},$$

pour tout  $m \in H_2^x(\mathbb{R}^n)$  et toute  $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ , la constante  $c$  est indépendante de  $m$  et  $f$ .

**Preuve.** Le théorème 2.2.1 est une conséquence immédiate de la relation

$$[f(2^{-(j+1)}\cdot)]^\wedge(\xi) = 2^{n(j+1)}\hat{f}(2^{j+1}\xi) \text{ où } f \in L^p \text{ avec } \text{supp } \hat{f} \subset \{y / |y| \leq 2^{j+1}\},$$

et le lemme suivant ■

**Lemme 2.2.1** Soit  $\Omega$  un sous ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $0 < p \leq +\infty$ .

Si  $s > n\left(\frac{1}{\min(p,1)} - \frac{1}{2}\right)$  alors il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\left\| \overset{\vee}{m} * f \right\|_{L^p} \leq c \|m\|_{H_2^s} \|f\|_{L^p}$$

pour toute  $f \in L^p$  avec  $\text{supp } \hat{f} \subset \Omega$  et tout  $m \in H_2^s$ .

**Preuve.** Pour la preuve voir Triebel [2]. ■

**Proposition 2.2.1 :**

(i) Soient  $P \in [1, +\infty]$  et  $m \in S'(\mathbb{R}^n)$  si  $m \in M_p$  l'opérateur  $\overset{\vee}{m} * f$ ,  $f \in S(\mathbb{R}^n)$

se prolonge à un opérateur linéaire borné invariant par translation dans les  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Inversement, pour tout opérateur  $T$  linéaire borné translation-invariant de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  dans lui même il existe  $m \in M_p$  unique telle que  $Tf = \overset{\vee}{m} * f$  avec  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ .

(ii) La propriété (i) est valide pour  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $s \in \mathbb{R}$  et  $p, q \in ]0, +\infty]$ .

**Preuve.** Un opérateur linéaire  $T$  est dit translation-invariant dans  $S'(\mathbb{R}^n)$  si  $T\tau_h = \tau_h T$ , pour toute  $h \in \mathbb{R}^n$ .

En premier nous allons démontrer (i), soit  $m \in M_p$ , alors  $\overset{\vee}{m} * f$  avec  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  est linéaire borné (évidente) translation-invariant, en effet, soit  $h, x \in \mathbb{R}^n$  nous avons

$$\begin{aligned} \tau_h \left( \overset{\vee}{m} * f \right) (x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \overset{\vee}{m}(y) f(h+x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \overset{\vee}{m}(x-z) f(h+z) dz. \end{aligned}$$

Maintenant nous allons étudier les deux cas suivants :

1. Si  $1 \leq p < \infty$  alors l'opérateur précédent se prolonge à un opérateur linéaire borné translation-invariant de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  dans lui même (théorème de Hain Banach) car  $S(\mathbb{R}^n)$  dense dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

2. Si  $p = \infty$ , alors  $m \in M_1$  (théorème 2.1.2), soit  $T$  le prolongement de l'opérateur  $m * f$ ,  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  alors l'opérateur dual de  $T$  satisfait les propriétés désirables.

Inversement, si  $T$  est un opérateur linéaire borné translation-invariant dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  alors (Voir T.[2]. On peut consulter les travaux de L.Hörmander.) il existe  $m \in S'(\mathbb{R}^n)$  unique telle que  $Tf = \check{m} * f$ ,  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  ce qui donne  $m \in M_p$ .

De la même manière le preuve du (ii), pour plus de détails voir T [2]. ■

## 2.3 La classe $\tilde{M}_p$

Nous avons étudié déjà quelques propriétés de l'espace  $\tilde{M}_p$ , on s'intéresse maintenant à ces propriétés de l'espace de tous les multiplicateurs de Fourier pour  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ . Pour démontrer que l'ensemble de tous les multiplicateurs de Fourier pour  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  noté  $\tilde{M}_p$  est indépendant de  $s$  et  $q$  nous allons étudier la proposition suivante :

**Proposition 2.3.1** Soient  $p, q_0, q_1 \in ]0, +\infty]$  et  $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ , si  $m \in S'(\mathbb{R}^n)$  alors on a la propriété suivante:

$m$  est un multiplicateur de Fourier pour  $B_{p,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n)$  ssi  $m$  est un multiplicateur de Fourier pour  $B_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ .

**Preuve.** Soit  $m$  un multiplicateur de Fourier pour  $B_{p,q_0}^{s_0}(\mathbb{R}^n)$ , et soit  $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^\infty$

la suite des fonctions telle que:

$\varphi_0(x) = \psi(x)$  et  $\varphi_j(x) = \varphi(2^{-j}x)$  où  $\varphi$  et  $\psi$  les fonctions sont définies dans le premier chapitre.

On pose  $\phi_j = \sum_{r=-1}^1 \varphi_{j+r}(x)$  avec  $\varphi_{-1} = 0$  alors  $\phi_j(x) = 1$  si  $x \in \text{supp } \varphi_j$ .

Soit  $f \in S(\mathbb{R}^n)$  nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \check{\varphi}_j * (\check{m} * f) \right\|_p &= \left\| \check{\varphi}_j * \left[ \check{m} * \left( \check{\phi}_j * f \right) \right] \right\|_p, \quad (\text{car } \varphi_j = \varphi_j \phi_j) \quad (2.3.1) \\ &\leq 2^{-s_0 j} \left\| \check{m} * \left( \check{\phi}_j * f \right) \right\|_{B_{p,q_0}^{s_0}} \\ &\leq c 2^{-s_0 j} \left\| \check{\phi}_j * f \right\|_{B_{p,q_0}^{s_0}} \\ &\leq c' \sum_{r=-1}^1 \left\| \check{\varphi}_{j+r} * f \right\|_p, \end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement que  $m$  est aussi un multiplicateur de Fourier pour  $B_{p,q_1}^{s_1}(\mathbb{R}^n)$ , il reste de prouver que (2.3.1). Si  $k > j + 2$  ou  $k < j - 2$  alors on a

$\varphi_k \phi_j = 0$  avec  $\varphi_{-1} = 0$  nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \overset{\vee}{\phi}_j * f \right\|_{B_{p,q_0}^{s_0}} &= \left( \sum_{k=j-2}^{j+2} 2^{s_0 k q_0} \left\| \overset{\vee}{\varphi}_k * \left( \overset{\vee}{\phi}_j * f \right) \right\|_p^{q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\ &\leq \left( \sum_{k=j-2}^{j+2} 2^{s_0 k q_0} \left\| \overset{\vee}{\varphi}_k \right\|_1^{q_0} \left\| \overset{\vee}{\phi}_j * f \right\|_p^{q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \quad (\text{Inégalité de Young}) \\ &\leq c 2^{s_0 j} \left\| \overset{\vee}{\varphi} \right\|_1 \left\| \overset{\vee}{\phi}_j * f \right\|_p \left( \sum_{k=j-2}^{j+2} 2^{-k n q_0} \right)^{\frac{1}{q_0}} \\ &\leq c' \left\| \overset{\vee}{\phi}_j * f \right\|_p. \end{aligned}$$

■

**Remarque 2.3.1** On peut définir l'espace  $\tilde{M}_p$  comme suite:

$$\tilde{M}_p = M(\mathcal{F}B_{p,q}^s)$$

et

$$\mathcal{F}B_{p,q}^s = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{\mathcal{F}B_{p,q}^s} = \|\mathcal{F}^{-1}f\|_{B_{p,q}^s} < +\infty \right\}$$

et

$$\|m\|_{\tilde{M}_p} = \sup_{\|f\|_{B_{p,q}^s}=1} \left\| \overset{\vee}{m} * f \right\|_{B_{p,q}^s}.$$

Les deux théorèmes suivants donnent quelques propriétés de la classe  $\tilde{M}_p$ .

**Théorème 2.3.1 :**

- (i)  $\tilde{M}_p \subset \mathcal{F} \left[ B_{p,\infty}^{s(\frac{1}{p}-1)}(\mathbb{R}^n) \right]$  si  $0 \leq p \leq +\infty$
- (ii)  $\mathcal{F} \left[ B_{p,\infty}^{n(\frac{1}{p}-1)}(\mathbb{R}^n) \right] = \tilde{M}_p$  si  $0 < p \leq 1$
- (iii)  $\mathcal{F} \left[ B_{1,\infty}^0(\mathbb{R}^n) \right] = \tilde{M}_\infty \subset L^\infty$ .

**Preuve. :**

(i) Soit  $m \in \tilde{M}_p$ , soient  $\{\varphi_j\}$  et  $\{\phi_j\}$ ,  $j = 0, 1, \dots$  les systèmes de la preuve de proposition 2.3.1, nous avons:

$$\begin{aligned} \left\| \overset{\vee}{\varphi}_j * \overset{\vee}{m} \right\|_p &= \left\| \overset{\vee}{\varphi}_j * \left( \overset{\vee}{m} * \overset{\vee}{\varphi}_j \right) \right\|_p \quad (\text{car } \varphi_j \phi_j = \varphi_j) \\ &\leq \left\| \left( \overset{\vee}{m} * \overset{\vee}{\phi}_j \right) \right\|_{B_{p,\infty}^0(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq c \left\| \overset{\vee}{\phi}_j \right\|_{B_{p,\infty}^0(\mathbb{R}^n)} \leq c' \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \left( \overset{\vee}{\varphi}_k * \overset{\vee}{\phi}_j \right) \right\|_p, \end{aligned}$$

et

$$c' \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \left( \overset{\vee}{\varphi}_k * \overset{\vee}{\phi}_j \right) \right\|_p \leq c'' 2^{jn} 2^{-j \frac{n}{p}}. \quad (2.3.2)$$

D'où

$$2^{jn(\frac{1}{p}-1)} \left\| \overset{\vee}{\varphi}_j * \overset{\vee}{m} \right\|_p \leq c'' \quad \text{c-à-d} \quad \overset{\vee}{m} \in B_{p,\infty}^{jn(\frac{1}{p}-1)}(\mathbb{R}^n).$$

**Preuve. de (2.3.2)**

Soit  $\{\varphi_j\}$  les système précédent, nous avons :

$$\overset{\vee}{\varphi}_j(x) = 2^{jn} \overset{\vee}{\varphi}(2^j x),$$

d'où

$$\left\| \overset{\vee}{\varphi}_j \right\|_p = 2^{jn} 2^{-j \frac{n}{p}} \left\| \overset{\vee}{\varphi} \right\|_p,$$

pour  $j$  assez grand on a

$$\phi_j \varphi_{j+r} \equiv \varphi_j$$

d'autre part on a

$$c' \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \left( \overset{\vee}{\varphi}_k * \overset{\vee}{\phi}_j \right) \right\|_p = c' \sum_{r=-2}^2 \left\| \left( \overset{\vee}{\varphi}_{j+r} * \overset{\vee}{\phi}_j \right) \right\|_p = c' \sum_{r=-2}^2 \left\| \overset{\vee}{\varphi}_j \right\|_p \leq c'' 2^{jn} 2^{-j \frac{n}{p}}.$$

■

(ii) Nous allons prouver que

$$\mathcal{F} \left[ B_{p,\infty}^{n(\frac{1}{p}-1)}(\mathbb{R}^n) \right] \subset \tilde{M}_p, \quad 0 < p \leq 1. \quad (2.3.3)$$

Soient  $\check{m} \in B_{p,\infty}^{n(\frac{1}{p}-1)}(\mathbb{R}^n)$  et  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ , soient  $\{\varphi_j\}$  et  $\{\phi_j\}$  les système précédent, nous avons :

$$\begin{aligned} \left\| \check{\varphi}_j * \left( \check{m} * f \right) \right\|_p &= \left\| \left( \check{\varphi}_j * \check{m} \right) * \left( \phi_j * f \right) \right\|_p \quad (\text{car } \varphi_j \phi_j = \varphi_j) \\ &\leq \left\| \check{\varphi}_j * \check{m} \right\|_1 \left\| \phi_j * f \right\|_p \quad (\text{Inégalité de Young}) \\ &\leq c 2^{jn(\frac{1}{p}-1)} \left\| \check{\varphi}_j * \check{m} \right\|_p \left\| \phi_j * f \right\|_p \quad (\text{Inégalité de Bernstein}) \\ &\leq c' \left\| \check{m} \right\|_{B_{p,\infty}^{n(\frac{1}{p}-1)}(\mathbb{R}^n)} \left\| \phi_j * f \right\|_p, \end{aligned}$$

d'où

$$\left\| \check{m} * f \right\|_{B_{p,q}^n} \leq c'' \|f\|_{B_{p,q}^s} \quad \text{c-à-d } m \in \tilde{M}_p .$$

Maintenant (i) et (2.3.3) donnent (ii).

(iii) Nous allons démontrer que

$$\mathcal{F} [B_{1,\infty}^0(\mathbb{R}^n)] = \tilde{M}_\infty. \quad (2.3.4)$$

Soit  $m \in \mathcal{F} [B_{1,\infty}^0(\mathbb{R}^n)]$  alors d'après (ii) on a  $m \in \tilde{M}_1$ , on rappelle que  $S(\mathbb{R}^n)$  est dense dans  $B_{1,1}^0(\mathbb{R}^n)$  (i.e Théorème 2.3.3/1 T [2]), donc le prolongement de l'opérateur  $\check{m} * (\cdot)$  qui est défini sur  $S(\mathbb{R}^n)$  donne un opérateur  $T$  linéaire borné de  $B_{1,1}^0(\mathbb{R}^n)$  dans lui même. Maintenant nous avons utilisé la formule de dualité  $(B_{1,1}^0(\mathbb{R}^n))' = B_{\infty,\infty}^0(\mathbb{R}^n)$ . La restriction de  $T'$  l'opérateur dual de  $T$  à  $S(\mathbb{R}^n)$  coïncide avec  $\hat{m} * (\cdot)$ , d'où  $m \in \tilde{M}_\infty$  ce qui prouve

$$\mathcal{F} [B_{1,\infty}^0(\mathbb{R}^n)] \subset \tilde{M}_\infty \quad (2.3.5)$$

Soit  $m \in \tilde{M}_\infty$  donc  $m$  est un multiplicateur de Fourier pour  $B_{\infty,\infty}^0(\mathbb{R}^n)$ ,

soit  $f \in S(\mathbb{R}^n)$ , soient  $\{\varphi_j\}$  et  $\{\phi_j\}$  les système de (i) on a

$$\begin{aligned} \left\langle (m\varphi_j)^\wedge, f \right\rangle &= \left\langle m\varphi_j\phi_j, f \right\rangle \\ &= \left\langle (m\varphi_j)^\wedge, \left( \phi_j \cdot \hat{f} \right)^\vee \right\rangle \\ &= (m\varphi_j)^\wedge * \left( \phi_j \cdot \hat{f} \right)^\vee (0). \quad (\text{car } \phi_j\varphi_j = \varphi_j) \end{aligned}$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned}
 \left| \left\langle (m\varphi_j)^\wedge, f \right\rangle \right| &\leq \left\| \left( \check{\varphi}_j * \check{m} \right) * \left( \phi_j \cdot f \right)^\vee \right\|_\infty \\
 &\leq c \left\| \check{m} * \left( \phi_j \cdot f \right)^\vee \right\|_{B_{\infty, \infty}^0} \\
 &\leq c' \left\| \left( \phi_j \cdot f \right)^\vee \right\|_{B_{\infty, \infty}^0} \quad (m \in \tilde{M}_\infty) \\
 &\leq c' \sup_{-2 \leq r \leq 2} \|f\|_\infty \left\| (\varphi_{j+r} \phi_j)^\vee \right\|_1, \quad (\text{Inégalité de Young})
 \end{aligned}$$

d'où

$$\left| \left\langle (m\varphi_j)^\wedge, f \right\rangle \right| \leq c'' \|f\|_\infty, \quad (2.3.6)$$

où  $c, c', c''$  sont indépendants de  $j$  et  $f$ .

Soit  $C^0(\mathbb{R}^n)$  est la complétion de  $S(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . (2.3.6) démontre que

$f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (m\varphi_j)^\vee(-y) f(y) dy$  est une fonction linéaire continue sur  $C^0(\mathbb{R}^n)$ . D'après

le théorème de Riesz, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^n} (m\varphi_j)^\vee(-y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) d\mu_j$$

où  $\mu_j$  est une mesure complexe finie de Radon on  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\|\mu_j\| \leq c$ , (i.e (2.3.6)),

ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| (m\varphi_j)^\vee(y) \right| dy = \|\mu_j\| \leq c$$

de plus on a  $\check{m} \in B_{1, \infty}^0(\mathbb{R}^n)$ , d'où

$$\tilde{M}_\infty \subset \mathcal{F}(B_{1, \infty}^0(\mathbb{R}^n)). \quad (2.3.7)$$

(2.3.5) et (2.3.7) donnent (2.3.4). Maintenant nous allons prouver que

$$\mathcal{F}(B_{1, \infty}^0(\mathbb{R}^n)) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad (2.3.8)$$

Soient  $\check{m} \in B_{1, \infty}^0(\mathbb{R}^n)$  et  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$  le système précédent, nous avons

$$\|\varphi_j \cdot m\|_\infty \leq c \left\| \check{\varphi}_j * \check{m} \right\|_1 \leq c \left\| \check{m} \right\|_{B_{1, \infty}^0(\mathbb{R}^n)}$$

d'où

$$\|m\|_\infty \leq c \left\| \check{m} \right\|_{B_{1, \infty}^0(\mathbb{R}^n)}$$

ce qui donne (2.3.8). D'après (2.3.4) et (2.3.8) nous avons (iii). ■

**Théorème 2.3.2 :**

- (i)  $\tilde{M}_p = \tilde{M}_{p'}$ , si  $1 \leq p \leq \infty$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,
- (ii)  $\tilde{M}_p \subset \tilde{M}_q \subset \tilde{M}_2 = M_2 = L^\infty(\mathbb{R}^n)$  si  $0 < p \leq q \leq 2$ ,
- (iii)  $\tilde{M}_1 \subset \tilde{M}_p$ ,  $p \geq 1$ ,
- (vi)  $\tilde{M}_\infty^{com} = M_p^{com}$ .

Pour la preuve nous avons besoin d'énoncer le lemme suivant :

**Lemme 2.3.1** Si  $0 < p_0 \leq p_1 \leq +\infty$ ,  $0 < r \leq \infty$  alors on a

$$B_{p_0,r}^{n(\frac{1}{p_0}-1)}(\mathbb{R}^n) \subset B_{p_1,r}^{n(\frac{1}{p_1}-1)}(\mathbb{R}^n).$$

**Preuve.** Soit  $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$  la suite qui est définie dans la preuve de proposition 2.3.1, nous avons

$$\left\| \bigvee \phi_j * f \right\|_{p_1} \leq c 2^{jn(\frac{1}{p_0}-\frac{1}{p_1})} \left\| \bigvee \phi_j * f \right\|_{p_0} \quad (\text{Inégalité de Bernstein})$$

d'où le résultat. ■

## 2.4 La classe $\tilde{M}_{p,q}$

Dans cette partie, nous allons étudier la propriété de l'espace de tous les multiplicateurs de Fourier pour l'espace  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ .

**Remarque 2.4.1** L'espace de tous les multiplicateurs de Fourier pour  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  noté par  $\tilde{M}_{p,q}$  puis qu'il est indépendant de  $s$  (voir T. [2]. théorème 2.3.8).

**Remarque 2.4.2** On peut définir l'espace  $\tilde{M}_{p,q}$  comme suit :

$$\tilde{M}_{p,q} = M(\mathcal{F}F_{p,q}^s),$$

et

$$\mathcal{F}F_{p,q}^s = \left\{ f \in S'(\mathbb{R}^n) / \|f\|_{\mathcal{F}F_{p,q}^s} = \|\mathcal{F}^{-1}f\|_p < +\infty \right\},$$

et

$$\|m\|_{\tilde{M}_{p,q}} = \sup_{\|f\|_{F_{p,q}^s}=1} \left\| \bigvee m * f \right\|_{F_{p,q}^s}.$$

**Théorème 2.4.1** Soient  $p, q \in ]0, \infty[$  et  $s \in \mathbb{R}$ . Soit  $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  et  $x > n \left( \frac{1}{\min(p,q,1)} - \frac{1}{2} \right)$  alors on a la propriété suivante :

$$\text{Si } m \in H_2^x(\mathbb{R}^n) \text{ alors } m \in \tilde{M}_{p,q}.$$

**Preuve.** Pour la preuve voir T.[2]. ■

**Théorème 2.4.2 :**

- (i)  $\tilde{M}_{p,p} = \tilde{M}_p$  si  $0 < p < \infty$
- (ii)  $\tilde{M}_{p,2} = \tilde{M}_p$  si  $1 < p < \infty$
- (iii)  $\tilde{M}_{p,q} \subset \tilde{M}_p$  si  $0 < p < \infty$  et  $0 < q \leq \infty$
- (vi)  $\tilde{M}_{p,q_0} \subset \tilde{M}_{p,q_1} \subset \tilde{M}_p$  si  $0 < q_0 \leq q_1 \leq p$  ou  $p \leq q_1 \leq q_0 \leq \infty$  et  $p \neq \infty$ .

**Preuve.** Nous allons prouver (i) et (ii), on rappelle que  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) = F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  si  $0 < p < \infty$  et  $L^p(\mathbb{R}^n) = F_{p,2}^s(\mathbb{R}^n)$  si  $1 < p < \infty$  d'où par les définitions de l'espace  $\tilde{M}_{p,q}$  et  $\tilde{M}_p$  on obtient (i) et (ii) respectivement, puisque  $\tilde{M}_p \neq M_p$  si  $p \neq 2$  et  $1 \leq p \leq \infty$ .

Maintenant (iii) et (vi) sont des conséquences immédiates de l'interpolation. ■

**Théorème 2.4.3 :**

$$(i) \tilde{M}_{p_0,q_0} \subset \tilde{M}_{p_1,q_1}$$

$$\begin{aligned} \text{si} \quad & \frac{1}{p_1} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{2}, \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{2}, \\ \text{avec} \quad & 0 < \theta < 1, 0 < p_0 < \infty \text{ et } 0 < q_0 \leq \infty. \end{aligned}$$

$$(ii) \tilde{M}_{p,q} = \tilde{M}_{p',q'}$$

$$\text{si } 0 < p < \infty \text{ et } 0 < q < \infty, \text{ avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

**Preuve.** Nous allons prouver (i), soit  $p_0, q_0 \in ]0, \infty[$  alors par l'interpolation et la propriété (iii) du théorème précédent et  $\tilde{M}_p \subset \tilde{M}_2 = M_2$  (i.e. (ii) de théorème 2.3.2), on obtient (i).

Maintenant (ii) est une conséquence immédiates de la formule de dualité. ■

# Chapitre 3

## Théorème Hirschmann

Dans ce chapitre, nous allons étudier le théorème de Hirschmann dans les espaces  $L^p(\mathbb{R}^n)$ ,  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ ,  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ .

### 3.1 Théorème de Hirschmann dans $L^p$

**Définition 3.1.1** Soit  $s \in \mathbb{R}$ , l'espace de Sobolev noté  $H^s$  est l'espace de toutes les fonctions  $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ , telle que

$$\xi \rightarrow (1 + |\xi^2|)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

**Proposition 3.1.1** Soit  $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ , il existe  $c > 0$  telle que toute fonction  $f \in C^r$  s'écrive

$$f = \sum_{j \geq 0} f_j, \quad \text{où}$$

- (i)  $\|f_j\|_\infty \leq c 2^{-rj} \|f\|_{C^r}$ ,
- (ii)  $\hat{f}_j$  à support dans la couronne  $2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}$  pour  $j \geq 1$  et  $\hat{f}_0$  dans la boule  $|\xi| \leq 2$ .

**Preuve.** Par la définition de  $\Delta_j$  et (1.1.4) de premier chapitre on a

$$f = \sum_{j \geq 0} \Delta_j f$$

avec

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta_j f}(\xi) &= \varphi(2^{-j}\xi) \widehat{f}(\xi), & (\xi \in \mathbb{R}^n, j \geq 1) \\ \widehat{\Delta_0 f}(\xi) &= \psi(\xi) \widehat{f}(\xi), & (\xi \in \mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

On pose

$$f_j = \Delta_j f, \quad j \geq 0$$

par (ii) de la proposition 1.3.2 nous avons

$$\begin{aligned}\|f_j\|_\infty &\leq 2^{jr} 2^{-jr} \|\Delta_j f\|_\infty \\ &\leq 2^{-jr} \sup_k 2^{kr} \|\Delta_k f\|_\infty \\ &\leq c 2^{-jr} \|f\|_{C^r}\end{aligned}$$

■

**Théorème 3.1.1** Soient  $s \leq \frac{n}{2}$  et  $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ . Si  $f$  appartient à  $C^r(\mathbb{R}^n) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f \in M_p(\mathbb{R}^n)$  pour tout

$$\frac{2r + 2\left(\frac{n}{2} - s\right)}{2r + \frac{n}{2} - s} < p < \frac{2r}{\frac{n}{2} - s} + 2.$$

**Preuve.**  $\frac{2r}{\frac{n}{2} - s} + 2$  est évidemment l'exposant conjugué de  $\frac{2r + 2\left(\frac{n}{2} - s\right)}{2r + \frac{n}{2} - s}$  compte-tenu de (i) de théorème 2.1.2, on pourra supposer

$$\frac{2r + 2\left(\frac{n}{2} - s\right)}{2r + \frac{n}{2} - s} < p \leq 2,$$

suivant la proposition 3.1.1 et (ii) de théorème 2.1.1, on écrit

$$f = \sum_{j \geq 0} f_j,$$

avec

$$\begin{aligned}\widehat{f_j}(\xi) &= \varphi(2^{-j}\xi) \widehat{f}(\xi), & (j \geq 1) \\ \widehat{f_0}(\xi) &= \psi(\xi) \widehat{f}(\xi),\end{aligned}$$

on a

$$\|f_j\|_{M_2} = \|f_j\|_\infty \leq c 2^{-jr} \|f\|_{C^r}.$$

Maintenant, on va estimer  $\|f_j\|_{M_1}$ . On a

$$\begin{aligned} \|f_j\|_{M_1} &= \left\| \hat{f}_j \right\|_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}_j(\xi) \right| d\xi \\ &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left| \hat{f}_j(\xi) \right|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(2^{-j}\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{Inégalité de Hölder}) \\ &\leq c2^{j(\frac{n}{2}-s)} \|f\|_{H^s} \|\varphi\|_{\infty}, \end{aligned}$$

finalement

$$\|f\|_{M_1} \leq c2^{j(\frac{n}{2}-s)} \|f\|_{H^s}. \quad (3.1.1)$$

On applique alors (ii) de théorème 2.1.2 qui donne

$$\|f_j\|_{M_p} \leq C(f) 2^{j(\frac{n}{2}-s)(1-\theta)} 2^{-jr\theta}$$

où  $\frac{1}{p} = (1 - \theta) + \frac{\theta}{2}$ , Pour que  $f$  appartienne à  $M_p$ , il suffit donc qu'on ait

$$\left(\frac{n}{2} - s\right) (1 - \theta) - r\theta < 0$$

autrement dit

$$p > \frac{2r + 2\left(\frac{n}{2} - s\right)}{2r + \frac{n}{2} - s}.$$

■

Nous allons appliquer le théorème de Hirschmann à la fonction  $\phi_\delta$  définie par

$$\phi_\delta(\xi) = \begin{cases} (1 + |\xi|^2)^\delta & \text{pour } |\xi| < 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

( $\delta$  est un nombre positif).

**Proposition 3.1.2**  $\phi_\delta$  est un multiplicateur de Fourier pour  $L^p$  si

$$\delta > \frac{n-1}{2} \left| \frac{2}{p} - 1 \right|.$$

**Preuve.** On remarque que  $\phi_\delta \in C^\delta$  et  $\phi_\delta \in H^{\delta+\frac{1}{2}-\epsilon}$  ( $\forall \epsilon > 0$ ); le théorème d'Hirschmann conduit précisément à la condition

$$\delta > \frac{n-1}{2} \left| \frac{2}{p} - 1 \right|.$$

La preuve de  $\phi_\delta \in C^\delta$  est à peu près immédiate. Celle de  $\phi_\delta \in H^{\delta+\frac{1}{2}-\epsilon}$  est plus délicate. Il y a deux méthodes :

**1) Calcul de  $\overset{\vee}{\phi}_\delta$ .**

On a  $\overset{\vee}{\phi}_\delta(x) = c_\delta |x|^{-\frac{n}{2}-\delta} J_{\frac{n}{2}+\delta}(|x|)$  où  $J_\alpha$  désigne la fonction de Bessel d'ordre  $\alpha$ . (Voir [1]).

On en déduit

$$\overset{\vee}{\phi}_\delta(x) = 0 \left( |x|^{-\left(\frac{n}{2}-\delta-\frac{1}{2}\right)} \right) \text{ quand } |x| \rightarrow \infty,$$

comme, par ailleurs,  $\overset{\vee}{\phi}_\delta$  est une fonction analytique, on obtient

$$\int (1 + |x|^2)^{(\delta+\frac{1}{2}-\epsilon)} \left| \overset{\vee}{\phi}_\delta(x) \right|^2 < +\infty.$$

**2) Estimation directe.**

Il existe une caractérisation de  $H^s$  ( $s \notin \mathbb{N}$ ) qui n'utilise pas la transformation de Fourier.  $u \in H^s$  ssi  $u^{(\alpha)} \in L^2$  pour  $|\alpha| \leq [s]$  et, pour tout  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  tel que  $|\alpha| = s$ ,

$$\int \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|u^{(\alpha)}(\xi + \eta) - u^{(\alpha)}(\xi)|^2}{|\eta|^{n+2(s-[s])}} d\xi d\eta \leq +\infty$$

(voir G. [6] IV.13 et IV.15).

On a, ici,

$$\phi_\delta^{(\alpha)}(\xi) = P_\alpha(\xi) (1 + |\xi|^2)^{\delta-|\alpha|} \quad (|\xi| < 1),$$

où  $P_\alpha$  est un polynôme de degré  $|\alpha|$  et  $s = \delta + \frac{1}{2} - \epsilon$ , avec  $\epsilon > 0$ , arbitrairement petit; rien n'empêche de supposer que  $\delta + \frac{1}{2} - \epsilon$  est non entier et que, pour un entier  $m$ , on a

$$m < \delta + \frac{1}{2} - \epsilon < m + 1 \text{ et } m < \delta + \frac{1}{2} \leq m + 1.$$

Des calculs plus fastidieux que difficiles conduisent à

$$\begin{cases} \phi_\delta^{(\alpha)} \in L^2 & \text{pour } |\alpha| \leq m \\ \int_{\mathbb{R}^n} \left| \phi_\delta^{(\alpha)}(\xi + \eta) - \phi_\delta^{(\alpha)}(\xi) \right|^2 d\xi \leq c |\eta|^{2\delta-2m+1}, & \text{pour } |\alpha| = m \end{cases} \quad (3.1.3)$$

De (3.1.2) on déduit facilement

$$\phi_\delta \in H^{(\delta+\frac{1}{2}-\epsilon)}. \quad (3.1.4)$$

**L'équation de schrödinger**

On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u \\ u(x, 0) = v(x) \end{cases} \quad (3.1.5)$$

On suppose que  $t \mapsto u(-, t)$  ( $t \geq 0$ ) prend ses valeurs dans  $S'(\mathbb{R}^n)$ ; par transformation de Fourier, le problème devient

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -i|\xi|^2 \hat{u} \\ \hat{u}(\xi, -) = \hat{v}(\xi) \end{cases}$$

dont la solution  $t \mapsto \hat{u}(-, t)$ , fonction de classe  $C^1$  prenant ses valeurs dans  $S'$ , est donnée par

$$\hat{u}(\xi, t) = \exp(-it|\xi|^2) \hat{v}(\xi).$$

Par Plancherel, on en déduit aussitôt. ■

## 3.2 Théorème de Hirschmann dans $B_{p,q}^s$ et $F_{p,q}^s$

**Théorème 3.2.1** Soient  $s \leq \frac{n}{2}$  et  $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$  si  $f$  appartient à  $C^r(\mathbb{R}^n) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f \in \tilde{M}_p(\mathbb{R}^n)$  pour tout

$$\frac{2r + 2\left(\frac{n}{2} - s\right)}{2r + \frac{n}{2} - s} < p < \frac{2r}{\frac{n}{2} - s} + 2$$

**Preuve.**  $\frac{2r}{\frac{n}{2} - s} + 2$  est évidemment l'exposant conjugué de  $\frac{2r + 2\left(\frac{n}{2} - s\right)}{2r + \frac{n}{2} - s}$  compte-tenu de (i) de théorème 2.3.2, on pourra supposer

$$\frac{2r + 2\left(\frac{n}{2} - s\right)}{2r + \frac{n}{2} - s} < p \leq 2$$

suivant la proposition 3.1.1 et (ii) de théorème 2.3.2, on écrit

$$f = \sum_{j \geq 0} f_j$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{f}_j(\xi) &= \varphi(2^{-j}\xi) \hat{f}(\xi), & (j \geq 1) \\ \hat{f}_j(\xi) &= \psi(\xi) \hat{f}(\xi), \end{aligned}$$

on a

$$\|f_j\|_{\tilde{M}_2} = \|f_j\|_{M_2} = \|f_j\|_{\infty} \leq c2^{-jr} \|f\|_{C^r} \quad .$$

Maintenant, on va estimer  $\|f_j\|_{\tilde{M}_1}$ . On a

$$\begin{aligned} \left\| \bigvee_j f_j * \psi \right\|_{B_{1,\infty}^0} &= \sup_{k \geq 0} 2^0 \left\| 2^{kn} \check{\varphi}(2^k \cdot) * \left( \bigvee_j f_j * \psi \right) \right\|_1 \\ &\leq \sup_{k \geq 0} \left\| \bigvee_j f_j * \left( 2^{kn} \check{\varphi}(2^k \cdot) * \psi \right) \right\|_1 \quad (\text{Inégalité de Young}) \\ &\leq \sup_{k \geq 0} \left\| \bigvee_j f_j \right\|_1 \left\| 2^{kn} \check{\varphi}(2^k \cdot) * \psi \right\|_1 = \left\| \bigvee_j f_j \right\|_1 \|\psi\|_{B_{1,\infty}^0}. \end{aligned}$$

Par (3.1.1), nous avons

$$\|f_j\|_{\tilde{M}_1} = \left\| \bigvee_j f_j \right\|_1 = \|f_j\|_{M_1} \leq c 2^{j(\frac{n}{2}-s)} \|f\|_{H^s}.$$

On applique alors théorème 1.5.3 avec la proposition 1.5.1, on obtient

$$\|f_j\|_{\tilde{M}_p} \leq C(f) 2^{j(\frac{n}{2}-s)(1-\theta)} 2^{-jr\theta}$$

où  $\frac{1}{p} = (1-\theta) + \frac{\theta}{2}$ , pour que  $f$  appartienne à  $\tilde{M}_p$ , il suffit donc qu'on ait

$$\left(\frac{n}{2} - s\right)(1-\theta) - r\theta < 0$$

autrement dit

$$p > \frac{2r + 2\left(\frac{n}{2} - s\right)}{2r + \frac{n}{2} - s}.$$

Nous allons appliquer le théorème de Hirschmann dans  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  à la fonction  $\phi_\delta$  définie par (3.1.2). ■

**Proposition 3.2.1**  $\phi_\delta$  est un multiplicateur de Fourier pour  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  si

$$\delta > \frac{n-1}{2} \left| \frac{2}{p} - 1 \right|.$$

**Preuve.** Par (3.1.4) on a  $\phi_\delta \in H^{\delta+\frac{1}{2}-\epsilon}$  ( $\forall \epsilon > 0$ ) et  $\phi_\delta \in C^\delta$  le théorème d'Hirschmann dans  $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  conduit précisément à la condition

$$\delta > \frac{n-1}{2} \left| \frac{2}{p} - 1 \right|.$$

La preuve de  $\phi_\delta \in C^\delta$  est à peu près immédiate. ■

**Théorème 3.2.2** Soient  $s \leq \frac{n}{2}$  et  $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$  si  $f$  appartient à  $C^r(\mathbb{R}^n) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f \in \tilde{M}_{p,q}(\mathbb{R}^n)$  pour tout

$$\frac{2r + 2\left(\frac{n}{2} - s\right)}{2r + \frac{n}{2} - s} < p < \frac{2r}{\frac{n}{2} - s} + 2 \text{ et } q = p \text{ ou } q = 2 .$$

**Preuve.** Soient  $s \leq \frac{n}{2}$  et  $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$  et  $\frac{2r+2\left(\frac{n}{2}-s\right)}{2r+\frac{n}{2}-s} < p < \frac{2r}{\frac{n}{2}-s} + 2$ , soit

$f \in C^r(\mathbb{R}^n) \cap H^s(\mathbb{R}^n)$  alors :

• Pour  $q = p$ . Nous avons  $f \in \tilde{M}_p = \tilde{M}_{p,p}$  si  $0 < p < \infty$  (D'après théorème 3.2.1 et (i) de théorème 2.4.2) de plus on a

$$\left\| \overset{\vee}{f * \varphi} \right\|_{F_{p,p}^l(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{\tilde{M}_{p,p}} \|\varphi\|_{F_{p,p}^l(\mathbb{R}^n)}, \text{ pour tout } \varphi \in S(\mathbb{R}^n), l \in \mathbb{R} .$$

• Pour  $q = 2$ . Nous avons  $f \in M_p = \tilde{M}_{p,2}$  si  $1 < p < \infty$  (D'après théorème 3.1.1 et (ii) de théorème 2.4.2) de plus on a

$$\left\| \overset{\vee}{f * \varphi} \right\|_{F_{p,2}^l(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{\tilde{M}_{p,2}} \|\varphi\|_{F_{p,2}^l(\mathbb{R}^n)}, \text{ pour tout } \varphi \in S(\mathbb{R}^n), l \in \mathbb{R} .$$

D'où

$$f \in \tilde{M}_{p,q} \text{ avec } q = p \text{ ou } q = 2 .$$

Nous allons appliquer le théorème de Hirschmann dans  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  à la fonction  $\phi_\delta$  définie par (3.1.2) . ■

**Proposition 3.2.2**  $\phi_\delta$  est un multiplicateur de Fourier pour  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  si

$$\delta > \frac{n-1}{2} \left| \frac{2}{p} - 1 \right| \text{ avec } q = p \text{ ou } q = 2 .$$

**Preuve.** Par (3.1.4) on a  $\phi_\delta \in H^{\delta+\frac{1}{2}-\epsilon}$  ( $\forall \epsilon > 0$ ) et  $\phi_\delta \in C^\delta$  le théorème d'Hirschmann dans  $F_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$  conduit précisément à la condition

$$\delta > \frac{n-1}{2} \left| \frac{2}{p} - 1 \right| \text{ avec } q = p \text{ ou } q = 2 .$$

La preuve de  $\phi_\delta \in C^\delta$  est à peu près immédiate . ■

# Conclusion

L'objectif de ce travail est d'étudier la multiplication de Fourier pour les espaces de Besov  $B_{p,q}^s$  et de Lizorkin-triebel  $F_{p,q}^s$  en donnant quelques propriétés. On étudie aussi le théorème Hirschmann dans les  $L^p$ ,  $B_{p,q}^s$ ,  $F_{p,q}^s$ .

# Bibliographie

- [1] **G.Bourdaud.** Analyse fonctionnelle dans l'espace euclidien. N°29. Université Paris VII. 1988.
- [2] **H. Triebel.** Théory of function spaces, Birkhauser verlag. Basel. Boston. Stuttgart 1983.
- [3] **H. Triebel.** Theory of function spaces II, Birkhauser 1992.
- [4] **J. Franke.** On the spaces  $F_p^{s,q}$  of Triebel-Lizorkin type: Pointwise multipliers and spaces on domains. Math. Nachr, 125 (1986), 29 – 68.
- [5] **M.Moussai :** On the Fourier multipliers of the space  $L^p$ . G. Math. J. Vol 12, 2015, 2, 331 – 336.
- [6] **R. R. Coifman et Y. Meyer,** Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque. N°57 Soc Math France 1978.
- [7] **T. Runst et W. Sickel :** Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators and non linear partial differential equations. De Gruyter, Berlin 1996.

## Résumé

Dans ce mémoire nous avons étudié les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel, où nous devons donner quelques définitions entre ces espaces, on plus de l'étude les multiplications de Fourier dans ces espaces.

A la fin de mémoire nous avons étudié le théorème de Hirschmann dans les espaces de Besov et Lizorkin-Triebel.

### Mot-clé

Espace de Besov, espace de Lizorkin-Triebel, multiplication de Fourier.

## Abstract

In this thesis, we studied the spaces of Besov and Lizorkin-Triebel, Where we have to give some definitions between these spaces, as well as the study multiplication of Fourier in these spaces.

Finally we studied theorem of Hirschmann in the spaces of Besov et Lizorkin-Triebel.

### Key word

Besov space, Lizorkin-Triebel space, Fourier multiplication.

## ملخص

في هذه المذكرة درسنا فضاءات بيزوف و ليزوركين-تريبيل حيث قمنا باعطاء تعريفات في هذه الفضاءات، بالإضافة إلى دراسة جداءات فوريي في هذه الفضاءات.

و في نهاية المذكرة درسنا نظرية هيتشمان في فضاءات بيزوف و ليزوركين-تريبيل.

### الكلمات المفتاحية

فضاء بيزوف، فضاء ليزوركين-تريبيل، جداء فوريي.