



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE

Université Mohamed Boudiaf de M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques



Mémoire de Master

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Analyse Mathématique et numérique

Thème

Sur des Equations Intégré-Différentielles

Présentée par:

DIF Zeyneb

Soutenu publiquement le: 28/06/2021.

Devant le jury composé de:

Mestefa NADIR

Noui DJAIDJA

Amina KHIRANI

Prof,

M.C.B,

M.C.A,

Université de M'sila

Université de M'sila

Université de M'sila

Président:

Encadreur:

Examineur:

Année universitaire 2020/2021

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو إيجاد حلول تقريبية للمعادلات التكاملية-التفاضلية لفولتيرا التكاملية من النوع الثاني وذلك باستخدام طريقة التجميع لتشبيشاف وقد قمنا بمعالجة أمثلة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة ولتأكيد رتبة التقارب .

الكلمات المفتاحية: المعادلات التكاملية لفولتيرا- المعادلات التفاضلية لفولتيرا - طريقة التجميع- كثيرات حدود تشبيشاف

Résumé :

Le but de ce mémoire, est la résolution numérique des équations intégrales de Volterra du second type, en utilisant la méthode de collocation basé sur le polynôme de Tchebychev .De plus, des exemples sont présentés pour illustrer la précision, l'efficacité de la méthode proposée et pour confirmer l'ordre de convergence.

Mots clés : Equation intégrale de Volterra -Equation intégrales de Volterra- Méthode de collocation - Polynômes de Tchebychev.

Abstract :

The goal of this memory is the numerical resolution of Volterra integro-differential equations by the collocation-Tchebychev method, Moreover, many examples are presented to illustrate the accuracy, efficiency of the method and to confirm the order of convergence.

Key words : Volterra integral equation- Volterra integro-differential equation- Collocation method- Tchebychev polynomials

Remerciements

*En premier lieu, j'aimerais exprimer toute ma gratitude à **ALLAH**, qui ma donné tous pour achever mon modeste travail.*

Je remercie mon encadreur, Dr. Noui. DJAIDJA pour avoir accepté de diriger ce travail, pour son aide et pour la confiance qu'il ma accordée tout au long de mon parcours.

Je tiens à remercier les membres du jury: Prof. Mostefa NADIR, et Dr. Amina KHIRANI, pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

J'adresse mes sincères remerciements à mes enseignants qui ont contribués à ma formation universitaire.

Je voudrais également remercier toute ma famille, en particulier mes parents, pour tous leurs sacrifices, leurs amour inconditionnel, leurs soutien et leurs encouragements.

Dédicace

A mes parents ...

A Mon marie et sa famille ...

A mes soeurs et mes frères ...

A tout personne qui m'a soutenue, aidé ou contribué de prés ou de loin ...

Je dédié ce travail

Table des matières

1	Rappels d'analyse fonctionnelle et Numérique	2
1.1	Notions d'analyse fonctionnelle	2
1.1.1	Espace Vectoriel normé	2
1.1.2	Espace de Banach	2
1.1.3	Espaces de Hilbert	3
1.1.4	Opérateurs linéaires bornés	4
1.1.5	Opérateurs compacts	
	5	
1.1.6	Opérateurs intégraux	5
1.2	Notions d'analyse numérique	6
1.2.1	Les Méthodes de projection	6
2	Introduction à la théorie des équations intégrales	9
2.1	Classification des équations intégrales	9
2.1.1	Equations intégrales linéaires	9
2.2	Classification des équations intégro-différentielle	11
2.2.1	Equations intégro-différentielle linéaires	11
2.2.2	Conversion d'une équation intégro-différentielle de Volterra à une équation intégrale de Volterra	12
2.3	Résolution analytique des E.I.D de Volterra de second type	13
2.3.1	La méthode de solution sous forme de série	13
2.3.2	La méthode de décomposition d'Adomian	14

2.4	Polynômes orthogonaux	16
2.4.1	Polynômes de Tchebychev	16
2.4.2	Polynômes de Legendre	18
2.4.3	Polynômes de Laguerre	20
3	Méthodes numérique pour les équations intégro-différentielle	22
3.1	Méthode de collocation- Tchebychev	22
3.2	Méthode de Galerkin-Tchebychev	23
3.3	Exemples illustratifs	24
	Conclusion	27
	Bibliographie	28

Introduction

Tous les problèmes scientifiques sont modélisés par des équations différentielles ordinaires (EDO) ou équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) ou par des équations Intégrales (E.I) et intégral- différentielles (E.I.D).

Les équations intégral-différentielles linéaires ou non linéaires sont difficiles à résoudre analytiquement, ce qui montre l'importance des solutions approchées dans la plupart des cas.

Ce mémoire contient trois chapitres.

Le premier chapitre, contient les définitions de base et les outils mathématiques qui sont nécessaires pour une bonne compréhension de la suite des problèmes traités.

Le second chapitre, traite de la résolution des équations intégrales par les Méthodes de projection : méthode de Collocation-méthode de Galerkin

Dans le troisième chapitre nous avons réalisé certaines méthodes numériques pour la résolution approchée des équations intégral différentielles de Volterra de second espèce, la méthode de collocation- Tchebychev et la méthode de Galerkin- Tchebychev.

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle et Numérique

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Espace Vectoriel normé

Définition 1.1.1 : Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on appelle une norme sur l'espace E toute fonction notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}_+ , telle que

Pour tout $x, y \in E$, et $\lambda \in \mathbb{k}$

$$1- \|x\| = 0 \iff x = 0$$

$$2- \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$$

$$3- \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Définition 1.1.2 Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , E est dit espace vectoriel normé s'il est muni d'une norme .

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.1.3 (Suite de Cauchy). Une suite (x_n) d'éléments d'un espace normé $(E, \|\cdot\|)$ est dite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 1, \forall p, q \geq N, \text{ on a } \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Définition 1.1.4 On dit qu'un espace normé E est complet si toute suite de Cauchy de E est convergente.

Définition 1.1.5 Un espace de Banach est un espace normé complet.

1.1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.1.6 (produit scalaire). On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une application: $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

Pour tout x, y et $z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{k}$

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$
2. $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$
5. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

Définition 1.1.7 Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace préhilbertien.

Définition 1.1.8 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire.

Exemple 1.1.1 L'espace $L^2([a, b])$ des fonctions de carré intégrables défini par:

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} ; \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

où l'intégrale est prise au sens de Lebesgue, muni de la norme

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt$$

induite par le produit scalaire défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

est un espace de Hilbert.

1.1.4 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.9 Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Une application $A : E \rightarrow F$ est dite linéaire si

Pour tout x et y dans E et α, β dans \mathbb{k}

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

Définition 1.1.10 Un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dite continu au point x_0 de G , si pour toute suite (x_n) de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0)$$

Remarque 1.1.1 L'opérateur linéaire A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Définition 1.1.11 Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est dit borné s'il existe une constante $M \geq 0$, telle que

$$\| Ax \| \leq M \| x \| \quad \text{pour tout } x \in E$$

Définition 1.1.12 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On définit une norme sur l'espace vectoriel de tout les opérateurs linéaires bornés de E dans F par

$$\| A \| = \sup_{\|x\|=1} \| Ax \| = \sup_{\|x\| \neq 1} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}$$

L'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F muni de cette norme est noté par $\mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 1.1.1 Soit A un opérateur linéaire entre deux espaces vectoriels normés E et F . Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1- A est borné.

2- A est continu sur E .

1.1.5 Opérateurs compacts

Définition 1.1.13 Soit E et F deux espace normés, A un opérateur linéaire de E dans F , on dit que A est un opérateur compact si l'image par A de la boule unité $B(0;1)$ de E est relativement compacte dans F , i.e. si $A(B(0;1))$ est compacte.

Autrement dit, A est compact si et seulement si pour toute suite (x_n) borné dans E la suite (Ax_n) admet une sous suite convergente.

Notons par $K(E, F) \subset \mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires compacts de E dans F .

1.1.6 Opérateurs intégraux

Définition 1.1.14 Soit Ω un ensemble compact de \mathbb{R}^n , k une fonction continue de $\Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. L'opérateur linéaire A définie par:

$$A : \varphi \in C(\Omega) \rightarrow A\varphi \in C(\Omega)$$

$$(A\varphi)(x) = \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

est appelé opérateur intégrale à noyau continue $k(x, t)$, cet opérateur est borné, la norme de A donnée par:

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in \Omega} \int_\Omega |k(x, t)| dt$$

Théorème 1.1.2 *L'opérateur intégral A de $C(\Omega)$ dans $C(\Omega)$ à noyau continue est un opérateur compact.*

Preuve. *En effet, soit E un ensemble borné de $C(\Omega)$; ($\|\varphi\| < M$, pour tout $\varphi \in E$)*

De plus, on a:

$$|A\varphi(x)| \leq M |\Omega| \max_{x,y \in G} |K(x,t)|, \quad \forall x \in \Omega \text{ et } \varphi \in E$$

D'où l'ensemble $A(E)$ est borné. D'autre part, le noyau K est uniformément continu sur le compact $\Omega \times \Omega$, alors pour tout x, t et z de Ω , on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tel que } |x - t| < \delta \Rightarrow |K(x,z) - K(t,z)| < \frac{\varepsilon}{M|\Omega|}$$

d'où

$$|A\varphi(x) - A\varphi(t)| < \varepsilon \text{ pour tout } x, t \in \Omega \text{ et } \varphi \in E \text{ avec } |x - t| < \delta$$

Ceci exprime que l'ensemble $A(E)$ est équicontinu, d'où $A(E)$ est relativement compact par le théorème d'Arzelà-Ascoli. Alors A est compact. ■

1.2 Notions d'analyse numérique

1.2.1 Les Méthodes de projection

Opérateurs de projection

Définition 1.2.1 *Soit E un espace de Banach, un opérateur $P \in L(E)$ tel que $P^2 = P$ est appelé un opérateur de projection.*

Si E est un espace de Hilbert l'opérateur P est appelé un opérateur de projection orthogonal. Il est facile de remarquer que l'opérateur de projection P est orthogonal si et seulement si

$$\langle P(v), (I - P)(u) \rangle = 0, \quad \forall u, v \in E$$

Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée de l'équation opérateur

$$\varphi - A\varphi = f \tag{1.2.1}$$

la méthode de collocation consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (1.2.1) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation

En pratique, nous choisissons une suite de sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 1$ de dimension finie, généralement des sous espaces de $C([a, b])$ ou de $L^2([a, b])$. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base de X_n . On cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$, de la forme

$$\varphi_n(x) = \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x), x \in [a, b] \tag{1.2.2}$$

Pour déterminer les coefficients (c_j), on substituant, cette fonction dans l'équation (1.2.1), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \varphi_n(x) - \int_a^b k(x, t) \varphi_n(t) dt - f(x), x \in [a, b] \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \psi_j(x) - \int_G k(x, t) \sum_{j=1}^n c_j \psi_j - f(x) \\ &= \sum_{j=1}^n c_j \left\{ \psi_j(x) - \int_a^b k(x, t) \psi_j(x) dt \right\} - f(x), x \in [a, b] \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

soit nul sur un système de noeuds $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$, (i.e, aux points de collocation).

Ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \psi_j(x_i) - \int_G k(x_i, t) \psi_j(x_i) dt \right\} c_j = f(x_i), i = 1, \dots, n \tag{1.2.4}$$

de la forme $AX = B$ où

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^n \left\{ \psi_j(x_i) - \int_G k(x_i, t) \psi_j(x_i) dt \right\}, i = 1, \dots, n \\ X &= c_j, \quad j = 1, \dots, n \\ B &= f(x_i), \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Évidemment, ce système admet une solution unique si le $\det(A) \neq 0$.

Méthode de Galerkin

Soit X un espace de

Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on se donne une suite de sous espace $X_n \subset X$ de dimension finie. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base orthonormale de X_n , on cherche une fonction $\varphi_n \in X_n$ proche de la solution exacte du problème original (1.2.1), .

Donc pour le problème (1.2.1), l'idée est de minimiser l'erreur

$$r_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i (I - A) \psi_i - f \quad (1.2.5)$$

d'où on impose la condition d'orthogonalité suivante

$$\langle r_n, \psi_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i (I - A) \psi_i - f, \psi_j \right\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.2.6)$$

ce qui implique

$$\left\langle \sum_{i=1}^n c_i (I - A) \psi_i, \psi_j \right\rangle - \langle f, \psi_j \rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.2.7)$$

ou

$$\sum_{i=1}^n c_i \{ \langle \psi_i, \psi_j \rangle - \langle A \psi_i, \psi_j \rangle \} = \langle f, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.2.8)$$

Ainsi, on obtient le système linéaire

$$c_j - \sum_{i=1}^n c_i \langle A \psi_i, \psi_j \rangle = \langle f, \psi_j \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.2.9)$$

Chapitre 2

Introduction à la théorie des équations intégrales

Dans ce chapitre, on donne des définitions sur des équations intégrales linéaires et équations intégrales-différentielles et quelques méthodes pour résoudre ces équations.

2.1 Classification des équations intégrales

2.1.1 Equations intégrales linéaires

Définition 2.1.1 On appelle équation intégrale linéaire toute équation de la forme

$$\varphi(x) + \lambda \int_{\Omega} k(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.1.1)$$

où $k(x, y)$ et $f(x)$ sont des fonctions données et φ est la fonction inconnue, $k(x, t)$ appelé le noyau de l'équation intégrale(2.1.1), $\Omega = ([a; b], \text{ou } [a; x])$, λ un paramètre.

Remarque 2.1.1 L'équation (2.1.1) peut être écrite sous forme d'opérateur

$$(I - \lambda A)\varphi(x) = f(x)$$

où I est l'opérateur identité, et A l'opérateur intégral défini par:

$$A\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, t)\varphi(t)dt$$

Equations intégrales de Fredholm

Définition 2.1.2 On appelle équation intégrale de Fredholm de second espèce, une équation de la forme

$$\varphi(x) - \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.1.2)$$

où k et f sont des fonctions connues et λ es un paramètre non nul, réel ou complexe et φ la fonction inconnue.

Définition 2.1.3 On appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce, une équation de la forme $\int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$

1-Si $f(x) = 0$, l'équation (2.1.2) est dite homogène.

2-Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.1.2) est dite non homogène.

Equations intégrales de Volterra

Définition 2.1.4 On appelle équation intégrale linéaire de Volterra de second espèce, une équation de la forme:

$$\varphi(x) - \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.1.3)$$

Définition 2.1.5 On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, une équation de la forme :

$$\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.1.4)$$

1-Si $f(x) = 0$, l'équation (2.1.3) est dite homogène, si non l'équation (2.1.3) est dite non homogène.

2.2 Classification des équations intégro-différentielle

Définition 2.2.1 Une équation intégro-différentielle (E.I.D.) est une équation composée de deux opérations: intégrales et différentielles qui impliquent la fonction inconnue φ

Exemple 2.2.1

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{3}x + \int_0^1 x\varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\varphi''(x) + \varphi'(x) = 1 - x(\sin x + \cos x) - \int_0^x t\varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = -1, \varphi'(0) = 1 \quad (2.2.2)$$

L' équations (2.2.1) est une équation intégro-différentielle de type Fredholm alors que l'équation (2.2.2) est une équation intégro-différentielle de type Volterra.

Ces terminologies ont été conclues à cause de la présence d'intégrales définies et indéfinies.

2.2.1 Equations intégro-différentielle linéaires

Equations intégro-diérentielles de Fredholm

Définition 2.2.2 On appelle équation intégro-différentielle de Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) - \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la nième dérivée de $\varphi(x)$. D'autres dérivés d'ordre inférieur peuvent apparaître avec $\varphi^{(n)}$ sur le côté gauche.

Exemple 2.2.2

$$\varphi'(x) + \int_0^1 \exp(x-t)\varphi(t)dt = x, \quad \varphi(0) = 0,$$

$$\varphi''(x) - \int_{-1}^1 (xt^2 + x^2t^2)\varphi(t)dt = 2 - \frac{2}{3}x - \frac{16}{15}x^2, \quad \varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 1$$

Equations Integro-différentielles de Volterra

Définition 2.2.3 On appelle équation intégro-différentielle de Volterra une équation de la forme :

$$\varphi^{(n)}(x) - \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad \varphi^{(k)}(a) = a_k, \quad 0 \leq k \leq n-1$$

où $\varphi^{(n)}$ indique la nième dérivée de $\varphi(x)$. D'autres dérivés d'ordre inférieur peuvent apparaître avec $\varphi^{(n)}$ sur le côté gauche.

Exemple 2.2.3

$$\varphi'(x) + \int_0^x t\varphi(t)dt = -1 + \frac{1}{2}x^2 - x \exp(x), \quad \varphi(0) = 0,$$

$$\varphi''(x) - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt = 1, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0$$

2.2.2 Conversion d'une équation intégro-différentielle de Volterra à une équation intégrale de Volterra

On peut convertir l'équation intégro-différentielle de Volterra en équation intégrale de Volterra équivalente, à condition, que le noyau soit un noyau de différence $k(x,t) = k(x-t)$. Cela peut être facilement fait en intégrant les deux côtés de l'équation et en utilisant les conditions initiales pour déterminer la solution exacte, et la formule suivante:

$$\int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x \varphi(t)dt \dots dt = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} \varphi(t)dt \quad (2.2.3)$$

Exemple 2.2.4 Soit l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante:

$$\varphi'(x) - \frac{1}{4} \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{4}x^2 - 2, \quad \varphi(0) = 0, \quad (2.2.4)$$

Intégrant les deux côtés de l'équation (2.2.4) et en utilisant les conditions initiales, et la formule (2.2.3) on obtient

$$\varphi(x) - \frac{1}{4} \int_0^x \int_0^x \varphi(t) dt dt = \frac{1}{12} x^3 - 2x$$

d'où

$$\varphi(x) - \frac{1}{4} \int_0^x (x-t) \varphi(t) dt = \frac{1}{12} x^3 - 2x$$

2.3 Résolution analytique des E.I.D de Volterra de second type

Dans cette section, nous allons présenter quelques méthodes mathématiques pour obtenir la solution des équations intégrales de Volterra, pour plus de détails voir [3]

2.3.1 La méthode de solution sous forme de série

Nous concentrerons sur l'étude de l'équation intégrale qui implique le noyau séparable de la forme

$$k(x, t) = \sum_{i=1}^n g_i(x) h_i(t)$$

où les fonctions $g_i(x)$ et $h_i(t)$, $(i = 1, \dots, n)$ seront supposées continues dans le carré fondamental $a \leq x, t \leq b$ et linéairement indépendantes.

Examinons une équation intégrale-différentielle de Volterra comme indiqué ci-dessous :

$$\varphi^{(n)}(x) - g(x) \int_a^x h(t) \varphi(t) dt = f(x), \quad \varphi^{(k)}(a) = a_k, \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (2.3.1)$$

Supposons que la solution $\varphi(x)$ de l'équation (2.3.1) est une fonction analytique et peut donc être représentée par un développement en série au point ordinaire $x = 0$ donné par

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad (2.3.2)$$

où les coefficients a_k sont les constantes inconnues qui doivent être déterminés.

Exemple 2.3.1 Soit l'équation Intégré-différentielle de Volterra suivante

$$\varphi''(x) = x \cosh x - \int_0^x t\varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1 \quad (2.3.3)$$

remplaçons l'équation (2.3.2) dans(2.3.3) et en utilisant le développement de Taylor de la fonction $\cosh x$, nous obtenons

$$\sum_{k=2}^{\infty} n(n-1)a_k x^{k-2} = x \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) - \int_0^x t \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \right) dt \quad (2.3.4)$$

Utilisons les conditions initiales,nous avons $a_0 = 0$, et $a_1 = 1$.

$$2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 \dots = x \left(1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \dots \right) - \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}a_2x^4 + \dots \right) \quad (2.3.5)$$

En identifiant les coefficients des monômes de même puissance en x dans les deux membres, nous trouvons

$$a_2 = 0, a_3 = \frac{1}{3!}, a_4 = 0, \dots$$

En générale

$$a_{2n} = 0, a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}, \quad n \geq 0$$

la solution $\varphi(x)$ de l'équation (2.3.2) peut être écrite sous forme de série comme suit

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \\ &= \sinh x \end{aligned}$$

2.3.2 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode de décomposition d'Adomian [3],[4] donne la solution sous forme d'une série infinie de termes qui peuvent être redéterminés.

Considérons l'équation intégrée-différentielle de Volterra définie par

$$\varphi^{(n)}(x) - \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad \varphi^{(k)}(a) = a_k, \quad 0 \leq k \leq n-1 \quad (2.3.6)$$

Chercher une expression pour $\varphi(x)$ qui sera dérivée de l'équation (2.3.6) .

Cela peut être fait en intégrant les deux membres de l'équation (2.3.6) de 0 à x autant de fois que l'ordre de dérivée impliqué. Par conséquent, nous obtenons

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \right) \quad (2.3.7)$$

$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} a_k x^k$ est obtenue en utilisant les conditions initiales, et L^{-1} est un opérateur d'intégration. Maintenant, nous sommes en mesure d'appliquer la méthode de décomposition en définissant la solution $\varphi(x)$ de l'équation (2.3.6) par une série

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \quad (2.3.8)$$

Par substitution de l'équation (2.3.8) dans (2.3.7), nous obtenons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t) \right) dt \right) \quad (2.3.9)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} a_k x^k + L^{-1}(f(x)), \\ \varphi_{n+1}(x) &= L^{-1} \left(\int_a^x k(x,t)\varphi_n(t)dt \right), \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Exemple 2.3.2 Résoudre l'équation intégrale-différentielle de Volterra suivante

$$\varphi''(x) = x + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt, \quad \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1 \quad (2.3.11)$$

Appliquons l'opérateur intégral L^{-1}

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$$

aux deux membres de l'équation (2.3.11) c.-à-d. en intégrant les deux membres de l'équation (2.3.11) deux fois de 0 à x , et en utilisant les conditions données

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + L^{-1} \left(\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt \right)$$

En suivant le schéma de décomposition, c.-à-d. les équations (2.3.10), nous trouvons

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= x + \frac{1}{3!}x^3 \\ \varphi_1(x) &= L^{-1} \left(\int_0^x (x-t)\varphi_0(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 \\ \varphi_2(x) &= L^{-1} \left(\int_0^x (x-t)\varphi_1(t)dt \right) \\ &= \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{11!}x^{11} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \end{aligned}$$

La solution $\varphi(x)$ de l'équation (2.3.11) donnée par

$$\varphi(x) = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \frac{1}{11!}x^{11} + \dots$$

La solution exacte est

$$\varphi(x) = \sinh(x)$$

2.4 Polynômes orthogonaux

2.4.1 Polynômes de Tchebychev

Définition 2.4.1 *Les polynômes de Tchebychev (de première espèce) d'ordre n , sont définis par la relation de récurrence:*

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \text{ et } T_0(x) = 1 \quad , \quad T_1(x) = x$$

Les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x \\ T_6(x) &= 32x^5 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \end{aligned}$$

Propriétés des polynômes de Tchebychev

1. Le polynôme $T_n(x)$ peut être défini par la relation

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

ou bien encore par la relation

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left(\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)^n + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right)$$

$T_n(x)$ est un polynôme de degré n dont le coefficient de plus haut degré est 2^{n-1} vérifiant

$$T_n(1) = 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Ces polynômes vérifient la relation

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$$

2. Les polynômes de Tchebychev sont solutions de l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + n^2y = 0$$

3. Les polynômes de Tchebychev satisfont la relation de récurrence

$$(1 - x^2)T'_n(x) = -nxT_n(x) + nT_{n-1}(x)$$

4. Pour $i = 0, \dots, n$ la relation du produit de deux polynômes

$$2T_i(x)T_n(x) = T_{n+i}(x) + T_{n-i}(x)$$

5. Majorations

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1], \quad |T_n(x)| &\leq 1 \\ \forall x \in [-1, 1], \quad \left| \frac{dT_n(x)}{dx} \right| &\leq n^2 \end{aligned}$$

6. Les polynômes de Tchebychev sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids définie sur l'intervalle $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \int_{-1}^{+1} T_n(x)T_m(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} \quad n \neq 0 \\ \int_{-1}^{+1} T_0^2(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \pi \end{aligned}$$

7. Le polynôme de Tchebychev de degré n admet exactement n racines réelles données par

$$\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

2.4.2 Polynômes de Legendre

Définition 2.4.2 On appelle polynôme de Legendre de degré n , le polynôme défini par la relation de récurrence suivante:

$$(n+1)L_{n+1}(x) = (2n+1)xL_n(x) - nL_{n-1}(x)$$

initialisée par

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x$$

Les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned}
L_0(x) &= 1 \\
L_1(x) &= x \\
L_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\
P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \\
P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \\
P_5(x) &= \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \\
P_6(x) &= \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)
\end{aligned}$$

Propriétés des polynômes de Legendre

1. Les polynômes de Legendre sont solutions de l'équation différentielle:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

2. Les polynômes de Legendre satisfont la relation de récurrence:

$$(1 - x^2)L'_n(x) = 2xL_n(x) - n(n + 1)L_{n-1}(x)$$

3. Formule de Rodrigues

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n$$

4. Les polynômes de Legendre sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $\omega(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1, +1]$.

$$\int_{-1}^{+1} L_n(x)L_m(x)dx = \frac{2}{2n + 1} \delta_{n,m}$$

En particulier, $L_n(x) = 1$ et

$$\|L_n(x)\|_2 = \left(\int_{-1}^{+1} L_n(x)L_n(x)dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2n + 1}}$$

5. Les polynômes de Legendre vérifient la formule

$$\int_{-1}^{+1} L_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{2n + 1}$$

2.4.3 Polynômes de Laguerre

Définition 2.4.3 On appelle polynôme de Laguerre d'ordre n , le polynôme défini par la relation de récurrence:

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1-x)P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

et les conditions d'initialisation

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = 1 - x$$

Pour $\alpha > -1$ On appelle polynôme de Laguerre généralisé d'ordre n et on note $L_n^{(\alpha)}(x)$ le polynôme défini par la relation de récurrence

$$(n+1)P_{n+1}^{(\alpha)}(x) = (2n+\alpha+1-x)P_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)P_{n-1}^{(\alpha)}(x)$$

initialisée par

$$P_0^{(\alpha)}(x) = 1 \quad P_1^{(\alpha)}(x) = 1 + \alpha - x$$

Le polynôme de Laguerre proprement dit correspond au cas $\alpha = 0$ Les premiers polynômes sont

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= 1 - x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \\ P_3(x) &= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 1 \\ P_4(x) &= \frac{1}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 - 4x + 1 \\ P_5(x) &= -\frac{1}{120}x^5 + \frac{5}{24}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 5x^2 - 5x + 1 \\ P_6(x) &= \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{20}x^5 + \frac{5}{8}x^4 - \frac{10}{3}x^3 + \frac{15}{2}x^2 - 6x + 1 \end{aligned}$$

Propriétés des polynômes de Laguerre

1. Les polynômes de Laguerre sont solutions de l'équation différentielle

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0$$

2. Les polynômes de Laguerre satisfont les relations de récurrence, pour α entier

$$\begin{aligned}
 xP'_n(x) &= nP_n(x) - nP_{n-1}(x) \\
 x\frac{dP_n^{(\alpha)}(x)}{dx} &= nP_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)P_{n-1}^{(\alpha)}(x) \\
 P_{n+1}^{(\alpha-1)}(x) &= P_n^{(\alpha)}(x) - P_{n-1}^{(\alpha)}(x) \\
 xP_n^{(\alpha-1)}(x) &= (x-n)P_n^{(\alpha)}(x) - (n+\alpha)P_{n-1}^{(\alpha)}(x) \\
 xP_n^{(\alpha-1)}(x) &= (n+\alpha+1)P_n^{(\alpha)}(x) - (n+1)P_{n+1}^{(\alpha)}(x) \\
 (n+\alpha)P_n^{(\alpha-1)}(x) &= (n+1)P_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (n+1-x)P_n^{(\alpha)}(x)
 \end{aligned}$$

3. Formule de Rodrigues

$$P_n^{(\alpha)}(x) = \frac{e^x}{n!x^\alpha} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha}e^{-x})$$

4. Les polynômes de Laguerre sont des polynômes orthogonaux relativement à la fonction de poids $\omega(x) = x^\alpha e^{-x}$ définie sur l'intervalle $]0, \infty[$

$$\int_0^\infty P_n^{(\alpha)}(x)P_m^{(\alpha)}(x)x^\alpha e^{-x}dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}\delta_{n,m}$$

Chapitre 3

Méthodes numérique pour les équations intégral-différentielle

Dans ce chapitre on va résoudre numériquement des équations intégral-différentielles de Volterra en utilisant les méthodes de collocation- Tchebychev et de Galerkin- Tchebychev .

3.1 Méthode de collocation- Tchebychev .

On considère l'équation intégral-différentielle de Volterra suivante:

$$\varphi'(x) - \int_a^x k(x,t) \varphi(t) dt = f(x), \text{ avec } \varphi(a) = \alpha, \quad a \leq t \leq x \leq b \quad (3.1.1)$$

où $k(x,t)$ est une fonction continue et carré intégrable, $f(x)$ est une fonction connue, $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Maintenant nous employons la technique de la méthode de collocation. Pour ceci, nous estimons la fonction inconnue $\varphi(x)$ comme suit

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_i(x) \quad (3.1.2)$$

alors

$$\varphi'(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_i'(x) \quad (3.1.3)$$

où T_i sont les polynome de Chebyshev de degré i ($i = 0, 1, \dots, n$) et, c_i , sont des paramètres inconnus, à déterminé.

On remplace (3.1.2) et (3.1.3) dans l'équation(3.1.1), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^n c_i T_i'(x_j) - \int_a^{x_j} \left[k(x_j, t) \sum_{i=0}^n c_i T_i(t) \right] dt = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n$$

ou

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[T_i'(x_j) - \int_a^{x_j} k(x_j, t) T_i(t) dt \right] = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n \quad (3.1.4)$$

les conditions initiales de problème(3.1.1) sont donné

$$\varphi(a) = \sum_{i=0}^n c_i T_i(a) = \alpha \quad (3.1.5)$$

Les inconnus c_i ($i = 0, 1, \dots, n$) sont déterminés en résolvant le système d'équations (3.1.4) et (3.1.5). La substitution de ces valeurs dans (3.1.2) donne la solution approximative.

3.2 Méthode de Galerkin-Tchebychev .

On considère l'équation intégro-différentielle de Volterra suivante:

$$\varphi'(x) - \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad \text{avec} \quad \varphi(a) = \alpha, \quad a \leq t \leq x \leq b \quad (3.2.1)$$

où $k(x, t)$ est une fonction continue et carré intègrable, $f(x)$ est une fonction connue, $\varphi(x)$ la fonction inconnue.

Maintenant nous employons la technique de la méthode de Galerkin. Pour ceci, nous estimons la fonction inconnue $\varphi(x)$ comme suit

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_i(x) \quad (3.2.2)$$

alors

$$\varphi'(x) = \sum_{i=0}^n c_i T_i'(x) \quad (3.2.3)$$

où T_i sont les polynome de Chebyshev de degré i ($i = 0, 1, \dots, n$) et, c_i , sont des paramètres inconnus, à déterminé.

On remplace (3.2.2) et (3.2.3) dans l'équation(3.2.1), nous obtenons

$$\sum_{i=0}^n c_i T_i'(x) - \int_a^x \left[k(x, t) \sum_{i=0}^n c_i T_i(t) \right] dt = f(x)$$

ou

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[T_i'(x) - \int_a^x k(x, t) T_i(t) dt \right] = f(x) \quad (3.2.4)$$

Alors les équations de Galerkin sont obtenues en multipliant les deux côtés de (3.2.4) par T_j et puis en intégrant en ce qui concerne x de a à b , nous obtenons

$$\sum_{i=0}^n c_i \left[\int_a^b \left[T_i'(x) - \int_a^x k(x, t) T_i(t) dt \right] T_j(x) dx \right] = \int_a^b T_j(x) f(x) dx \quad (3.2.5)$$

les conditions initiales de problème(3.2.1) sont donné

$$\varphi(a) = \sum_{i=0}^n c_i T_i(a) = \alpha \quad (3.2.6)$$

Les inconnus c_i ($i = 0, 1, \dots, n$) sont déterminés en résolvant le système d'équations (3.2.5) et (3.2.6). La substitution de ces valeurs dans (3.2.2) donne la solution approximative.

3.3 Exemples illustratifs

Example 1. Considérons l'équation intégro-différentielle de Volterra de seconde espèce

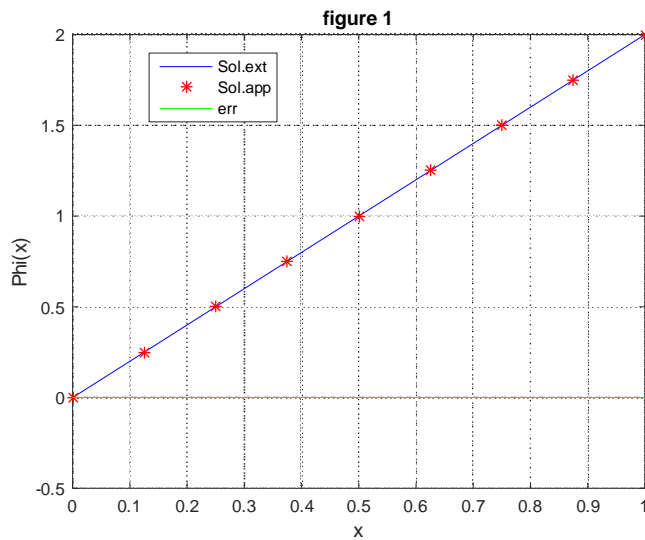
$$\varphi'(x) - \frac{1}{4} \int_0^x \varphi(t) dt = 2 - \frac{x^2}{4},$$

où $0 \leq x, t \leq 1$, la solution exacte donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = 2x$$

Table 1. Nous présentons la solutions approchée φ_T de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenue par la méthode de collocation basé sur le polynome de Tchebychev, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 8$

Val de x	Solex φ_{ex}	Solap φ_T	Error $_T$
0.000	0 0	-5.1369e-04	5.1369e-04
1.2500e-01	2.5000e-01	2.4951e-01	4.9144e-04
2.5000e-01	5.0000e-01	4.9953e-01	4.6944e-04
3.7500e-01	7.5000e-01	7.4955e-01	4.4771e-04
5.0000e-01	1.0000e+00	9.9957e-01	4.2625e-04
6.2500e-01	1.2500e+00	1.2496e+00	4.0507e-04
7.5000e-01	1.5000e+00	1.4996e+00	3.8420e-04
8.7500e-01	1.7500e+00	1.7496e+00	3.6366e-04
1.0000e+00	2.0000e+00	1.9997e+00	3.4348e-04



Example 2. Considérons l'équation intégrô-différentielle de Volterra de seconde espèce

$$\varphi'(x) + \int_0^x t\varphi(t)dt = -1 + \frac{1}{2}x^2 - x \exp(x)$$

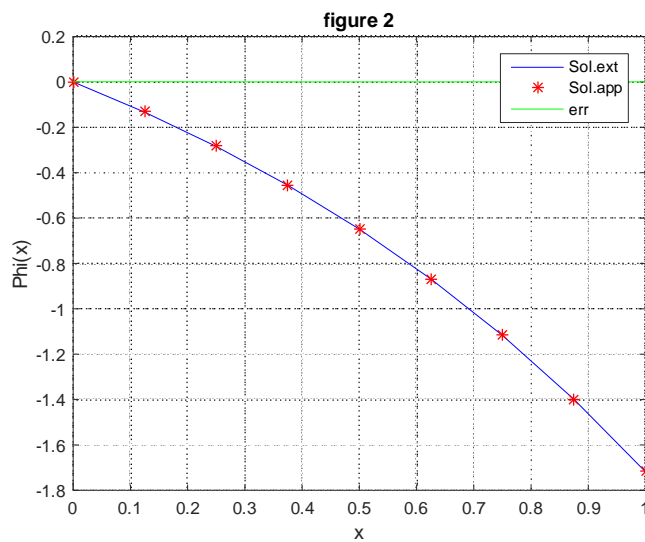
où $0 \leq x, t \leq 1$, la solution exacte donnée par

$$\varphi_{ex}(x) = 1 - \exp(x)$$

Table 2. Nous présentons la solutions approchée , φ_T de la solution exacte $\varphi_{ex}(x)$ obtenues par la méthode de collocation basé sur le polynome de Tchebychev, en certains points arbitraires, l'erreur est calculée pour $N = 8$

Val de x	Solex φ_{ex}	Solap φ_T	Error $_T$
0 0	0 0	-8.8354e-04	8.8354e-04
1.2500e-01	-1.3315e-01	-1.3225e-01	9.0000e-04
2.5000e-01	-2.8403e-01	-2.8366e-01	3.7000e-04
3.7500e-01	-4.5499e-01	-4.5485e-01	1.4000e-04
5.0000e-01	-6.4872e-01	-6.4876e-01	4.0000e-04
6.2500e-01	-8.6825e-01	-8.6838e-01	1.3000e-04
7.5000e-01	-1.1170e+00	-1.1173e+00	3.0000e-04
8.7500e-01	-1.3989e+00	-1.3983e+00	6.0000e-04
1.0000e+00	-1.7183e+00	-1.7177e+00	6.0000e-04

2



2.pdf

Conclusion

Les méthodes de résolution numérique des équations integro-différentielles jouent un rôle très important dans divers domaines scientifiques.

Cet mémoire traite de la résolution numérique des équations intégro-différentielles du premier ordre de Volterra de seconde espèce, utilisant la méthode de collocation basé sur le polynome de Tchebychev. Cette méthode est testée sur quelques exemples, les résultats obtenus sont satisfaisants.

Bibliographie

- [1] Aysegul Akyuz and Mehmet Seze ,A Chebyshev collocation method for the solution of linear integro-differential equation Intern. J. Computer Math., Vol. 72, pp. 491 -507
- [2] Imane MADJIDI,Mémoire master université de M'sila (2020)
- [3] A.M. Wazwaz, A First Course in Integral Equations, World Scientific, Singapore,(1997).
- [4] A.M. Wazwaz, A reliable treatment for mixed Volterra-Fredholm integral equations, Appl. Math. Comput., 127 (2002) 405-414.
- [5] Abdul-Majid Wazwaz (2011). Linear and nonlinear Integral Equations Methods and Applications, Higher Education Press, Beijing and Springer-verlag Heidelberg Berlin.
- [6] A. Jerri. Introduction to integral equations with applications. John Wiley and Sons, INC, 1999.
- [7] J. Biazar and F. Salehi, Chebyshev Galerkin method for integro-differential equations of the second kind,Iranian Journal of Numerical Analysis and Optimization Vol. 6, No. 1, (2016), pp 31-42
- [8] M. Nadir, Cours sur leséquations intégrales, université M'sila 2008.
- [9] M. Nadir, Solving Fredholm integral equations with application of the four Chebyshev polynomials, in Journal of Approximation Theory and Applied Mathematics, 4, (2014), pp 37-44.
- [10] P.Linz (1985). Analytic and Numerical Methods for Volterra Equations. SIAM,

- [11] Noui DJAIDJA Etude des équations intégrales de volterra de première espèce en utilisant les techniques des splines,Thèse de doctorat,Université de M'sila.
- [12] Mostefa NADIR,DJAIDJA Noui,Approximation Method for Volterra integral equation of the first kind,International journal of Mathematics and Computation vol 29 NO 4;2018.
- .