



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

MHAMDI KHADRA

Sujet

Résolution numérique d'une équation intégrale par une
méthode pseudo spectral

Devant le jury :

30 Juin 2019

Gagui Bachir	MCA.	Univ de M'sila	Président
LAKEHALI belkacem	MCA.	Univ de M'sila	Encadreur
SELT Omar	MCA.	Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

C'est avec un grand honneur et beaucoup de plaisir que nous ponctuons nos études en mathématique au sein de l'université de M'sila MOHAMED BOUDIAF par ce Modeste travail.

Pour cela nous tenons à exprimer nos sincères remerciements et notre profonde gratitude à notre encadreur monsieur LAKEHALI BELKACEM pour toutes les orientations et les conseils qu'il nous a prodigué tout le long de ce travail

Nos remerciements s'adressent également à l'ensemble des enseignants de la faculté de mathématique et informatique

Merci à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin dans l'achèvement de ce travail ; à tous ceux qui nous ont transmis de leur savoir.

Merci pour tout

Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à ceux qui m'ont encouragé et soutenu
moralement et matériellement pendant les moments les plus difficiles
et durant toute ma vie, et qui me sont les plus chères sur cette
planète :*

ma mère et mon père

A mes très chers frères

A mes très chers sœurs

A toute ma grande famille

A mes chers grands-parents

A mon mari

A tous mes oncles et tantes

A tous mes amies

A tous ceux que j'aime

A tous les étudiants de option : fondamentales et appliquées

Avec l'expression de tous mes sentiments de respect,

Je dédie ce mémoire.

Khadra

Introduction

Ce mémoire se compose de Quatre chapitres uniquement. Dans le premier chapitre on donne une petite introduction sur les espaces de Hilbert. Dans le deuxième chapitre on donne la définition et classification des Equations intégrales. Dans le troisième chapitre, on a donné la définition des polynômes de Legendre bien sûr avec leurs propriétés. Dans le Quatrième chapitre on donné Quelques exemples numériques pour vérifier la précision entre le solution et les solutions approchées

Conclusion

Les méthodes spectrales sont une technique récente d'approximation de la solution d'équations aux dérivées partielles par des polynômes de haut degré.

Elles ont un degré de précision infini: l'ordre de l'erreur ne dépend que de la solution à approcher.

Leur utilisation s'est énormément développée ces dernières années.

Table des matières

1	Espaces de Hilbert	3
1.1	Introdction	3
1.2	Espaces vectoriels normés	3
1.3	Espace complet	4
1.4	Produit scalaire	4
1.5	Espaces de Hilbert	5
2	Equations intégrales	7
2.1	Introdction	7
2.2	Classification des équation intégrales	7
2.3	L'existence et L'unicité de la solution de L'équation intégrale .	9
2.3.1	Opérateurs à noyau	9
2.4	Méthodes de résolution des équations intégrale	10
2.4.1	Méthodes de Projection	10
3	Les Polynômes orthogonaux	15
3.1	Introdction	15
3.2	Orthogonalité	15
3.3	Formule de d'Olinde Rodrigues	16
3.4	Polynômes orthogonaux classiques	16
3.4.1	Polynômes de Jacobi	17
3.4.2	Polynômes de Legendre	17
3.4.3	Polynomes de Tchébychev	18
3.4.4	Polynômes de Laguerre	19
3.4.5	Polynômes d'Hermite	19
3.5	Les 10 premiers de legendre de polynômes :	20

4	Méthodes Pseudo-spectrales	21
4.1	Introdction	21
4.2	Les méthodes pseudo spectrales	22
4.3	Application des méthodes pseudospectrales	23
4.3.1	Discrétisation de l'équation intégrale	24
4.3.2	Condition de convergence	26
4.4	Exemples numériques	26

Chapitre 1

Espaces de Hilbert

1.1 Introduction

Les espace de Hilbert sont les espace vectoriels de dimension infinie les plus simples. Ils interviennent entre autres

- dans l'étude des équations différentielles et aux dérivées partielles
- en mécanique classique (fréquences propres)

1.2 Espaces vectoriels normés

Définition 1 Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , on appelle norme sur l'espace E toute application notée $\|\cdot\|$ définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}_+ , vérifiant pour tout x, y dans E et α dans \mathbb{k}

- (i) $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (homogénéité)
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

Tout espace vectoriel muni d'une norme est appelé espace vectoriel normé.

Suite Convergente

Définition 2 Soit $(E, \|\cdot\|)$, un espace vectoriel normé, et $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite de $(E, \|\cdot\|)$.

On dit que u a pour limite $\ell \in E$ dans $(E, \|\cdot\|)$ si, et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - \ell\| = 0$ cela s'écrit encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Suites de Cauchy

Définition 3 Soit E , un espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$. Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E est dite "de Cauchy" si, et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, n \geq N_0 \implies \|u_{n+p} - u_n\| < \varepsilon.$$

On peut encore donner la caractérisation suivante :

Proposition 4 Soit (E, N) , un espace vectoriel normé. Alors :

- (i) Toute suite convergente est de Cauchy.
- (ii) Toute suite de Cauchy est bornée.

1.3 Espace complet

Définition 5 On dit que E est un espace métrique complet si toute suite de Cauchy de E converge dans E .

Complet \iff toute suite de Cauchy est convergente

1.4 Produit scalaire

Définition 6 Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} , un produit scalaire sur E est une application de $E \times E$ dans \mathbb{R} , notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ possédant les propriétés suivantes ;

pour tout x, y, z dans E et α, β dans \mathbb{R} ,

- (i) $\langle \alpha x, \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
- (ii) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$.
- (iv) $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0$

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace euclidien ou un espace préhilbertien.

Remarque 7 *Un produit scalaire sur E définit une norme sur E par la formule suivante*

$$\|x\|_E = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Lemma 8 *(Inégalité de Schwarz)*

Soit E un espace préhilbertien et x, y deux vecteurs de E . Alors :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

1.5 Espaces de Hilbert

Définition 9 *Un espace de Hilbert est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire (i.e une forme bilinéaire de $H \times H$ dans \mathbb{R} , symétrique et définie positive), et qui est complet pour la norme associée à ce produit scalaire. L'espace de Hilbert le plus populaire est $L^2([a, b], \|\cdot\|_2)$*

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

$$L^2([a, b]) = \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

Chapitre 2

Equations intégrales

2.1 Introduction

Définition 10 *On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration \int .*

C'est en générale l'équation par rapport à l'inconnue φ de la forme :

$$\int_a^b k(x, t, \varphi(t)) dt = \lambda \varphi(x) + f(x) \quad x \in [a, b] \quad (2.1)$$

$f(x)$ une fonction mesurable donnée sur $[a, b]$, λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe, et $k(x; t)$ une fonction mesurable sur $[a, b]$ appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait l'équation (2.1).

2.2 Classification des équation intégrales

Equation intégrale de Fredholm

On appelle équation intégrale linéaire de Fredholm de seconde espèce une équation de la form

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x) \quad (2.2)$$

où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $k(x, t)$ et $f(x)$ des fonctions données, x et t deux variables réelles parcourant l'intervalle $[a, b]$ et λ un facteur numérique.

La fonction $k(x, t)$ est le noyau de l'équation intégrale (2.2) ; on suppose que le noyau $k(x, t)$ est défini dans le carré $\Omega \{a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ du plan (x, t) et continu dans Ω , ou bien présente des discontinuités telles que l'intégrale

$$\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt$$

soit finie.

Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.2) est dite non homogène, dans le cas contraire, l'équation intégrale (2.2) s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = 0,$$

et on dit qu'elle est homogène.

Une équation intégrale de la forme

$$\int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x),$$

où la fonction inconnue $\varphi(x)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce

Les bornes a et b dans les équations peuvent être aussi finies qu'infinies.

On appelle solution des équations intégrales toute fonction $\varphi(x)$ telle qu'après sa substitution dans l'équation, celle-ci devient une identité en $x \in [a, b]$

.Equation intégrale de Volterra

Une équation, à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt, \quad (2.3)$$

où $f(x), k(x, t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre numérique, est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde

2.3. L'EXISTENCE ET L'UNICITÉ DE LA SOLUTION DE L'ÉQUATION INTÉGRALE 9

espèce, La fonction $k(x, t)$ est le noyau de l'équation de Volterra. Si $f(x) = 0$, l'équation (2.3) s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt$$

et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce.

Une équation, à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme

$$\int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce, Nous supposons dans la suite que la limite inférieure a est égale à zéro, ce qui ne réduira nullement la généralité des résultats.

On appelle solution de l'équations intégrales une fonction $\varphi(x)$ qui, dès qu'elle est portée dans cette équation, la change en identité (en x).

2.3 L'existence et L'unicité de la solution de L'équation intégrale

2.3.1 Opérateurs à noyau

L'équation qui va nous intéresser dans la suite est L'équation de Fredholm

$$\lambda \varphi(x) - \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x); [a, b]$$

On désigne par $[a, b]$ un ensemble compact inclu dans \mathbb{R}^N et soit $C([a, b])$ l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$, on lui associe le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_{[a, b]} f(x) g(x) dx$$

cet espace est muni de la norme uniforme

$$\|f\|_2 = \left(\int |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

on va considérer des équation mettant en jeu des intégrales, sous la forme d'un opérateur linéaire

Définition 11 soit $K : [a, b] \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue on appelle opérateur intégrale à noyau $K(., .)$ l'opérateur défini par

$$K : \varphi \in C([a, b]) \mapsto K(\varphi) \in C([a, b])$$

$$K(\varphi)(x) = \int_{[a, b]} k(x, t) \varphi(t) dt$$

Cet opérateur est continu, de norme

$$\|K\|_2 = \left(\int_{[a, b]} |k(x, t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Théoreme 12 Soit l'équation suivante

$$u(x) - \int_a^b k(x, t) u(t) dt = g(x)$$

si le noyau k est continu sur $[a, b] \times [a, b]$, $g \in L^2([a, b])$, et $\|B\|_2 < 1$, où

$$B = \sqrt{\int_a^b \int_a^b |k(x, t)|^2 dx dt}$$

Alors l'équation admet une solution unique $u \in L^2([a, b], \|\cdot\|_2)$

2.4 Méthodes de résolution des équations intégrales

2.4.1 Méthodes de Projection

Définition 13 Soit X un espace de Banach, un opérateur $P \in \mathcal{L}(X)$ tel que $P^2 = P$ est appelé un opérateur de projection.

2.4. MÉTHODES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALE 11

Si X est un espace de Hilbert l'opérateur P est un opérateur de projection orthogonal ie $\forall u, v \in X : \langle Pv, (I - P)u \rangle = 0$.

Proposition 14 *Soit X un espace vectoriel, $X = X_1 \oplus X_2$ si et seulement s'il existe un opérateur linéaire $P : X \rightarrow X$ tel que $P^2 = P$ avec $v_1 = P(v)$ et $v_2 = (I - P)(v)$ et aussi $X_1 = P(X)$ et $X_2 = (I - P)(X)$*

Principe des méthodes de projection.

Dans toutes les méthodes de projection, on étudie la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$u(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)u(t)dt = g(x) \quad (2.4)$$

Avec toutes les méthodes de projection, nous envisageons de résoudre (2.4)

Dans le cadre d'un espace de fonction complet, en général $C(D)$ ou $L^2(D)$ Nous choisissons une séquence de sous-espaces approximatifs dimensionnels finis $X_n \subset X, n \geq 1$. Avec X_n de dimension k_n finie. Soit X_n de base $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{k_n}\}$ donc le principe de la méthode de projection consiste à trouver une suite de fonction $u_n \in X$. Ce qui peut être écrit comme

$$u_n = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x), \quad x \in D$$

Pour déterminer les coefficients (c_j) , on substituant, cette fonction dans l'équation (2.4), et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens où le résidu

$$\begin{aligned} r_n(x) &= u_n(x) - \lambda \int_D k(x, t)u_n(t)dt - g(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \varphi_j(x) - \lambda \int_D k(x, t)\varphi_j(t)dt \right\} - g(x) \end{aligned}$$

Pour $x \in D$. C'est ce qu'on appelle le résidu dans l'approximation de l'équation

Lors de l'utilisation de $u \approx u_n$ Maintenant, nous écrivons (2.4) en notation d'opérateur comme

$$(I - \lambda k) u = g \quad (2.5)$$

En suite, le résidu peut être écrite comme

$$r_n(x) = (I - \lambda k) u_n - g$$

Les coefficients $\{c_1, \dots, c_{k_n}\}$ sont choisis en forçant $r_n(x)$ à être approximativement nul dans un certain sens. L'espoir et l'attente, c'est que la fonction résultante $u_n(x)$ sera une bonne approximation de solution exacte $u(x)$.

Nous avons différents type de méthodes de projection. Les plus utilisées sont :

- **Méthodes de collocation**
- **Méthodes de Galerkin**

Méthode de collocation

Généralement, le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution approchée de l'équation de l'équation de Fredholm de seconde espèce.

$$u(x) - \lambda \int_D k(x, t) u(t) dt = g(x) \quad (2.6)$$

consiste à chercher une solution approchée dans une sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (2.6) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation $\{x_1, x_2, \dots, x_{k_n}\} \in D$ telle que

$$r_n(x_i) = 0 \quad n = 1, \dots, k_n$$

qui vont déterminer les coefficients $\{c_1, c_2, \dots, c_{k_n}\}$ comme solution du système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \left\{ \varphi_j(x_i) - \lambda \int_D k(x_i, t) \varphi_j(t) dt \right\} = g(x_i) \quad i = 1, \dots, k_n$$

d'où

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda \int_D k(x_i, t) \varphi_j(t) dt + g(x_i) \quad i = 1, \dots, k_n$$

2.4. MÉTHODES DE RÉOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALE 13

Nous introduisons un opérateur de projectio $P_n : X \rightarrow X_n, X = C(D)$ soit $u \in C(D)$ on défini $P_n u$ comme élément de X_n l'interpolation de u aux points x_i .

$$P_n u(x) = u_n(x) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x)$$

Donc

$$P_n u(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} \lambda \int_D k(x_i, t) \varphi_j(t) dt + g(x_i) = \sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i)$$

Alors les coefficients c_j sont détermines par la résolution du système

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \varphi_j(x_i) = u(x_i)$$

Mais ce système admet une solution unique si

$$\det |\varphi_j(x_i)| \neq 0$$

donc $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ constituent un systeme linéairement indépendant.

Méthode de Galerkin

Soit $X = L^2(D)$ ou un autre espace de fonctions de Hilbert, et donne $\langle \cdot \rangle$ muni d'une produit scalaire pour. Exiger le résiduel r_n pour satisfaire

$$\langle r_n, \varphi_i \rangle = 0 \quad (2.7)$$

Le côté gauche est le cofficient de Fourier de r_n associé à φ_i , Si $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ se compose des membres principaux d'une famille orthonormée $\phi = (\varphi_i)_{i \geq 1}$ qui s'étend sur X , alors (2.7) nécessite les termes avancés à être zéro dans l'expansion de Fourier de r_n par rapport à ϕ .

Pour trouver u_n , appliquer (2.7) à (2.4) écrit comme $(\lambda - k)u = g$ Cela donne le système linéaire

$$\sum_{j=1}^{k_n} c_j \langle \varphi_j, \varphi_i \rangle - \lambda \langle k \varphi_j, \varphi_i \rangle - \langle g, \varphi_i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, k_n$$

C'est la méthode de Galerkin. Pour obtenir une solution approximative à (2.4) ou (2.5). Le système a-t-il une solution ? Si c'est le cas, est-ce unique ? La suite résultante de solutions approximatives u_n converge-t-elle en u dans X La converge-t-elle en $C(d)$, c'est-à-dire que u_n converge uniformément en u . Notez également que la formulation ci-dessus contient des intégrales doubles $\langle k\varphi_j, \varphi_i \rangle$. Ceux-ci doivent être calculés numériquement.

Rappeler que

$$P_n h = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad \langle h, \varphi_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, k_n$$

A l'aide de la projection orthogonale P_n , nous pouvons réécrire (2.7) comme

$$P_n r_n = 0$$

Ou équivalent

$$P_n (I - \lambda k) u_n = P_n g, \quad u_n \in X_n$$

Les polynômes de legendre sont utilisés comme fonction d'essai dans la base. Pour cela, nous proposons une brève introduction des polynômes de legendre d'abord. Ensuite, nous dérivons une formulation matricielle par la technique de la méthode Galerkin

Chapitre 3

Les Polynômes orthogonaux

3.1 Introduction

Définition 15 On désigne par $I = ([a, b])$, $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, un intervalle de \mathbb{R} et par $w(x)$ une mesure réelle positive avec $w : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue strictement positive sur I et tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b |x|^n w(x) dx < +\infty$$

Traditionnellement w est appelée la fonction poids. On note par $L_2([a, b], \|\cdot\|_2)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur I et à valeurs dans \mathbb{R} telles que

$$\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx < +\infty$$

Pour tous $f, g \in L_2([a, b], \|\cdot\|_2)$, on définit le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx$$

qui fait de $L_2([a, b], \|\cdot\|_2)$ un espace préhilbertien.

3.2 Orthogonalité

Définition 16 On dit que la famille de polynômes $(P_i)_{i \geq 0}$ est une famille de polynômes orthogonaux si quelque soit P_i, P_j de $C(I)$ on a

$$\langle P_i, P_j \rangle = \int_a^b P_i(x) \overline{P_j(x)} w(x) dx$$

généralement on dit que la famille de polynômes $(P_i)_{i \geq 0}$ est une famille de polynômes orthogonaux sur I au poids w si le degré de P_i est i pour tout entier i et

$$\langle P_i, P_j \rangle_w = 0, \quad i \neq j$$

la famille $(P_i)_{i \geq 0}$ est orthogonale si

$$\langle P_i, P_j \rangle_w = \begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

3.3 Formule de d'Olinde Rodrigues

La formule d'Olinde Rodrigues est une formule simple, permettant de calculer directement une suite de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans polynômes orthogonaux classiques en fonction de la fonction poids w et du polynôme Q

$$P_n(x) = \frac{1}{w} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (Q^n w).$$

3.4 Polynômes orthogonaux classiques

Les polynômes orthogonaux classiques qui constituent la classe la plus importante des polynômes orthogonaux. Selon les valeurs des bornes d'intégrations de l'intervalle I et selon l'expression de la mesure de densité w , le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt conduit à diverses familles de polynômes orthogonaux. On a titre d'exemples et de références le tableau qui définit les polynômes orthogonaux classiques les plus utilisés en pratique.

Tableau des polynômes classiques

$I = (a, b)$	$w(x)$	polynômes	type
$(-1, 1)$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ avec $\alpha, \beta > -1$	$J_n^{(\alpha, \beta)}$	Jacobi
$(-1, 1)$	1 avec $\alpha = \beta = 0$	$\ell_n(x) = J_n^{(0,0)}$	Legendre
$(-1, 1)$	$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ avec $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$	$T_n(x) = J_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}$	Tchébychev
$(-1, 1)$	$(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$	$C_n^\lambda(x) = J_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}$	Gegenbauer
$(0, +\infty)$	$x^\alpha \exp(-x)$ avec $\alpha > -1$	$L_n^\alpha(x)$	Laguerre
$(-\infty, +\infty)$	$\exp(-x^2)$	$H_n(x)$	Hermite

3.4.1 Polynômes de Jacobi

Intervalle fondamental: $[-1, 1]$

Mesure : $d\mu(x) = (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx$, $\alpha, \beta > -1$

Normalisation standard (si $\alpha \neq 0$)

$$P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{\Gamma(n+1+\alpha)}{n! \Gamma(1+\alpha)}$$

Carré de la norme du polynôme normalisé :

$$\frac{\pi 2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n+1+\alpha) \Gamma(n+1+\beta)}{n! (2n+\alpha+\beta+1) \Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

3.4.2 Polynômes de Legendre

La famille des polynômes de Legendre est caractérisée par l'une des trois présentations suivantes

1. Les polynômes de Legendre $\ell_n(x)$ sont donnés par la fonction génératrice

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1-2x+t^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n(x) t^n$$

2. Les polynômes de Legendre $\ell_n(x)$ sont définies par formule d'Olinde Rodrigues

$$\ell_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d(x)^n} ((x^2-1)^n)$$

3. La suite des polynômes de Legendre $(\ell_n(x))_{n \geq 0}$ vérifie la relation de récurrence

$$\ell_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)}{(n+1)}x\ell_n(x) - \frac{n}{(n+1)}\ell_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

$$\ell_0(x) = 1, \quad \ell_1(x) = x$$

La famille $(\ell_n(x))_{n \geq 0}$ est orthogonale dans $L^2([-1, 1])$

4. l'intervalle où ils sont définis est $[-1, 1]$
5. toutes racines sont réelles
6. toutes racines sont réelles dans $[-1, 1]$

3.4.3 Polynomes de Tchébychev

La famille des polynômes de Tchébychev est caractérisée par l'une des trois présentations suivantes

1. Les polynômes de Tchébychev $T_n(x)$ sont donnés par la fonction génératrice

$$\varphi(x, t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)t^n$$

2. Les polynômes de Tchébychev $T_n(x)$ sont définis par formule d'Olinde Rodrigues

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n 2^{2n-1} (n-1)!}{(2n)!} \sqrt{1-x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left((1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} \right)$$

3. La suite des polynômes de Tchébychev $T_n(x)_{n \geq 0}$ vérifie la relation de récurrence

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$

aussi est une base orthonormée sur $L^2\left([-1, 1], (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx\right)$, et vérifie la relation

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

3.4.4 Polynômes de Laguerre

La famille des polynômes de Laguerre généralisée est caractérisée par l'une des trois présentations suivantes.

1. La suite des polynômes de Laguerre généralisée $L_n^\alpha(x)$ est donnée par la fonction génératrice

$$\varphi_\alpha(x, t) = \frac{1}{(x-t)^{\alpha+1}} \exp\left(\frac{-xt}{1-t}\right)$$

avec

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (\alpha+n)!}{k! (n-k)! (\alpha+k)!} x^k$$

Si $\alpha = 0$ on a $L_n^0(x) = L_n(x)$ avec $L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} C_n^k x^k$. Cette suite $L_n(x)$ des polynômes de Laguerre est une base orthonormée dans $L^2([0, +\infty])$. Par conséquent

$$\langle L_n, L_m \rangle = 0 \text{ et } \|L_n\|_{L^2([0, +\infty])} = 1$$

2. Les polynômes $L_n^\alpha(x)$ sont définies par formule d'Olinde Rodrigues

$$L_n^\alpha(x) = \frac{x^{-\alpha} e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\alpha} e^{-x})$$

3. La suite des polynômes de Laguerre généralisée vérifie la relation de récurrence.

$$L_{n+1}^\alpha(x) - (2n + \alpha + 1 - x) L_n^\alpha(x) + n(n + \alpha) L_{n-1}^\alpha(x) = 0$$

3.4.5 Polynômes d'Hermite

La famille des polynômes d'Hermite est caractérisée par l'une des trois présentations suivantes :

1. Les polynômes d'Hermite $H_n(x)$ sont donnés par la fonction génératrice.

$$\varphi(x, t) = e^{-2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) t^n$$

2. Les polynômes d'Hermite $H_n(x)$ sont définis par formule d'Olinde Rodrigues

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} \left(e^{-x^2} \right)$$

3. La suite des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n \geq 1}$ vérifie la relation de récurrence

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \quad n \geq 1$$

$$H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x$$

La suite des polynômes d'Hermite $(H_n)_{n \geq 1}$ est orthogonale dans $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$

4. La famille $\left(\tilde{H}_n(x) \right)_{n \geq 0}$ des polynômes d'Hermite $\tilde{H}_n(x) = H_n(x)/2^n n! \sqrt{\pi}$ est une base orthonormée dans $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2} dx)$,

3.5 Les 10 premiers de legendre de polynômes :

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = x$$

$$L_2(x) = (3x^2 - 1)/2$$

$$L_3(x) = (5x^3 - 3x)/2$$

$$L_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8$$

$$L_5(x) = (63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$$

$$L_6(x) = (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5)/16$$

$$L_7(x) = (429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x)/16$$

$$L_8(x) = (6435x^8 - 12012x^6 + 6930x^4 - 1260x^2 + 35)/128$$

$$L_9(x) = (12155x^9 - 25740x^7 + 18018x^5 - 4620x^3 + 315x)/1288$$

Chapitre 4

Méthodes Pseudo-spectrales

4.1 Introduction

Les méthodes spectrales sont des méthodes d'approximations globales des fonctions solutions d'équations différentielles et équations intégrales.

Pour les fonctions périodiques on utilise les séries de fourier et pour les fonctions non périodiques on utilise les polynômes orthogonaux

- Les polynômes de jacobi, Legendre et Tchebychev sont définis dans $[-1, 1]$
- Les polynômes d'Hermite et les fonctions sinc dans $]-\infty, \infty[$.
- Les polynômes de lagurre sont utiles dans $[0, +\infty]$

En général l'approximation spectrale est de la forme :

$$f_N(x) = \sum_{i=0}^n a_i P_i(x), \quad x \in [a, b]$$

où $P_n(x)$ sont des les polynômes orthogonaux et a_n sont des coefficients à déterminés.

Une méthode spectrale est caractérisée par une manière spécifique pour déterminer ces coefficients. Pour la détermination des coefficients d'approximations par les méthodes spectreales, il y a en générale trois techniques basées sur les méthodes d'approximation qui sont : la méthode d'approximation pseudo-spectrale (**méthde de collocation**).

4.2 Les méthodes pseudo spectrales

L'idée de ces méthodes est de chercher une solution approchée sous forme d'un développement sur une certaine famille de fonctions (par exemple les polynômes orthogonaux). On peut par exemple écrire la solution approchée sous la forme, :

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i P_n(x)$$

où les P_n sont des fonction polynômiales, orthogonaux en particulier..

Les méthodes spectrales sont généralement basées sur la représentation d'une fonction réelle, continue, "régulière (smooth)", $f(x)$, sur un intervalle non nécessairement lié à une extension dans un ensemble orthonormal de fonctions, $P_n(x)$ C'est,

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i P_i(x), \quad x \in [a, b]$$

où les polynômes sont orthonormés,

$$\int_a^b w(x) P_n(x) P_m(x) dx = \delta_{nm},$$

en ce qui concerne une fonction de pondération appropriée, $w(x)$, et le delta δ_{nm} de Kronecker est défini par,

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

Le terme "pseudo spectral" fait référence à la solution des équations définition sur une grille de points discrets, $\{x_i\}$, et à la solution, $f(x_i)$, déterminée aux points de la grille. C'est souvent une méthode de collocation Les fonctions de base orthogonales classiques sont :

$[a, b]$	$\omega(x)$	Name	Symbol
$[-1, 1]$	1	Legendre	$P_n(x)$
$[-1, 1]$	$1/\sqrt{1-x^2}$	Chebyshev	$T_n(x)$
$[-1, 1]$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	Jacobi	$P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$
$]-\infty, \infty[$	e^{-x^2}	Hermite	$H_n(x)$
$]-\infty, \infty[$	1	Hermite	$h_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x)$
$]0, \infty[$	$x^\alpha e^{-x}$	Laguerre	$L_n^{(\alpha)}(x)$

4.3 Application des méthodes pseudospectrales

Considérons l'équation intégrale de Fredholm du second type

$$f(x) = \int_a^b k(x, t) f(t) dt + g(x) \quad a < x < b \quad (4.1)$$

où $k(x, t)$, $g(x)$ sont des fonction connues, mais $f(t)$ est une fonction inconnue,
si on définit

$$\begin{aligned} K &: X \rightarrow X, \\ Kf &= \int_a^b k(x, t) f(t) dt, \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire l'équation (4.1) sous la forme de

$$(I - K) f = g$$

Théoreme 17 *Soit X un espace normé, $K : X \rightarrow X$ un compact et $I - K$ soit injectif. Puis inverseur*

$$(I - K)^{-1} : X \rightarrow X \text{ existe et est borundé}$$

Preuve. voir [1] ■

En observant le théorème précédent, nous concluons l'unicité de la solution de l'équation intégrale de Fredholm du second type.

Dans les méthodes de projection telles que la méthode de collocation pour résoudre Eq. (4.1), nous supposons que $X_n \subset X$ et $\{\varphi_i\}_i = 1, \dots, n$, et sont des fonctions de base pour X_n . par cette hypothèse, nous essayons de résoudre l'équation intégrale du second type dans un espace composé d'éléments finis, est $X.L_2[a, b]$ et X_n est un espace construit par les polynômes de Legendre.

4.3.1 Discrétisation de l'équation intégrale

Dans cette section, nous voulons discretiser Eq (4.1) et convertir cette équation méthodes pseudospectrales en un système d'équations linéaires. Pour ce résultat, nous avons choisi la méthode de collocation comme méthode de projection. Dans ce processus, nous avons besoin de quelques fonctions de base pour définir la solution de l'équation intégrale. Nous choisissons donc comme fonction de base les polynômes qui sont définis comme suit.

Les polynômes de Legendre $L_n(t)$ sur l'intervalle $[-1, 1]$ sont donnés par la formule récursive suivante :

$$\begin{aligned} L_0(t) &= 1; \\ L_1(t) &= t \\ (n+1)L_{n+1}(t) &= (2n+1)tL_n(t) - nL_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Proposition 18 Soit $x(t) \in H^k(-1, 1)$ (espace de Sobolev), $P_n(x(t)) = \sum_{i=1}^n a_i L_i(t)$ est la meilleure approximation polynômiale de $x(t)$ en norme L_2

$$\|x(t) - P_n(x(t))\|_{L_2[-1,1]} \leq C_0 n^{-k} \|x(t)\|_{H^k(-1,1)}$$

où C_0 est une constante positive, qui dépend de la norme sélectionnée et est indépendante de $x(t)$ et n

Preuve. voir [2] ■

Maintenant, nous estimons la fonction inconnue $f(t)$ comme une forme de

$$f(t) \approx P_n(f(t)) = \sum_{i=1}^n a_i L_i(t),$$

en substituant cela dans l'équation intégrale, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^n a_i L_i(x) = \int_a^b k(x, t) \sum_{i=0}^n a_i L_i(t) dt + g(x),$$

donc nous définissons l'équation résiduelle comme ;

$$R_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i L_i(x) - \int_a^b k(x, t) \sum_{i=0}^n a_i L_i(t) dt - g(x)$$

Pour déterminer les coefficients inconnus de a_i , nous sélectionnons des points de collocation qui ;

$$R_n(x_j) = 0, \quad j = 0, \dots, n,$$

les points de collocation sont.

$$x_j = a + \frac{j(b-a)}{n}, \quad j = 0, \dots, n$$

de sorte que nous avons un système d'équations linéaires $A_n X = b_n$ où,

$$A_n = \left(L_i(x_j) - \int_a^b k(x_j, t) L_i(t) dt \right)_{j=0, \dots, n}, \quad i = 0, \dots, n$$

$$b_n = (g(x_j)), \quad j = 0, \dots, n$$

$$X^T = (a_i)_{i=0, \dots, n}$$

on a le système linéaire $A_n X = b_n$ donc

$$\sum_{i=0}^n a_i L_i(x_j) - \int_{-1}^1 k(x_j, t) \sum_{i=0}^n a_i L_i(t) dt - g(x_j) = 0$$

et

$$x_j = a + \frac{j(b-a)}{n}, \quad j = 0, \dots, n$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_n) \end{pmatrix}$$

tel que

$$A_{ij} = L_i(x_j) - \int_{-1}^1 k(x_j, t) L_i(t) dt$$

où $i, j = 0, \dots, n$.

4.3.2 Condition de convergence

Théoreme 19 *Supposons que $K : H \rightarrow H$ soit un opérateur borné dans un espace H à Hilbert, $K = \int_a^b k(x, t) dt$ et supposons que $I - K : H \rightarrow H$ est un à un et continue.*

$$\|K - P_n K\| \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty,$$

Preuve. voir [3] ■

En ce qui concerne Proposition 1, nous concluons que le taux d'approximation des polynômes de Legendre est n^{-k} , le théorème indique également que $\|x - x_n\|$ converge vers zéro exactement à la même vitesse que $\|x - P_n(x)\|$

4.4 Exemples numériques

Dans cette section, nous montrons l'exactitude de la méthode présentée pour résoudre l'équation intégrale de Fredholm du second type, de sorte que nous donnions quelques exemples de l'équation intégrale (4.1). Dans tous les exemples, nous utilisons les relations indiquées à la section 2 pour convertir l'équation intégrale en système d'équations linéaires. Les résultats numériques sont présentés dans les figures pour illustrer l'efficacité de cette méthode. (Sur toutes les figures, la ligne continue représente la solution exacte et la ligne pointillée la solution numérique.

Exemple 20 *Dans cet exemple, nous résolvons l'équation. (4.1) avec $a = -1, b = 1$ et*

$$k(x, t) = \sin(2\pi x + \pi t) + \cos(3xt) + \frac{xt^2}{3}$$

$$g(x) = -\frac{x}{3\pi^2} + \cos(2\pi x) + \frac{6s \sin(3x)}{4\pi^2 - 9x^2}$$

où la solution exacte est $f(t) = \cos(2\pi t)$ et les résultats sont montrés aux figures.1 et 2.

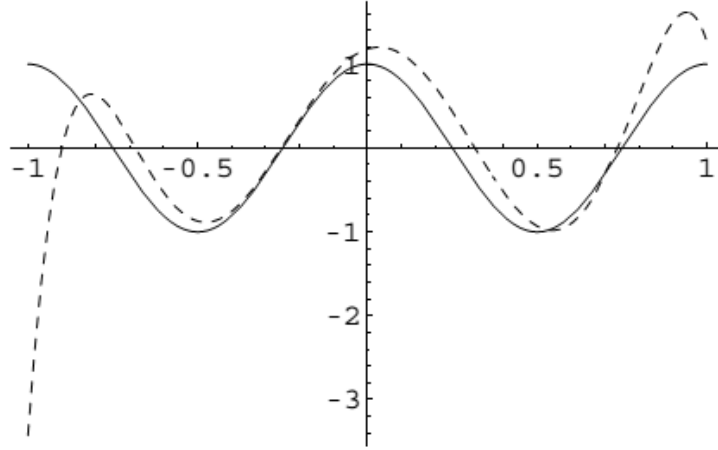


Fig 1. Résultat si $n = 7$ de degré du polynôme (n)

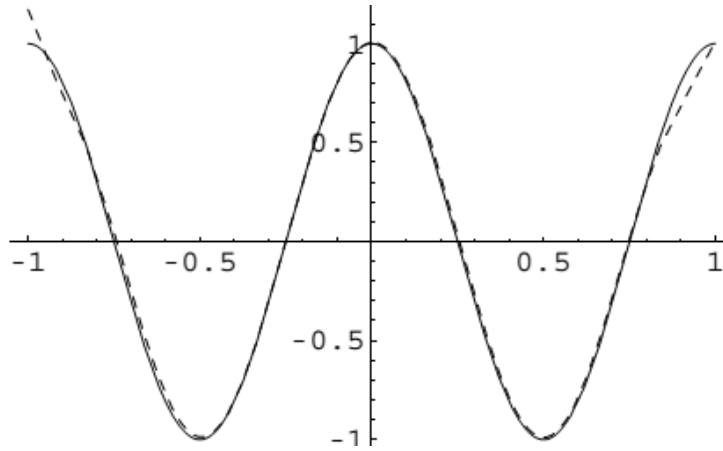


Fig.2. Résultat si $n = 9$ de degré du polynôme (n)

Exemple 21 Dans cet exemple, on résolvons l'équation (4.1) avec $a = -1$, $b = 1$ et

$$k(s, t) = \frac{(x-t)^3}{x^2(1+t^2)},$$

$$g(s) = \sqrt{1+x^2} - \frac{3(\sqrt{2}-\arcsin h(1))}{s} - 2x \arcsin h(1),$$

où la solution exacte est $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ et les résultats sont illustrés aux figures 3 et 4.

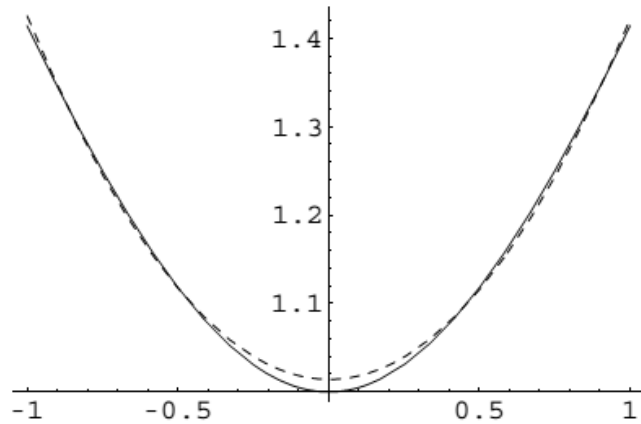


Fig.3. Résultat si $n = 3$. de degré du polynôme (n)

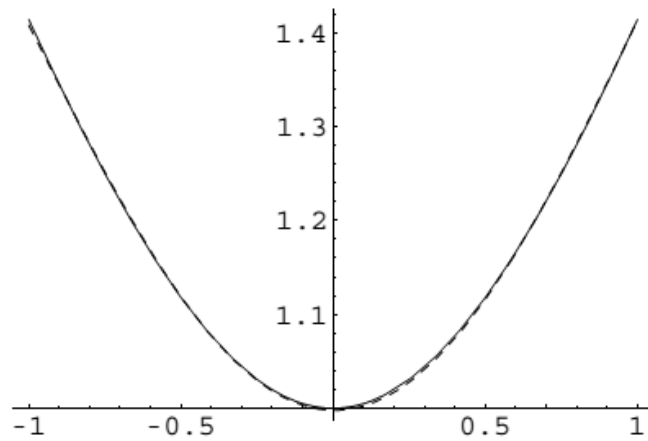


Fig.4. Résultat si $n = 3$. de degré du polynôme (n)

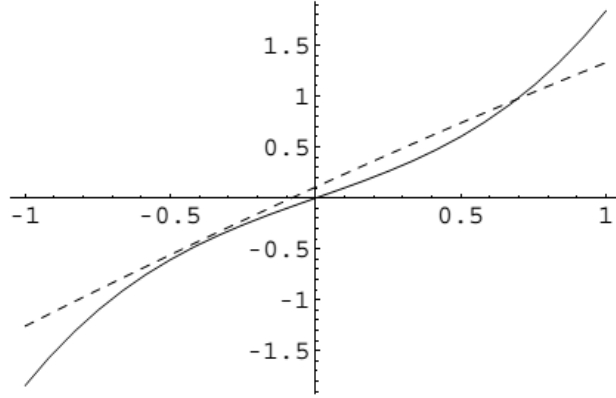


Fig.5. Résultat si $n = 5$ de degré du polynôme (n)

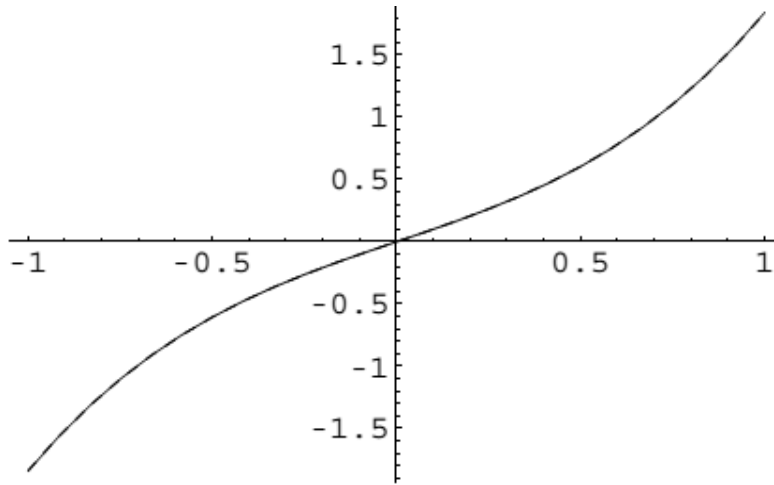


Fig.6. Résultat si $n = 5$ de degré du polynôme (n)

Exemple 22 Dans l'exemple, nous résolvons l'équation (4.1) avec $a = -1$, $b = 1$ et

$$k(x, t) = \tan(s + t^2) - \frac{t}{2} \cos(t - x),$$

$$g(x) = x^3 + \frac{7}{20} \cos(s) + \sin(x),$$

où la solution exacte est $f(t) = t^3 + \sin(t)$ et les résultats sont présentés aux figures 5 et 6

Bibliographie

- [1] R. Kress, "Linear Integral Equations", Springer-Verlag, New York, 1998.
- [2] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, "Spectral Methods on Fluid Dynamics", Springer-Verlag, 1988.
- [3] Kendall E. Atkinson, "The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind", Cambridge University Press, 1997.
- [4] Bengt Fornberg, "Pseudo spectral methods", Cambridge, University, Press 1996.
- [5] Moshe shalit "functional Analysis" toylor & Froncis, 2016

Abstract

The main purpose of this thesis is to provide a numerical approach for Fredholm integral equation of the second kind.

A Legendre pseudo spectral method is proposed to solve numerical this equation. Numerical example to illustrate this method a is presented.

Key words: Fredholm integral equations, pseudo spectral method, Legendre polynomials, Hilbert space.

Résumé

Le but de ce mémoire, est de présenter une approche numérique pour la résolution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espace.

Cette méthode pseudo spectrale est basée sur les polynômes de Legendre est proposée pour un traitement numérique pour cette équation.

Des exemples numériques sont donnés pour illustration.

Mots clés: Equation intégrale de Fredholm, Méthode pseudo spectrale, Polynôme de Legendre, Espace de Hilbert

ملخص

هدف من هذه المذكرة هو دارست خواص الطريقة الطيفية و شبه الطيفية. وقمنا باستعمالها في تقريب حل معادلة فريدهولم بطريقة التجميع في كثير حدود لوجا ندر .

الكلمات المفتاح: الطريقة الطيفية, كثيرات حدود لوجاندر, معادلة فريد هولم