

Module sur Anneau Principal

Rakdi Mohamed Anour

16 mai 2017

Remerciements

Avant tout je remercie **Allah**, le tout puissant d'avoir, éclaire notre vie, renforce notre courage et notre volenté pour finie ce travail.

Je tiens à remercier particulièrement ma directeur de thèse Monsieur **Ladjlat Lahcen** , pour toute l'aide qu'il m'a apporté et leur patience leurs conseils et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intéret.

Je tiens à remercier aussi Monsieur **Benhamidouche Nour eddine**, d'avoir accepté de présider mon mémoire.

Je tiens à remercier madame **Bounab Noura**, pour avoir accepté d'examiner mon mémoire.

Mes remerciements s'adressent à tout les enseignants du département de mathématique pour leurs dévouement et leurs générosité.

Je tiens ici à exprimer mes sentiments respectueux à mes chers parents à qui je dédie ce travail pour leur grand soutien.

Un grand merci à ma famille, à mes proches et à mes collègues en particulier Benhamida Kholud, Berka Karima, Ben Adel Zanabe et pour leurs encouragements et pour leurs amitiés.loin

Table des matières

Introduction	1
1 Algèbre extérieure	2
1.1 Produit tensoriel	2
1.1.1 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels	2
1.1.2 Algèbre tensorielle	3
1.2 Algèbre extérieure	3
1.3 Le produit extérieur	5
1.3.1 Définition et propriétés de base	5
1.3.2 Formes alternées	9
1.4 L'action gauche	10
1.4.1 Support et rang	10
1.4.2 Vecteur décomposable	10
1.4.3 Groupe d'automorphismes	12
1.4.4 Invariant numérique $d_1(\omega)$	12
1.4.5 Vecteur divisible	12
1.4.6 Parties stables	13
1.4.7 Eléments scindables	17
1.4.8 Suite exacte	18
2 Classification des bivecteurs	19
2.1 Classification	19
2.2 Groupe symplectique	21
2.3 Propriétés des formes bilinéaires alternées	21
3 Classification des trivecteurs	30
3.1 Classification des trivecteurs en dimension inférieure à 6	30
3.2 Classification des trivecteurs en dimension 6	30
3.3 Classification des trivecteurs en dimension 7	31
3.4 Classification des trivecteurs en dimension 8	31
3.5 Groupe d'automorphismes	32
3.5.1 Groupe d'automorphismes des trivecteur inférieur à 6	32
3.5.2 Groupe d'automorphismes des trivecteur de rang 6	33

3.5.3	Groupe d'automorphismes des trivecteur de rang 7	33
3.5.4	Groupe d'automorphismes des trivecteur de rang 8	34
	Conclusion	45
	Bibliographie	45

Introduction

L'une des applications de la théorie des groupe est liée au problème de classification. La classification des trivecteurs est l'étude de l'action du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\wedge^3 E$. Comme $\wedge^3 E^* \simeq (\wedge^3 E)^*$ on parle indifféremment des formes trilinéaire alternées et des trivecteurs.

Pour classifier les trivecteurs, il est nécessaire de déterminer leurs groupes d'automorphisme.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'étude des formes trilinéaires alternées (*trivecteurs*).

Ce travail est composé de trois chapitres.

Dans le premier chapitre, on donne des généralités où apparaissent les notions du produit tensoriel, le produit extérieur, scindabilité, groupe d'automorphisme.

Au deuxiem chapitre, nous rappelons le principal résultat connu sur la classification des bivecteurs, ainsi que des propriétés sur les formes bilinéaires alternées.

Le troisième chapitre contient la classification des trivecteurs en dimension ≤ 8 .

On détermine les groupes d'automorphisme des trivecteurs de rang ≤ 8 .

Chapitre 1

Algèbre extérieure

1.1 Produit tensoriel

1.1.1 Produit tensoriel de deux espaces vectoriels

Soient E, F deux espaces vectoriels sur k .

Théorème 1.1

1. Il existe un espace vectoriel sur k , noté $E \otimes F$ qui se lit E tenseur F , et une application bilinéaire $j \in \beta(E, F ; E \otimes F)$ tels que, pour tout espace vectoriel G et toute application bilinéaire $b \in \beta(E, F ; G)$ il existe une unique application linéaire $c : E \otimes F \longrightarrow G$ telle que $b = c \circ j$.

$$\begin{array}{ccc} E \times F & & \\ j \downarrow & \searrow^b & \\ E \otimes F & \xrightarrow{\exists! c} & G \end{array}$$

2. Le couple $(E \otimes F, j)$ est unique à unique isomorphisme près. Ce qui signifie que si $(E \otimes F, j)$ et $((E \otimes F)', j')$ sont deux solutions de 1), il existe un unique isomorphisme $I : E \otimes F \longrightarrow (E \otimes F)'$ tel que $j' = I \circ j$.

Pour résumer, l'ensemble des applications bilinéaires de $E \times F$ dans G , s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de $E \otimes F$ dans G

$$\begin{aligned} \beta(E, F ; G) &\simeq (E \otimes F ; G) \\ b &\longrightarrow c \end{aligned}$$

et cette propriété caractérise $E \otimes F$.

1.1.2 Algèbre tensorielle

On pose $T^0(E) = k$, $T^1(E) = E$ et pour $p > 1$, $T^p(E) = \underbrace{E \otimes E \otimes \dots \otimes E}_{p\text{-fois}}$.

Définition 1.1

On appelle algèbre tensorielle de E que l'on note

$$T^*(E) = \bigotimes_{p \geq 0} T^p(E).$$

Le produit évident $T^p(E) \times T^q(E) \longrightarrow T^{p+q}(E)$ qui associe à

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p, \text{ et } y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_q \longrightarrow x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_q$$

en fait une algèbre (non commutative). (Se rappeler que $k \otimes E = E$).

1.2 Algèbre extérieure

Définition 1.2

On note $\wedge^p E$ le quotient de $T^p(E)$ par le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p$ où $x_i = x_j$ pour 2 indices $i \neq j$. On appelle $\wedge^p E$ la puissance extérieure p -ième de E .

On note $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$ la classe dans ce quotient de l'élément $x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p$. Cet élément se lit x_1 extérieur x_2 extérieur x_3 extérieur ... extérieur x_p .

On note $\wedge^*(E) = \bigoplus_{p \geq 0} \wedge^p E = k \oplus E \oplus \wedge^2 E \oplus \dots$

Le produit $T^p(E) \times T^q(E) \longrightarrow T^{p+q}(E)$ passe évidemment au quotient et induit un produit dit "produit extérieur" $\wedge : \wedge^p E \times \wedge^q E \longrightarrow \wedge^{p+q} E$.

Remarque 1.1

La puissance extérieure $\wedge^p E$ est définissable d'une manière analogue au produit tensoriel.

On appelle forme p -linéaire alternée sur E , à valeur dans F une application p -linéaire $E^p \longrightarrow F$, nulle chaque fois que deux vecteurs sont égaux.

Pour toute application p -linéaire alternée $\rho : E^p \longrightarrow F$. Il existe une unique application linéaire $f : \wedge^p E \longrightarrow F$ telle que

$$\begin{array}{ccc} E^p & & \\ c \downarrow & \searrow \rho & \\ \wedge^p E & \xrightarrow{f} & F \end{array} \quad \rho = f \circ c$$

où c est l'application p -linéaire alternée définie par $c(x_1, \dots, x_p) = x_1 \wedge \dots \wedge x_p$.

Proposition 1.1

Soient $X \in \wedge^p E$ et $Y \in \wedge^q E$. On a

$$X \wedge Y = (-1)^{pq} Y \wedge X \in \wedge^{p+q}(E).$$

Preuve.

puisque les éléments de la forme $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ et $y_1 \wedge \dots \wedge y_q$ engendrent respectivement $\wedge^p(E)$ et $\wedge^q(E)$ il suffit de montrer la formule pour ceux-ci.

En fait dans $\wedge^2(E)$ on a $x \wedge y = -y \wedge x$ puisque

$$\begin{aligned} (x + y) \wedge (x + y) &= 0 = x \wedge x + y \wedge y + x \wedge y + y \wedge x \\ &= 0 + 0 + x \wedge y + y \wedge x. \end{aligned}$$

La formule en découle. ■

Corollaire 1.1

Si $\dim E = n$. Soit $e_1 \dots e_n$ une base de E . Les C_n^p éléments $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ où $i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ forment une base de $\wedge^p E$. En particulier la dimension de $\wedge^p E$ est C_n^p .

Le produit extérieur $\wedge : \wedge^* E \times \wedge^* E \longrightarrow \wedge^* E$ fait de $\wedge^* E$ une algèbre. On exprime la proposition 1.1 en disant que c'est une algèbre commutative au sens gradué.

1.3 Le produit extérieur

Le produit extérieur a des applications dans toutes les branches des mathématiques. Par exemple en géométrie différentielle.

1.3.1 Définition et propriétés de base

Soit E est un espace vectoriel sur un corps K .

Définition 1.3

une application r -linéaire $f : E^r \longrightarrow F$ est dite alternée si $f(x_1, \dots, x_r) = 0$ dès que $x_i = x_j$, pour un couple d'indices $i \neq j$.

Soit a_r le sous-espace du produit tensoriel $T^r(E)$, engendré par tous les éléments de type

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_r,$$

avec $x_i = x_j$ pour une paire $i \neq j$. On pose

$$\bigwedge^r(E) = T^r(E)/a_r.$$

On obtient ainsi une application r -linéaire $E^r \longrightarrow \bigwedge^r(E)$ (dite canonique), par la composition

$$E^r \longrightarrow T^r(E) \longrightarrow T^r(E)/a_r = \bigwedge^r(E).$$

Il est clair que l'application est alternée. De plus, elle est universelle pour les applications r -linéaires alternées sur E . Autrement dit, si $f : E^r \longrightarrow F$ est une telle application, il existe une unique application linéaire $f_* : \bigwedge^r(E) \longrightarrow F$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^r(E) & & \\ \uparrow & \searrow^{f_*} & \\ E^r & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

L'application f_* existe car on peut d'abord trouver une application $T^r(E) \longrightarrow F$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T^r(E) & & \\ \uparrow & \searrow & \\ E^r & \xrightarrow{f} & F \end{array}$$

Cette application s'annule sur a_r , induisant ainsi f_* .

L'image d'un élément $(x_1, \dots, x_r) \in E^r$ par l'application canonique dans $\bigwedge^r(E)$ sera notée $x_1 \wedge \dots \wedge x_r$. C'est aussi l'image de $x_1 \otimes \dots \otimes x_r$ pour la projection canonique $T^r(E) \longrightarrow \bigwedge^r(E)$.

On utilise le symbole \wedge pour noter aussi le produit dans $\bigwedge(E)$. Ce produit est appelé produit extérieur (ou produit alterné). Si $x, y \in E$, alors $x \wedge y = -y \wedge x$, comme on le voit en développant $(x + y) \wedge (x + y) = 0$.

Pour chaque application linéaire $f : E \longrightarrow F$, on obtient une application

$$\bigwedge(f) : \bigwedge(E) \longrightarrow \bigwedge(F),$$

telle que, pour $x_1, \dots, x_r \in E$,

$$\bigwedge(f)(x_1 \wedge \dots \wedge x_r) = f(x_1) \wedge \dots \wedge f(x_r)$$

De plus, $\bigwedge(E)$ est un homomorphisme de R -algèbres.

Proposition 1.2

Soit E un espace vectoriel de dimension n sur K . Si $r > n$, alors $\bigwedge^r(E) = 0$. Soit (v_1, \dots, v_n) une base de E sur K . Si $1 \leq r \leq n$, alors $\bigwedge^r(E)$ est libre sur K et les éléments

$$v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r}, \text{ avec } i_1 < \dots < i_r$$

forment une base de $\bigwedge^r(E)$ sur K . On a

$$\dim_K \bigwedge^r(E) = \binom{n}{r}.$$

Preuve.

On va d'abord donner la preuve pour le cas $r = n$. Tout élément de E s'écrit sous la forme $\sum a_i v_i$; à l'aide de la formule $x \wedge y = -y \wedge x$, on voit que $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ engendre $\bigwedge^n(E)$. En ailleurs, la théorie des déterminants montre que, pour $a \in K$, il existe une unique forme multilinéaire alternée f_a sur E telle que

$$f_a(v_1, \dots, v_n) = a.$$

Par suit, il existe une unique application linéaire

$$\bigwedge^n(E) \longrightarrow K$$

prenant la valeur a sur $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$. On en déduit que $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$ est une base de

$\bigwedge^n(E)$ sur K .

Considérons maintenant le cas général $1 \leq r \leq n$. Supposons que

$$0 = \sum a_{(i)} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_r},$$

avec $i_1 < \dots < i_r$ et $a_{(i)} \in K$. Soit $(j) = (j_1, \dots, j_r)$ (avec $j_1 < \dots < j_r$) un r -uplet

correspondant à un terme de la somme et soient j_{r+1}, \dots, j_n les indices n'apparaissant pas parmi les j_1, \dots, j_r . On forme le produit extérieur avec $v_{j_{r+1}} \wedge \dots \wedge v_{j_n}$. Tous les termes sauf le (j) -ième s'annulent, car ils contiennent des facteurs identiques. On obtient ainsi

$$0 = a_{(j)} v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_r} \wedge \dots \wedge v_{j_n}.$$

En permutant $v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_n}$ en $v_1 \wedge \dots \wedge v_n$, on ne fait que changer le signe de l'expression de droit. D'après le résultat démontré pour le cas $r = n$, on déduit que $a_{(j)} = 0$ et on ainsi la démonstration pour $1 \leq r \leq n$. Pour $r = 0$, on a un produit vide et 1 est une base de $\bigwedge^0 = K$ sur K . Le cas $r > n$ est trivial.

L'assertion sur la dimension est conséquence de la bijection entre l'ensemble des éléments de la base et les sous-ensembles de $\{1, \dots, n\}$. ■

On exprime le dual de $\wedge^p(E)$ au moyen de E^* . En effet :

Etant donné p formes linéaires $f_1, f_2, \dots, f_p \in E^*$ et p éléments $x_1, x_2, \dots, x_p \in E$.

Formons d'abord la matrice A de type (p, p) qui a pour termes $A_{i,j} = f_i(x_j)$.

On sait que tout déterminant est une fonction multilinéaire alternée de ces lignes et de ces colonnes, par suite, étant donnée une liste f de formes linéaires, $|A|$ est une fonction p -linéaire alternée de x_1, x_2, \dots, x_p .

Puisque $(x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$ est une application universelle de ce type, il existe une application linéaire $t(f_1, f_2, \dots, f_p) : \wedge^p(E) \longrightarrow K$ telle que :

$$[t(f_1, f_2, \dots, f_p)](x_1, x_2, \dots, x_p) = |A| ; A_{i,j} = f_i(x_j).$$

Chaque $t(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est donc un élément de $[\wedge^p(E)]^*$.

Puisque le déterminant $|A|$ est une fonction multilinéaire alternée de ces lignes, l'application $(f_1, f_2, \dots, f_p) \mapsto t(f_1, f_2, \dots, f_p)$ est alternée multilinéaire.

Comme $(f_1, f_2, \dots, f_p) \mapsto f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p \in \wedge^p(E^*)$ est universelle, il existe une application linéaire $\Psi : \wedge^p(E^*) \longrightarrow [\wedge^p(E)]^*$ telle que :

$$\Psi(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p) = t(f_1, f_2, \dots, f_p) \text{ c-à-d}$$

$$\Psi(f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_p)(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p) = |A| \quad (1)$$

A ayant pour termes $A_{i,j} = f_i(x_j)$ pour $i, j \in p$.

Théorème 1.2

Si E un espace vectoriel de dimension finie n , sur un corps commutatif K alors pour tout entier naturel p l'application linéaire Ψ de (1) est un isomorphisme.

$$\Psi : \wedge^p(E^*) \cong [\wedge^p(E)]^* \quad (2).$$

Preuve.

Prenons une base x_1, x_2, \dots, x_p de E et la base duale f_1, f_2, \dots, f_p de E^* ; on a donc $f_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j \in n$. $\wedge^p(E^*)$ a alors pour base l'ensemble des $f_n = f_{n_1} \wedge f_{n_2} \wedge \dots \wedge f_{n_p}$, pour toutes les listes strictement croissantes $h : p \mapsto n$, tandis que $\wedge^p(E)$ a pour base l'ensemble des $x_k = x_{k_1} \wedge x_{k_2} \wedge \dots \wedge x_{k_p}$. Pour toutes les listes strictement croissantes $k : n \mapsto p$, $[\Psi f_n](x_k) = |A|$; A étant la matrice (p, p) qui a pour termes $A_{i,j} = f_{ki}(x_{kj})$. Etant donné un indice-ligne i de cette matrice, $f_{ni}(x_{kj})$ est nul sauf si $k_j = h_i$. Il y a donc une ligne de A qui s'annule à moins que chaque h_i ne soit pas égal à un k_j ; cela ne peut se produire que si les deux listes croissantes sont égales : $k = h$. Dans ce cas, A est la matrice unité du type (p, p) , qui a pour déterminant 1. Par suite $[\Psi f_n](x_k)$ est égal à zéro ou un, suivant que $h \neq k$ ou $h = k$. Cela établit que les éléments Ψf_n forment une base de $[\wedge^p(E)]^*$ duale de la base x_k de $\wedge^p(E)$. Autrement dit, Ψ transforme une base $\wedge^p(E^*)$ en une base de $[\wedge^p(E)]^*$; c'est donc bien un isomorphisme. ■

1.3.2 Formes alternées

Les espaces vectoriels $\wedge^p(E)$ qu'on rencontre dans l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel E de dimension finie peuvent être définis d'une autre manière en utilisant les formes alternées pour tout espace vectoriel E sur le corps commutatif K l'ensemble $Alt_p(E)$ des formes p -linéaires alternées $h : E^p \rightarrow K$ est lui même un K espace vectoriel pour les opérations terme à terme habituelles.

Proposition 1.3

Pour tout espace vectoriel E sur A , toute forme linéaire $t : \wedge^p(E) \rightarrow K$ détermine une forme p -linéaire alternée $h : E^p \rightarrow K$ par l'intermédiaire de $h(x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto t(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p)$.

L'application $t \mapsto h$ est un isomorphisme.

$$[\wedge^p(E)]^* \cong \text{ALT}_p(E).$$

1.4 L'action gauche

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur un corps commutatif K . La classification des p -vecteurs est l'étude de l'action gauche du groupe linéaire $GL(E)$ sur l'espace vectoriel $\wedge^p E$ définie par : $\forall f \in GL(E), \forall \omega \in \wedge^p E, f \cdot \omega = (\wedge^p f)(\omega)$.

$\wedge^p f : \wedge^p E \longrightarrow \wedge^p E$ définie par $\wedge^p f(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p) = f(x_1) \wedge f(x_2) \wedge \dots \wedge f(x_p)$ est un endomorphisme de $\wedge^p E$.

Remarque 1.2

Du fait de l'isomorphisme $\wedge^p E^* \approx (\wedge^p E)^*$, on emploiera le langage des formes alternées ou p -vecteurs.

1.4.1 Support et rang

On appelle support de ω et on note S_ω le plus petit sous-espace F de E tel que $\omega \in \wedge^3 F$; la dimension de S_ω s'appelle le rang de ω qu'on note $d_0(\omega)$ ou $rg(\omega)$.

- Le rang est invariant par l'action du groupe linéaire $GL(E)$ et par extension des scalaires.

1.4.2 Vecteur décomposable

Un p -vecteur non nul ω est décomposable s'il existe x_1, x_2, \dots, x_p dans E tel que $\omega = x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p$. Le support de ω est le sous-espace vectoriel engendré par x_1, x_2, \dots, x_p , donc $S_\omega = \langle x_1, x_2, \dots, x_p \rangle$, dans ce cas $d_0(\omega) = \dim S_\omega = p$.

- Un trivecteur est somme de trivecteurs décomposables.

Lemme 1.1

Etant donnée qu'il existe un isomorphisme entre $\wedge^3 K^4$ et $\wedge^1 K^4$, il y a pas de trivecteurs de rang 4.

Preuve.

Mettons, d'abord en évidence l'isomorphisme entre $\wedge^3 K^4$ et $\wedge^1 K^4$

Soient une base de $\wedge^1 K^4$ donnée par $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, est une autre de $\wedge^3 K^4$ donnée par $\{\omega_1 = e_1 e_2 e_3, \omega_2 = e_2 e_3 e_4, \omega_3 = e_1 e_3 e_4, \omega_4 = e_1 e_2 e_4\}$. Et considérons f définie par:

$$f : \wedge^1 K^4 \longrightarrow \wedge^3 K^4$$

$$x = \sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i \longmapsto f(x) = f\left(\sum_{i=1}^4 \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \omega_i$$

f tel qu'elle est définie, est linéaire bijective et donc c'est un isomorphisme. Montrons qu'il n'y a pas de trivecteurs de rang 4. Du fait de l'isomorphisme f tout élément

$$\text{de } \wedge^3 K^4 \text{ s'écrit sous la forme } \omega = \sum_{i=1}^4 \alpha_i \omega_i$$

Soit ω non nul, et étudions son rang.

- Si $\omega = \alpha_i \omega_i$ $\alpha_i \neq 0$, $i \in 1, 4$, donc $rg(\omega) = rg(\omega_i) = 3$.
- Si $\omega = \alpha_i \omega_i + \alpha_j \omega_j$ $i \neq j$, $i, j \in 1, 4$, comme $\dim(S_{\omega_i} \cap S_{\omega_j}) = 2$, $\forall i \neq j$, $i, j \in 1, 4$.

Donc l'écriture de ω se ramène à un trivecteur décomposable donc $rg(\omega) = 3$.

Si $\omega = \alpha_i \omega_i + \alpha_j \omega_j + \alpha_k \omega_k$ avec $\alpha_i \neq 0$, $\alpha_j \neq 0$, $\alpha_k \neq 0$, $i \neq j \neq k$, $i, j, k \in 1, 4$.

On envisage quatre cas possibles dans l'étude du rang de chaque trivecteur est identique,

Traisons par exemple,

le cas où $\omega = \alpha_1 e_1 e_2 e_3 + \alpha_2 e_2 e_3 e_4 + \alpha_3 e_1 e_3 e_4$, avec $\alpha_i \neq 0$, $i \in 1, 3$. On peut écrire $\omega = e_3(\alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_4 e_2 + \alpha_3 e_4 e_1)$. Soit $u = \alpha_1 e_1 e_2 + \alpha_2 e_4 e_2 + \alpha_3 e_4 e_1$. Comme $y_2(u) = \frac{u^2}{2!} = 0 \implies rg(u) = 2$, $e_3 \notin S_u$ D'où $rg(\omega) = 3$

- Si $\omega = \alpha_1 e_1 e_2 e_3 + \alpha_2 e_2 e_3 e_4 + \alpha_3 e_1 e_3 e_4 + \alpha_4 e_1 e_2 e_4$, avec $\alpha_i \neq 0$, $i \in 1, 4$.

$$\omega = e_2 e_3(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4) - e_1 e_4(\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2)$$

$$\omega = \alpha_4^{-1}(\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2)e_3(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4) - \alpha_1^{-1}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4)e_4(\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2)$$

$$\omega = (\alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_2)(\alpha_4^{-1} e_3 + \alpha_1^{-1} e_4)(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_4).$$

On en déduit que $rg(\omega) = 3$ car les vecteurs qui le composent, sont linéairement indépendant. Alors dans tout les cas $rg(\omega) = 3$, ainsi il n'y a pas de trivecteurs de rang 4. ■

1.4.3 Groupe d'automorphismes

Le groupe des automorphismes de ω , $Aut(\omega)$ est le stabilisateur de ω dans l'action de $GL(E)$ c'est à dire le sous-groupe de $GL(E)$ des automorphismes de E qui laissent ω invariant :

$$Aut(\omega) = \{f \mid f \in GL(E) \text{ et } \wedge^3 f(\omega) = \omega\} = \{f \mid f \in GL(E) \text{ et } f.\omega = \omega\}.$$

-L'orbite de ω par $GL(E)$ est alors en bijection avec l'ensemble des classes à gauche $GL(E)/Aut(\omega)$.

1.4.4 Invariant numérique $d_1(\omega)$

On associe à un 3-vecteur (trivecteur) d'autre invariant numérique que son rang. Soit $G_1(E)$ l'espace projectif $IP(E)$ et considérons la projection : $P_\alpha : \wedge^3 E \longrightarrow \wedge^3(E/\alpha)$. pour $\alpha \in G_1(E)$, on appelle $\varpi(\alpha)$ l'image de ω par P_α et on pose : $d_1(\omega) = \inf_\alpha (rg \varpi(\alpha))$, $\alpha \in G_1(E)$. On a $d_0(\omega) = rg(\omega) > d_1(\omega)$, $d_1(\omega)$ est invariant par l'action de $GL(E)$.

Lemme 1.2

Soit E un espace vectoriel de dimension paire et ω un trivecteur de rang maximal alors : $d_0(\omega) \neq 0$, en particulier si $\dim E = 8$, $d_1(\omega) \neq 0$.

Preuve.

On a $d_1(\omega) = \inf_\alpha (rg \varpi(\alpha))$, où α parcourt l'espace projectif $IP(E)$ des droites de E . Si $d_1(\omega) = 0$, il existe $\alpha = Kx$, $x \neq 0$ tel que $\varpi(\alpha) = 0$. Soit E' un supplémentaire de Kx dans E : De $K = E' \oplus Kx$, résulte $\wedge^3 E \approx \wedge^3 E' \oplus (Kx \otimes \wedge^2 E')$, alors $\omega = ux + \omega'$ et $\varpi(\alpha) = 0$ signifie que ω' est nul ; de plus $S_\omega = S_u \oplus Kx = E$. Comme ω est de rang maximal, $S_u = E'$ et E' est de dimension paire ce qui contredit l'hypothèse sur la dimension de E . ■

1.4.5 Vecteur divisible

Soit ω un trivecteur non nul, ω est un trivecteur divisible s'il existe un $x \in E/\{0_E\}$ et $u \in \wedge^2 E_2$ tel que $E = Kx \oplus E_2$ et $\omega = x \wedge u$.

Proposition 1.4

ω est un vecteur divisible si et seulement si $d_1(\omega) = 0$.

Preuve.

Si $\omega = x \wedge u \implies d_1(\varpi(Kx)) = 0$.

Si $d_1(\omega) = 0 \implies \exists \alpha \in G_1/\text{rg}(\varpi(\alpha)) = 0$, d'où $\varpi(\alpha) = 0$. Donc si on prend $\alpha = Kx$ on obtient : $\omega = y \wedge u$ ce qu'il fallait montrer. ■

Remarque 1.3

Comme $d_1(\omega) \neq 0$ si ω est de rang maximal, alors on en déduit qu'il n'y a pas de trivecteur de rang 8 divisible.

1.4.6 Parties stables**Lemme 1.3**

Soit E un espace vectoriel sur le corps K et considérons la forme bilinéaire alternée par $f^x(y, z) = f(x, y, z)$ ($y, z \in E$ et f une forme trilinéaire alternée); alors l'ensemble $\overline{R}_i = \{x \in E \mid \text{rg } f^x = 2i\}$ ($0 \leq 2i \leq n$) est stable par $\text{Aut}(\omega)$.

Lemme 1.4

L'ensemble $R_i(\omega) = \{x \in E \mid \varpi(x) \text{ est de type } \omega_i\}$ une partie stable pour $\text{Aut}(\omega)$.

Preuve.

Prenons $E = \langle x \rangle \oplus E'$, alors ω s'écrit : $\omega = xu + \omega'$ avec $\omega' \in \wedge^3 E'$ ($\dim E' = n - 1$) et $\varpi(x) = \varpi'(x)$, comme $x \notin E'$ alors ϖ' est de même type que $\varpi'(x)$. D'où $\varpi(f(x)) = \overline{\wedge^3 f(\omega')f(x)}$. Comme f est une application linéaire bijective, elle transforme le trivecteur ω' à un trivecteur de même type, c'est à dire $f(\omega')$ est dans l'orbite de ω' , par suite $\varpi(f(x))$ est de type ω_i d'où $f(x) \in R_i(\omega)$ et $f(R_i(\omega)) \subset R_i(\omega)$.

■

Lemme 1.5

Soit E un espace vectoriel sur le corps K de dimension finie, V_1, V_2 deux sous espace de E différents et tel que $\dim V_1 = \dim V_2$ si f est endomorphisme de E qui laissent stable la réunion de V_1 et V_2 C-à-d ($f(V_1 \cup V_2) \subset V_1 \cup V_2$) alors on a ($f(V_1) \subset V_1$) et ($f(V_2) \subset V_2$) ou ($f(V_1) \subset V_2$ et $f(V_2) \subset V_1$).

Preuve.

Comme on a ($f(V_1) \cup f(V_2) \subset V_1 \cup V_2$) on tire :

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(V_1) \subset V_1 \cup V_2 \\ f(V_2) \subset V_1 \cup V_2 \end{cases} &\implies \begin{cases} f(V_1) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_1) \\ f(V_2) \cap (V_1 \cup V_2) = f(V_2) \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} (f(V_1) \cap V_1) \cup (f(V_1) \cap V_2) = f(V_1) & \mathbf{I} \\ (f(V_2) \cap V_1) \cup (f(V_2) \cap V_2) = f(V_2) & \mathbf{II} \end{cases} \end{aligned}$$

Or la réunion de deux sous espaces vectoriels est un sous espace vectoriel si et seulement si l'un est inclus dans l'autre ainsi :

$$(f(V_1) \cap V_1) \subset (f(V_1) \cap V_2) \text{ ou } (f(V_1) \cap V_2) \subset (f(V_1) \cap V_1)$$

et

$$(f(V_2) \cap V_1) \subset (f(V_2) \cap V_2) \text{ ou } (f(V_2) \cap V_2) \subset (f(V_2) \cap V_1)$$

On remplace dans **I** et **II** on obtient :

$$f(V_1) \cap V_1 = f(V_1) \text{ ou } f(V_1) \cap V_2 = f(V_1)$$

$$f(V_2) \cap V_1 = f(V_2) \text{ ou } f(V_2) \cap V_2 = f(V_2)$$

Ce qui implique que :

$$(f(V_1) \subset V_1 \text{ ou } f(V_1) \subset V_2) \text{ et } (f(V_2) \subset V_1 \text{ ou } f(V_2) \subset V_2)$$

On a quatre cas qui figurent :

$$(f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2) \text{ ou } (f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1)$$

$$(f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_1) \text{ ou } (f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_2)$$

Les deux derniers cas sont impossibles car par exemple :

$$\text{Si } (f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_1) \text{ comme } \dim f(V_1) = \dim V_1 \text{ et } \dim f(V_2) = \dim V_2$$

D'où $f(V_1) = V_1$ et $f(V_2) = V_1 \implies V_1 = V_2$ (f injective) ce qui est absurde car $V_1 \neq V_2$. ■

Lemme 1.6

Soit $\lambda \in K^*$, $u \in K$ et $\dim_k E = 7$.

$$h_{\lambda,u} = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6 + ue_2e_3e_6$$

$$h_\lambda = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4e_5e_6.$$

Alors $h_{\lambda,u}$ et h_λ sont des trivecteurs de rang 6 du type $\omega_{6,1} =$

Preuve.

Soit $f \in GL(E)$ définie par

$$f(e_1) = e_1 - ue_6, f(e_2) = e_2 - \lambda^{-1}e_6, f(e_4) = e_4 - \lambda^{-1}e_3, f(e_i) = e_i \quad \forall i = 3, 5, 6, 7.$$

$$f \cdot h_{\lambda,u} = (e_1 - ue_6)(e_2 - \lambda^{-1}e_6)e_3 + (e_1 - ue_6)(e_4 - \lambda^{-1}e_3)e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda(e_4 - \lambda^{-1}e_3)e_5e_6 + u(e_2 - \lambda^{-1}e_6)e_3e_6.$$

$$f \cdot h_{\lambda,u} = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4e_5e_6 = h_\lambda. \text{ Donc } h_{\lambda,u} \text{ est équivalente à } h_\lambda.$$

Montrons que h_λ est du type $\omega_{6,1}$, soit $g \in GL(E)$ définie par :

$$g(e_5) = e_5 + \lambda^{-1}e_1, g(e_i) = e_i \quad \forall i \neq 5.$$

$$g \cdot h_\lambda = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4(e_5 + \lambda^{-1}e_1)e_6.$$

$$g \cdot h_\lambda = e_1e_2e_3 + e_1e_4e_6 + \lambda e_4e_5e_6 + e_4e_1e_6.$$

$$g \cdot h_\lambda = e_1e_2e_3 + \lambda e_4e_5e_6, \text{ c'est un trivecteur du type } \omega_{6,1}. \quad \blacksquare$$

Lemme 1.7

Soit E un K - e - V de dimension 7 et ω un trivecteur donné par :

$$\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + ue_1e_2e_3 + \lambda e_4e_5e_6 \text{ avec } u, \lambda \in K$$

Si $u = 0$ ou $\lambda^2 u = -4\omega$, est du type $\omega_{6,2}$ et il est ω du type $\omega_{6,1}$ dans les autres cas.

Preuve.

$$\text{Si } u = 0, \omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6.$$

Considérons $f \in GL(E)$ définie par : $f(e_3) = e_3 - \lambda e_4, f(e_i) = e_i \quad \forall i \neq 3$.

$$\wedge^3 f(\omega) = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + (e_3 - \lambda e_4)e_5e_6 + \lambda e_4e_5e_6.$$

$$\wedge^3 f(\omega) = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 \text{ du type } \omega_{6,2}.$$

Supposons que $u \neq 0_K$.

Comme K est un corps algébriquement clos alors l'équation $x^2 = u$ (I) admet des solutions dans K . Soit a une solution de (I) et considérons $f \in GL(E)$ définie par :

$$\begin{aligned} f(e_4) &= ae_4, \\ f(e_i) &= a^{-1}e_i, \quad i = 1, 2, \\ f(e_j) &= ae_j, \quad j = 3, 5, 6, 7, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \wedge^3 f(\omega) &= a^{-1}e_1(ae_4)e_5 + a^{-1}e_2ae_4e_6 + e_3e_5e_6 + ua^{-2}e_1e_2e_3 + \lambda ae_4e_5e_6. \\ \wedge^3 f(\omega) &= e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + e_1e_2e_3 + \lambda ae_4e_5e_6. \end{aligned}$$

Si on pose $\lambda' = \lambda a$, on remarque que l'étude du type trivecteur ω ($u \neq 0$) revient à l'étude du trivecteur ω lorsque $u = 1$.

$$\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + \lambda'e_4e_5e_6. \quad \lambda' \in K.$$

Soit $g \in GL(E)$, définie par :

$$\begin{aligned} g(e_1) &= e_1 + \alpha e_6, \quad g(e_2) = e_2 + \gamma e_5, \quad g(e_3) = e_3 + \xi e_4, \quad g(e_6) = e_6 + \beta e_1, \quad g(e_5) = e_5 + \delta e_2, \\ g(e_4) &= e_4 + \eta e_3, \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \xi \in K \quad \alpha\beta \neq 1, \quad \gamma\delta \neq 1, \quad \xi\eta \neq 1. \end{aligned}$$

Alors

$$\wedge^3 f(\omega) = \begin{cases} (1 - \gamma\beta + \beta\xi - \gamma\xi + \beta\lambda')e_1e_4e_5 + (\beta - \delta - \beta\delta\xi + \xi - \beta\lambda'\delta)e_1e_2e_4 + \\ (\eta - \beta\gamma\eta + \beta - \gamma + \beta\lambda'\eta)e_1e_3e_5 + (-\delta\eta + \beta\eta - \beta\delta + 1 - \beta\delta\lambda'\eta)e_1e_2e_3 + \\ (\alpha - \gamma + \xi - \xi\gamma\alpha + \lambda')e_4e_5e_6 + (-\alpha\delta + 1 - \xi\delta - \alpha\xi - \lambda'\delta)e_2e_4e_6 + \\ (1 + \alpha\eta - \gamma\eta + \alpha\gamma + \lambda'\eta)e_3e_5e_6 + (\eta - \delta - \alpha\eta\delta + \alpha - \lambda'\eta\delta)e_2e_3e_6 \end{cases}$$

supposons que la caractéristique de K est impair et posons $\gamma = \delta = \alpha = 0$ et $\beta = \eta = -\xi = 1/2\lambda$ alors :

$$\wedge^3 g(\omega) = (1 + 1/4\lambda'^2)e_1e_4e_5 + e_1e_2e_3 + e_2e_4e_6 + e_1e_5e_6.$$

- Si $\lambda'^2 + 4 = 0$ dans ce cas $\wedge^3 g(\omega)$ est du type $\omega_{6,2}$ car ω est du type $\omega_{6,2}$.
- Si $\lambda'^2 u = -4$. Si $\lambda' = 0$, $\omega = e_1e_4e_5 + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_6 + e_1e_2e_3$. On applique la transformation g avec $\beta = \delta = \gamma = 1$ et $\alpha = \eta = \xi = -1$. On obtient $\wedge^3 g(\omega) = 2(e_1e_3e_5 + e_2e_4e_6)$ ainsi ω est équivalent à $\omega_{6,1}$.

Supposons maintenant que la caractéristique de K est pair et soit $\psi \in K^*$ tel que $\alpha = \delta = \gamma = 0$ et $\beta = \gamma = \xi = \psi$.

D'où $\wedge^3 g(\omega) = e_1 e_2 e_3 + e_2 e_4 e_6 + e_3 e_5 e_6 + \lambda' e_4 e_5 e_6$. Si $\lambda' = 0_K$, ω est équivalent à $\omega_{6,2}$ et si $\lambda' \neq 0_K$, ω est équivalent à $\omega_{6,2}$. ■

1.4.7 Éléments scindables

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces supplémentaires de E ; $\wedge^p E$ s'identifie à $\bigoplus_{k=0}^{k=p} (\wedge^k E_1 \otimes \wedge^{p-k} E_2)$. Un élément $\omega \in \wedge^p E$ est dit scindable s'il existe une décomposition $E = E_1 \oplus E_2$ telle que $\omega \in E_1 \otimes \wedge^{p-1} E_2$ vu comme facteur direct de $\wedge^p E$. Si $\dim E_1 = r$, on dit que ω est r -scindable. La scindabilité est une généralisation de la divisibilité; en effet ω est divisible si et seulement si ω est 1-scindable, propriété qui ne dépend pas du corps de base car c'est équivalent à dire que l'application $E \longrightarrow \wedge^{p+1} E$, $x \longrightarrow x\omega$ n'est pas injective. Notons aussi que ω r -scindable implique $d_r(\omega) = 0$ car $\varpi_{E_1} = 0$.

Soit ω un élément r -scindable et $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de E_1 : $\omega = \sum_{i=1}^r e_i u_i$ où $u_i \in \wedge^{p-1} E_2$. Les u_i sont déterminés de façon unique par la base e_1, \dots, e_r de E_1 car $u_i = d_{e_i^*}(\omega)$ où $e_i^* \in E^*$ est définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ et $e_i^*(E_2) = 0$. Alors ω est déterminé par le sous-espace vectoriel F de $\wedge^{p-1} E_2$ engendré par les u_i ; en effet, si on change de base dans E_1 , et si la nouvelle base f_j est donnée par :

$$\begin{aligned} e_i &= \sum_{j=1}^r \alpha_{ij} f_j, \\ \omega &= \sum_{i=1}^r e_i u_i = \sum_{j=1}^r f_j \left(\sum_{i=1}^r \alpha_{ij} u_i \right) = \sum_{j=1}^r f_j v_j, \end{aligned}$$

les v_j s'obtiennent donc à partir des u_i par le changement de base contragrédient de celui qui fait passer de la base $\{f_j\}$ à la base $\{e_i\}$. Cela se voit aussi en utilisant l'isomorphisme naturel entre $E_1 \otimes \wedge^{p-1} E_2$ et $\text{Hom}(E_1^*, \wedge^{p-1} E_2)$: si φ est l'élément de $\text{Hom}(E_1^*, \wedge^{p-1} E_2)$ canoniquement associé à ω , F n'est autre que $\varphi(E_1^*)$. Pour classifier les éléments r -scindables de rang maximal dans $\wedge^p E$, il suffit donc d'étudier l'action de $GL(E_2)$ sur la grassmannienne $Gr_r(\wedge^{p-1} E_2)$ des sous-espaces vectoriels de dimension r de $\wedge^{p-1} E_2$. C'est ce qui est fait pour $p = 3$ et pour certaines valeurs du

couple $(r = \dim E_1, n - r = \dim E_2)$ qui permettent d'aborder la classification des 3-vecteurs en petite dimension. Le cas où $n - r$ est pair est plus simple car on peut y utiliser les puissances divisées sous la forme de pfaffiens.

Remarquons qu'un même p -vecteur peut être scindable pour plusieurs valeurs de l'entier r .

1.4.8 Suite exacte

Définition 1.4

Soit $G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G''$ une suite d'homomorphismes de groupes. Nous dirons que cette suite est exacte si

$$\text{Im } f = \ker g.$$

Par exemple, si H est un sous-groupe distingué de G , la suite

$$H \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\varphi} G/H$$

est exacte (j étant l'injection et φ la projection canonique).

Dire, par exemple, que

$$0 \longrightarrow G' \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} G'' \longrightarrow 0$$

est exacte, signifie que f est injectif, que $\text{Im } f = \ker g$ et que g est surjectif.

Chapitre 2

Classification des bivecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps commutatif K , muni d'une forme bilinéaire alternée φ .

2.1 Classification

Définition 2.1

On dit que E est un plan hyperbolique si $\dim E = 2$ et φ est non dégénérée.

Définition 2.2

Si E est somme orthogonale de plans hyperboliques, on dit que E est un espace hyperbolique.

Théorème 2.1

Soit E un K -espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire alternée φ . Alors E est somme orthogonale du radical de φ et d'un sous-espace hyperbolique. Si φ est non dégénérée, E est hyperbolique et de dimension paire.

Preuve.

Soit $\{e_1, \dots, e_p, \dots, e_n\}$ une base de E telle que $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une base du radical de φ , posons $E_1 = \text{Vect}\{e_{p+1}, \dots, e_n\}$, alors $E = R_\varphi \oplus^\perp E_1$ (il s'agit d'une somme orthogonale car $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \leq p$ et $j \geq p+1$) et $\varphi|_{E_1}$ est non dégénérée. Pour $x \in E_1 - \{0\}$ il existe $y \in E_1 - \{0\}$ tel que $\varphi(x, y) \neq 0$, donc on peut choisir un élément y de $E_1 - \{0\}$ de sorte que $\varphi(x, y) = 1$, ce qui montre que $P = \text{Vect}\{x, y\}$

est un plan hyperbolique ; par suite $E_1 = P \oplus^\perp P^\perp$, comme $\varphi|_{P^\perp}$ est non dégénérée, la démonstration se conclut par récurrence sur la dimension de E . Si φ est non dégénérée, $E = E_1$ est un espace hyperbolique, donc de dimension paire. ■

Corollaire 2.1

Soit ω un bivecteur de rang maximal de $\wedge^2 E$: il existe une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E

de sorte que

$$\omega = \sum_{i=1}^k e_{2i-1} e_{2i} \text{ et } 2k \leq n \leq 2k + 1.$$

Preuve.

Il suffit d'appliquer le théorème précédent en considérant ω comme une forme bilinéaire alternée sur E^* : $E^* = R_\omega \oplus E_1$. Alors E_1 est somme orthogonale de k plans hyperboliques P_i : pour chacun d'eux, il existe une $\{x_{2i-1}, x_{2i}\}$ telle que $\omega(x_{2i-1}, x_{2i}) = 1$. On complète alors $\{x_1, \dots, x_{2k}\}$ en une base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de E^* en prenant les x_i , $i > 2k$, dans R_ω . La base $\{e_1, \dots, e_n\}$ cherchée est la base duale de la base $\{x_1, \dots, x_n\}$.

D'après ce qui précède, on conclut que si $\dim E = n$, $\wedge^2 E$ admet $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ orbites par l'action du groupe linéaire $GL(E)$. Dans une base (e_i) , $1 \leq i \leq n$, de E un représentant de chaque orbite est donné par $\sum_{i=1}^m e_{2i-1} e_{2i}$ où $0 \leq m \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Tout élément ω de $\wedge^2 E$ est scindable : en effet ω s'écrit $\sum_{i=1}^m e_{2i-1} e_{2i}$ dans une base convenable (e_i) et il suffit de prendre $E_1 = \text{Vect}\{e_1, e_3, \dots, e_{2n-1}\}$ et $E_2 = \text{Vect}\{e_2, \dots, e_{2m}\}$, $\omega \in E_1 \otimes E_2$. Notons enfin que pour tout bivecteur ω , les invariants $d_k(\omega)$ sont donnés par $d_k(\omega) = \sup(0, r(\omega) - 2k)$. ■

Corollaire 2.2

Soit E un espace vectoriel de dimension paire et ω un trivecteur de rang maximal : $d_1(\omega) \neq 0$.

Rappelons que $d_1(\omega) = \inf_\alpha(\text{rg } \varpi_\alpha)$ où α parcourt l'espace projectif $P(E)$ des droites de E . Si $d_1(\omega) = 0$, il existe $\alpha = Kx$, $x \neq 0$, tel que $\varpi_\alpha = 0$. Soit E' un supplémentaire de Kx dans E : de $E = E' \oplus Kx$, résulte $\wedge^3 E \simeq \wedge^3 E' \oplus Kx \otimes \wedge^2 E'$.

Alors $\omega = \omega' + ux$ et $\varpi_\alpha = 0$ signifie que ω' est nul ; de plus $S_\omega = S_u \oplus Kx = E$. Comme ω est de rang maximal, $S_u = E'$ et E' est de dimension paire ce qui contredit l'hypothèse sur la dimension de E .

2.2 Groupe symplectique

Dans ce qui suit on suppose que $\dim E = 2m$ et φ non dégénérée. Dans le paragraphe précédent on a montré l'existence d'une base (e_i) , $1 \leq i \leq 2m$, dans laquelle φ s'écrit $\sum_{i=1}^m e_{2i-1}^* e_{2i}^*$: cette base est dite "base symplectique".

Le groupe symplectique $Sp(\varphi)$ est le sous-groupe de $GL(E)$ des automorphismes de E qui laisse φ invariante : $\forall f \in Sp(\varphi), \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y)$.

Il est clair que f transforme toute base symplectique en une autre : $\varphi(f(e_{2i-1}), f(e_{2i})) = \varphi(e_{2i-1}, e_{2i}) = 1$ et $\varphi(f(e_k), f(e_l)) = 0$ si $\{k, l\}$ n'est pas de la forme $\{2i-1, 2i\}$. Si $\{u_1, \dots, u_{2m}\}$ est une base symplectique de E , on définit un élément f de $Sp(\varphi)$ par $f(e_i) = u_i$, $1 \leq i \leq 2m$. Donc $Sp(\omega)$ est en bijection avec l'ensemble des bases symplectiques de E . On note $Sp_{2m}(K)$, le groupe $Sp(\varphi)$ où φ est la forme bilinéaire alternée canonique sur K^{2m} .

Remarque 2.1

De ce qui précède et de l'isomorphisme entre $\wedge^{n-p} E^*$ et $\wedge^p E$ on déduit la classification des p -vecteurs dans $\wedge^p K^{p+2}$. Ainsi il existe $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 2$ orbites dans $\wedge^p K^{p+2}$: par exemple, dans $\wedge^4 K^6$, il y a 4 orbites dont des représentants respectifs sont donnés, dans une base (e_i) , par 0 , $e_1 e_2 e_3 e_4$, $e_1 e_2 (e_3 e_4 + e_5 e_6)$ et $e_1 e_2 (e_3 e_4 + e_5 e_6) + e_3 e_4 e_5 e_6$.

2.3 Propriétés des formes bilinéaires alternées

Lemme 2.1

Soit $u \in \wedge^2 E^*$ une forme bilinéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension finie. Soit W un sous-espace de dimension k de E , W° son orthogonal dans E^* et ω un k -vecteur non nul de $\wedge^k W^\circ \subset \wedge E^*$: W est totalement isotrope pour u si et seulement si $u\omega = 0$.

Soient $\{f_1, \dots, f_k\}$ une de W° telle que $\omega = f_1 f_2 \dots f_k$, complétée en une base $\{f_1, \dots, f_n\}$ de E^* et $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base duale de E : $\{e_{k+1}, \dots, e_n\}$ est une base de W . Ecrivons $u = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} f_i f_j$: $u\omega = 0$ équivaut à $a_{ij} = 0$ pour $k < i < j$. Comme $a_{ij} = u(e_i, e_j)$, W est totalement isotrope pour u .

Remarque 2.2

Si u et ω sont des bivecteurs tels que $S_\omega \subset S_u$ et $(rg(u), rg(\omega)) = (4, 2)$ et $u\omega = 0$: $\omega = xy$ et $u = ax + by$, où $a, b, x, y \in E^*$. Si par contre $u\omega \neq 0$, $\gamma_2(u - \lambda\omega)$ est un polynôme du premier degré en λ il existe λ non nul tel que $u = \lambda\omega + v$ avec $rg(v) = 2$: $u = \lambda xy + ab$, où $a, b, x, y \in E^*$. Supposons maintenant que u est un bivecteur de rang 6, ω un trivecteur de rang 3, $S_\omega \subset S_u$, et $u\omega = 0$: alors $\omega = xyz$ et $u = ax + by + cz$, où a, b, c, x, y et z sont dans E^* . Si par contre $u\omega \neq 0$, la restriction de u à S_ω° est de rang 2 ; il existe un bivecteur v divisant ω tel que $u = v + u_1$ avec $rg(u_1) = 4$: $S_{u_1} \cap S_\omega$ est de dimension 1 et on peut trouver une base $\{a, b, c, x, y, z\}$ de E^* telle que $u = ab + cx + yz$ et $\omega = xyz$. On conclut donc que

- si u et ω sont des bivecteurs tels que $S_\omega \subset S_u$ et $(rg(u), rg(\omega)) = (4, 2)$ alors il existe $\{a, x, b, y\}$ une base de S_u telle que

$$\begin{cases} \text{si } u\omega = 0, \omega = xy \text{ et } u = ax + by \\ \text{si } u\omega \neq 0, \omega = xy \text{ et } u = \lambda xy + ab \end{cases}$$

- si u est un bivecteur de rang 6, ω un trivecteur de rang 3 tels que $S_\omega \subset S_u$ alors il existe $\{a, b, c, x, y, z\}$ une base de S_u telle que

$$\begin{cases} \text{si } u\omega = 0, \omega = xyz \text{ et } u = ax + by + cz \\ \text{si } u\omega \neq 0, \omega = xyz \text{ et } u = ab + cx + yz \end{cases}$$

Lemme 2.2

Soit H un plan vectoriel dans $\wedge^2 K^5$ non contenu dans $\wedge^2 E$, pour tout hyperplan E de K^5 . Alors H possède une base de l'un des types suivant :

$$\begin{cases} u_1 = e_1 e_2 \\ u_2 = e_2 e_3 + e_4 e_5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} u_1 = e_1 e_2 + e_3 e_4 \\ u_2 = e_1 e_3 + e_4 e_5 \end{cases}$$

où $\{e_1, \dots, e_5\}$ est une base convenable de K^5 .

Supposons d'abord que H contient un bivecteur u_1 de rang 2. Tout bivecteur u_2 non collinéaire à u_1 est de rang 4 car $H \subset \wedge^2(S_{u_1} + S_{u_2})$. Alors $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est une droite Ke_2 et on peut écrire $u_1 = e_1e_2$, $u_2 = e_2e_3 + e_4e_5$ d'où le premier type.

Supposons maintenant que tout élément non nul de H est de rang 4. Soit $\{u_1, u_2\}$ une base de H : $S_{u_1} \cap S_{u_2} = W$ est de dimension 3. Considérons l'application $\pi : \wedge^2 W \longrightarrow \wedge^4 S_{u_1} \oplus \wedge^4 S_{u_2}$ qui à v associe le couple (vu_1, vu_2) . Comme $\dim \wedge^2 W = 3$, $\ker \pi$ contient une droite $D = Ke_1e_4$ de $\wedge^2 S_H$: en effet l'hypothèse $\text{rg}(u_i) = 4$ entraîne que l'application $\pi_i : \wedge^2 W \longrightarrow \wedge^4 S_{u_i}$ définie par $\pi_i(v) = vu_i$, $i = 1, 2$, est surjective ; par suite $\dim(\ker \pi_1 \cap \ker \pi_2) = 1$ et $\ker \pi_1 \cap \ker \pi_2$ est une droite $D = Ke_1e_4$ de $\wedge^2 H$: on peut écrire $u_i = e_1x_i + e_4y_i$. Posons $x_1 = e_2$, $y_1 = -e_3$ et $y_2 = e_5$, on a alors $x_2 = \sum_i a_i e_i$, $a_i \in K$. Par un changement de base, on a $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$ et $u_2 = e_1(a_2e_2 + a_3e_3) + e_4e_5$. Si a_3 était nul, $u_1 - a_2u_2$ serait de rang 2 : par homothétie sur u_2 et e_5 , on peut supposer $a_3 = 1$ et en remplaçant u_2 par $u_2 - a_2u_1$, on obtient la forme demandée.

Nous avons vu en 1. que la donnée d'un trivecteur scindable ω revient à celle d'un sous-espace vectoriel d'un espace $\wedge^2 E$: ainsi le lemme précédent donne deux classes de trivecteurs 2-scindables de rang 7. Les trivecteurs 2-scindables de rang 8 s'obtiennent par l'étude des sous-espaces de dimension 2 de $\wedge^2 K^6$. Nous supposons maintenant K algébriquement clos et soit H un sous espace vectoriel de dimension 2 de $\wedge^2 K^6$ et $\{u_1, u_2\}$ une base de H . Tout élément de H s'écrit $u = xu_1 + yu_2$: $\gamma^3(u) = f(u)\varphi$ et $f(u)$ est une fonction homogène de degré 3 de u . En fonction des composantes x et y de u , f est donnée par un polynôme de degré 3 en les variables x et y . Effectuer un changement de base dans H revient à effectuer, pour f , un changement de variables linéaire, de sorte que f est un covariant pour H . A changement de variables linéaire près, f peut prendre les 4 formes suivantes : $f = 0$, f est le cube d'une forme linéaire sur H , f est le produit d'une forme linéaire par le carré d'une forme linéaire indépendante de la première ou bien f est le produit de trois formes linéaires deux à deux linéairement indépendantes. Cela signifie qu'en changeant éventuellement de base $\{u_1, u_2\}$ dans H , on a les quatre possibilités suivantes : $f = 0$, $f = x^3$, $f = x^2y$ et $f = xy(x + y)$. Remarquons que si $H \subset \wedge^2 V$ où V est un hyperplan de K^6 (on dit alors que H n'est pas de rang maximal), $\gamma^3(u) = 0$ quelque soit

u dans H et donc $f = 0$. Nous ne considérons maintenant que des sous-espaces H de rang maximal (le cas de rang 5 est le lemme précédent).

Lemme 2.3

$\wedge^2 K^6$ admet six types de sous-espaces vectoriels de dimension 2 et de rang maximal donnés par une base $\{u_1, u_2\}$:

H_1	$u_1 = e_1e_3 + e_2e_4$	$u_2 = e_1e_5 + e_2e_6$	$\gamma_3 = 0$
H_2	$u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6$	$u_2 = e_1e_2$	$\gamma_3 = x^3$
H_3	$u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6$	$u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$	$\gamma_3 = x^3$
H_4	$u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$	$u_2 = e_1e_3 + e_5e_6$	$\gamma_3 = x^2y$
H_5	$u_1 = e_1e_2$	$u_2 = e_3e_4 + e_5e_6$	$\gamma_3 = x^2y$
H_6	$u_1 = e_1e_2 + e_5e_6$	$u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$	$\gamma_3 = xy(x + y)$

Dans le premier cas, soit $\{u_1, u_2\}$ une base quelconque de H : comme $f = 0$, $\gamma^3(u_1) = \gamma^3(u_2) = u_1\gamma^2(u_2) = u_2\gamma^2(u_1) = 0$. Les rangs de u_1 et u_2 valent donc 2 ou 4 ; si, par exemple $\text{rang } u_1 = 2$, la relation $u_1\gamma^2(u_2) = 0$ implique $S_{u_1} \cap S_{u_2} \neq \{0\}$, donc H qui est contenu dans $\wedge^2(S_{u_1} + S_{u_2})$, n'est pas de rang maximal. Posons $S_i = S_{u_i}$: $\dim S_i = 4$ et $S_1 + S_2 = K^6$, donc $S_1 \cap S_2$ est de dimension 2. Il existe une base $\{e_i\}$ de K^6 telle que $\gamma^2(u_1) = e_1e_2e_3e_4$ et $\gamma^2(u_2) = e_1e_2e_5e_6$; $S_1 \cap S_2$ est le plan de base $\{e_1, e_2\}$. Si $e_1e_2u_1 \neq 0$, $u_1 = \lambda e_1e_2 + v$ où $\text{rg}(v) = 2$ et $u_1\gamma^2(u_2) \neq 0$; c'est donc que $e_1e_2u_1 = e_1e_2u_2 = 0$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1x_1 + e_2y_1 \\ u_2 &= e_1x_2 + e_2y_2 \end{aligned}$$

ce qui donne, à un changement de notations près, le résultat annoncé.

Supposons maintenant $f(x, y) = x^3$: il existe une base $\{u_1, u_2\}$ de H telle que $\gamma^3(u_1) \neq 0$, $\gamma^2(u_1)u_2 = u_1\gamma^2(u_2) = \gamma^3(u_2) = 0$. Le bivecteur u_2 est unique à homothétie près car $\gamma^3(u) = 0$ implique $x = 0$. Si le rang de u_2 vaut 2, la seule relation à satisfaire est $\gamma^2(u_1)u_2 = 0$; on peut donc écrire $u_2 = e_1e_2$ et $u_1 = \lambda e_1e_2 + e_1x + e_2y + v$ où x, y et v s'expriment en fonction des quatre derniers vecteurs d'une base $\{e_i\}$ de K^6 . Quitte à enlever à u_1 un multiple de u_2 , on peut supposer $\lambda = 0$: la relation $u_2\gamma^2(u_1) = 0$ signifie que v est de rang 2. Comme $\gamma^3(u_1) = e_1xe_2yv \neq 0$, en change-

ment les quatre derniers vecteurs de la base $\{e_i\}$, on obtient $u_1 = e_1e_3 + e_2e_4 + e_5e_6$.

Si le rang de u_2 est 4, la relation $u_1\gamma^2(u_2) = 0$ a la signification suivante : $S_{u_2}^\circ$ est un plan du dual de K^6 sur lequel la forme bilinéaire alternée u_1 est dégénérée. En effet si non u_1 est dégénérée. En effet si non u_1 s'écrirait $v + v'$ où $rg(v) = 2$, $rg(v') = 4$ et $Sv_1 = Su_2$ et on aurait $u_1\gamma^2(u_2) = v\gamma^2(u_2) \neq 0$. Donc u_1 peut s'écrire $ax + by + zt$ où $\{x, y, z, t\}$ est une base de S_{u_2} : $\gamma^2(u_1) = abyx + axzt + byzt$. Comme u_2 est de rang 4, $\gamma^2(u_2)$ est proportionnel à $xyzt$ et $u_2\gamma^2(u_1) = abyxu_2$. Il en résulte que $xyu_2 = 0$ et u_2 peut s'écrire $xz' + yt'$ où $\{x, y, z', t'\}$ est une autre base de S_{u_2} . Comme $zt = \lambda z''t'' + x\alpha + y\beta$ où λ est un scalaire non nul et α et β deux vecteurs de S_{u_2} , on remplace u_1 par $\lambda^{-1}u_1$ qui s'écrit $(\lambda^{-1}a + \alpha)x + (\lambda^{-1}b + \beta)y + z't'$. On a donc bien une base $\{u_1^1, u_1\}$ de H est une base $\{e_i\}$ de K^6 dans laquelle

$$u_1 = e_1e_4 + e_2e_5 + e_3e_6 \quad \text{et} \quad u_2 = e_1e_2 + e_3e_4$$

Supposons maintenant que $f(x, y) = x^2y = 0$. On a une base $\{u_1, u_2\}$ de H telle que $\gamma^3(u_1) = \gamma^3(u_2) = u_1\gamma^2(u_2) = 0$ et $\gamma^2(u_1)u_2 \neq 0$. Le rang de u_1 est nécessairement 4 ; celui de u_2 vaut 2 ou 4. S'il vaut 2, $\gamma^2(u_1)u_2 \neq 0$ implique $S_{u_1} \cap S_{u_2} = \{0\}$ et on obtient $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$ et $u_2 = e_5e_6$. Si le rang de u_2 est 4, $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est un plan P de base $\{a, b\}$: $u_1 = ax + by + v$ où la support de v est contenu dans un supplémentaire de P dans S_{u_1} . Comme $\gamma^2(u_1)u_2 \neq 0$, $abu_2 \neq 0$ et $u_2 = ab + cd$; posant $e_1 = a$, $e_2 = x$, $e_3 = b$, $e_4 = y$, $e_5 = c$ et $e_6 = d$ on obtient les écritures de u_1 et u_2 annoncées.

Supposons maintenant que $f(x, y) = xy(x + y)$. Il existe alors une base $\{u_1, u_2\}$ de H telle que $\gamma^3(u_1) = \gamma^3(u_2) = 0$ et $u_1\gamma^2(u_2) = u_2\gamma^2(u_1) \neq 0$. L'intersection $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est un plan P de K^6 et $\gamma^2(u_1) = e_1e_2e_3e_4$, $\gamma^2(u_2) = e_3e_4e_5e_6$ où $\{e_3, e_4\}$ est une base de P et $\{e_i\}$ une base de K^6 . Comme $u_1\gamma^2(u_2) \neq 0$, $u_1e_3e_4 \neq 0$, donc $u_1 = \lambda e_3e_4 + v_1$ où v_1 est de rang 2 ; de la même façon, on a $u_2 = \mu e_3e_4 + v_2$ avec $rg(v_2) = 2$. De $u_1\gamma^2(u_2) = u_2\gamma^2(u_1)$, on déduit que $\lambda = \mu$, qu'on peut prendre égal à 1 ; de même en modifiant e_1 et e_2 , et e_5 et e_6 , on trouve la base annoncée.

Soit u un élément de $\wedge^2 E$. Il existe une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E pour laquelle $u = \sum_{i=1}^k e_{2i-1}e_{2i}$ et $2k \leq n$. Le support S_u est le sous-espace de E engendré par e_1, \dots, e_{2k} et le rang de u est $2k$. Pour que u soit non dégénérée, il faut que E soit de dimension paire et $2k = n$. Deux bivecteurs u_1 et u_2 sont équivalents sous l'action du groupe

$GL(E)$ si et seulement s'ils ont le même rang.

Le cas général, sur un corps algébriquement clos, se traite de la même manière et on a le résultat suivant.

Théorème 2.2

Soit H un plan de $\wedge^2 K^{2n}$ dont l'invariant γ_n est une forme binaire à racines distinctes. Alors il existe une base $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ de K^{2n} et des scalaires $\lambda_4, \dots, \lambda_n \notin \{0, 1\}$ telle que H a une base

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + \dots + e_{2n-3}e_{2n-2}, \\ u_2 = e_3e_4 + \lambda_4e_5e_6 + \dots + \lambda_n e_{2n-3}e_{2n-2} + e_{2n-1}e_{2n}. \end{cases}$$

Le résultat est connu [10] ; voici une démonstration simple, par récurrence sur n . Si $n = 2$ (ou $n = 3$), selon la proposition précédent il suffit de prendre la base H_6 , de sorte que le résultat est vrai.

Supposons $n \geq 4$ et $\gamma_n(xu_1 + yu_2) = f_n(x, y)$ l'invariant de H . Par une transformation linéaire sur u et v , on peut supposer que les racines de f_n sont $0, 1, \infty, -\lambda_4, -\lambda_5, \dots, -\lambda_n$ de sorte que

$$f_n(x, y) = xy(x + y)(x + \lambda_4y) \dots (x + \lambda_ny).$$

Comme $f_n(x, 0) = 0$, u_1 est de rang inférieur à $2n$. En effet, si son rang n'était pas $2n - 2$, alors $f_n(x, y)$ serait divisible par y^2 car

$$\gamma_n(xu_1 + yu_2) = \sum_{p=0}^n x^p y^{n-p} \gamma_p(u_1) \gamma_{n-p}(u_2).$$

Il en résulte que u_1 est de rang $2n - 2$. Soit $P = \text{vect} \{f_{2n-1}, f_{2n}\}$ un supplémentaire de S_{u_1} dans K^{2n} . On peut écrire

$$u_2 = \alpha f_{2n-1}f_{2n} - f_{2n}z - t f_{2n-1} + v,$$

où $t, z \in S_{u_1}$ et où $S_v \subset S_{u_1}$. Le scalaire α n'est pas nul et on peut donc supposer

que $\alpha = 1$. Alors $u_2 = (f_{2n-1} + z)(f_{2n} + t) + v'$, où $S_{v'} \subset S_{u_1}$. De plus,

$$xu_1 + yu_2 = (xu_1 + yv') + ye_{2n-1}e_{2n}$$

et

$$\gamma_n(xu_1 + yu_2) = y\gamma_{n-1}(xu_1 + yv')e_{2n-1}e_{2n}$$

de sorte qu'il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence à vect $\{u_1, v'\}$, un plan de $\wedge^2 K^{2n-2}$ (on a posé $e_{2n-1} = f_{2n-1} + z$ et $e_{2n} = f_{2n} + t$).

les cas non génériques sont plus compliqués à traiter et trop nombreux pour être tous considérés. Il faut distinguer les multiplicités des racines, le cas le plus simple étant celui où $\gamma_n(xu_1 + yu_2) = x^{n-1}y$. On peut alors trouver une base $\{e_1, e_2, \dots, e_{2n}\}$ de K^{2n} , où $u_1 = \sum_{j < n} e_{2j-1}e_{2j}$, et il faut discuter suivant le rang de u_2 qui peut varier de 2 à $2n - 2$.

Pour $2n = 8$, cela nous donne trois possibilités pour u_2 qui sont e_7e_8 , $e_1e_3 + e_7e_8$ et e_1e_3 , $e_2e_5 + e_7e_8$. On a donc

$$\begin{cases} u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6 & u_2 = e_7e_8 \\ u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6 & u_2 = e_1e_3 + e_7e_8 \\ u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6 & u_2 = e_1e_3 + e_2e_5 + e_7e_8 \end{cases}$$

Cela montre bien que le cas général est trop compliqué pour qu'il soit vraiment intéressant de donner toutes les possibilités.

Remarque 2.3

1. La donnée d'un trivecteur scindable ω revient à celle d'un sous-espaces vectoriel d'un espace $\wedge^2 E$. Sur un corps algébriquement clos, qui ne sont pas isomorphes en tant que trivecteurs.
2. Si u et v sont des bivecteurs tels que $S_v \subset S_u$, $rg(u) = 4$ et $rg(v) = 2$, alors il existe une base $\{a, b, x, y\}$ de S_u telle que

$$\begin{cases} \text{si } uv = 0, \text{ alors } v = xy \text{ et } u = ax + by, \\ \text{si } uv \neq 0, \text{ alors } v = xy \text{ et } u = \lambda xy + ab. \end{cases}$$

3. Si u est un bivecteur de rang 6 et ω est un trivecteur de rang 3 tels que $S_\omega \subset S_u$, alors il existe une base $\{a, b, c, x, y, z\}$ de S_u telle que

$$\begin{cases} \text{si } uv = 0, \text{ alors } v = xyz \text{ et } u = ax + by + cz, \\ \text{si } uv \neq 0, \text{ alors } v = xyz \text{ et } u = ab + cx + yz. \end{cases}$$

Proposition 2.1

$\wedge^2 K^7$ admet cinq types de sous-espaces vectoriel de dimension 2 et de rang maximal donnés par une base $\{u_1, u_2\}$:

$$\begin{cases} V_1 : u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 & u_2 = e_4e_5 + e_6e_7 \\ V_2 : u_1 = e_1e_2 & u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7 \\ V_3 : u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 & u_2 = e_2e_5 + e_3e_6 + e_4e_7 \\ V_4 : u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 & u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7 \\ V_5 : u_1 = e_1e_2 + e_3e_4 + e_5e_6 & u_2 = e_1e_4 + e_3e_7 + e_5e_2 \end{cases}$$

où $\{e_1, \dots, e_7\}$ est une base convenable de K^7 .

Preuve.

Soit $V = \text{vect}\{u_1, u_2\}$ un plan vectoriel dans $\wedge^2 K^7$. Supposons d'abord le cas où V possède une base $\{u_1, u_2\}$ de bivecteurs de rang 4. Dans ce cas, $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est une droite. On peut donc trouver une base $\{e_1, \dots, e_7\}$ de K^7 telle que $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$ et $u_2 = e_4e_5 + e_6e_7$.

Supposons maintenant que V possède une base $\{u_1, u_2\}$ contenant un bivecteur de rang 6, soit u_1 . Trois cas se présentent suivant que $rg(u_1) = 2, 4, 6$.

Si $rg(u_1) = 2$, alors $S_{u_1} \cap S_{u_2}$ est une droite et on peut écrire $u_1 = e_1e_2$ et $u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7$.

Si $rg(u_1) = 4$, alors $\dim(S_{u_1} \cap S_{u_2}) = 3$. On pose $S_{u_1} \cap S_{u_2} = \text{vect}\{x, y, z\}$, et on écrit $u_1 = ax + yz$. Soit $\omega = xyz$. c'est un trivecteur de rang 3. On a $S_\omega \subset S_{u_2}$ et il existe une base $\{x, y, z, b, c, d\}$ de S_{u_2} comme suit :

- Si $u_2\omega = 0$, alors $u_2 = xb + yc + zd$. En posant $a = e_1, b = e_5, c = e_6, x = e_2, y = e_3, z = e_4$, on a $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$ et $u_2 = e_2e_5 + e_3e_6 + e_4e_7$.
- Si $u_2\omega \neq 0$, alors $u_2 = xy + zb + cd$, ce qui donne $u_1 = e_1e_2 + e_3e_4$ et $u_2 = e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7$.

Dans le troisième cas où V possède une base $\{u_1, u_2\}$ de bivecteurs de rang 6, on est dans un cas particulier du résultat plus général suivant. ■

Lemme 2.4

Soit $P = \text{vect}\{u_1, u_2\}$ un plan vectoriel dans $\wedge^2 K^{2n+1}$, de rang maximal, avec

$$rg(u_1) = rg(u_2) = 2n.$$

alors il existe une base $\{h_0, \dots, h_n, e_1, \dots, e_n\}$ de K^{2n+1} telle que

$$u_1 = e_1 h_1 + \dots + e_n h_n \quad \text{et} \quad u_2 = e_1 h_0 + \dots + e_n h_{n-1}.$$

dans notre cas, à un changement de notation près, on trouve

$$u_1 = e_3 e_4 + e_1 e_2 + e_5 e_6 \quad \text{et} \quad u_2 = e_3 e_7 + e_1 e_4 + e_5 e_2.$$

Remarque 2.4

(1) cette base s'appelle paire de kronec

Chapitre 3

Classification des trivecteurs

3.1 Classification des trivecteurs en dimension inférieure à 6

1. Si $\dim E = 3$, il n'y a qu'une orbite de trivecteurs non nuls : si $\omega \in \wedge^3 E - \{0\}$ il existe $\{e_1, e_2, e_3\}$ une base de E telle que $\omega = e_1 e_2 e_3$.
2. Si $\dim E = 4$, tous les trivecteurs non nuls sont décomposables, donc $\wedge^3 E$ a deux orbites, dans une base (e_i) , $1 \leq i \leq 4$, un représentant de chaque orbite est donné par $0, e_1 e_2 e_3$.
3. Si $\dim E = 5$, l'isomorphisme $\wedge^3 E \simeq \wedge^2 E^*$ montre qu'il y a trois orbites dans $\wedge^3 E$: en effet si un trivecteur est non nul et non décomposable, il est nécessairement de rang maximal, donc divisible par un vecteur e_1 : $\omega = e_1 u$ où u est un bivecteur de rang 4, on peut choisir pour S_u , tout supplémentaire de Ke_1 dans E et il existe une base (e_i) , $1 \leq i \leq 5$, de E telle que un représentant de chaque orbite est donné par $0, e_1 e_2 e_3, e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$.

3.2 Classification des trivecteurs en dimension 6

Dans tout ce paragraphe, K est un corps commutatif et $\omega \in \wedge^3 E$ est de rang maximal $r(\omega) = \dim E = 6$, comme la dimension de E est paire $d_1(\omega) \neq 0$ et on a $d_1(\omega) \in \{3, 5\}$.

Lemme 3.1

Si $d_1(\omega) = 3$, il existe une base (e_i) , $1 \leq i \leq 6$, de E telle que ω s'écrit :

$$\omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6$$

ou

$$\omega_{6,2} = e_1e_2e_3 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6.$$

Proposition 3.1

Les groupes d'automorphismes $Aut(\omega_{6,1})$ et $Aut(\omega_{6,2})$ vérifient respectivement les suites exactes suivantes :

3.3 Classification des trivecteurs en dimension 7**Théorème 3.1**

Soit E un K -e-v de dimension 7, et tel que le corps K est algébriquement clos alors il y a cinq orbites de rang 7, et deux orbites de rang 6, une orbite de rang 5, une orbite de rang 3, et l'orbite 0. C-à-d

$$\omega_3 = e_1e_2e_3, \text{ rg}(\omega_3) = 3$$

$$\omega_5 = e_1(e_2e_3 + e_4e_5), \text{ rg}(\omega_5) = 5$$

$$\omega_{6,1} = e_1e_2e_3 + e_4e_5e_6,$$

$$\omega_{6,2} = e_1e_2e_4 + e_2e_3e_5 + e_1e_3e_6, \text{ rg}(\omega_{6,1}) = \text{ rg}(\omega_{6,2}) = 6$$

$$\omega_{7,1} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7)$$

$$\omega_{7,2} = \omega_{7,1} + e_2e_4e_6$$

$$\omega_{7,3} = e_1e_2e_3 + e_3e_4e_5 + e_5e_6e_7$$

$$\omega_{7,4} = e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_2e_4e_6 + e_3e_5e_7$$

$$\omega_{7,5} = \omega_{7,2} + e_3e_5e_7$$

3.4 Classification des trivecteurs en dimension 8**Théorème 3.2**

Sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque, il existe treize classes d'équivalence de trivecteurs de rang 8. Dans une base (e_i) de E , $1 \leq i \leq 13$,

un représentant de chaque classe est donné par $\omega_{8,i}$, $1 \leq i \leq 13$, de la table 1.

Table 1

$\omega_{8,i}$	Expression d'un représentant de l'orbite	$d_1(\omega)$
$\omega_{8,1}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6e_7e_8$	3
$\omega_{8,2}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_5e_6e_8$	3
$\omega_{8,3}$	$e_1(e_3e_4 + e_5e_6) + e_2(e_3e_5 + e_7e_8)$	5
$\omega_{8,4}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_7 + e_4e_8)$	5
$\omega_{8,5}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5) + e_6(e_2e_3 + e_7e_8)$	5
$\omega_{8,6}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_5 + e_6e_7) + e_8(e_4e_3 + e_5e_6)$	5
$\omega_{8,7}$	$e_1(e_2e_3 + e_4e_6 + e_5e_7) + e_2(e_5e_6 + e_7e_8)$	5
$\omega_{8,8}$	$e_1(e_2e_8 + e_3e_6 + e_4e_7) + e_6e_7e_8 + e_3e_4e_5$	6
$\omega_{8,9}$	$e_1[e_2(e_3 + e_4) + e_5e_6] + e_3e_5e_7 + e_4e_6e_8$	6
$\omega_{8,10}$	$e_1(e_2e_8 + e_6e_7) + e_2e_3e_5 + e_3e_4e_6 + e_4e_5e_7$	6
$\omega_{8,11}$	$e_1(e_3e_7 + e_5e_4 + e_8e_2) + e_8(e_4e_3 + e_6e_7) + e_2e_4e_6$	6
$\omega_{8,12}$	$e_1[(e_4 - e_7)(e_3 - e_8) + e_5e_7] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$	7
$\omega_{8,13}$	$e_1[e_5(e_3 + e_7) + e_8e_4] + e_2(e_3e_4 + e_5e_6) + e_6e_7e_8$	7

3.5 Groupe d'automorphismes

3.5.1 Groupe d'automorphismes des trivecteur inférieur à 6

Pour $\omega = e_1e_2e_3$. On a alors $Aut(\omega)$ est le groupe spécial $SL_3(E)$, $\omega(e_1, e_2, e_3) = 1$, $\omega(e_i, e_j, e_k) = 0$.

Proposition 3.2

Soient le trivecteur $\omega = e_1(e_2e_3 + e_4e_5)$ et $A = Aut(\omega)$ alors on a les suites exactes suivantes :

$$1 \longrightarrow A' \longrightarrow A \longrightarrow K^* \longrightarrow 1 \text{ et } 1 \longrightarrow K^4 \longrightarrow A' \longrightarrow Sp_4(K) \longrightarrow 1$$

Preuve.

Considérons l'ensemble $E_1 = \{x \in E / x\omega = 0\}$; si $x = \sum_{i=1}^5 \alpha_i e_i$ appartient à E_1 , on a $x = \alpha_1 e_1$, donc $E_1 = Vect\{e_1\}$, si $x \in E_1$, on a $\wedge^4 f(x\omega) = f(x)\wedge^3 f(\omega) = f(x)\omega = 0$ pour $f \in A$, d'où $f(E_1) \subset E_1$ et il existe $\lambda \in K^*$ tel que $f(e_1) = \lambda e_1$.

la matrice de f dans la base $\{e_1, \dots, e_5\}$ est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & B \end{pmatrix}$; cela permet de définir un homomorphisme surjectif de groupe de A dans K^* par $\psi(f) = \lambda$ pour $\alpha \in K^*$ on prend pour antécédent l'application linéaire $f : E \rightarrow E$ définie par $f(e_1) = \alpha e_1$, $f(e_{2i}) = \alpha^{-1} e_{2i}$, $f(e_{2i+1}) = e_{2i+1}$ pour $i = 1, 2$.

Soit $f \in A' = Ker\psi : e_1 \wedge^2 f(e_2 e_3 + e_4 e_5) = e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$, autrement dit $\wedge^2 f(e_2 e_3 + e_4 e_5) = e_2 e_3 + e_4 e_5 + x e_1$ avec $x \in E_2 = Vect\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$, considérons $g : E_2 \rightarrow E_2$ l'application linéaire dont la matrice est $B : \wedge^2 g(e_2 e_3 + e_4 e_5) = e_2 e_3 + e_4 e_5$, l'homomorphisme $\varphi : A' \rightarrow Sp_4(K)$ défini par $\varphi(f) = B$ est surjectif et de noyau isomorphe à K^4 d'où le résultat, de la démonstration il ressort que la première suite exacte canoniquement scindée. ■

3.5.2 Groupe d'automorphismes des trivecteur de rang 6

Proposition 3.3

Les groupes d'automorphismes $Aut(\omega_{6,1})$ et $Aut(\omega_{6,2})$ vérifient respectivement les suites exactes suivantes :

$$1 \longrightarrow SL_3(K) \times SL_3(K) \longrightarrow Aut(\omega_{6,1}) \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \longrightarrow 1$$

et

$$1 \longrightarrow K^8 \longrightarrow Aut(\omega_{6,2}) \longrightarrow GL_3(K) \longrightarrow 1$$

3.5.3 Groupe d'automorphismes des trivecteur de rang 7

Les groupes d'automorphismes des trivecteurs $\omega_{7,1}$, $i = 1, \dots, 5$, sont déterminés, le groupe $A_1 = Aut(\omega_{7,1})$ est aussi le groupe $A_2 = Aut(\omega_{7,2})$ est donné par les suites

exactes :

$$\begin{aligned}
1 &\longrightarrow A'_2 \longrightarrow A_2 \longrightarrow K^* \longrightarrow 1 \\
1 &\longrightarrow K^9 \longrightarrow A'_2 \xrightarrow{\psi} SL_4(K) \\
1 &\longrightarrow K^3 \longrightarrow \psi(A'_2) \longrightarrow SL_3(K) \longrightarrow 1
\end{aligned}$$

En ce qui concerne le groupe $A_3 = Aut(\omega_{7,3})$ on a les suites exactes :

$$\begin{aligned}
1 &\longrightarrow A'_3 \longrightarrow A_3 \longrightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}} \longrightarrow 1 \\
1 &\longrightarrow A''_3 \longrightarrow A'_3 \longrightarrow K^* \times K^* \longrightarrow 1 \\
1 &\longrightarrow K^{10} \longrightarrow A''_3 \longrightarrow SL_2(K) \times SL_2(K) \longrightarrow 1
\end{aligned}$$

Le groupe $A_4 = Aut(\omega_{7,4})$ est donné par les suites exactes :

$$\begin{aligned}
1 &\longrightarrow A'_4 \longrightarrow A_4 \xrightarrow{\pi} GL_3(K) \\
1 &\longrightarrow PGL_2(K) \longrightarrow \pi(A_4) \longrightarrow K^* \longrightarrow 1 \\
1 &\longrightarrow K^8 \longrightarrow A'_4 \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1
\end{aligned}$$

Enfin le groupe $A_5 = Aut(\omega_{7,5})$ vérifie la suite exacte scindée suivante :

$$A \longrightarrow G_2(K) \longrightarrow A_5 \longrightarrow \mu_3(K) \longrightarrow 1.$$

3.5.4 Groupe d'automorphismes des trivecteur de rang 8

On s'intéresse aux groupes d'automorphismes des trivecteurs (ou les formes trilinéaires alternées) $\omega_{8,i}$, $i = 1, 2$ où l'invariant $d_1(\omega) = 3$.

Le groupe $A_1 = Aut(\omega_{8,1})$

Proposition 3.4

Le groupe d'automorphismes $A_1 = Aut(\omega_{8,1})$ est déterminé par les suites exactes

suivantes :

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow SL_3(K) \longrightarrow A_1 \longrightarrow Aut(\omega_5) \longrightarrow 1 \\ 1 &\longrightarrow A_0 \longrightarrow Aut(\omega_5) \longrightarrow K^* \longrightarrow 1 \\ 1 &\longrightarrow K^4 \longrightarrow A_0 \longrightarrow Sp_4(K) \longrightarrow 1 \end{aligned}$$

où $\omega_5 = e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$

Preuve.

Soit $\omega = e_1^*(e_2^*e_3^* + e_4^*e_5^*) + e_6^*e_7^*e_8^*$, déterminons

$$\overline{R}_{\leq 1}(\omega) = \overline{R}_0(\omega) \cup \overline{R}_1(\omega).$$

Posons donc :

$$f^a : f^a(x, y) = \omega(a, x, y) \text{ avec } a = \sum_{i=1}^8 a_i e_i$$

alors $\omega^a = a_1 e_2^* e_3^* - a_2 e_1^* e_3^* + a_3 e_1^* e_2^* + a_1 e_4^* e_5^* - a_4 e_1^* e_5^* + a_5 e_1^* e_4^* + a_6 e_7^* e_8^* - a_7 e_6^* e_8^* + a_8 e_6^* e_7^*$
donc :

$$\omega^a = (a_1 e_2^* - a_2 e_1^*) e_3^* + (a_1 e_4^* - a_4 e_1^*) e_5^* + (a_6 e_7^* - a_7 e_6^*) e_8^* + e_1^* (a_3 e_2^* + a_5 e_4^*) + a_8 e_6^* e_7^*.$$

Calculons : $\gamma_2(\omega^a) = \frac{(\omega^a)^2}{2!}$ avec $\gamma_2(\omega^a) = 0$, on trouve :

$$a_1 = 0 \text{ et } \begin{cases} a_2 a_6 = 0 \\ a_2 a_7 = 0 \\ a_2 a_8 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_3 a_6 = 0 \\ a_3 a_7 = 0 \\ a_3 a_8 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_4 a_6 = 0 \\ a_4 a_7 = 0 \\ a_4 a_8 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a_5 a_6 = 0 \\ a_5 a_7 = 0 \\ a_5 a_8 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c'est à dire : } \begin{cases} a_2 V = 0 \\ a_3 V = 0 \\ a_4 V = 0 \\ a_5 V = 0 \end{cases} \text{ où } V = \begin{pmatrix} a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{pmatrix}$$

si $V \neq 0$ alors $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = 0$ donc on a le s.e.v $\langle e_6, e_7, e_8 \rangle$,

si $V = 0$ alors $a_6 = a_7 = a_8 = 0$ donc on a le s.e.v $\langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$,

enfin $\overline{R}_{\leq 1}(\omega) = \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle \cup \langle e_6, e_7, e_8 \rangle = V_1 \cup V_2$.

Remarquons que $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, donc si $f \in A_1 = \text{Aut}(\omega)$ on a : $f(\overline{R}_{\leq 1}(\omega)) \subset \overline{R}_{\leq 1}(\omega)$ d'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \{f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2\} \\ \\ \text{ou} \\ \\ \{f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1\}. \end{array} \right.$$

le cas $\{f(V_1) \subset V_2 \text{ et } f(V_2) \subset V_1\}$ est impossible car dans ce cas $f(e_2), f(e_3), f(e_4), f(e_5) \in \langle e_6, e_7, e_8 \rangle$ et $f(e_6), f(e_7), f(e_8) \in \langle e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle$ et $f \in A_1$ c'est à dire $\wedge^3 f(\omega) = \omega$, il suffit de considérer le coefficient de $e_1 e_2 e_3$, on trouve $1 = 0$, d'où $\{f(V_1) \subset V_1 \text{ et } f(V_2) \subset V_2\}$, et la matrice associée à f prend la forme suivant :

$$M(f) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & 0_{1 \times 4} & 0_{1 \times 3} \\ & & \\ \alpha_4 & & \\ & A & 0_{4 \times 3} \\ \alpha_5 & & \\ \alpha_6 & & \\ & & \\ \alpha_7 & & \\ & 0_{3 \times 4} & B \\ \alpha_8 & & \end{pmatrix}$$

Soit $f \in A_1$, $\wedge^3 f(\omega) = \omega$, entraîne :

$$\wedge^3 f [e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)] + \wedge^3 f (e_6 e_7 e_8) = e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5) + e_6 e_7 e_8$$

donc $\wedge^3 f [e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)] + \lambda e_6 e_7 e_8 = e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5) + e_6 e_7 e_8$, alors $c_{678} : \lambda = 1$ avec $\lambda = \det B$ donc : $B \in SL_3(K)$ par suite $\wedge^3 f [e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)] = e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$ c'est à dire $f(e_1) \wedge^2 f(e_2 e_3 + e_4 e_5) = e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$, donc : $f(e_1) e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5) = 0$ par suite : $(\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_8 e_8) e_1 e_2 e_3 + (\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_8 e_8) e_1 e_4 e_5 = 0$ donnent $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_8 = 0$, d'où : $f(e_1) = \alpha_1 e_1$ avec $\wedge^3 f [e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)] = e_1(e_2 e_3 + e_4 e_5)$, on en déduit que

$f/\langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 \rangle \in Aut(\omega_5)$, ce qui permet de définir un homomorphisme de groupe Ψ :

$$A_1 \xrightarrow{\Psi} Aut(\omega_5)$$

$$f \mapsto \Psi(f) = f \setminus \langle e_1, \dots, e_5 \rangle$$

Ψ est évidemment surjectif, car il suffit de prendre $B = Id_3$, d'autre part :

$$Ker(\Psi) = \{f / f \in A_1 \text{ et } \alpha_1 = 1, A = Id_4\},$$

or $\wedge^3 f(\omega) = \omega$, entraîne

$$Ker(\Psi) \approx SL_3(K),$$

d'où l'exactitude de la suite suivante :

$$1 \longrightarrow SL_3(K) \xrightarrow{\Psi} A_1 \longrightarrow Aut(\omega_5) \longrightarrow 1 \quad (*)$$

et comme $Aut(\omega_5)$ vérifie les suites exactes :

$$1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow Aut(\omega_5) \longrightarrow K^* \longrightarrow 1 \quad (**)$$

$$1 \longrightarrow K^4 \longrightarrow A_0 \longrightarrow Sp_4(K) \longrightarrow 1 \quad (***)$$

alors $A_1 = Aut(\omega_{8,1})$ est défini par (*), (**) et (***). ■

Le groupe $A_2 = Aut(\omega_{8,2})$

Proposition 3.5

Le groupe d'automorphismes $A_2 = Aut(\omega_{8,2})$ est déterminé par les suites exactes suivantes :

$$1 \longrightarrow A'_2 \longrightarrow A_2 \longrightarrow K^* \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow A''_2 \longrightarrow A'_2 \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow A'''_2 \longrightarrow A''_2 \longrightarrow K^* \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow K^{16} \longrightarrow A'''_2 \longrightarrow SL_2(K) \longrightarrow 1$$

Preuve.

Déterminons d'abord la partie stable $R_3(\omega) = \{x \in E \mid \varpi(x) \text{ est de rang } 3\}$,
où : $\omega = \omega_{8,2}$, remarquons que $e_1 \in R_3(\omega)$. Soit : $x = \sum_{i=1}^8 \alpha_i e_i$ donc si $\alpha_i \neq 0$,

$$e_1 = \lambda_1 x + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_8 e_8,$$

alors

$$\varpi(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_8 e_8)(e_2 e_3 + e_4 e_5 + e_6 e_7) + e_5 e_6 e_8,$$

par suite :

$$\begin{aligned} \varpi(x) = & \lambda_2 \bar{e}_2 \bar{e}_4 \bar{e}_5 + \lambda_2 \bar{e}_2 \bar{e}_6 \bar{e}_7 + \lambda_3 \bar{e}_3 \bar{e}_4 \bar{e}_5 + \lambda_3 \bar{e}_3 \bar{e}_6 \bar{e}_7 + \lambda_4 \bar{e}_4 \bar{e}_2 \bar{e}_3 + \lambda_4 \bar{e}_4 \bar{e}_6 \bar{e}_7 + \lambda_5 \bar{e}_5 \bar{e}_2 \bar{e}_3 + \\ & \lambda_5 \bar{e}_5 \bar{e}_6 \bar{e}_7 + \lambda_6 \bar{e}_6 \bar{e}_2 \bar{e}_3 + \lambda_6 \bar{e}_6 \bar{e}_4 \bar{e}_5 + \lambda_7 \bar{e}_7 \bar{e}_2 \bar{e}_3 + \lambda_7 \bar{e}_7 \bar{e}_4 \bar{e}_5 + \bar{e}_5 \bar{e}_6 \bar{e}_8 \end{aligned}$$

$$[rg(\varpi(x)) = 3] \Leftrightarrow [\varpi(x) \text{ est décomposable}].$$

Soient les relations :

$$\sum_{i \in J-H} \varepsilon_{i,J,H} a_{j-\{i\}} a_{H \cup \{i\}} = 0. \quad (*)$$

$$\text{où } \varepsilon_{i,J,H} = \pm 1$$

les relations (*) sont appelées les relations de Grassmann : Ce sont donc des conditions nécessaires et suffisantes pour que $\varpi(x)$ soit décomposable.

Posons $J = \{2, 4, 5, 6\}$; $H = \{2, 7\}$ donc $J - H = \{4, 5, 6\}$. Par suite (*) donnent :

$$\varepsilon_4 a_{256} a_{247} + \varepsilon_5 a_{246} a_{257} + \varepsilon_6 a_{245} a_{267} = 0,$$

donc : $\varepsilon_4(0) + \varepsilon_5(0) + \varepsilon_6(\lambda_2)(\lambda_2) = 0$ d'où : $\lambda_2^2 = 0$ c'est à dire $\lambda_2 = 0$.

Posons $J = \{3, 4, 5, 6\}$; $H = \{3, 7\}$ donc $J - H = \{4, 5, 6\}$. Par suite (*) donnent :

$$\varepsilon_4 a_{356} a_{347} + \varepsilon_5 a_{346} a_{357} + \varepsilon_6 a_{345} a_{367} = 0,$$

alors : $\varepsilon_4(0) + \varepsilon_5(0) + \varepsilon_6(\lambda_3)(\lambda_3) = 0$ d'où : $\lambda_3 = 0$.

Posons $J = \{2, 3, 4, 6\}$; $H = \{4, 7\}$ donc $J - H = \{2, 3, 6\}$. Par suite (*) donne :

$$\varepsilon_2 a_{346} a_{247} + \varepsilon_3 a_{246} a_{347} + \varepsilon_6 a_{234} a_{467} = 0,$$

alors : $\varepsilon_6(\lambda_4)(\lambda_4) = 0$ d'où : $\lambda_4 = 0$.

Posons $J = \{2, 3, 5, 6\}$; $H = \{5, 7\}$ donc $J - H = \{2, 3, 6\}$. Par suite (*) donne :

$$\varepsilon_2 a_{356} a_{257} + \varepsilon_3 a_{256} a_{357} + \varepsilon_6 a_{235} a_{567} = 0,$$

alors : $\varepsilon_6(\lambda_5)(\lambda_5) = 0$ d'où : $\lambda_5 = 0$.

Posons $J = \{2, 3, 4, 6\}$; $H = \{5, 6\}$ donc $J - H = \{2, 3, 4\}$. Par suite (*) donne :

$$\varepsilon_2 a_{346} a_{256} + \varepsilon_3 a_{246} a_{356} + \varepsilon_4 a_{236} a_{456} = 0,$$

alors : $\varepsilon_4(\lambda_6)(\lambda_6) = 0$ d'où : $\lambda_6 = 0$.

Posons $J = \{2, 3, 4, 7\}$; $H = \{5, 7\}$ donc $J - H = \{2, 3, 4\}$, alors :

$$\varepsilon_2 a_{347} a_{257} + \varepsilon_3 a_{247} a_{357} + \varepsilon_4 a_{237} a_{457} = 0$$

d'où : $\lambda_7 = 0$.

Posons $J = \{2, 3, 4, 8\}$; $H = \{5, 8\}$ donc $J - H = \{2, 3, 4\}$, alors :

$$\varepsilon_2 a_{348} a_{258} + \varepsilon_3 a_{248} a_{358} + \varepsilon_4 a_{238} a_{458} = 0$$

d'où : $\lambda_8 = 0$.

On en déduit que : $\lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_8 = 0$, c'est à dire $e_1 = \lambda_1 x$ où : $x = \alpha_1 e_1$, on obtient : $R_3(\omega) = \langle e_1 \rangle$

De la permutation

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \\ e_1 & e_5 & e_6 & e_8 & e_2 & e_3 & e_7 & e_4 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

$\omega_{8,2}$ devient $\omega = e_1(e_5 e_6 + e_8 e_2 + e_3 e_7) + e_2 e_3 e_4$.

comme $R_3(\omega) = \langle e_1 \rangle$ est une partie stable donc on peut définir un homomorphisme de groupe π :

$$A_2 \xrightarrow{\pi} K^*$$

$$f \mapsto \pi(f) = \lambda \text{ où } f(e_1) = \lambda e_1.$$

π est surjectif en effet pour $\lambda \in K^*$; il existe $f_0 \in A_2$ définie par :

$$\begin{aligned} f_0(e_1) &= \lambda e_1, \\ f_0(e_2) &= \lambda^{-1}e_2, \\ f_0(e_3) &= e_3, \\ f_0(e_4) &= \lambda e_4, \\ f_0(e_5) &= e_5, \\ f_0(e_6) &= \lambda^{-1}e_6, \\ f_0(e_7) &= \lambda^{-1}e_7, \\ f_0(e_8) &= e_8 \end{aligned}$$

d'où l'exactitude de la suite

$$1 \longrightarrow A'_2 \longrightarrow A_2 \xrightarrow{\pi} K^* \longrightarrow 1 \text{ où } A'_2 = \ker \pi.$$

Soit $f \in A'_2$ alors $\omega = e_1(e_5e_6 + e_8e_2 + e_3e_7) + e_2e_3e_4$ donc $e_1\omega = e_1e_2e_3e_4$ par suite

$$\wedge^4 f(e_1\omega) = f(e_1) \wedge^3 f(\omega) = e_1\omega = \wedge^4 f(e_1e_2e_3e_4),$$

c'est à dire :

$\wedge^4 f(e_1e_2e_3e_4) = e_1e_2e_3e_4$ d'où le *s.e.v* $\langle e_1, e_2, e_3, e_4 \rangle$ est stable par f . Dans ce cas la matrice de f est de la forme :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_2 & x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ 0 & a_4 & b_4 & c_4 & x_4 & y_4 & z_4 & t_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_5 & y_5 & z_5 & t_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_6 & y_6 & z_6 & t_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_7 & y_7 & z_7 & t_7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_8 & y_8 & z_8 & t_8 \end{pmatrix}$$

l'égalité $\wedge^3(\omega) = \omega$ donnent $e_1[(x_1e_1 + \dots + x_8e_8)(y_1e_1 + \dots + y_8e_8) + (t_1e_1 + \dots + t_8e_8)(a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) +$

$$(b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4)(z_1e_1 + \dots + z_8e_8)] + (a_1e_1 + \dots + a_4e_4)(b_1e_1 + \dots + b_4e_4)(c_1e_1 + \dots + c_4e_4) = e_1e_5e_6 + e_1e_8e_2 + e_1e_3e_7 + e_2e_3e_4$$

$$\text{donc : } c_{156} : \begin{vmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{d'où } \begin{pmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{pmatrix} \in SL_2(K).$$

$$\begin{cases} c_{157} : x_5y_7 - x_7y_5 = 0 \\ c_{167} : x_6y_7 - x_7y_6 = 0 \end{cases} \quad \text{donnent } x_7 = y_7 = 0$$

$$\text{et} \quad \begin{cases} c_{158} : x_5y_8 - x_8y_5 = 0 \\ c_{168} : x_6y_8 - x_8y_6 = 0 \end{cases} \quad \text{donnent } x_8 = y_8 = 0$$

ceci nous permet de définir l'homomorphisme t :

$$A'_2 \xrightarrow{t} SL_2(K)$$

$$f \longrightarrow t(f) = \begin{pmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{pmatrix}$$

t est surjectif pour $\begin{pmatrix} x_5 & y_5 \\ x_6 & y_6 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$, il existe $f_1 \in A'_2$ définie par :

$$f_1(e_1) = e_1,$$

$$f_1(e_2) = e_2,$$

$$f_1(e_3) = e_3,$$

$$f_1(e_4) = e_4,$$

$$f_1(e_5) = x_5e_5 + x_6e_6,$$

$$f_1(e_6) = y_5e_5 + y_6e_6,$$

$$f_1(e_7) = e_7,$$

$$f_1(e_8) = e_8$$

on en déduit que la suite suivante est exacte :

$$1 \longrightarrow A''_2 \longrightarrow A'_2 \xrightarrow{t} SL_2(K) \longrightarrow 1 \quad \text{où : } A''_2 = \text{Ker}(t),$$

soit $f \in A''_2$ donc : $x_5 = y_6$ et $x_6 = y_5 = 1$, et comme $\wedge^3 f(\omega) = \omega$ on obtient $e_1[(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3 + x_4e_4 + e_5)(y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 + y_4e_4 + e_6) + (t_1e_1 + \dots +$

$$t_8 e_8)(a_1 e_1 + \dots + a_4 e_4) + (b_1 e_1 + \dots + b_4 e_4)(z_1 e_1 + \dots + z_8 e_8)] + (a_1 e_1 + \dots + a_4 e_4)(b_1 e_1 + \dots + b_4 e_4)(c_1 e_1 + \dots + c_4 e_4) = e_1 e_5 e_6 + e_1 e_8 e_2 + e_1 e_3 e_7 + e_2 e_3 e_4$$

donc on a :

$$c_{234} : \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix} = 1 \text{ et (I) } \dots \begin{cases} c_{182} : t_8 a_2 - b_2 z_8 = 1 \\ c_{183} : t_8 a_3 - b_3 z_8 = 0 \\ c_{184} : t_8 a_4 - b_4 z_8 = 0 \end{cases} \text{ et (II) } \dots \begin{cases} c_{137} : t_7 a_3 - b_3 z_7 = 1 \\ c_{127} : t_7 a_2 - b_2 z_7 = 0 \\ c_{147} : t_7 a_4 - b_4 z_7 = 0 \end{cases}$$

Le système (I) donne : $\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0$, ainsi que le système (II) donne : $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0$

on obtient (III) ... $\begin{cases} a_2 b_4 - b_2 a_4 = 0 \\ a_3 b_4 - b_3 a_4 = 0 \end{cases}$

si : $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ alors :

$$c_{234} : \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_4 - \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} c_3 - \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} c_2 = 1 \text{ c-à-d } 0 = 1 \text{ (absurde), d'où}$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Le système (III) donne $a_4 = b_4 = 0$ et c_{234} devient $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} c_4 = 1$. Ce qui permet de définir un homomorphisme η :

$$A_2'' \xrightarrow{\eta} K^*$$

$$f \longrightarrow \eta(f) = c_4$$

η est surjectif, en effet l'application linéaire f_2 définie par :

$$f_2(e_1) = e_1,$$

$$f_2(e_2) = e_2,$$

$$f_2(e_3) = c_4^{-1} e_3,$$

$$f_2(e_4) = c_4 e_4,$$

$$\begin{aligned}
f_2(e_5) &= e_5, \\
f_2(e_6) &= e_6, \\
f_2(e_7) &= c_4 e_7, \\
f_2(e_8) &= e_8
\end{aligned}$$

est l'antécédant de c_4 d'où l'exactitude de la suite suivante :

$$1 \longrightarrow A_2''' \longrightarrow A_2'' \xrightarrow{\eta} K^* \longrightarrow 1 \quad \text{où : } A_2''' = \text{Ker}(\eta),$$

soit $f \in A_2'''$ donc $c_4 = 1$, or c_{234} donnent $\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 1$ c-à-d $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$;

ceci nous permet de définir un homomorphisme P :

$$A_2''' \xrightarrow{P} SL(K)$$

$$f \longmapsto P(f) = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}$$

P est surjectif en effet pour : $\begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix} \in SL_2(K)$, il existe $f_3 \in A_2'''$ définie par :

$$\begin{aligned}
f_3(e_1) &= e_1, \\
f_3(e_2) &= a_2 e_2 + a_3 e_3, \\
f_3(e_3) &= b_2 e_2 + b_3 e_3, \\
f_3(e_4) &= e_4, \\
f_3(e_5) &= e_5, \\
f_3(e_6) &= e_6, \\
f_3(e_7) &= a_2 e_7 + a_3 e_8, \\
f_3(e_8) &= b_2 e_7 + b_3 e_8.
\end{aligned}$$

Soit $f \in \text{Ker}(P)$ donc $a_2 = b_3 = 1$ et $a_3 = b_2 = 0$ et comme $\wedge^3 f(\omega) = \omega$ alors :
 $e_1[(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + e_5)(y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4 + e_6) + (t_1 e_1 + \dots + t_8 e_8)(a_1 e_1 + e_2) + (b_1 e_1 + e_3)(g_1 e_1 + \dots + g_8 e_8)] + (a_1 e_1 + e_2)(b_1 e_1 + e_3)(c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + e_4) = e_1 e_5 e_6 + e_1 e_8 e_2 + e_1 e_3 e_7 + e_2 e_3 e_4$ donc

$$c_{137} : z_7 = 1, \quad c_{127} : t_7 = 0, \quad c_{182} : t_8 = 1,$$

$c_{183} : z_8 = 0, c_{145} : y_4 = 0, c_{146} : x_4 = 0,$
 $c_{142} : t_4 + b_1 = 0$ alors $t_4 = -b_1, c_{134} : z_4 + a_1 = 0$ alors $z_4 = -a_1,$
 $c_{125} : -y_2 - t_5 = 0$ alors $t_5 = -y_2, c_{126} : x_2 - t_6 = 0$ alors $t_6 = x_2,$
 $c_{135} : -y_3 + z_5 = 0$ alors $z_5 = y_3, c_{136} : x_3 + z_6 = 0$ alors $z_6 = -x_3,$
 $c_{123} : \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - t_3 - z_2 + c_1 - b_1 c_3 - a_1 c_2 = 0$ donc $t_3 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} - z_2 + c_1 -$
 $b_1 c_3 - a_1 c_2.$ (**) enfin la matrice associée à f prend la forme :

$$M(f) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 & c_1 & x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ 0 & 1 & 0 & c_2 & x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 & c_3 & x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a_1 & -b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & y_3 & -y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -x_3 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où t_3 est donné par (**), on obtient $\text{Ker}P \approx K^{16}$ d'où l'exactitude de la suite suivant :

$$1 \longrightarrow K^{16} \longrightarrow A_2''' \xrightarrow{p} SL_2(K) \longrightarrow 1.$$

Ce qui achève la preuve ■

Conclusion

Dans ce mémoire on a pu découvrir des invariants arithmétiques et algébriques que l'on peut associer à un p -vecteur qui permettent de mieux comprendre la classification des formes trilinéaires alternées est interprétable pour écrire certaines classifications des courbes elliptiques.

Bibliographie

- [1] **M. Abou Hashih and L. Bénéteau**, *An alternative way to classify some generalized elliptic curves and their isotopic loops*, Comment. Math. Univ. Carolinae 45 (2004), pp. 237-255.
- [2] **A. Cohen and A. Helminck**, *Trilinear alternating forms on a vector space of dimension 7*, Commun. Algebra 16 (1988), pp. 1-25.
- [3] **D.Ž. Djoković**, *Classification of trivectors of an eight-dimensional real vector space*, Linear Multilinear Algebra 13 (1983), pp. 3-39.
- [4] **G.B. Gurevich**, *Foundations of the theory of algebraic invariants*, Noordhoff. Math. Rev. MR 183733, 1964.
- [5] **N. Midoune**, *Classification des formes trilinéaires alternées de rang 8 sur les corps finis*, Thèse de Doctorat en Sciences, Université de Batna, Algerie, 2009.
- [6] **L. Noui**, *Classification des trivecteurs par l'action du groupe linéaire*, Thèse de Doctorat Université de Montpellier II, France, 1995.
- [7] **L. Noui**, *Transvecteurs de rang 8 sur un corps algébriquement clos*, C. R. Acad. Sci. Pris, Série I : Algèbre 324 (1997), pp. 611-614.
- [8] **L. Noui and N. Midoune**, *K-forms of 2-step splitting trivectors*, Int. J. Algebra 2 (2008), pp. 369-382.
- [9] **L. Noui and Ph. Revoy**, *Formes multilinéaires alternées*, Ann. Math. Blaise Pascal 1 (1994), pp.43-69.
- [10] **L. Noui and Ph. Rvoy**, *Algèbres de Lie orthogonales et formes trilinéaires alternées*, Commun. Algebra 25 (1997), pp. 617-622.
- [11] **E.M. Rains and J.A. Sloane**, *Self-dual codes*, in *Handbook of Coding Theory*, V.S. Pless and W.C. Huffman, eds, Elsevier, Amsterdam, 1998, pp. 177-294.

- [12] **J.A. Schouten**, *Klassifizierung der alternierenden Größen dritten in 7 Dimensionen*, Rend. Circ. Mat. Palermo 55 (1931), pp. 137-156.
- [13] **Eh.B. Vinberg and A.G. Ehlahvili**, *Classification of trivectors of a 9-dimensional space*, (English) J. Sel. Math. Sov. 7 (1988), pp. 63-98 (Translation from Tr. Semin. Vektorn. Tensorn. Anal. Prilozh. Giom. Mekh. Fiz. 18, 197-233 (Russian) (1978; Zbl 0441. 15010)).