

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Discrètes

Par

1- MERZOUG Samiha

2- SAOUDI Warda

Sujet

Théorèmes des points fixes dans des structures ordonnées

Date de soutenance : 28-05-2017

Devant le jury :

Mr. ZEDAM Lemnaouar	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. MILLES Soheyb	Prof. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. FERAHTIA Nassim	Prof. Univ de M'sila	Examineur

Promotion : 2016 / 2017

Dédicaces

*Avant tous, je remercie **dieu** le tout puissant de
m'avoir donné le courage et la patience pour réaliser ce
Travail malgré toutes les difficultés rencontrées.*

Je dédie ce modeste travail :

*A ma **mère** et mon **père** (والد والدة)*

A mon très cher frère et mes sœurs.

A toute ma famille

A mes chers amis

A tous ceux que j'aime et qui m'aiment.

*A tous ceux qui connaissent **Merzoug Samiha**.*

A tous les amis de travail.

Samiha

Dédicace

*A mon père «Sahraoui» (سحراوي) qui j'aurais bien voulu
partager ce moment important et solennel de ma vie*

A ma très chère Mère « Hadda »

Pour vos mains qui ont tant travaillées,

Pour votre cœur qui m'a tant donné

Pour votre sourire qui m'a tant réchauffé,

Pour vos yeux qui furent parfois mouillés,

Pour vous qui m'avez tant aimé.

A mon chère frère: Abdelwahab

A mes adorables sœurs : Ilham, Youssra et Hibate Allah.

*A mes amies que j'ai vécu avec elles des beaux moments
au cours de mon cursus à l'université*

A tous ceux que j'aime

A tous qui me connaisse de près ou de loin.

Je dédie ce travail

Warda

Remerciements

*Nous tenons à remercier tout premièrement **Dieu** le tout puissant pour la volonté, la santé et la patience, qu'il nous a donné durant toutes ces longues années.*

*Je tiens également à exprimer mes vifs remerciements à mon Encadreur Monsieur **MILLES Soheyb** pour avoir d'abord proposé ce thème, et mon Co-Encadreur **ZEDAM Lemneouar** poursuivi culturellement tout le long du parcours et qui na pas cessée de me donner des conseils et les remarques.*

*Nos remerciements vont aussi l'examineur **FERAHTIA Nassim***

Nous tenons à remercier vivement toutes personnes qui nous ont Aidés à élaborer et réaliser ce mémoire, ainsi à tous ceux qui nous ont aidés de près ou de loin à accomplir ce travail.

Nos remerciements vont aussi à tous les travailleurs du service mathématique qui ont contribués à notre formation

Accepté de juger notre travail.

*En fin, nous tenons à exprimer notre reconnaissance à tous
nos*

Amis et collègues pour le soutien moral et matériel...

Table des matières

Introduction	3
1 Généralités sur les ensembles ordonnés	5
1.1 Généralités sur les ensembles	5
1.1.1 Notions de base	5
1.1.2 Les opérations sur les ensembles	6
1.2 Les relations d'ordres	8
1.2.1 Notions de base	8
1.2.2 Interactions des relations avec les opérations ensemblistes	11
1.2.3 Relations d'ordres	13
1.3 Treillis	18
1.3.1 Définitions et exemples	18
1.3.2 Propriétés algébriques des treillis	19
1.3.3 Quelques classes des treillis	20
2 Théorèmes des points fixes dans des structures ordonnées	23
2.1 Théorèmes de point fixe dans un ensemble ordonné	23
2.2 Théorèmes de point fixe dans un treillis complet	26
2.3 Théorèmes de point fixe dans un ensemble ordonné chaîne-complète	29
2.3.1 Caractérisation des treillis complet par les chaînes et les chaînes maximales	29
2.3.2 Théorème de point fixe dans un ensemble ordonné chaîne-complète	31

Conclusion	37
Bibliographie	38

Introduction

Le premier des théorèmes des points fixes pour les ensembles ordonnés a existé au moins 50 ans avant les théorèmes de Knaster et Tarski [9]. Un ensemble ordonné P à la propriété du point fixe, si pour tout fonction monotone f de P dans lui-même il existe au moins un élément dans P laissé fixe par l'application f . Soit P un ensemble et $f : P \rightarrow P$. Un point fixe de f est n'importe quel élément $a \in P$ tel que $f(a) = a$, un des plus important rôle de la propriété du point fixe c'est qu'elle est parmi les solutions de beaucoup des problèmes en algèbre et en analyse peuvent être transformés de sorte que leur solution soit solution d'une équation de la forme $f(x) = x$ pour une f donnée sur un ensemble, leur solution est donc un point fixe.

Au début de 1920, Knaster [9] établit le problème suivant: Une fonction d'un ensemble strictement inductif dans lui-même expansive possède au moins un point fixe.

Dans la structure d'un treillis, ce problème résolu par Tarski [18] est prouvé en 1955 que chaque treillis complet admet la propriété du point fixe. Par contre Davis [3] est prouvé en 1955 que chaque treillis à la propriété du point fixe est un treillis complet. D'autre part le théorème de point fixe dans un ensemble ordonné chaîne-complète prouvé par Abian et Brown [1] en 1961.

La propriété du point fixe à des nombreuses utilisations dans plusieurs branches des mathématiques en analyse, un théorème de point fixe est un résultat qui permet d'affirmer qu'une fonction f admet sous certaines conditions un point fixe. Ces théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématiques, principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielle. Le théorème du point fixe de Banach donne un critère général dans les espaces métriques complets pour assurer que le procédé d'itération d'une fonction tende vers un point fixe.

Très différent, le théorème de point fixe de Brouwer n'est pas constructif : il garantit l'existence d'un point fixe d'une fonction continue définie de la boule unité fermée euclidienne sur elle-même sans apporter de méthode générale pour le trouver.

Le théorème du point fixe de Lebesgue est très important en topologie algébrique car il permet d'une certaine manière de trouver un moyen de compter les points fixes.

L'objectif de ce travail est de donner quelques théorèmes de point fixe dans des

structures ordonnées, dans un ensemble ordonné, dans un treillis complet et enfin dans un ensemble ordonné chaîne-complète.

C'est dans cette optique, notre travail vient selon le plan suivant:

Dans le premier chapitre, on présente quelques notions de base sur les ensembles ordonnés, les relations binaires et les treillis avec des exemples d'illustration.

Dans le deuxième chapitre, on étudie quelques théorèmes de point fixe, on donne les fameux théorèmes qui sont exprimés le point fixe dans un ensemble ordonné où on trouve la démonstration du théorème de Rival et le résultat de Bourbaki-Knaster dans cette structure d'un ensemble ordonné, aussi dans un treillis on démontre le théorème de Tarski et inversement le théorème de Davis et enfin dans un ensemble ordonné chaîne-complète on démontre le théorème de Abian Brown et d'autres résultats sur ce type des structures ordonnées.

Finalement on termine ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Généralités sur les ensembles ordonnés

Ce chapitre est divisé en trois sections, dans la première section, "Généralités sur les ensembles", nous avons donné des notions et des outils liés à la théorie des ensembles, qui permettant de définir et représenter une relation binaire.

Dans la deuxième section, "Les relations d'ordres" nous rappelons les concepts et les notions de base nécessaires relatives à la théorie des relations, nous proposons pour chacune aussi un exemple illustratif.

La dernière section, "Treillis" consiste à définir et étudier les treillis en générale avec certaines définitions et propriétés algébriques importantes qu'ils identifient et caractérisent quelques classes des treillis en particulier avec des exemples illustratifs.

1.1 Généralités sur les ensembles

Dans cette partie on donne quelques définitions et quelques opérations sur les ensembles.

1.1.1 Notions de base

Définition 1.1.1 (L'ensemble) *Un ensemble est une collection non ambiguë d'objets tous distincts, appelés éléments de l'ensemble. Pour dire que a est un élément d'un en-*

semble E , on écrit $x \in E$, dans le cas contraire, on écrit $x \notin E$. Un ensemble peut être écrit :

En extension : On donne la liste de ses éléments, par exemple : Si $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sont les éléments de l'ensemble A , on écrit :

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}.$$

En compréhension : On donne la ou les propriétés qui caractérisent ses éléments. Par exemple, si les éléments de l'ensemble B satisfont les conditions $P_1, P_2, \dots, P_n$ alors l'ensemble B est définie par :

$$B = \{b \mid b \text{ satisfait } P_1, P_2, \dots, P_n\}.$$

Dans ce cas, le symbole " $\mid$ " implique le sens de « tels que ».

En Fonction caractéristique: Un sous-ensemble classique A de X est défini par une fonction caractéristique χ_A qui prend la valeur 0 pour les éléments de X n'appartenant pas à A et la valeur 1 pour ceux qui appartiennent à A :

$$\begin{aligned} \chi_A &: X \longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si et seulement si } x \in A \\ 0 & \text{si et seulement si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

1.1.2 Les opérations sur les ensembles

Définition 1.1.2 Soient X et Y deux ensembles, on définit les opérations suivant :

i) **Inclusions :** X est un sous-ensemble de Y ou est inclus dans Y , si tous les éléments de l'ensemble X sont des éléments de l'ensemble Y

$$X \subset Y \Leftrightarrow \forall x \in X, x \in Y.$$

ii) **Egalité :** Deux ensembles sont égaux s'ils sont composés des mêmes éléments

$$X = Y \Leftrightarrow (\forall x \in X, x \in Y) \text{ et } (\forall y \in Y, y \in X).$$

iii) **Intersection** : On appelle intersection des deux ensembles X et Y , l'ensemble noté $X \cap Y$ des éléments qui appartiennent à la fois à X et Y

$$X \cap Y = \{x; x \in X \text{ et } x \in Y\}.$$

iv) **L'union** : On appelle union des deux ensembles X et Y , l'ensemble noté $X \cup Y$ des éléments qui appartiennent à X ou à Y

$$X \cup Y = \{x; x \in X \text{ ou } x \in Y\}.$$

v) **La complémentation** : Le complémentaire d'un ensemble X par rapport à E est l'ensemble des éléments appartenant à E mais n'appartenant pas à X

$$C_E(X) = X^C = \{x; x \in E \text{ et } x \notin X\}.$$

Définition 1.1.3 (Produit cartésien) Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des ensembles $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ est l'ensemble des suites $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec pour tout $i : x_i \in X_i$. Ces suites sont encore appelées «vecteurs» ou «n-uples». Pour tout ensemble X , on note X^n le produit cartésien $X \times X \times \dots \times X$ (n fois). Les éléments de X^n sont les n -uples d'éléments de X .

En particulier pour $(n = 2)$: Soient X et Y deux ensembles non vides.

$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ et } y \in Y\}$. Si $X = Y$, $X \times Y = X^2$ (**carré cartésien**).

Notation 1.1.1 Soient $(x, y) \in X \times Y$.

x est **la première coordonnée** du couple (x, y) ,

y est **la deuxième coordonnée** du couple (x, y) .

Si $((x, y), (x', y')) \in (X \times Y)^2$. Alors: $(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } y = y'$.

1.2 Les relations d'ordres

Dans cette section nous donnons quelques notions de base et les interactions des relations avec les opérations ensemblistes, et nous donnons quelques définitions qui approchent des relations d'ordres.

1.2.1 Notions de base

Définition 1.2.1 (Relation binaire) Soient X et Y deux ensembles. On appelle relation binaire de X vers Y tout partie de $X \times Y$. Si $\mathfrak{R}$ est une relation binaire de X vers Y et si $(x, y) \in \mathfrak{R}$, on noté alors $x\mathfrak{R}y$ ou $\mathfrak{R}(x, y)$. On appelle relation binaire sur un ensemble X , tout relations binaires de X dans X .

Exemple 1.2.1 *i. Soient $X = \{\text{Albert, Bernard, Charles}\}$, $Y = \{\text{Zo, Yolande, Xavire, Wanda}\}$ et la relation $a\mathfrak{R}b$ si et seulement si a est le **mari** de b .*

$$\mathfrak{R} = \{(\text{Albert, Zo}), (\text{Bernard, wanda}), (\text{Charles, Yolande})\}.$$

ii. Soient $X = \mathbb{Z}$ et $Y = \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \{(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4), \dots\} \\ &= \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Définition 1.2.2 Soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire sur un ensemble non vide X .

$\mathfrak{R}$ est Réflexive $\iff \forall x \in X : x\mathfrak{R}x$,

$\mathfrak{R}$ est Symétrique $\iff \forall x, y \in X : x\mathfrak{R}y \Rightarrow y\mathfrak{R}x$,

$\mathfrak{R}$ est Antisymétrique $\iff \forall x, y \in X : (x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}x) \Rightarrow x = y$,

$\mathfrak{R}$ est Transitive $\iff \forall x, y, z \in X : (x\mathfrak{R}y \text{ et } y\mathfrak{R}z) \Rightarrow x\mathfrak{R}z$.

Définition 1.2.3 (Relation inverse) La relation inverse notée $\mathfrak{R}^T$ d'une relation $\mathfrak{R}$, est l'ensemble de toutes les paires (y, x) telles que (x, y) satisfait $\mathfrak{R}$. Ainsi

$$\mathfrak{R}^T \equiv \{(y, x) \mid (x, y) \in \mathfrak{R}\}.$$

Exemple 1.2.2 Sur l'exemple (1.2.1 (ii)) on a:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= \{(0, 0), (-1, 1), (1, 1), (-2, 4), (2, 4), \dots\} \\ &= \{(x, x^2) : x \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Donc:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}^T &= \{(0, 0), (1, -1), (1, 1), (4, -2), (2, 4), \dots\} \\ &= \{(x^2, x) : x \in \mathbb{Z}\}.\end{aligned}$$

Propriétés des relations binaires

On s'intéresse maintenant aux propriétés fondamentales des relations binaires définies sur le même ensemble X .

Définition 1.2.4 (Réflexivité, irréflexivité et non-réflexivité) La relation $\mathfrak{R}$ est

Réflexive, si et seulement si pour tout $x \in X$, $x\mathfrak{R}x$.

Irréflexive, si et seulement si pour tout $x \in X$, $(x, x) \notin \mathfrak{R}$.

Non réflexive, si et seulement si pour tous $x, y \in X$, $(\exists x \in X : (x, x) \in \mathfrak{R}) \wedge (\exists y \in Y : (y, y) \notin \mathfrak{R})$.

La proposition suivante donne quelques propriétés de la réflexivité d'une relation binaire:

Proposition 1.2.1 1. Toute relation **réflexive** dans sa matrice caractéristique est

diagonale égale à 1.

2. Tout **graphe réflexif** comporte une boucle par sommet.

3. Toute relation **irréflexive** dans sa matrice caractéristique est diagonale égale à 0.

4. La diagonale de la matrice caractéristique d'une relation non réflexive comporte au moins un 1 et au moins un 0.

Exemple 1.2.3 La relation $\triangle_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$ est **réflexive**.

Définition 1.2.5 (Symétrie, asymétrie et antisymétrie) La relation $\mathfrak{R}$ est:

Symétrique, si et seulement si pour tous $x, y \in X$, $x\mathfrak{R}y \implies y\mathfrak{R}x$.

Asymétrique, si et seulement si pour tous $x, y \in X$, $(x, y) \in \mathfrak{R} \implies (y, x) \notin \mathfrak{R}$.

Antisymétrique, si et seulement si pour tous $x, y \in X$, $x\mathfrak{R}y \wedge y\mathfrak{R}x \implies x = y$.

Exemple 1.2.4 La relation $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{R}^T$ est toujours symétrique.

Définition 1.2.6 (Transitivité et intransitivité) La relation $\mathfrak{R}$ est :

Transitive, si et seulement si pour tous $x, y, z \in X$, $x\mathfrak{R}y \wedge y\mathfrak{R}z \implies x\mathfrak{R}z$,

Intransitive ou (anti-transitive), si et seulement si pour tous $x, y, z \in X$,

$$x\mathfrak{R}y \wedge y\mathfrak{R}z \implies (x, z) \notin \mathfrak{R}.$$

Exemple 1.2.5 Les relations $0_X, \Delta_X, U_X$ sont transitives.

Représentations des relations binaires

On suppose que X et Y sont des ensembles finis de cardinal respectif m et n .

Définition 1.2.7 (Représentation matricielle) Soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire. On définit les éléments de la matrice $M_{\mathfrak{R}} = (r_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq n}$ comportant m lignes et n colonnes dont les coefficients sont 0 ou 1 par la manière suivante :

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i\mathfrak{R}y_j \\ 0 & \text{si non.} \end{cases}$$

La matrice $M_{\mathfrak{R}}$ représente la relation binaire $\mathfrak{R}$.

Exemple 1.2.6 Reprenons l'exemple (1.2.1 (i)). La matrice $M_{\mathfrak{R}}$ de la relation $\mathfrak{R}$ est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1.2.2 Si $M_{\mathfrak{R}}$ est la matrice associée d'une relation $\mathfrak{R}$, la matrice associée de la relation inverse $\mathfrak{R}^T$ est tout simplement la transposée de $M_{\mathfrak{R}}$:

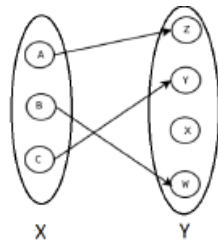
$$M_{\mathfrak{R}^T} = (M_{\mathfrak{R}})^t.$$

Définition 1.2.8 (Représentaion graphique) Soit $\mathfrak{R}$ une relation binaire, on peut représenter $\mathfrak{R}$ par un graphe bipartite (c'est à dire qu'il y a une partition $X \cup Y$ des sommets du graphe et que chaque arc va de X vers Y). On définit maintenant le graphe de $\mathfrak{R}$ comme suit :

$$G_{\mathfrak{R}} = (X \cup Y, \mathfrak{R}).$$

Remarque 1.2.1 (Graphe d'une relation inverse) Le graphe de $\mathfrak{R}^T$ est obtenu en inversant les flèches **d'arces** du graphe de $\mathfrak{R}$.

Exemple 1.2.7 Sur l'exemple (1.2.1 (i)), le graphe de $\mathfrak{R}$ est représenté comme suit :



La représentation graphique de la relation $\mathfrak{R}$.

1.2.2 Interactions des relations avec les opérations ensemblistes

Soient $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ deux relations dans X vers Y . Tant que $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ sont des sous ensembles de $X \times Y$, on peut leur appliquer les opérations ensemblistes de l'inclusion, l'union, l'intersection, le complément,..., pour construire des relations de X vers Y .

Définition 1.2.9 (Inclusion) Soient $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ deux relations binaires. On dit que $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{S}$ si et seulement si :

$$(x, y) \in \mathfrak{R} \text{ alors } (x, y) \in \mathfrak{S} \text{ pour tout } (x, y) \in X \times Y.$$

Définition 1.2.10 (Union et intresection) La relation " $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}$ " se décrit par :

$$\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S} = \{(x, y) \in X \times Y \mid x\mathfrak{R}y \text{ ou } x\mathfrak{S}y\}.$$

De même la relation " $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ " se décrit par :

$$\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S} = \{(x, y) \in X \times Y \mid x\mathfrak{R}y \text{ et } x\mathfrak{S}y\}.$$

La relation $\mathfrak{R}^T$ et $\mathfrak{S}^T$ vont de Y vers X . Il est facile d'établir que :

$$(\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S})^T = \mathfrak{R}^T \cup \mathfrak{S}^T \text{ et } (\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S})^T = \mathfrak{R}^T \cap \mathfrak{S}^T.$$

Exemple 1.2.8 Soit X un ensemble d'êtres humains. Considérons sur X les relations $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ définies par:

$$x\mathfrak{R}y \Leftrightarrow "x \text{ est le père de } y",$$

$$x\mathfrak{S}y \Leftrightarrow "x \text{ est la mère de } y".$$

Dans ce contexte $\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}$ est la relation "est parent de" et $(\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S})^{-1}$ est la relation "est enfant de". On peut s'attendre à ce que la relation $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}$ soit vide puisque " x est à la fois le père et la mère de y ".

Proposition 1.2.3 1. $M_{\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}} = M_{\mathfrak{R}} \vee M_{\mathfrak{S}}$ i.e : $(M_{\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}})_{i,j} = r_{ij} \vee s_{ij}$, où $\vee$ dénote le ou inclusif.

2. $M_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}} = M_{\mathfrak{R}} \wedge M_{\mathfrak{S}}$ i.e : $(M_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}})_{i,j} = r_{ij} \wedge s_{ij}$, où $\wedge$ dénote le et.

Exemple 1.2.9 Soient $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ deux relations sur X définies par la matrice associée:

$$M_{\mathfrak{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices associées à l'union et l'intersection sont définies respectivement :

$$M_{\mathfrak{R} \cup \mathfrak{S}} = M_{\mathfrak{R}} \vee M_{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathfrak{R} \cap \mathfrak{S}} = M_{\mathfrak{R}} \wedge M_{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Définition 1.2.11 (Complémentaire) Soit $\mathfrak{R}$ une relation de $X \times Y$, on note $\mathfrak{R}^c$ et on appelle relation complémentaire de $\mathfrak{R}$, la relation de X vers Y définie par :

$$(x, y) \in \mathfrak{R}^c \iff (x, y) \notin \mathfrak{R}.$$

La matrice de la relation $\mathfrak{R}^c$ est la matrice complément de $M_{\mathfrak{R}^c} = M_{\mathfrak{R}}^c$.

Exemple 1.2.10 Soient $X = \{1, 2, 3, 4\}$ et $Y = \{a, b, c\}$. On définit la relation $\mathfrak{R}$ par :

$\mathfrak{R} = \{(1, a), (1, b), (2, b), (2, c), (3, b), (4, a)\}$ le produit cartésien de $X \times Y$:

$$X \times Y = \left\{ \begin{array}{l} (1, a), (1, b), (1, c), (1, d), (2, a), (2, b), (2, c), (2, d), \\ (3, a), (3, b), (3, c), (3, d), (4, a), (4, b), (4, c), (4, d) \end{array} \right\}.$$

Donc $\mathfrak{R}^c = \{(1, c), (2, a), (3, a), (3, c), (4, b), (4, c)\}$.

Définition 1.2.12 (Composition) Soient les relations $\mathfrak{R} \subseteq X \times Y$ et $\mathfrak{S} \subseteq Y \times Z$, on

appelle composée de $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ la relation notée $\mathfrak{S} \circ \mathfrak{R} \subseteq X \times Z$ est définie par :

$$\mathfrak{S} \circ \mathfrak{R} = \{(x, z) \in X \times Z \mid \exists y \in Y, (x \mathfrak{R} y \wedge y \mathfrak{S} z)\}.$$

Exemple 1.2.11 Soient $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{a, b, c\}$ et $Z = \{a', b', c'\}$ trois ensembles.

On définit la relation $\mathfrak{R}$ entre X et Y , et $\mathfrak{S}$ entre Y et Z par : $\mathfrak{R} = \{(1, b), (2, b), (2, c)\}$

et $\mathfrak{S} = \{(a, b'), (b, b'), (b, a')\}$

La composition de $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{S}$ est la relation $\mathfrak{S} \circ \mathfrak{R} \subseteq X \times Z$ donné par

$$\mathfrak{S} \circ \mathfrak{R} = \{(1, b'), (1, a'), (2, b'), (2, a')\}.$$

1.2.3 Relations d'ordres

Définition 1.2.13 (Relation d'ordre) : Une relation $\mathfrak{R}$ sur un ensemble X est appelée une relation d'ordre si pour tous $x, y, z \in X$ on a les propriétés suivantes :

Réflexivité : $x \mathfrak{R} x$,

Antisymétrie : $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} x \Rightarrow x = y$,

Transitivité : $x \mathfrak{R} y$ et $y \mathfrak{R} z \Rightarrow x \mathfrak{R} z$.

Définition 1.2.14 (Ensemble ordonné) Un ensemble ordonné ou ordre est un couple $(X, \leq_P)$ où X est un ensemble non vide et $\leq_P$ une relation d'ordre définie sur X , (i.e. réflexive, antisymétrique et transitive).

On note $P = (X, \leq_P)$ où P l'ensemble ordonné ou ordre.

Exemple 1.2.12 1. $(\mathbb{N}, \leq)$ L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels muni de la relation d'ordre à habituelle: $x \leq y$.

2. $(P(E), \subseteq)$ $P(E)$ Muni de la relation d'inclusion $x \subset y$ (E étant un ensemble quelconque).

3. $(\mathbb{N}^*, |)$ L'ensemble $\mathbb{N}^*$ muni de la relation de divisibilité $x \mid y$ (x divise y) définie par:

$$\text{il existe } a \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = ax.$$

Définition 1.2.15 (Ordre total) Soit X un ensemble et soit $\leq$ une relation d'ordre sur X . L'ordre est total si deux éléments quelconques de X sont toujours comparables :

$$\forall (x, y) \in X \times X, x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Dans le cas contraire, l'ordre est dit **partiel**:

$$\exists (x, y) \in X \times X, x \not\leq y \text{ et } y \not\leq x.$$

Exemple 1.2.13 Soit Y un ensemble et $X = P(Y)$, on considère $X = P(Y)$ la relation binaire « $\subset$ », alors :

« $\subset$ » est une relation d'ordre sur X :

1. « $\subset$ » est réflexive, car pour tout ensemble $A = P(A)$ on a $A \subset A$,

2. « $\subset$ » est transitive, car pour tous $A, B, C \in P(A)$:

$$(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow \forall x((x \in A \Rightarrow x \in B)) \wedge ((x \in B \Rightarrow x \in C)) \Rightarrow \forall x((x \in A \Rightarrow x \in C))$$

(car le connecteur $(\Rightarrow)$ est transitive),

3. « $\subset$ » est antisymétrique, car pour tous $A, B \in P(A)$:

$$(A \subset B) \wedge (B \subset A) \iff A = B.$$

De (1), (2) et (3) on déduit que « $\subset$ » est une relation d'ordre sur X .

L'ordre est-il total ?

Si $Y = \emptyset$ alors, $X = \{\emptyset\}$ et on a: $\forall A, B \in X, A = B = \emptyset$ donc, $\forall A, B \in X : A \subset B$.

Ce qui montre que l'ordre est total.

Si Y est singleton, alors il existe a tel que $Y = \{a\}$ et $Y = \{\{a\}, \emptyset\}$, donc pour tous A et B dans X on a

$$((A = \{a\}) \vee (A = \emptyset)) \wedge ((B = \{a\}) \vee (B = \emptyset)).$$

Donc $\forall A, B \in X$:

$$((A \subset B) \vee (B \subset A))$$

Ce qui montre que l'ordre est total.

Si Y contient au moins deux éléments distincts a et b , alors

$$\exists A = \{a\}, B = \{b\} \in E : (A \not\subset B) \wedge (B \not\subset A),$$

donc A et B ne sont pas comparables, par suite « $\subset$ » est une relation d'ordre partiel dans X .

Définition 1.2.16 (Préordre) Soit X un ensemble. Une « relation préordre » ou « préordre » sur X est une relation binaire sur X , qu'on peut noter $x \leq y$ pour deux éléments quelconques x et y de X , telle que :

(i) $\forall x \in X : x \leq x$ (Réflexivité),

(ii) $\forall x \in X, \forall y \in X, \forall z \in X : (x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$ (Transitivité).

Exemple 1.2.14 L'ordre partiel et l'équivalence sont deux variétés particulières du préordre .

Définition 1.2.17 (Ordre strict) Soit X un ensemble, l'ordre P sera dit « ordre strict » et noté $P = (X, <_P)$ si la relation « $<_P$ » vérifie les deux propriétés suivantes:

(i) $\forall (x, y, z) \in X^3 : (x <_P y) \wedge (y <_P z) \Rightarrow (x <_P z)$ (Transitivité),

(ii) $\forall x \in X, x \not<_P x$ (Anti-réflexivité).

Exemple 1.2.15 1. $(\mathbb{R}, <)$ est un ordre strict,

2. $(\mathbb{N}, <)$ est un ordre total strict sur l'ensemble $\mathbb{N}$, ou $\ll \langle \rangle \gg$ est la relation strictement inférieure usuelle de $\mathbb{N}$.

Définition 1.2.18 (Section initiale, section finale) Soit X un ensemble ordonné, $a \in X$.

- Une section initiale engendrée par a notée $\downarrow a = \{x \in X \mid x \leq a\}$,
- Une section finale engendrée par a notée $\uparrow a = \{x \in X \mid a \leq x\}$.

Eléments remarquables

Définition 1.2.19 (Eléments minimaux et éléments maximaux) Soit X un ensemble ordonné et soit $a \in X$:

1. On dit que a est élément minimal de X si le seul élément x de X vérifiant $x \leq a$ est $x = a$ lui-même,
2. On dit que a est élément maximal de X si le seul élément x de X vérifiant $a \leq x$ est $x = a$ lui-même.

Définition 1.2.20 (Majorant et minorant) Soit X un ensemble ordonné et soit E une partie non vide de X :

1. On appelle majorant d'une partie E de X tout élément m de X tel que : pour tout $x \in E$: $x \leq m$,
2. On appelle minorant d'une partie E de X tout élément m de X tel que : pour tout $x \in E$: $m \leq x$.

Définition 1.2.21 (Borne inférieure et borne supérieure) Soit X un ensemble ordonné et soit E une partie non vide de X .

1. On dit que $a \in X$ une borne inférieure de E dans X si a est le plus grand minorant de E dans X . Si elle existe, cette borne inférieure est unique. On la note $\inf(E)$ ou $\inf_X(E)$.

2. On dit que $a \in X$ une borne supérieure de E dans X si a est le plus petit majorant de E dans X . Si elle existe, cette borne supérieure est unique. On la note $\sup(E)$ ou $\sup_X(E)$.

Exemple 1.2.16 Soit un ensemble ordonné $(X, \leq) = (\mathbb{R}, \leq)$, et soit $\mathbf{A} = [0, 1[$, $\mathbf{B} = \mathbb{Z}$ et $\mathbf{C} = [1, 2]$.

- Pour l'ensemble $\mathbf{A}$: tout réel $x \geq 1$ est majorant de A , tout réel $x < 0$ est minorant de A .

- A n'a pas de plus grand élément mais a un plus petit élément 0. $\sup A = 1$ et $\inf A = 0$.

- Pour l'ensemble $\mathbf{B}$: il n'y a ni majorant, ni minorant de B . B n'a ni plus petit élément, ni plus grand élément, $\sup B$ et $\inf B$ n'existent pas dans $\mathbb{R}$.

- Pour l'ensemble $\mathbf{C}$: tout réel $x > 2$ est majorant de C , tout réel $x < 1$ est minorant de C . C a pour plus petit élément 1 et pour plus grand élément 2, $\sup C = 2$ et $\inf C = 1$.

Définition 1.2.22 (Minimum, maximum) Soit E un ensemble ordonné et $a \in E$:

On dit que a est un minimum de E (ou le plus petite élément de E) lorsque pour tout $x \in E$ on a : $a \leq x$.

On dit que a est un maximum de E (ou le plus grand élément de E) lorsque pour tout $x \in E$ on a : $b \geq x$.

Exemple 1.2.17 On reprend la relation inclusion et

$A = \{\{1, 2, 3\}, \{0, 4\}, \{1, 3, 5\}, \{1, 5\}, \{1, 3\}, \{5, 3\}, \{0, 5, 6, 7\}\}$. Alors :

Les éléments minimaux de A sont : $\{0, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 3\}, \{5, 3\}$ et $\{0, 5, 6, 7\}$.

Les éléments maximaux de A sont : $\{0, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 5\}, \{0, 5, 6, 7\}$.

A n'a pas de plus petit élément et n'a pas de plus grand élément.

1.3 Treillis

Un treillis est une classe particulière d'ensemble ordonné où on prend en considération la notion d'inférieur et supérieur des éléments. A ce niveau, nous allons étudier quelques classes de treillis, comme les treillis fermés, distributifs, complémentés, modulaires et booléens.

1.3.1 Définitions et exemples

Définition 1.3.1 (Treillis) *Un treillis L est un ensemble partiellement ordonné tel que tout ensemble de deux éléments $\{x, y\} \subset L$ admet une borne supérieure notée $x \vee y$ et une borne inférieure notée $x \wedge y$, on le note $(L, \leq, \vee, \wedge)$.*

1. L'ensemble des parties d'un ensemble muni de l'inclusion forme un treillis ou la borne supérieure est l'union et la borne inférieure est l'intersection comme: $S = \{a, b, c\}$, $(P(S), \subseteq)$ est un treillis.
2. L'ensemble des ouverts d'un espace topologique muni de l'inclusion forme un treillis.
3. L'ensemble des entiers naturels muni de son ordre usuel est un treillis.
4. L'ensemble des entiers naturels muni de la relation "divise" forme un treillis, ou la borne supérieure est le **PPCM** et la borne inférieure le **PGCD** comme : Soit $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ l'ensemble de diviseurs positifs de 12, $(D(12), |)$ est un treillis tel que $x | y$ (x divise y).

Définition 1.3.2 *Un treillis L est fermé s'il possède un plus grand élément noté 1_L et un plus petit élément noté 0_L .*

Exemple 1.3.1 1. Le treillis $D(30)$ l'ensemble des diviseurs de 30 est fermé $0_L = 1$ et $1_L = 30$.

2. $(P(E), \subseteq, \cap, \cup)$ fermé, $0_L = \emptyset$ et $1_L = E$.

Définition 1.3.3 *Un treillis L est dit complet si et seulement si tout sous-ensemble de L admet une borne supérieure et une borne inférieure dans L .*

Exemple 1.3.2 1. *L'ensemble des parties d'un ensemble muni de l'inclusion est un treillis complet avec*

$$\sup(\{E_i\}) = \cup E_i \text{ et } \inf(\{E_i\}) = \cap E_i.$$

2. $(\mathbb{N}, \leq)$ *n'est pas un treillis complet.*

Théorème 1.3.1 *Tout treillis complet est fermé.*

Preuve. Evident. ■

Proposition 1.3.1 *Soit $(L, \leq, \wedge, \vee)$ un treillis et soient x, y, z et $t \in L$. Si $x \leq y$ et $z \leq t$, alors $x \wedge z \leq y \wedge t$ et $x \vee z \leq y \vee t$.*

1.3.2 Propriétés algébriques des treillis

Précédemment, on avait donc défini le treillis en général d'une manière ensembliste, sachant qu'il existe une définition purement algébrique contenant quelques propriétés très importantes qu'on définira et qu'on démontrera par la suite:

L'idempotence:

$$x \vee x = x \text{ et } x \wedge x = x.$$

La commutativité:

$$x \vee y = y \vee x \text{ et } x \wedge y = y \wedge x.$$

L'associativité:

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$$

L'absorption:

$$x \vee (x \wedge y) = x \text{ et } x \wedge (x \vee y) = x.$$

Et une relation d'ordre $\leq$ telle que:

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \iff x \wedge y = x.$$

1.3.3 Quelques classes des treillis

Nous allons étudier les classes des treillis distributifs, complémentés, modulaires et booléens. Ce choix n'est pas arbitraire mais bien réfléchi, car celles-ci sont les plus importantes, les plus intéressantes et les particulières dans le monde des treillis.

On donnera aussi quelques propriétés et on les représentera à l'aide des schéma illustratifs.

Définition 1.3.4 (Treillis complémenté) *Un treillis complémenté est un treillis fermé L tel que pour chaque $x \in L$ il existe au moins $x' \in L$ tel que : $x \vee x' = 1$ et $x \wedge x' = 0$, x' est dit complément de x .*

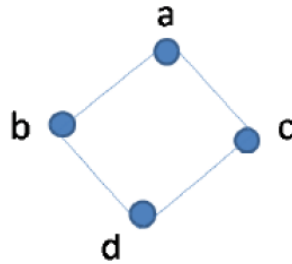


Figure 1.3.1 : Diagramme d'un treillis complémenté

Exemple 1.3.3 1. $(P(E), \subseteq, \cap, \cup)$ est complémenté.

2. $D(6)$ l'ensemble des diviseurs de 6 et $D(30)$ l'ensemble des diviseurs de 30 sont des treillis complémentés.

3. La chaîne $\{0, 1\}$ est la seule chaîne qui soit distributif complémenté.

Définition 1.3.5 (Treillis modulaire) *Un treillis est modulaire :*

$$\text{Si } x \leq z, \text{ alors } x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z.$$

On a vu que si $x \leq z$, alors $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$. Pour qu'un treillis soit modulaire, il suffit donc de montrer que, si $x \leq z$, $x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge z$.

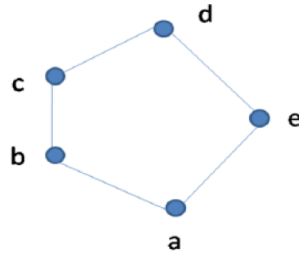


Figure 1.3.2 : Diagramme d'un treillis modulaire

Remarque 1.3.1 Tout sous-treillis d'un treillis modulaire est modulaire.

Définition 1.3.6 (Treillis distributif) Un treillis L est distributif si et seulement si :

$\forall x, y, z \in L$ les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z), \\ \text{et} \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \end{array} \right.$$

C'est à dire, qu'un treillis est distributif si et seulement si on a la distributivité de l'opération $\wedge$ par rapport à l'opération $\vee$ et inversement.

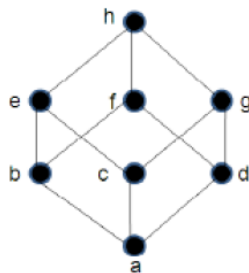


Figure 1.3.3 : Diagramme d'un treillis distributif

Exemple 1.3.4 1. Le treillis L formé par l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble X ordonné par la relation l'inclusion est un treillis distributif.

2. L'ensemble des parties de E dans lequel les opérations sont $(\cap)$ et $(\cup)$ sens-ensembliste est un treillis distributif.

Définition 1.3.7 (Treillis de boole) Un treillis booléen est un treillis distributif où chaque élément $x \in X$ a un complément, noté x^c . Autrement dit, un treillis distributif et complémenté est un treillis booléen.

1. $(0)^c = 1$.
2. $(x^c)^c = x$.
3. $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$, et $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.

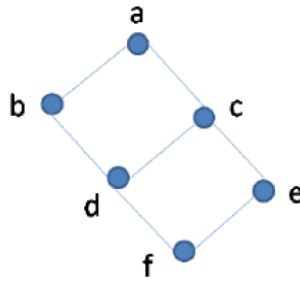


Figure 1.3.4 : Diagramme d'un treillis booléen

Exemple 1.3.5 Soit $X = \{a\}$. On a une algèbre de Boole à 2 éléments,
 Soit $X = \{a, b\}$. On a une algèbre de Boole à 4 éléments,
 Soit $X = \{a, b, c\}$. On a une algèbre de Boole à 8 éléments.

Chapitre 2

Théorèmes des points fixes dans des structures ordonnées

Dans ce chapitre on donne quelques théorèmes de points fixes dans des structures ordonnées, premièrement dans un ensemble ordonné quelconque, deuxièmement dans une structure d'un treillis où pouvons-nous trouver le théorème de Tarski et inversement le théorème de Davis et finalement dans un ensemble ordonné chaîne-complète.

2.1 Théorèmes de point fixe dans un ensemble ordonné

On s'intéresse maintenant à la propriété du point fixe dans une structure d'un ensemble ordonné. Pour plus des détails on peut consulter [13], [15] et [16].

Définition 2.1.1 Soient $P = (X, \leq_p)$ et $Q = (Y, \leq_Q)$ deux ensembles ordonnés et f une application de P dans Q . L'application f est dite:

1. Monotone si elle vérifie:

$$\text{pour tous } x, \hat{x} \in (X, \leq_p), x \leq_p \hat{x} \implies f(x) \leq_Q f(\hat{x}),$$

2. Strictement monotone si elle vérifie :

$$\text{pour tous } x, \dot{x} \in (X, \leq_p), x <_p \dot{x} \implies f(x) <_Q f(\dot{x}).$$

Définition 2.1.2 (Monotonie, antitonie) Soit f une application définie sur des ensembles ordonnés $f : X \longrightarrow Y$.

f est dite monotone si :

$$\forall x, y \in X, x \leq y \implies f(x) \leq f(y),$$

f est dite antitone si :

$$\forall x, y \in X, x \leq y \implies f(y) \leq f(x).$$

Définition 2.1.3 Soit $(X, \mathfrak{R})$ un ensemble ordonné

1. Un élément $x \in X$ est appelé point fixe de l'application $f : X \rightarrow X$ si $f(x) = x$, l'ensemble de tous les point fixes de f noté par $Fix(f)$.
2. On dit que l'ensemble X à la propriété du point fixe par rapport à $\mathfrak{R}$ si chaque application monotone de X vers elle-même à un point fixe.

Définition 2.1.4 Soit X un ensemble partiellement ordonné. X est dit inductif si toute partie de X non vide et totalement ordonné possède un majorant.

Lemme 2.1.1 (Lemme de Zorn) Tout ensemble inductif admet au moins un élément maximal.

Le théorème suivant est parmi les théorèmes des points fixes bien connu dans un ensemble ordonné.

Théorème 2.1.1 (Bourbaki - knaster) [9] Soit f une fonction d'un ensemble strictement inductif $(X, \leq)$ dans lui-même expansive, c'est-à-dire vérifiant :

$$x \leq f(x), \forall x \in X.$$

Alors f possède au moins un point fixe, c'est-à-dire un élément a de X vérifiant :

$$f(a) = a.$$

Preuve. Ce théorème se démontre facilement par récurrence ordinale, de manière analogue à la démonstration du lemme de Zorn, X à un élément maximum a tel que $a \leq f(a)$, et l'élément a est maximal, donc $a = f(a)$.

Il peut aussi se montrer plus directement en adaptant la démonstration par réunion de chaînes comme suit:

Appelons f -ensemble toute partie C de X bien ordonnée telle que pour tout x de C ,

$$x = \sup\{f(y) | y \in C \text{ et } y < x\}$$

(En particulier, $\emptyset$ est un f -ensemble, et f est une application monotone sur tout f -ensemble).

On montre que, étant donnés deux f -ensembles C et D , l'un est segment initial de l'autre. On en déduit, que la réunion M des f -ensembles est un f -ensemble. En particulier M est une chaîne, et f est une application monotone sur M . L'image de M par f , $\{f(y) | y \in M\}$ est alors une chaîne, donc possède une borne supérieure z . Alors $M \cup \{z\}$ est un f -ensemble donc $z \in M$, donc $f(z) \leq z$, d'où $f(z) = z$. ■

Le théorème suivant de point fixe pour les ensembles ordonnés est de Rival [15] en 1976. Il utilise la définition suivante de la rétraction pour établir la propriété du point fixe pour l'ensemble ordonné.

Définition 2.1.5 Soit P un ensemble ordonné. Alors l'application $r : P \longrightarrow P$ est dit rétraction si et seulement si $r^2 = r$ (c'est-à-dire r est idempotent). Nous dirons que $R \subseteq P$ est un rétract de P si et seulement s'il existe une rétraction $r : P \rightarrow P$ avec $r[P] = R$.

Théorème 2.1.2 (Rival) Soit P un ensemble ordonné a la propriété du point fixe et soit $r : P \rightarrow P$ une application de rétraction. Alors $r[P]$ a la propriété du point fixe.

Preuve. Soit f est une application monotone définie par $f : r[P] \rightarrow r[P]$. Alors $f \circ r : P \rightarrow P$ une application monotone aussi, donc l'application $f \circ r$ a un point fixe $x = f(r(x))$. Mais comme $x \in f[P] \subseteq r[P]$, alors $x = r(x)$, ce qui signifie que $x = f(r(x)) = f(x)$ est un point fixe de f . ■

2.2 Théorèmes de point fixe dans un treillis complet

On s'intéresse maintenant à la propriété du point fixe dans une structure d'un treillis, dans ce sens nous pouvons trouver des résultats mathématiques fameux, dû à Tarski [18] et inversement le théorème de Davis [03]. Tout d'abord, nous avons besoin de cette définition pour démontrer les deux théorèmes précédents.

Définition 2.2.1 Soit P un ensemble ordonné et soit $C_l, C_u \subseteq P$ sont des chaînes dans P telle que $C_l \leq C_u$. L'ensemble

$$K = \{p \in P : C_l \leq p \leq C_u\}$$

est appelé un (C_l, C_u) -core.

Théorème 2.2.1 Soit P un ensemble ordonné, les propriétés suivantes sont équivalent:

1. P a la propriété du point fixe,
2. Toute (C, K) -core de P a la propriété du point fixe,
3. Toute (C, K) -core de P a la propriété du point comparable.

Preuve. Voir [17]. ■

Théorème 2.2.2 (Tarski) Soit L un ensemble ordonné, si L est un treillis complet, alors L possède la propriété du point fixe. En plus, pour toute application monotone f , $\text{Fix}(f)$ est un treillis complet.

Preuve. Soit $(X, \leq)$ est un ensemble ordonné, $\varphi : X \rightarrow X$ est une application monotone. Soit $A = \{x \in X \mid x \leq \varphi(x)\}$

A n'est pas vide car $\inf(X) \in A$. Soit $m = \sup(A)$, pour tout élément x de A , on a $x \leq m$, donc $x \leq \varphi(x) \leq \varphi(m)$ puisque φ est monotone. On déduit que $\varphi(m)$ est un majorant de A , et que donc $m \leq \varphi(m)$. De plus $\varphi(m) \leq \varphi(\varphi(m))$ puisque φ est monotone, donc $\varphi(m) \in A$ et donc $\varphi(m) \leq m$. En conséquence, $\varphi(m) = m$ et donc m est un point fixe de A .

On démontre que $\text{Fix}(f)$ est un treillis complet

Soit $L' = \text{Fix } f$. Soit $A \subseteq L'$. Posons $a = \bigvee A$ et soit l'ensemble B définie par $B = \{y \in L' : y \text{ majore } A\}$, on pose $b = \bigwedge B$ et soit l'ensemble L'' définie par $L'' = \{x \in L : a \leq x \leq b\}$. Si y majore A , alors $f(y)$ aussi (en effet, si $x \in A$ on a $x \leq y$ donc $f(x) \leq f(y)$); puisque $f(x) = x$ on obtient $x \leq f(y)$. ■

Théorème 2.2.3 (Davis) *Soit L un treillis, si L possède la propriété de point fixe alors L est un treillis complet.*

Preuve. On montre que, si un treillis a la propriété de point fixe alors il est complet.

On suppose que L n'est pas complet, alors il y a une chaîne maximale $B \subset L$. Donc il y a une chaîne $C' \subseteq B$ qui n'admet pas supremum dans B , soit $K = \uparrow_B C'$ et soit $C = \downarrow_B K$.

Alors K n'admet pas infimum dans B et C n'admet pas supremum dans B et on a $B = C \cup K$, alors le (C, K) -core il faut être vide, alors B n'est pas maximal. Par conséquent (C, K) -core n'admet pas la propriété du point fixe. Par le théorème (2.2.1) alors L n'admet pas la propriété du point fixe. Contradiction donc L est complet. ■

Définition 2.2.2 (Fonctions continues) *Soient $(X, \leq)$ et $(X', \leq')$ deux ensembles ordonnés.*

Une fonction $f : X \rightarrow X'$ est continue, si :

f est un application monotone,

f est $\sqcup$ -additive : $f(\sqcup x) = \sqcup' f(x)$, pour toute ω -chaîne x .

Théorème 2.2.4 (Kleene) *Soit $(X, \leq)$ un treillis complet et $f : X \rightarrow X$ une fonction continue. Alors $\bigcup_{i \geq 0} f^i(\perp)$ est le plus petit point fixe de f .*

Preuve. Soit $(X, \leq)$ un treillis complet et $f : X \rightarrow X$ une fonction continue.

1. $\bigsqcup_{i \geq 0} f^i(\perp)$ est un point fixe de f , car

$$\begin{aligned} f\left(\bigsqcup_{i \geq 0} f^i(\perp)\right) &= \bigcup_{i \geq 0} f^{i+1}(\perp) \\ &= \bigcup_{i \geq 1} f^i(\perp) \\ &= \perp \cup \bigcup_{i \geq 1} f^i(\perp) \\ &= \bigcup_{i \geq 0} f^i(\perp). \end{aligned}$$

2. $\bigsqcup_{i \geq 0} f^i(\perp)$ est plus petit que tous les points fixes de f . Soit x un point fixe. On montre par récurrence: $\forall i \geq 0. f^i(\perp) \leq x$. Ce qui implique que $\bigsqcup_{i \geq 0} f^i(\perp) \leq x$.

■

2.3 Théorèmes de point fixe dans un ensemble ordonné chaîne-complète

Dans cette section, nous présenterons quelques théorèmes de point fixe importantes dans une structure d'un ensemble ordonné chaîne-complète. Pour plus de détails on peut consulter [12], [21], [6], [9].

2.3.1 Caractérisation des treillis complet par les chaînes et les chaînes maximales

Définition 2.3.1 (Chaîne) Une chaîne d'ordre $P = (X, \leq_P)$ est un sous-ensemble Q de X dont les éléments sont deux à deux comparables :

$$\forall x, y \in Q : (x \leq_P y) \vee (y \leq_P x).$$

Exemple 2.3.1 1. L'ensemble $\mathbb{N}$ avec l'ordre ordinaire est une chaîne,

2. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ avec la relation de divisibilité n'est pas une chaîne.

Définition 2.3.2 (Ensemble ordonné chaîne-complète) Soit P un ensemble ordonné. Alors $(P, \leq)$ est appelé un ensemble ordonné chaîne-complète si toute sous-chaîne de P admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Exemple 2.3.2 1. L'ensemble des partie de chaque ensemble X est une ensemble ordonné chaîne-complète par l'inclusion,

2. Chaque ensemble ordonné finie est un ensemble ordonné chaîne-complète,

3. $C([0, 2], \mathbb{R})$ n'est pas un ensemble ordonné chaîne-complète car l'ensemble des fonctions continues n'admet pas un supremum.

Définition 2.3.3 (Anti-chaîne) Une anti-chaîne de $(E, \leq_P)$ tout partie X telle que :

$$\forall x, y \in X : x \leq_P y \Rightarrow x = y.$$

Définition 2.3.4 (Chaîne maximale) Une chaîne Q de P est dite maximale si elle n'est pas contenue (strictement) dans aucune autre chaîne de P , c'est-à-dire elle est maximale par rapport à l'inclusion.

Remarque 2.3.1 (i) Une antichaîne de P est maximale si elle n'est contenue dans aucune autre antichaîne de P .

(ii) Les seuls sous-ensembles ordonnés de P qui sont à la fois chaîne et antichaîne de P sont les singletons de P .

Théorème 2.3.1 (Caractérisation des treillis complet) Soit L un treillis, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (i) L est un treillis complet,
- (ii) Toute chaîne non vide de L admet un supremum et un infimum,
- (iii) Toute chaîne maximale de L est un treillis complet.

Preuve. $(i \implies ii)$ Trivial

$(ii \implies iii)$ Soit C une chaîne maximale. Soit $A \subseteq C$ et soit $a = \vee A$.

Soit $c \in C$. Ou bien $c \in \downarrow A = \{y : y \leq x \text{ pour un } x \in A\}$ et dans ce cas $c \leq a$. Ou bien $c \notin \downarrow A$ et puisque C est une chaîne, $x \leq c$ pour tout $x \in A$, par suite $a \leq c$. Donc $C \cup \{a\}$ est une chaîne. Par maximalité de C , $a \in C$. D'où C est un treillis complet.

$(iii \implies ii)$ Soit L un treillis tel que chaque chaîne maximale dans L est un treillis complet. Soit $C \subseteq L$ est une chaîne non vide, soit K est une chaîne maximale qui contient C et soit $c = \vee_K C$ alors c est une borne supérieure de C dans L , si $d \geq c$, donc d est une borne supérieure de C avec $d \not\leq c$, alors $C \leq d \wedge c < c$, ce qui implique que K n'est pas maximal, contradiction, alors $c = \vee_L C$, d'où L est un ensemble ordonné chaîne-complète.

$(ii \implies i)$ Soient $A \subseteq L$ et C une chaîne maximale dans A^+ l'ensemble des majorants de A . Étendons C' et une chaîne maximale de L . Soit c l'infimum de C dans C' . Alors c est l'infimum de C dans L . En effet, si t minore C alors $c \vee t$ également, et donc $c \vee t$ est comparable à tous les éléments de C' . Comme C' est maximale, donc $c \vee t \in C'$. Il

s'ensuit que c est un majorant A , donc $c \in A^+$. Soit $t \in A^+$, puisque L est un treillis, donc $c \wedge t \in A^+$, alors $c \leq t$. Ainsi $c = \vee A$. D'où L est un treillis complet. ■

2.3.2 Théorème de point fixe dans un ensemble ordonné chaîne-complète

Dans le théorème suivant, nous donnons un résultat concernant la propriété du point fixe dans une structure d'un ensemble ordonné chaîne-complète. Tout d'abord, nous avons besoin de cette définition pour démontrer le théorème suivant.

Définition 2.3.5 Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné chaîne-complète, et soit l'application $f : P \rightarrow P$ est monotone, On dit que $Y \subseteq P$ est admissible si $\forall y \in Y, f(y) \in Y$ et $\forall C \subseteq Y$, si C est un ordre total, alors $\sup C \in Y$.

Théorème 2.3.2 [18] Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné chaîne-complète, et $f : P \rightarrow P$ est une application monotone, alors il existe au moins un point fixe de f .

Preuve. Soit B est l'intersection de tous les sous-ensembles admissibles de P alors $B \subseteq P$ et B est admissible.

L'ensemble $\{x \in B \mid x \leq f(x)\}$ est admissible. Donc il est contient B , alors $\forall b \in B, b \leq f(b)$.

On dit que $x \in B$ est extrême si et seulement si $\forall b \in B, b < x \implies f(b) \leq x$, pour tout $x \in B$, on pose

$$S(x) = \{b \in B \mid b \leq x \vee f(x) \leq b\}.$$

On suppose que x est extrême, alors si $y \in S(x)$ donc $y < x$, $y = x$, ou bien $f(x) \leq y$, dans le premier cas, comme x est extrême, alors $f(y) \leq x$, dans l'autre cas, $f(x) \leq f(y)$. Donc $f(y) \in S(x)$, D'abord on pose $C \subseteq S(x)$ est un ordre total, si $c \in C$. $c \leq x$ alors $\sup C \leq x$, pour tout $c \in C$, nous avons $c \leq x$, et ainsi $f(x) \leq c \leq \sup C$. Donc $\sup C \in S(x)$. Alors $S(x)$ est admissible. D'où $S(x) = B$.

Soit E l'ensemble des éléments extrêmes de B . On pose $e \in E$, si $b \in B$ et $b < f(e)$ alors $S(e) = B$, donc $b \leq e$. Par monotonie de f , $f(b) \leq f(e)$, donc $f(e)$ est un extrême.

On suppose que $C \subseteq E$ est un ordre total. Si $b \in B$ et $b < \sup C$ alors $c \in C$ avec $c \leq b$, alors $f(c) \leq b$. Donc $S(c) = B$, nous avons $b < c$. Alors $f(b) \leq c \leq \sup C$. Donc E est admissible, D'où $E = B$.

Puisque chaque $x \in B$ satisfait $x \leq f(x)$ et $S(x) = B$, B est un ordre total, alors il y a au moins un majorant $\sup B$, donc B est admissible, et comme $\sup B \in B$, donc $\sup B \leq f(\sup B)$. Aussi $f(\sup B) \in B$, donc $f(\sup B) \leq \sup B$. La combinaison des deux inégalités alors $f(\sup B) = \sup B$.

On suppose que z est un autre point fixe de f , donc $f(z) = z$, alors $\{b \in B \mid b \leq z\}$ est un admissible. Alors chaque $b \in B$ est inférieur que z , en particulier $\sup B \leq z$. Donc $\sup B$ est le plus petit point fixe de f . ■

Lemme 2.3.1 *Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné chaîne-complète, et soit l'application f qui définie par $f : P \rightarrow P$ est une application monotone, et g est une application qui satisfait les deux propriétés suivantes:*

1. *Pour tout $x \in X, g(x) \subseteq g(f(x))$,*
2. *Pour tout ordre total $Y \subseteq P$, si pour tout $y \in Y$, $g(y) \subseteq g(\sup Y) \subseteq g(\text{Fix } f)$.*

Preuve. Les hypothèses sur g garantissent que $\{x \in X \mid g(x)\}$ est un admissible. Donc chaque ensemble admissible contient $\text{Fix } f$. ■

Définition 2.3.6 *Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné chaîne-complète et soit $Y \subseteq P$, on dit que Y est fermé si et seulement si pour chaque chaîne $C \subseteq Y$ nous avons $\sup C \in Y$.*

Théorème 2.3.3 *Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné chaîne-complète, et soit $Y \subseteq P$ fermé, et soit l'application f qui définie par $f : P \rightarrow P$ est une application monotone, pour tout $y \in Y$ nous avons $f(y) \in Y$. Alors $\text{Fix } f \in Y$.*

Preuve. Application direct de Lemme (2.3.1). ■

Corollaire 2.3.1 *Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné chaîne-complète, et soit l'application f qui définie par $f : P \rightarrow P$ une application monotone avec $f(x) \leq x$ alors $\text{Fix } f \leq x$.*

Preuve. Soit $Y = \{y \in X \mid y \leq x\}$, alors $(Y, \leq)$ est fermé. En outre, si $y \in Y$, alors $y \leq x$, donc

$$f(y) \leq f(x) \leq x,$$

et $f(y) \in Y$ par l'application de Lemme(2.3.1). Donc $Fix f \in Y$, alors par définition de Y ,

$$Fix f \leq x.$$

■

Corollaire 2.3.2 Soient $(P, \leq)$ et $(Y, \sqsubseteq)$ deux ensembles ordonnés chaîne-complète, et soient f et g deux applications monotones définies par $f : P \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow P$, alors :

$$Fix(f \circ g) = f(Fix(g \circ f)).$$

Preuve. Tout d'abord on remarque que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(f(Fix(g \circ f))) &= f((g \circ f)(Fix(g \circ f))) \text{ trivial} \\ &= f(Fix(g \circ f)) \text{ par la propriété du point fixe} \end{aligned}$$

D'après le Corollaire 2.3.1, nous avons

$$Fix(f \circ g) \sqsubseteq f(Fix(g \circ f))$$

.

$$\text{De même, } Fix(g \circ f) \leq g(Fix(f \circ g))$$

.

$$\begin{aligned} \text{Donc } f(Fix(g \circ f)) &\sqsubseteq f(g(Fix(f \circ g))) \\ &= (f \circ g)(Fix(f \circ g)) \\ &= Fix(f \circ g). \end{aligned}$$

D'où $Fix(f \circ g) = f(Fix(g \circ f))$. ■

Un autre théorème de point fixe dans un ensemble ordonné chaîne-complète est de Abian et Brown.

Théorème 2.3.4 (Abian–Brown) [1] Soit $(P, \leq)$ un ensemble ordonné chaîne-complète, est soit $f : P \rightarrow P$ est une application monotone. S'il existe un élément $x \in P$ avec $x \leq f(x)$, alors f a un plus petit point fixe.

Preuve. Voir [1]. ■

Dans le théorème suivant, nous donnons un résultat concernant la propriété du point fixe localement générale dans un ensemble ordonné chaîne-complète. Tout d'abord on donne les définitions suivantes.

Définition 2.3.7 Soit P un ensemble partiellement ordonné, si P possède la propriété générale du point fixe si et seulement si pour toute application f de P dans lui même avec $x \leq f(x)$ tels que $x \in \text{sub}f(p)$ a un point fixe.

Définition 2.3.8 Soit P un ensemble partiellement ordonné, si P possède la propriété localement générale du point fixe si et seulement si pour toute application f de P dans lui même avec $x \leq f(x)$ tels que $x \in \overline{f(p)}$ a un point fixe.

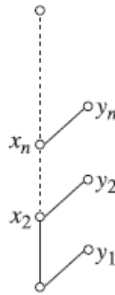
Définition 2.3.9 L'ensemble $\text{sub}f(p)$ est définie par $\text{sub}f(p) =$ le seugement finis de P généralisé par le sous-ensemble $f(p)$ avec $f(p) = \{x \mid x \geq \text{quelque éléments de } f(p)\}$. $\overline{f(p)} = f(p) \cup \{a \in p \mid a \text{ est supremum d'une chaîne dans } f(p)\}$.

Théorème 2.3.5 Soit P un ensemble partiellement ordonné, $(P, \leq)$ un ensemble ordonné chaîne-complète si P admet la propriété de point fixe localement générale

Preuve. Supposons que P admet la propriété de point fixe localement générale. Nous affirmons que P est un ensemble ordonné chaîne-complète. Chaque sous-ensemble ordonné non vide de P admet un supremum, alors chaque chaîne de P admet un supremum dans P . Soit C est un sous-ensemble ordonné non vide. Premièrement supposons que C n'a pas des majorants, alors pour tout x dans P , $C(x) = \{c \in C \mid x \not\geq c\}$ est non vide, on définit l'application f par $f : P \rightarrow P$ $f(x) =$ le plus petit élément de $C(x)$. Clairement f n'a pas un point fixe. Soit $y = f(x) \in f(p)$, donc y est le plus petit élément de $C(x)$, aussi $f(y)$ le plus petit élément de $C(y) = \{c \in C \mid y \not\geq c\}$, alors $y \not\geq f(y)$ et $f(y) \in C$. Mais y est aussi dans C donc $y < f(y)$. Soit $a = \sup C'$ où C'

est une chaîne dans $f(P)$, montrons que $a \leq f(a)$. Si $a \not\leq f(a)$, alors il existe un $x \in C'$ tel que $x \not\leq f(a)$ et comme $x \in C' \subseteq C$ nous avons $x > f(a)$ mais $a \geq x > f(a)$, impossible $a \not\leq f(a)$ (En fait pour tout x dans P , $x \not\leq f(a)$). Contradiction à l'hypothèse $a \not\leq f(a)$, donc $a \leq f(a)$. Ainsi $x \leq f(x)$ pour tout x dans $f(P)$. Mais f n'admet pas point fixe et contredit l'hypothèse P admet la propriété du point fixe localement générale. Donc C doit avoir des majorants. Maintenant on montre que C n'admet pas un supremum dans P . Soit $z_0 \in C$ définie par $f : P \rightarrow P$ comme suite, si $x \in P$ n'est pas un majorant de C , donc $f(x) =$ le plus petit élément de $C(x) = \{c \in C \mid x \not\leq c\}$. Si x est un majorant de C , donc $f(x) = z_0$, ainsi $f(P) \subseteq C$, soit $y = f(x) \in f(P)$ pour que y n'est pas un maximum de C donc $f(y) =$ élément minimal de (y) et donc $y \not\leq f(y)$, donc $y < f(y)$. Soit $a = \sup C \subseteq F(P)$ pour que a n'est pas un maximum de C et $f(a) =$ le plus petit élément de $C(a)$. Donc $a \not\leq f(a) \in C$. Si $a \not\leq f(a)$, alors il existe $x \in C$ tel que $x \not\leq f(a)$ et donc $x > f(a)$, mais $a \geq x > f(a)$ ce qui est impossible. Par conséquent $a \leq f(a)$ et encore $x \leq f(x)$ pour tout x dans $f(P)$, mais f n'admet pas un point fixe. Contradiction avec l'hypothèse que P admet la propriété du point fixe localement générale. Donc C admet un supremum dans P , d'où P est un ensemble ordonné chaîne-complète. ■

Exemple 2.3.3 Soit P une chaîne avec les éléments minimaux $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (dire l'ensemble de tout entier positif) et une suite $\{y_n\}$ des éléments distincts qui sont présentés dans le diagramme suivant. Chaque $x_i < y_i$ et pour tout deux éléments distincts y_j sont non comparable.



Dans cet exemple si $f : P \rightarrow P$ une application tel que $x \leq f(x)$, pour tout x dans $\text{subf}(p)$, alors f a un point fixe. Si $x_i \in f(p)$ pour tout i , alors $y_i > x_i$, donc $y_i \in$

$\text{subf}(p)$ et du diagramme que nous avons, chaque y_j est un élément maximal de P et en particulier y_i est maximal. Comme $y_i \in \text{subf}(p)$, donc $y_i \leq f(y_i)$ et y_i est maximal, alors $y_i = f(y_i)$, donc y_i est un point fixe de f . S'il n'existe pas des x_i dans $f(p)$, alors pour tout i , y_i est dans $f(p)$ et y_i est un élément maximal de p . Donc $y_i = f(y_i)$ par conséquent nous avons un point fixe de f dans tous les cas. La chaîne $x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots$ n'admet pas un majorant, d'où n'est pas inductif.

Conclusion

Dans ce travail on a vu les notions générales de la théorie des ensembles ordonnés. Dans ce sens on a étudiés des théorèmes de point fixe dans quelques structures ordonnées, dans un ensemble ordonné quelconque, on a vu le théorème de Bourbaki - knaster et le théorème de Rival et quelques résultats sur ce type de relations, dans un treillis complet on a vu et démontré le théorème de Tarski et inversement le théorème de Davis aussi le théorème de Kleene, et finalement dans un ensemble ordonné chaîne-complète on trouve le théorème de Abian et Brown avec des démonstrations et des exemples illustratifs. Le problème de la propriété du point fixe reste ouvert pour d'autre structure algébrique.

Bibliographie

- [1] S. Abian, A. B. Brown, *A theorem on partially ordered sets with applications to fixed point theorems*, Can. J. Math, 13, 78–82 (1961).
- [2] N. Caspard, B. Leclerc et B. Monjardet, *Ensembles ordonnés finis : concepts, résultats et usages*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [3] A. C. DAVIS, *A Characterization of complete lattices*, Pacific J. Math, 5, 311–319 (1955).
- [4] B. Deschamps, *Théorie des ensembles*, Saint-Etienne, 2003.
- [5] H. Faure et E. Heurgon, *structures ordonnées et algèbre de boole*, Gauthier-Villars, Paris 6ème, 1971.
- [6] L. Frécon, *Eléments de mathématiques discrètes*, Presses polytechniques et universitaires romandes, 2002.
- [7] D. Fredon, M. Maumy-Bertrand et F. Bertrand, *Mathématiques, Algèbre et géométrie*, Dunod, Paris, 2009.
- [8] J. Jayez, *Cours Introduction à la logique classique. Les Treillis*, ENS-LSH, 2009.
- [9] B. KNASTER, *Un théorème sur les fonctions d'ensembles*, Ann. Sac. Polon. Math, 6, 133–134 (1928).
- [10] M. Marchand, *Outils mathématiques pour l'informaticien, édition 2*, De boeck et Larcier S. A, 2005.

- [11] P.V. R, Murty et V. V. R, Rao, *Fixed Point Theorems on Chain Complete Partially Ordered Sets*, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 25, 705–710 (2002).
- [12] D. Ponasse, J. C. Carrega, Algèbre et topologie booléennes, *Masson, Paris*, 1979.
- [13] M. Pouzet, Cours Théorie de l'ordre : une introduction, *l'université Simon Bolivar*, 2003.
- [14] K. H. Rosen, Discrete Mathematics and Its Applications, édition 7, *The McGraw-Hill Companies*, 2012.
- [15] I. Rival, *A fixed point theorem for finite partially ordered sets*, J. Combin. Theory (A), 21, 309–318 (1976).
- [16] S. W. Schroeder, Ordered Sets: An Introduction, *Springer Science, Business Media*, 2002.
- [17] S. W. Schroeder, *The fixed point property for ordered sets*, Arab J Math, 1, 529–547 (2012).
- [18] A. Tarski, *A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications*, Pacific J. Math, 5, 285–309 (1955).

المخلص

في هذا العمل سنتطرق إلى بعض المفاهيم العامة لنظرية المجموعات المرتبة وبعض خواصها المهمة مع كوكبة من الأمثلة التوضيحية، وفي هذا المعنى سنتطرق إلى إحدى أهم النظريات الموجودة في هذا الصدد ونقصد بها نظرية النقطة الصامدة والتي سنقوم بدراستها في العديد من البنى الجبرية، أولا في مجموعات مرتبة كيفية، ثانيا في شبكة تامة، وأخيرا في سلسلة تامة مع بعض البراهين و الأمثلة التوضيحية.

Abstract

In this work, we will see some basic definitions and properties of the ordered sets theory that will be needed throughout this work, we study the fixed point property for some algebra structures, first we will provide interesting theorems of fixed point property on order sets, on complete lattice and finally on chain complete with proofs and illustrations examples.