



UNIVERSITÉ DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE  
L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MÉMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de

**Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées Discrètes

Par :

**BENCHETIOUI Oumaima**

Sujet :

**Généralisation formelle de la méthode des  
profils mobiles**

Dirigé par :

**Prof. BENHAMIDOUCHE Nouredine**

Promotion : 2013/2014

# Table des matières

Introduction	4
1 La méthode des profils mobiles (MPM)	5
1.1 Introduction	5
1.2 Équations aux dérivées partielles	5
1.3 Construction des solutions particulières	6
1.3.1 Séparations des variables	6
1.3.2 Les solutions auto similaires	7
1.3.3 Travelling Waves	7
1.3.4 Les solutions des Profils Mobiles	8
1.4 Présentation de la méthode "Profils Mobiles"	8
1.4.1 Estimation de solution à priori	11
1.4.2 Solutions exactes pour les EDPs non-linéaire	12

<b>2</b>	<b>La méthode des profils mobiles généralisées</b>	<b>20</b>
2.1	Introduction . . . . .	20
2.2	Principe de l'approche . . . . .	21
2.2.1	Principe de dérivation . . . . .	21
2.2.2	Détermination des paramètres $a(t)$ , $b(t)$ , $c(t)$ , $\tau(t)$ . . . . .	22
2.2.3	Evaluation approchée de solution à priori . . . . .	24
2.3	Solutions exactes d'EDPs non linéaires . . . . .	24
<b>3</b>	<b>Applications de l'équation de la chaleur</b>	<b>30</b>
3.1	L'équation de la chaleur linéaire . . . . .	30
3.1.1	Résolution du système différentiel . . . . .	31
3.1.2	Résolution l'EDP (détermination de $\varphi$ ) . . . . .	32
	<b>Conclusion</b>	<b>39</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>40</b>

# Introduction

Au cours de ces dernières années, certaines méthodes ont été développées pour la recherche des solutions exactes des équations aux dérivées partielles non linéaires.

N.BENHAMIDOUCHE dans [7,8] et all ont proposé une méthode de construction de solutions particulières de forme profils mobiles pour les équations aux dérivées partielles d'évolution. On a constaté qu'une approche similaire dite "MN-dynamics" à été proposée par D.G.ARONSON, I.S.BETLU ET I.G. KERVREKIDIS dans [3,4], il s'agit d'une approche un peu plus générale.

La recherche de solutions particulières pour les équations aux dérivées partielles non linéaires joue un rôle important dans la compréhension du comportement de la solution de ces EDPs. Il existe plusieurs formes,

En particulier :

- Solutions de la forme "Séparations des variables".
- Solutions de la forme "Travelling-wave".
- Solutions de type "Auto-similaires".
- Solutions de type "Profils mobiles".

Dans ce travail nous allons essayé de proposer une forme plus générale de la méthode des profils mobiles pour trouver les solutions exactes des équations aux dérivées partielles non linéaire.

Dans le premier chapitre, on donne quelques définitions sur les EDPs et quelques formes de solutions des équations aux dérivées partielles, et nous présentons le principe de la méthode des profils mobiles pour déterminer les solutions exactes de quelques types d'équations différentielles partielles.

Le deuxième chapitre, on présente le principe de la méthode des Profils Mobiles généralisées pour trouver des solutions exactes des équations aux dérivées partielles, Il s'agit d'une généralisation du principe de MN-dynamics présenté dans [3,4], donc c'est une nouvelle forme de solutions pour certaines équations aux dérivées partielles qui peut être intéressante .

Finalement dans le troisième chapitre, on donne quelques applications de la méthode des profils mobiles généralisées, notamment sur l'équation de la chaleur.

## 1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions et rappels de la théorie d'EDPs avec la présentation de la méthode de "profil mobile" dans un cas basique dans notre travail.

## 1.2 Équations aux dérivées partielles

Une équation aux dérivées partielles est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante (ou inconnue) et les variables indépendantes ( $x, y, z, \dots$ ) une ou plusieurs dérivées de cette fonction. Cette équation est ainsi de la forme :

$$F\left(x, y, z, \dots, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots\right) = 0$$

où  $F$  est une fonction de plusieurs variables,  $(x, y, z, \dots)$  appartenant à un domaine connexe de  $\mathbb{R}^n$ .

## Conclusion

Nous avons présenté dans ce mémoire une généralisation de la méthode dite "profils mobiles" qui a été présentée par le professeur BEN HAMIDOUCHE Nouredine et al dans [7,8] pour chercher des solutions particulières pour des EDPs d'évolution non linéaires.

En se basant sur l'approche proposée par Aronson.D.G, Betlu.S.I et Kevrekidis.I.G. dans [3,4] dite "MN -dynamic", nous avons essayé de développer cette forme générale qui s'appelle "la méthode des profils mobiles généralisée". C'est une méthode qui permet de chercher des solutions pour EDPs d'évolution non linéaires de forme plus générale.

L'idée de cette méthode est bien illustré par l'exemple de l'équation de la chaleur, nous avons ainsi présenté une solution explicite particulière de cette forme généralisée. La difficulté réside néanmoins dans la résolutions des équations différentielles ou parties découlant de cette approche.

## Bibliographie

- [1] ARONSON, D.G. AND CAFFARELLI, L.A, The initial trace of a solution of the porous medium equation, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 280 (1983), 351-366.
- [2] ARONSON, D.G. AND PELETIER, L.A, Large time behaviour of solutions of the porous medium equation in bounded domains, *J. Diff. Eq.*, 39 (1981), 378-412.
- [3] ARONSON, D.G, BETELU.S.I. AND KEVREKIDIS.I.G, Going with the Flow: Lagrangian approach to self-similar dynamics and its consequences, *University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455, V2*, (2001), 1-14.
- [4] ARONSON, D.G, BETELU.S.I. AND KEVREKIDIS.I.G, Going with the Flow: Lagrangian approach to self-similar dynamics and its consequences, *University of Minnesota, Minneapolis, MN 55455, V1*, (2001), 1-10.
- [5] ARONSON, D.G, The porous medium equation, in "Nonlinear Diffusion Problems", *Springer Verlag, New York*, pp 1-46, (1986).
- [6] BARENBLATT, G.I, On some unsteady motions of a liquid or a gas in a porous medium, *Prikl. Mat. Meh.*, 16 (1952), 67-78.
- [7] BENHAMIDOU CHE NOUREDINE , Exact solutions to some nonlinear PDEs, travelling profiles method, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equation* , No 15, 1-7,(2008).
- [8] BENHAMIDOU CHE NOUREDINE, ARIOUA YACINE, New Method for Constructing Exact Solutions to Nonlinear PDEs, *International Journal of Nonlinear Science* Vol.7 No.4,pp.395-398, (2009).

- 
- [9] BERRYMAN, J.G. AND HOLLAND, C.J. Stability of the separable solution for fast diffusion, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 279-28874 (1980).
- [10] GALAKTIONOV V.A, POSASHKOV V. A, SVIRSHCHEVSKII S. R. Generalized separation of variables for differential equations with polynomial right-hand sides, *Dif. Uravneniya*, 31(2), 253, (1995).
- [11] GALAKTIONOV V.A, POSASHKOV V. A, New exact solutions of parabolic equation with quadratic non-linearities, *USSR. Compt. Math. Match. Phys*, Vol 29, N 2 pp112-119(1989).
- [12] GILDING, B.E. AND PELETIER, L.A. On a class of similarity solutions of the porous medium equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 55 (1976), 351-364;II, 57 (1977), 522-538.
- [13] POLYANIN. A.D, ZAITSEV. V. F, Handbook of Nonlinear Partial Equation, *Chapman&Hall/CRC, Boca Raton* (2004).
- [14] POLYANIN. A.D, ZAITSEV. V. F, Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations, *CRC Press, Boca Raton, New York* (1995).
- [15] POLYANIN, A.D, ALEXEI I. ZHUROV, ANDREI V. VYAZMIN<sup>2</sup>, Generalized Separation of Variables and Mass Transfer Equations, *J. Non Equilib. Thermodyn*, Vol. 25 pp, 251-267(2000).
- [16] RUDYKH. G. A, SEMENOV. E. I, On new exact solutions of one-dimensional nonlinear diffusion equation with a source, *Zhurn. Vychisl. Matem. i Matem. Fiziki*, Vol. 38, N 6, pp 971-977,(1998).
- [17] V'AZQUEZ, J.L, The porous medium equation Mathematical Theory, *Clarendon Press . OXFORD*, (2007).
- [18] ZELDOVICH, YA.B. AND RAIZER, YU.P. Physics of Shock-waves and High-temperature Hydrodynamic Phenomena Vol. II, *Academic Press, New York*, (1966).
- [19] YIQING LI ,LIXIN TIAN, YUHAI WU. On the Bifurcation of Traveling Wave Solution of Generalized Camassa-Holm Equation, *International Journal of Nonlinear Science* N.1, pp.34-45, Vol.6(2008).

- [20] YUANXI XIE, New Explicit and Exact Solutions to the MKdV Equation, *International Journal of Nonlinear Science*, N.2, pp.124-128, Vol.6(2008).
- [21] YUSUFOGLU E, BEKIR A, On the extended tanh method applications of nonlinear equations, *International Journal of nonlinear Sciences*, Vol. 4, N.1, pp.10-16, (2007).