



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse mathématique et numérique

Par

Bouguerra Rima

Sujet

Ecoulement bidimensionnel de type jet

Devant le jury :

Nadir Mostefa	Prof Univ M'sila	Président
Gasmi Abdelkader	Prof Univ M'sila	Encadreur
Blizak Tahar	M.A.A Univ M'sila	Examineur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

Tout d'abord, je tiens la grande remerciement au Dieu pour terminer ce modeste travail.

J'exprime toute ma reconnaissance à Monsieur Gasmi AbdKader d'avoir encadrer ce travail et sa confiance et ses conseils et ses encouragements.

Je souhaite remercier les membres du jury, garants de la qualité de mon travail, et Je tiens aussi à remercier toute ma famille et mes amis et toute qu' encourage et aide moi au prés ou au loin à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

Tout d'abord remerciez Dieu tout puissant qui m'a donné une
bonne raison et confiance en lui.

Je dédie ce travail : mes parents,

- Ma bougie de ma vie ma mère Hadda Bouzidi et à mon père

Ahmed

- Mes frères Hamza et abdo et ma soeur Hadoula et tous mes amis
pour leurs encouragement qu'ils trouvent le témoignage de ma
profonde affection et gratitude.

- Et tous qui ceux qui me soutenaient dans ce travail près ou de
loin.

Table des matières

Introduction	1
Notations	2
1 Rappels de quelques notions de la mécanique des fluides	3
1.1 Introduction	3
1.2 Les fluides	3
1.3 Propriétés de mécanique de fluide	4
1.3.1 Masse volumique	4
1.3.2 Densité	4
1.3.3 Viscosité	4
1.3.4 Poids volumique	5
1.4 les écoulements des fluides	5
1.4.1 Ecoulement permanent	6
1.4.2 Ecoulement incompressible	6
1.4.3 Ecoulement irrotationnel	6
1.4.4 Ecoulement parfait	6
1.4.5 Ecoulement potentiel	7
1.4.6 Ligne de courant	7
1.4.7 Fonction de courant	8
1.4.8 Fonction de potentiel	9
1.4.9 Potentiel complexe des vitesses	9
1.5 Quelques exemples	10

1.6	Quelque équations de la mécanique des fluides	11
1.6.1	Equation d'Euler par un écoulement incompressible	12
1.6.2	Equation de la continuité	13
2	Les transformations conformes et fonction analytique	16
2.1	Les fonction analytique	16
2.1.1	Fonctions holomorphes	16
2.1.2	Fonctions Harmoniques	16
2.1.3	les Conditions de Cauchy-Riemann	17
2.2	Conditions aux limites	17
2.2.1	Potentiel de vitesse	18
2.2.2	Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe	18
2.3	Les transformations conformes	19
2.3.1	Transformation de Joukowski	20
2.3.2	Les transformation de Mobius	21
2.3.3	Transformation Hodographe	22
2.3.4	La transformation de Schwarz-Christoffel	23
3	Ecoulement à surface libre sous un barrage	25
3.1	Point de contact singulier	25
	Conclusion	31
	Bibliographie	31

Introduction

L'étude des problèmes de la mécanique des fluides a connu des développements rapides en termes des méthodes de solution. Aujourd'hui, on constate que la mécanique des fluides est un domaine très actif de la recherche scientifique avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus.

Dans ce travail on essaie de présenter une étude de formulation et de résolution d'un problème d'un écoulement bidimensionnel de type jet, le fluide est considéré comme incompressible et invisqueu, le problème est caractérisé par la surface libre qui est de forme inconnue et qui doit être déterminé comme une partie de la solution du problème.

Ce mémoire se décompose de trois chapitres:

Dans le premier chapitre nous rappelons les notions de base de la mécanique des fluides, tels que les propriétés des fluides, les équations fondamentales qui régissent les mouvements des fluides pour les écoulements potentiels, bidimensionnels et irrotationnels, l'incompressibilité des fluides, la viscosité et la notion des lignes de courant et les lignes équipotentiel.

Dans le deuxième chapitre on présente quelques définitions des fonctions analytiques, la transformation conforme et quelques transformations classiques (la transformation de Schwarz-Christoffel, Transformation de Joukowski...).

Dans le troisième chapitre on traite un problème d'un écoulement bidimensionnel sous un barrage d'un fluide incompressible et non visqueux où on considère que les effets de la gravité et la tension superficielle seront négligés. Nous nous référons à ce problème comme celui d'un point de contact de la surface libre et la paroi rigide singulier par ce que le fluide est forcé de quitter le mur du barrage au point de contact. On a utilisé la technique de la troncature de la série basée sur les transformations conformes pour résoudre ce problème.

Et on se termine ce travail par une conclusion

Notations

$\nabla \cdot v = \text{grad}(v) = (\partial_x v; \partial_y v)$: le gradient d'un vecteur vitesse

$$\overrightarrow{\text{rot}}(v) = \nabla \wedge v$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$\rho = \rho(\vec{x}, t)$: la masse volumique du fluide au point repéré par le vecteur \vec{x} à l'instant t .

$\vec{v} = \vec{v}(x, t)$: la vitesse d'une particule de fluide se trouvant au point repéré par le vecteur \vec{x} à l'instant t .

$$\text{div}(\text{grad } u) = \Delta u.$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\nabla u) = 0.$$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}} u) = 0$$

Chapitre 1

Rappels de quelques notions de la mécanique des fluides

1.1 Introduction

Dans le présent chapitre, on donne quelques concepts de base de la mécanique des fluides, tels que les propriétés des fluides, les équations fondamentales qui régissent les mouvements des fluides pour les écoulements potentiels, bidimensionnels et irrotationnels, l'incompressibilité des fluides, la viscosité et la notion des lignes de courant et les lignes équipotentiel.

1.2 Les fluides

On peut considérer un fluide comme étant une substance formée d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et que se déplacent librement les unes par rapport aux autres.

C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler.

1.3 Propriétés de mécanique de fluide

1.3.1 Masse volumique

On l'appelle aussi la densité, c'est une grandeur physique qui caractérise la masse de cette substance par unité de volume c'est-à-dire le quotient de la masse d'un corps par son volume et la note par ρ et on écrit

$$\rho = \frac{m}{v},$$

où m et v désignent la masse et le volume respectivement

L'unité de la masse volumique dans le système international est donnée $\frac{kg}{m^3}$.

1.3.2 Densité

C'est le quotient de la masse volumique ρ d'un corps par la masse volumique (ρ_{ref}) d'un corps de référence.

$$d = \frac{\rho}{\rho_{ref}}$$

Par exemple de corps de référence on trouve l'eau pour les liquides ou l'air pour les gaz.

A partir de ce qui a été vu précédemment pour déterminer l'unité de la densité dans le système international, on constate que la densité d'un corps est une quantité adimensionnelle ou un nombre sans unité.

1.3.3 Viscosité

La viscosité d'un fluide est caractérisée par les forces de la résistance qu'opposent les molécules à une force tendant à les déplacer au sein du liquide. C'est la propriété, résistance à l'écoulement qui l'empêche de s'écouler dans une canalisation ou de s'étaler sur une surface.

Lorsque la viscosité augmente, la capacité du fluide à s'écouler diminue. Pour un liquide, la viscosité tend généralement à diminuer lorsque la température augmente. On distingue la viscosité dynamique et la viscosité cinématique.

La viscosité dynamique notée μ représente la contrainte de cisaillement nécessaire pour produire un gradient de vitesse d'écoulement d'une unité dans la matière.

Dans le système international, l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde ($Pa.s$) ou Poiseuille (PL) :

$$1Pa.s = 1PL = 1kg/ms$$

La viscosité cinématique notée ϑ caractérise le temps d'écoulement d'un liquide. C'est le quotient de la viscosité dynamique μ par la masse volumique du fluide ρ .

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho}$$

L'unité de la viscosité cinématique est le (m^2/s).

On utilise souvent le Stokes (St) comme unité de mesure de la viscosité cinématique.

$$1ST = 10^{-4} \frac{m^2}{s}$$

1.3.4 Poids volumique

Le poids volumique d'un corps est donné par l'expression suivante :

$$\varpi = \frac{m.g}{v} = \rho.g$$

telle que :

ϖ : poids volumique en (N/m^3).

m : masse en (kg).

g : accélération de la pesanteur en (m/s^2).

v : volume en (m^3).

1.4 les écoulements des fluides

Dans notre vie quotidienne, dans la nature et dans le domaine industriel, les écoulements présents la circulation de l'oxygène dans notre organisme est l'un des exemples de l'importance

de l'écoulement dans la vie humaine, les tsunamis les cyclones ou les coulées de lave sont aussi des exemples de l'écoulement mais qui conduisent quelque fois à la grand dégâts pour l'humanité.

1.4.1 Ecoulement permanent

Un écoulement est dit permanent (ou stationnaire) lorsque toutes les grandeurs caractéristiques du mouvement sont invariables dans le temps (vitesse, masse volumique, pression température, etc...), ce qui se traduit symboliquement par:

$$\text{Mouvement permanent} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$$

1.4.2 Ecoulement incompressible

Un fluide est dit incompressible si le volume de chaque particule fluide ne varie pas au cours de mouvement, ce que se traduit par l'équation suivante:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{Ou} \quad \text{div}(\vec{u}) = 0$$

1.4.3 Ecoulement irrotationnel

On dit qu'un l'écoulement est irrotationnel si :

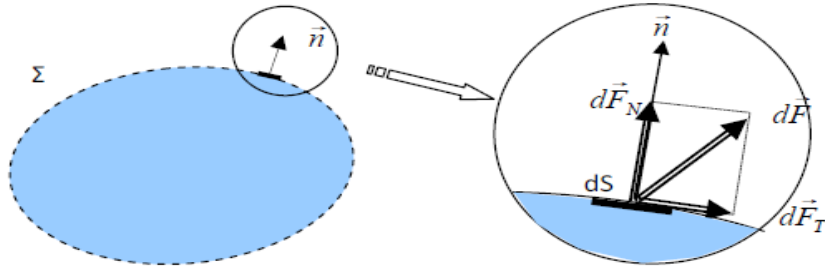
$$\text{rot } \vec{v} = 0,$$

où v représente la vitesse de l'écoulement

1.4.4 Ecoulement parfait

Un écoulement parfait est une approximation dans le cas ou les effets viscosité sont négligeable, et un fluide parfait possédant ne viscosité rigoureusement nulle il n'y a implication que un sens.

$$\text{fluide parfait} \Rightarrow \text{écoulement parfait}$$



Fig(1-1) Ecoulement parfait

1.4.5 Ecoulement potentiel

On dit qu'un écoulement est potentiel si sa vecteur vitesse est dérivée d'un potentiel c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} \exists \varphi / \overrightarrow{\text{grad}}\varphi &= \vec{v} = u \vec{i} + v \vec{j} \\ v &= \nabla\varphi \\ u &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}, v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{aligned}$$

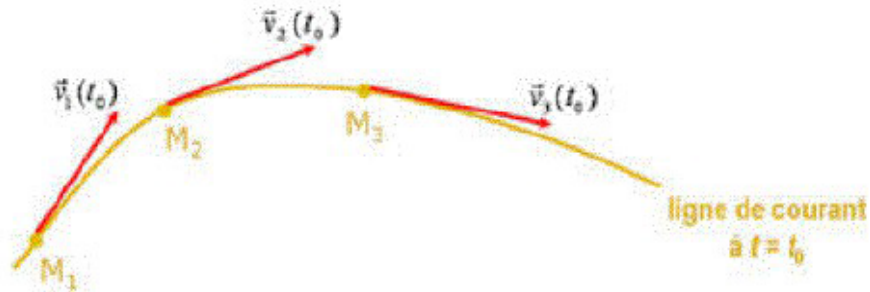
1.4.6 Ligne de courant

Sont les lignes qui en chaque point sont tangentes au vecteur vitesse en ce point (pour un instant fixe).

Où par conséquent :

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)}$$

où t a une valeur fixée.



Fig(1-2) ligne de courant

1.4.7 Fonction de courant

Si la domaine de l'écoulement est plan le vecteur de vitesse est vérifié à l'instant

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0$$

Pour toutes les points de ce domaine

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Cela implique que la forme différentielle $u dx + v dy$ est, à t fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction ψ :

$$\exists \psi, d\psi = u dx + v dy$$

implique

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

ψ s'appelle la fonction de courant

De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u = \partial\psi/\partial y \\ v = \partial\psi/\partial x \end{pmatrix} = -\partial^2\psi/\partial x^2 - \partial^2\psi/\partial y^2$$

$\Rightarrow \Delta\psi = 0$, ψ vérifie aussi l'équation de Laplace.

1.4.8 Fonction de potentiel

On rappelle que pour un écoulement irrotationnel : $\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

Peut être toujours représentée par le gradient d'une fonction scalaire

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\phi.$$

La fonction ϕ s'appelle fonction potentiel. On peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{cases}$$

Si de plus le fluide est incompressible la fonction vérifie l'équation de Laplace.

$$\Delta\phi = 0$$

1.4.9 Potentiel complexe des vitesses

On introduisons la fonction f telle que

$$f = \phi + i\psi$$

cette fonction est appelée potentiel complexe des vitesses, qui est reliée à la vitesse complexe par la relation

$$\frac{\partial f}{\partial z} = u - iv.$$

1.5 Quelques exemples

Si on considère l'écoulement plan défini en variable d'Euler par

$$u = 2y ; \quad v = -2x$$

1) Cet écoulement est incompressible car:

$$\operatorname{div}(\vec{u}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

2) L'écoulement n'est pas aussi irrotationnel car :

$$\operatorname{rot}(\vec{u}) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{e}_z = -4\vec{e}_z \neq \vec{0}$$

3) La fonction de courant ψ est définie par :

$$d\psi = udy - vdx$$

D'où

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v = 2x \quad , \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = 2y$$

On intègre la première équation en x on trouve :

$$\psi = x^2 + F(y)$$

avec F fonction arbitraire de y .

On dérive ce résultat par rapport à y et on l'identifie avec la seconde équation, on obtient

$$F'(y) = 2y,$$

d'où

$$F(y) = 2y^2 + k_1,$$

avec k_1 constante arbitraire, donc la fonction de courant est donnée par la relation suivante:

$$\psi = x^2 + y^2 + k_1$$

4) Fonction de potentiel des vitesses est :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u = 2y, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -v = 2x$$

Après intégration de la première équation par rapport à x on obtient:

$$\phi = 2xy + G(y)$$

avec G une fonction arbitraire de y .

On dérive ce résultat par rapport à y et on l'identifie avec la seconde équation :

$$G'(y) = 2x,$$

d'où $G'(y) = 0$ et $G(y) = k_2$, avec k_2 constante arbitraire.

La fonction de potentiel est donc:

$$\phi = 2xy + k_2.$$

1.6 Quelques équations de la mécanique des fluides

Pour l'écoulement à surface libre au-dessus d'un obstacle fixe considéré dans ce manuscrit, le domaine fluide est délimité, suivant z , par la surface libre d'une part et la paroi du fond d'autre part .

Dans ce domaine fluide, les équations de Navier-Stokes se simplifient pour un écoulement irrotationnel de fluide incompressible et non-visqueux en un système potentiel. Ce système d'équations s'écrit sous forme conservative :

$$\nabla \cdot u = 0 \tag{1.6.1}$$

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \tag{1.6.2}$$

avec $u = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ et g la gravité. A ce système d'équations, sont associées des conditions aux limites et initiales. A l'instant initial, le fluide est au repos ($u = 0$) et la surface libre est non perturbée (écoulement sans obstacle).

On introduit le potentiel des vitesses, ϕ , tel que $u = \nabla\phi$, le système $\{(1.6.1), (1.6.2)\}$ se réécrit :

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{1.6.3}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \tag{1.6.4}$$

avec $C(t)$ une constante que l'on détermine avec la condition à la limite à la surface libre sur la pression

$p(x, y, z = d_0 + \eta(x, y, t), t) = p_0$. On en déduit donc que $C(t) = \frac{p_0}{\rho}$. La relation de Bernoulli est alors obtenue :

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{p_0 - p}{\rho} + gz = 0 \tag{1.6.5}$$

1.6.1 Equation d'Euler par un écoulement incompressible

Soit l'écoulement incompressible d'un fluide parfait, c'est-à-dire sans viscosité dans un champ de force massique \vec{f} , en première approximation, sa masse volumique constante en un point quelconque du fluide $m(x; y; z)$ et à un instant quelconque t , les champs de pression $p(x; y; z; t)$ et de vitesse $\vec{v}(x; y; z; t)$ vérifient les relations suivantes :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \vec{f}.$$

En coordonnées cartésiennes $(x_1; x_2; x_3)$ ces relations s'écrivent :

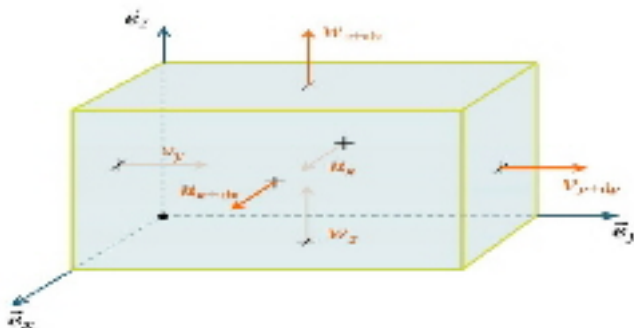
$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0.$$

1.6.2 Equation de la continuité

L'équation de continuité est d'intérêt très général puisqu'elle traduit le principe de conservation de la masse au sein d'un écoulement. L'établissement de cette équation locale repose sur un bilan de masse de fluide au sein d'un élément de volume pendant un temps élémentaire dt . On considère alors un élément de volume parallélépipédique $dV = dxdydz$ dont la masse est proportionnelle à la masse volumique du fluide et vaut donc : $m = \rho dV$. De manière générique, la variation de masse pendant le temps dt peut se formuler :

$$dm = \frac{\partial m}{\partial t} dt = \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt$$

Par ailleurs, cette variation de masse peut être identifiée à la somme algébrique des débits traversant les 6 faces du parallélépipède, augmentée (ou diminuée) des éventuels sources ou puits pouvant se trouver à l'intérieur du parallélépipède (ces sources ou puits sont des points de l'espace où de la matière fluide peut être créée ou détruite).



Fig(1-3) Equation de la continuité

Considérons dans un premier temps l'ensemble des débits traversant les 6 faces du parallélépipède, et raisonnons à partir du schéma de la figure. Le vecteur vitesse présente 3 composantes étant chacune perpendiculaire à 2 des 6 faces. Le débit massique à travers une surface correspond dans ce cas au produit de la masse volumique par la composante de la vitesse et par la surface traversée.

A travers les deux faces perpendiculaires à l'axe y , le bilan de masse pendant le temps dt s'exprime :

$$dm_y = +[\rho v]_y dx dz dt - [\rho v]_{y+dy} dx dz dt$$

Un développement limité au premier ordre conduit à :

$$[\rho v]_{y+dy} = [\rho v]_y + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dy \Rightarrow dm_y = \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} dx dz dt$$

Par analogie, selon les deux autres directions on trouve :

$$dm_x = \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} dx dy dz dt \quad , \quad \text{et} \quad dm_z = -\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} dx dy dz dt$$

Par conséquent, la variation de masse due aux débits massiques à travers les 6 faces se formule :

$$\begin{aligned} dm_x + dm_y + dm_z &= -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dV dt \\ &= -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV dt \end{aligned}$$

S'il existe, au sein de l'élément de volume, des puits et des sources, ils sont caractérisés chacun par un débit volumique par unité de volume (bien que ponctuels, ils génèrent un débit volumique à l'intérieur de dV). On les notera q_v et on pourra leur affecter des valeurs positives (sources) ou négatives (puits). Ainsi, le bilan de masse pendant le temps dt créée ou détruite à l'intérieur du volume dV s'exprime :

$$\sum_i \rho q_v dV dt.$$

Il résulte de la prise en compte de ces différents termes la formulation suivante de la variation de masse du volume dV pendant le temps dt :

$$\begin{aligned} dm &= \frac{\partial \rho}{\partial t} dV dt \\ &= -\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) dV dt + \sum_i \rho q_v dV dt \end{aligned}$$

qui, après simplification par dV et dt est ramenée à une équation locale connue sous l'appellation d'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \sum_i \rho q_v$$

Il convient alors d'envisager quelques cas particuliers :

1- Si l'écoulement est stationnaire (aucune variation dans le temps des différentes grandeurs caractérisant l'écoulement et le fluide), alors on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \sum_i \rho q_v.$$

2- Si l'écoulement est dépourvu de puits et sources, on dit qu'il est conservatif, et dans ce cas :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \Rightarrow \sum_i \rho q_v = 0.$$

3- Si le fluide est incompressible, alors sa masse volumique est une constante (ne dépendant ni du temps, ni des coordonnées de l'espace), dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \sum_i q_v.$$

4- Si l'écoulement est conservatif et que le fluide est incompressible (il s'agit de la double hypothèse que l'on retiendra pour la plupart des écoulements étudiés dans ce cours), alors on a tout simplement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

Chapitre 2

Les transformations conformes et fonction analytique

Dans ce chapitre on présente quelques définitions des fonctions analytiques, la transformation conforme et quelques transformations classiques (la transformation de Schwarz-Christoffel, Transformation de Joukowski...).

2.1 Les fonctions analytiques

2.1.1 Fonctions holomorphes

Une fonction f est dite holomorphe en un point si elle est holomorphe dans un disque ouvert centré en ce point, et est dite holomorphe dans un domaine D si elle est dérivable en chaque point de D .

2.1.2 Fonctions Harmoniques

Les parties réelle et imaginaire d'une fonction holomorphe vérifient les conditions de Cauchy-Riemann, ces équations nous ramènent à la notion de fonctions harmoniques

Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} .

Une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable est dite harmonique si

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

L'expression Δu est appelée le Laplacien de u .

2.1.3 les Conditions de Cauchy-Riemann

Soit Ω un ouvert du plan complexe \mathbb{C} .

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$f(x + iy) = u(x; y) + iv(x; y).$$

Où

$$u(x; y) = \operatorname{Re} f(x + iy).$$

$$v(x; y) = \operatorname{Im} f(x + iy).$$

Si f est holomorphe dans Ω , alors elle vérifie la condition de Cauchy-Riemann suivante:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

Si f est différentiable sur Ω et vérifie la condition de Cauchy-Riemann, alors f est holomorphe dans Ω .

2.2 Conditions aux limites

Le système d'équations {(1.6.3) et (1.6.5)} est complété par des conditions aux limites sur la vitesse à la surface libre et aux parois. Ces conditions aux limites sont :

1- Condition cinématique au fond

$$\omega = u \cdot \nabla h \quad \text{en } z = h(x, y). \quad (2.2.1)$$

2-Condition cinématique à la surface libre

$$\omega = \frac{D\eta}{Dt} \text{ en } z = d_0 + \eta(x, y, t). \quad (2.2.2)$$

3-Condition dynamique à la surface libre

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi^2 + g\eta = cte \text{ en } z = d_0 + \eta(x, y, t). \quad (2.2.3)$$

2.2.1 Potentiel de vitesse

Si un champ de vitesse \vec{v} est irrotationnel, on peut définir une fonction φ scalaire telle que

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi = \vec{\nabla} \varphi$$

Le symbole φ représente le potentiel de vitesse. Dans le repère cartésien, en considérant un écoulement plan ($\vec{v} = (u; v)$), on peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases}$$

Si de plus le fluide est incompressible :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \\ &\Rightarrow \Delta\varphi = 0 \end{aligned}$$

où φ vérifie l'équation de Laplace .

2.2.2 Notions de potentiel complexe et de vitesse complexe

On appelle potentiel complexe la fonction $f(z) = \varphi(x; y) + i\psi(x; y)$ ou $z = x + iy$ est la variable complexe associée à la fonction potentiel complexe $f(z)$ (φ et ψ reprennent respectivement les fonctions potentiel et de courant).

La fonction f a les propriétés suivantes :

- $f(z)$ est une fonction uniforme, c'est-à-dire qu'à une valeur de z correspond une seule valeur de f

• $f(z)$ est une fonction analytique, il faut que sa dérivée soit définie partout, c'est-à-dire

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = -i\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = u \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = v \end{cases}$$

Ce système d'équation constitue les relations de Cauchy-Riemann qui vérifient bien les relations trouvées précédemment.

Pour que $f(z)$ analytique, il faut que φ et ψ vérifiant les relations de Cauchy-Riemann. La fonction $f(z)$ est appelée potentiel complexe des vitesses.

On constate pour qu'un écoulement puisse être décrit au moyen d'une fonction de courant ψ et d'un potentiel des vitesses φ , il faut que ces deux fonctions vérifiant l'équation de Laplace ($\Delta\varphi = 0$ et $\Delta\psi = 0$).

On appelle écoulement uniforme si les composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace on note la vitesse par U .

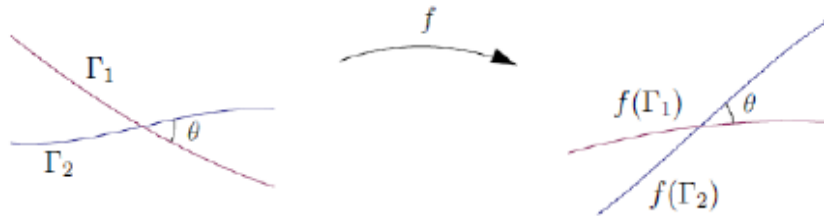
2.3 Les transformations conformes

Une transformation conforme $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ entre deux ouverts de \mathbb{R}^d est une fonction C^∞ qui conserve localement les angles. La matrice Jacobienne de f en tout point est une rotation fois une matrice scalaire. En dimension $d \geq 3$, l'ensemble des transformations conformes est relativement pauvre puisqu'il est engendré par les homothéties, les réflexions, les isométries et les inversions. Le cas planaire est autrement plus intéressant car les transformations conformes concident avec les fonctions holomorphes injectives...

A partir de maintenant on se place en dimension 2.

Soit f une fonction de deux variables réelles ($f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$). On dit que f préserve les angles au point (x_0, y_0) si quels que soient les arcs de courbes Γ_1 et Γ_2 passant par (x_0, y_0) , les vecteurs tangents à ces courbes au point (x_0, y_0) font le même angle orienté que les vecteurs tangents aux courbes $f(\Gamma_1)$ et $f(\Gamma_2)$ au point $f(x_0, y_0)$.

Soit $\omega = f(z)$ une fonction analytique dans domaine D telle que $f'(z) \neq 0$ en tout point de D . Alors la transformation réalisée par cette fonction est une transformation conforme de D .



Fig(2-1) transformation Conforme

2.3.1 Transformation de Joukowski

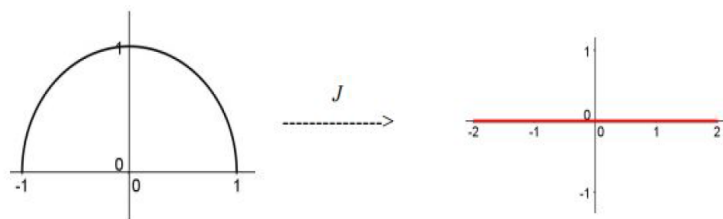
La transformation de Joukowski est définie par :

$$J(z) = z + \frac{1}{z}; \forall z \neq 0 .$$

Cette application est holomorphe sur $\mathbb{C} - \{0\}$ car : $\forall z \neq 0, J'(z) = 1 + \frac{1}{z^2}$

De plus, $\forall z \notin \{-1, 0, 1\}, J'(z) \neq 0$, donc cette transformation est une application conforme sur tous les domaines ouverts du plan complexe n'incluant ni 0 ni -1 ni 1.

La transformation de Joukowski est une bijection qui transforme le demi-cercle unité supérieur en un segment borné aux points d'affixes respectives -2 et 2 .



Fig(2-2) Transformation de Joukowski

2.3.2 Les transformation de Mobius

Soient a, b, c, d quatre nombres complexes tels que $ad - bc = 0$. La fonction complexe définie par

$$\omega = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

S'appelle une transformation de Mobius ou parfois une transformation bilinéaire, Il nous convient dans ce que suit de considérer cette fonction comme une de \mathbb{C}^∞ à \mathbb{C}^∞ . La condition $ad - bc \neq 0$ élimine les cas où T pourrait se réduire à une constante.

Les cas spéciaux à noter sont :

1. La translation pour : $a = d = 1, c = 0$ et $b \in \mathbb{C}$.
2. La multiplication pour : $d = 1, c = b = 0$ et $a \in \mathbb{C}$.
3. La rotation pour : $d = 1, c = b = 0$ et $a \in \mathbb{C}$ avec $|a| = 1$.
4. L'inverse pour : $d = a = 0, c = b = 1$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \\ &\Rightarrow \Delta \varphi = 0 \end{aligned}$$

où φ vérifie l'équation de Laplace .

2.3.3 Transformation Hodographe

La théorie des lignes de courant est étudié le problème d'écoulement potentiel et bidimensionnel, bornés par des parois rectilignes et des lignes de courant libre de forme inconnue, sur lesquelles la pression est supposée constante. Cette transformation est utilisée par Kirchhoff 1986 pour trouver la solution exacte. L'idée est d'introduire la fonction complexe ω

définie par :

$$\begin{aligned} \omega &= \log\left(\frac{u}{df/dz}\right) \\ &= \log\left(\frac{u}{u - iv}\right) \\ &= \log\left(\frac{u}{q}\right) + i\theta \end{aligned}$$

ou

$$\begin{cases} f = \phi + i\psi. \\ \frac{df}{dz} = u - iv \\ q = \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases}$$

(u, v) sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe des x et l'axe des y .

respectivement, θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et U est la vitesse de référence qui peut être considérée comme unité de vitesse.

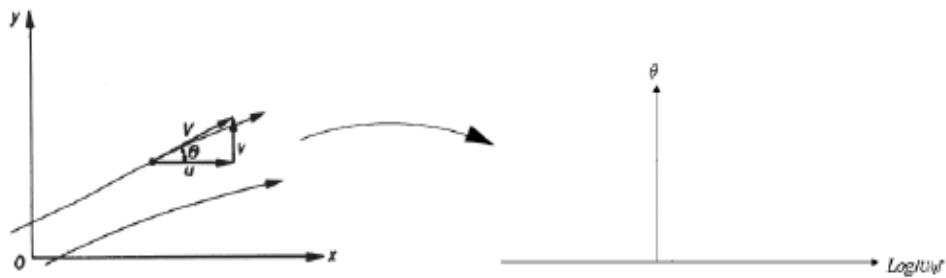
On note que La fonction ω possède les propriétés suivantes :

- La partie réelle de ω est constante sur chaque ligne de courant libre, i.e., $\log(\frac{u}{q}) = const.$
- La partie imaginaire de ω est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, i.e., $\theta = const.$

Par conséquent, dans le plan Ω , le domaine d'écoulement est présenté par une figure plane de côtés rectilignes (polygone).

C'est aussi le cas de la transformation f , qui transforme le plan physique z en polygone.

Il est vient que, si nous pouvons transformer le plan ω vers la moitié supérieure (reps.inférieure) d'une certaine variable complexe λ , alors la relation entre z et f ou entre df/dz et f est paramétriquement déterminées.

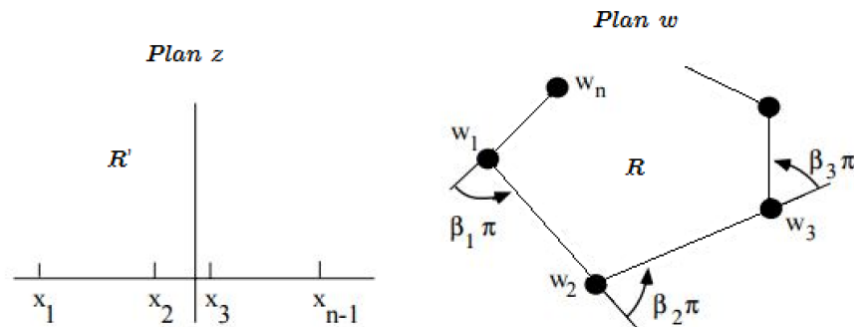


Fig(2-3) Transformation Hodographe

2.3.4 La transformation de Schwarz-Christoffel

Considérons un polygone dans le plan des w , ayant pour sommets $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$, et pour angles extérieurs respectivement $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$.

Soit $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n$ les points correspondant respectivement à x_1, x_2, \dots, x_n de l'axe réel du plan des z :



Fig(2-4) La transformation de Schwarz-Christoffel

Une transformation qui représente l'intérieur R du polygone considéré sur le demi-plan supérieur du plan des z , et la frontière du polygone sur l'axe réel, est donnée par :

$$T(z) = A \int (\tau - x_1)^{-\beta_1} (\tau - x_2)^{-\beta_2} \dots (\tau - x_{n-1})^{-\beta_{n-1}} d\tau + B$$

où A et B sont des constantes complexes. On notera que:

1. Parmi les point x_1, x_2, \dots, x_{n-1} on peut en choisir trois arbitrairement.
2. Les constantes A et B déterminent la taille, l'orientation et la position du polygone.
3. Il est commode de choisir un point, par exemple x_n à l'infini, cas dans lequel le dernier facteur de $T(z)$ n'existe pas.
4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones fermés.

Chapitre 3

Écoulement à surface libre sous un barrage

3.1 Point de contact singulier

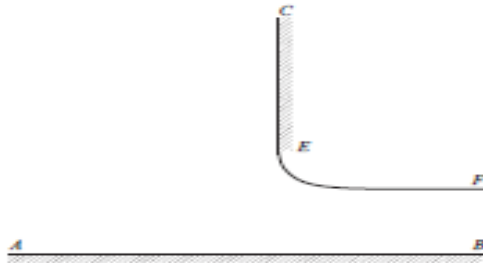


fig (3-1) Le flux de surface libre sous une porte.

Le flux est de gauche à droite

Nous considérons la configuration de l'écoulement présenté dans la figure(3.1). Ici on considère que les effets de la gravité et la tension superficielle seront négligés c'est à-dire que ($T = 0, g = 0$). Nous nous référons à cette problème comme celui d'un point de contact de la surface libre et le paroi rigide singulier par ce que le fluide est forcé de quitter le mur du barrage au point *E* où le mur *CF* se termine. Nous dénotons par u et v les composantes horizontale et verticale de la vitesse respectivement.

En utilisant l'incompressibilité du fluide et l'irrotationalité de l'écoulement, nous définissons une fonction potentielle $\phi(x, y)$ et une fonction de flux $\psi(x, y)$. ce qui nous permet de définir le potentiel complexe:

$$f = \phi + i\psi$$

Et la vitesse complexe

$$\omega = u - iv = df/dz$$

sont les deux fonctions analytiques de $z = x + iy$.

Le mur AB est une ligne de courant le long de laquelle on choisit $\psi = 0$. Le mur CE et la surface libre EF définissent une autre ligne de courant, le long de laquelle la valeur constante de ψ est notée Q . Nous choisissons également $\phi = 0$ au point de séparation E . Ces deux choix de $\psi = 0$ sur AB et de $\phi = 0$ sur E peuvent être faits sans perte de généralité et choisir $\psi = 1$ sur CE .

La condition de la conservation de l'énergie donnée par l'équation de Bernoulli comme suit:

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{p}{\rho} = constant \quad (3.1.1)$$

Partout dans le fluide. La surface libre EF sépare le fluide de l'atmosphère supposée caractérisée par une pression constante p_0 .

En l'absence de tension superficielle, ce que nous supposons, la pression est continue sur la surface libre. Donc $p = p_0$ sur la libre surface. Il découle de (3.1.1) que

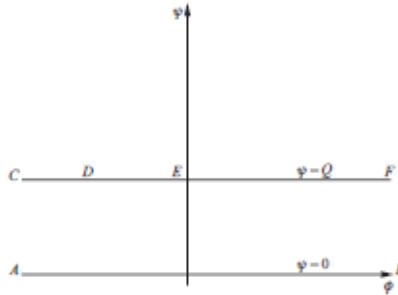
$$u^2 + v^2 = U^2 \quad \text{sur } EF, \quad (3.1.2)$$

où U est une constante

Une simplification significative dans la formulation du problème est obtenue en utilisant ϕ et ψ comme variables indépendantes. Ce choix a été utilisé par Stokes, pour étudier les ondes de gravité, et par Helmholtz et Kirchhoff pour explorer les flux rationalisés libres. Nous allons utiliser largement dans nos études sur les écoulements de surface libre par capillarité de gravité.

La simplification provient du fait que le domaine de l'écoulement est transformé en une bande $0 < \psi < Q$ illustrée à la figure (3.2). La surface libre EF fait partie de la limite connue $\psi = Q$ dans le plan- f . Puisque $u - iv$ est une fonction analytique de z et z est une fonction analytique de f , alors $u - iv$ est une fonction analytique de f

$$u - iv = df/dz$$



fig(3-2) La configuration
d'écoulement de la figure 3.1 dans
le plan potentiel complexe

Puisque les effets de la gravité et de la tension superficielle sont négligés, l'écoulement se rapproche d'un uniforme flux de profondeur constante H comme $x \rightarrow \infty$. Il découle de la condition aux limites dynamique (3.1.2) que l'écoulement uniforme est caractérisé par une vitesse constante U . Puisque $\psi = 0$ sur AB et $\psi = Q$ sur EF , $H = Q/U$.

Nous définissons la variable hodographe logarithmique $\tau - i\theta$ par la relation

$$\omega = u - iv = e^{\tau - i\theta} \tag{3.1.3}$$

La vitesse est tangente aux lignes de courant, la courbure K d'une ligne de courant est donnée par:

$$K = \frac{-d\theta}{ds} \tag{3.1.4}$$

Nous pouvons aussi réécrire K comme suit:

$$K = -\frac{\partial\theta}{\partial\phi}\frac{\partial\phi}{\partial s} + \frac{\partial\theta}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial s}. \quad (3.1.5)$$

Le long d'une ligne de courant ψ on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial s} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial\phi}{\partial s} = e^\tau \quad (3.1.6)$$

donc

$$K = -e^\tau \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \quad (3.1.7)$$

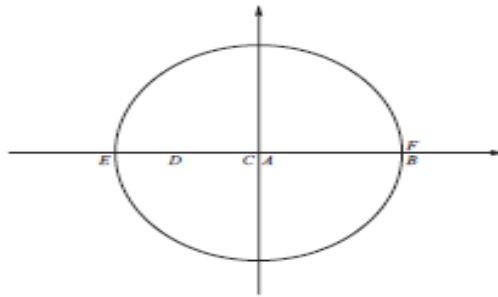
Nous introduisons maintenant des variables sans dimension en utilisant U comme référence vitesse et H comme référence de longueur .

Donc $\psi = 1$ sur le mur CE et sur la surface libre EF . La condition aux limites dynamique (3.1.2) devient

$$u^2 + v^2 = 1 \quad \text{sur } EF \quad (3.1.8)$$

Nous transformons la bande $ABFC$ illustrée à la figure (3.2) en un cercle unitaire dans le plan t par la transformation conforme

$$e^{-\pi f} = \frac{(1-t)^2}{4t}. \quad (3.1.9)$$



Fig(3-3) La configuration de flux de la figure 3.1 dans le plan t complexe.

La configuration du flux dans le plan t est illustrée à la figure (3.3). Il peut facilement vérifier que les points A et C sont transformé en $t = 0$ et que les points B et F sont transformés en $t = 1$. La surface libre EF est transformé en

$$t = e^{i\sigma}, 0 \prec \sigma \prec \pi, \quad (3.1.10)$$

du cercle unitaire. Cela peut être facilement démontré en notifiant que la substitution de (3.1.10) à (3.1.9) donne, après une certaine algèbre

$$\phi = -\frac{1}{\pi} \ln \sin^2 \frac{\sigma}{2} \quad \text{sur } \psi = 1. \quad (3.1.11)$$

On pourrait essayer de représenter la vitesse complexe $\omega = u - iv$ par le séries

$$\omega = G(t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad (3.1.12)$$

où la fonction $G(t)$ contient toutes les singularités de ω . Comme nous le verrons dans les sections(3.1.2) à (3.1.5), ce type de représentation en série nous permet de résoudre de nombreux problèmes d'écoulements à surface libre, y compris la gravité et la tension superficielle.

Pour le problème actuel, on peut écrire $G(t)$ sous la forme

$$G(t) = t^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.13)$$

c'est a dire

$$\omega = t^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n. \quad (3.1.14)$$

Nous devons maintenant déterminer les coefficients a_n dans (3.1.14) tels que la condition aux limites dynamique (3.1.8) est satisfaite. Ceci peut être fait numériquement en tronquant la série infinie dans (3.1.14) après N termes et trouver les coefficients a_n , $n = 0, \dots, N - 1$ par collocation. C'est cette approche que nous utiliserons lorsque résoudre des problèmes où les effets de la gravité ou de la tension superficielle sont inclus dans la condition limite dynamique. Cependant, il peut vérifier que

$$\omega = t^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.15)$$

donc

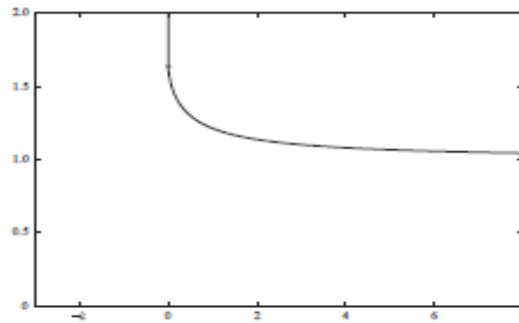
$$x_\phi + iy_\phi = e^{\frac{-i\sigma}{2}}, \quad 0 < \sigma < \pi, \quad (3.1.16)$$

le long de la surface libre EF . Différencier (3.1.11) par rapport à σ et appliquer la règle de la chaîne à (3.1.16) donne

$$x_\phi + iy_\phi = -\frac{1}{\pi} \cotan \frac{\sigma}{2} e^{\frac{-i\sigma}{2}} \quad (3.1.17)$$

Intégrer (3.1.17) par rapport à σ et prendre les parties réelle et imaginaire donne

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\pi} \cotan \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{\pi} - 1 \\ y = \frac{2}{\pi} \sin \frac{\sigma}{2} + 1 \end{cases} \quad (3.1.18)$$



fig(3-4) Profil de surface libre pour la configuration de flux de la figure 3.1. La position du point de séparation E est indiquée par une petite ligne horizontale. L'échelle verticale a été exagérée pour montrer clairement le profil de surface libre.

Conclusion

Dans ce travail on traite un problème d'un écoulement bidimensionnel sous un barrage d'un fluide incompressible et non visqueux où on considère que les effets de la gravité et la tension superficielle seront négligés. Nous nous référons à cette problème comme celui d'un point de contact de la surface libre et le paroi rigide singulier par ce que le fluide est forcé de quitter le mur du barrage au point contact. On a utilisé la technique de la troncature de la série aux basés sur les transformations conformes pour résoudre ce problème. L'avantage de cette méthode est de réduire la dimension du problème de 2D à un problème unidimensionnel.

Bibliographie

- [1] ASMA HAMIDI, *Traitement analytique de problème d'écoulement par la méthode de Kirchoff*, Université Kasdi Merbah Ouargla, 18 juin 2017.
- [2] GOUDJIL KRIMOU & MEGRI NASSIM, *Applications du théorème des résidus et transformation conforme*, Université de Bejaia, 29 juin 2016.
- [3] RIMI KHAZZANI, *Résolution analytique du problème d'écoulement sans l'effet de gravité*, mémoire master de universite de ouargla(2016).
- [4] LAIADI ABDELKADER, *effet de la tension de surface sur des écoulements au dessus des obstacles*, mémoire magistère de universite de ouargla(2012).
- [5] Free surface flows, C5.6 Applied Complex Variables, 11 Janvier 2016.
- [6] EMMANUEL PLAUT, *Mécanique des fluides*, 21 octobre 2016.
- [7] KHALED DEBIANE, *Développement d'un modèle unidirectionnel pour un écoulement à surface libre et un canal non prismatique de section et de pente variables*, Rhéohydro, SCOP 3BIS, Espace Vaucanson 82, France.
- [8] CHAABELASRI ELMILOUD, *Contribution à la modélisation des écoulements en eaux peu profondes*, Hal Id Submitted on 9 Mar 2011.
- [9] ZEKRI SALIMA, *Traitement analytique du Problème d'écoulement par la transformation conforme*, Université Kasdi Merbah Ouargla, 25 mai 2017
- [10] JEAN-MARC VANDEN-BROECK, *Gravity-Capillary Free-Surface Flows*, University Press, New York, 2010.

Résumé

Dans ce mémoire on traite un problème d'un écoulement bidimensionnel sous un barrage d'un fluide incompressible et non visqueux où on considère que les effets de la gravité et la tension superficielle seront négligés. Nous nous référons à cette problème comme celui d'un point de contact de la surface libre et le paroi rigide singulier par ce que le fluide est forcément quitté le mur du barrage au point contact. On a utilisé la technique de la troncature de la série qui basé sur les transformation conforme pour résoudre ce problème. L'avantage de cette méthode est réduit la dimension du problème de 2D a un problème unidimensionnel.

Mots clés: Ecoulement, surface libre, fonction potentiel...

Abstract

In this work we treated a problem of two dimensional flow under a dam of an incompressible and non-viscous fluid where we consider that the effects of the gravity and the surface tension will be neglected.

We will refer to this problem as that of a point of contact of the free surface and the singular regulating wall by that the fluid is forcibly left the wall of the dam at the point of contact.

The series truncation technique based on conformal transformation has been used to solve this problem.

The advantage of this method is reduced the dimension of the 2D problem to a one-dimensional problem.

Key words: Free surface, flow, potential function...

ملخص

في هذا العمل نهتم بدراسة مشكلة التدفق ثنائي الأبعاد تحت سد سائل غير قابل للضغط و غير لزج حيث نعتبر أن آثار الجاذبية و التوتر السطحي سوف يتم إهمالها. سوف نشير إلى هذه المشكلة على أنها نقطة تلامس السطح الحر و الجدار المنظم المفرد السائل بالقوة عند سد نقطة الاتصال. تم استخدام تقنية إقتطاع السلسلة المستندة إلى تحول مطابق لحل هذه المشكلة. يتم تقليل ميزة هذه الطريقة من مشكلة ثنائية البعد إلى مشكلة أحادية البعد.

الكلمات المفتاحية: سطح حر, تدفق, دالة كمون...