

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon Dieu qui m'a donné la force pour terminer ce modeste travail.

Je tiens à remercier mon promoteur : Mr. Sengouga pour la confiance qu'il m'a témoignée en me proposant ce sujet, ses encouragements et sa patience. Les discussions scientifiques qu'il a su générer, ses remarques et ses suggestions qui m'ont permis de finaliser ce modeste travail. Je souhaite lui transmettre ma reconnaissance et ma plus profonde gratitude.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce travail.

Je ne peux pas clôturer mes remerciements sans se retourner vers les êtres qui me sont les plus chers ; ma famille qui ont eu un rôle essentiel et continu dans ma réussite.

Merci.

Table des matières

Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Equations différentielles ordinaires	3
1.1.1 Equations linéaires du premier ordre.	3
1.1.2 Equation de Bernoulli	4
1.1.3 Equations différentielles linéaires du second ordre	5
1.2 Equations aux dérivées partielles	7
1.2.1 Equation d'onde linéaire	7
1.2.2 Equation avec dissipation	8
1.2.3 Fonction de Bessel et fonction de Bessel modifiée	9
1.2.4 Transformée de Fourier	10
1.3 Rappels d'analyse asymptotique	12
1.3.1 Perturbations	12
1.3.2 Symboles d'ordres	12
1.3.3 Théorème de Taylor	13
1.3.4 Méthode des échelles Multiples	14
2 Equation d'ondes avec un amortissement faible linéaire	21
2.1 Expansion régulière	21
2.2 Expansion à échelles multiples	23
2.3 Solution exacte	27

3	La méthode de Chikwendu et Kevorkian	28
3.1	Changement d'échelle du temps	28
3.1.1	Calcul de u_0	31
3.1.2	Calcul de u_1	33
3.1.3	Elimination des termes séculaires	34
3.2	Exemples	34
3.2.1	Equation d'onde avec un amortissement linéaire	34
3.2.2	Equation d'onde avec amortissement non linéaire	41
	Conclusion	51
	Bibliographie	52

Introduction

Les équations aux dérivées partielles de type hyperboliques, linéaires et non linéaires, modélisent beaucoup de phénomènes de la physique, mécanique des fluides, aérodynamiques, optiques, ondes électromagnétiques, Les effets de dissipations, qui se manifestent par une perte d'énergie du système, sont fréquemment présent dans ces problèmes. Dans ce travail, on prend l'équation d'onde comme modèle mathématique, avec un petit terme de dissipation, contenant un paramètre ε , qui prend de très petites valeurs.

Pour être plus claire on considère le problème suivant

$$\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} + \varepsilon H\left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}, \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (P_\varepsilon)$$

où la fonction H dépend seulement des premiers dérivés de la solution u_ε dépendante et qui peut être non linéaire. En l'absence de terme de dissipation, c.-à-d. lorsque $\varepsilon = 0$, le problème réduit est une équation d'onde linéaire, facile à résoudre,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (P_0)$$

On se demande s'il est possible, pour des petites valeurs de ε , de considérer la solution u du problème (P_0) comme une bonne approximation de u_ε . Un premier problème se manifeste est que les deux problèmes sont de natures différents. Le premier est dissipatif, alors que le deuxième est conservatif et on s'attend forcément à avoir un écart important entre les deux solutions, lorsque le temps t prend des valeurs importantes. Pour remédier ce problème, et construire une bonne approximation de u_ε valable pour de grands échelles de temps, on utilise une méthode asymptotique qui est la méthode des échelles multiples¹.

Ce travail est partagé en trois chapitres. Dans le premier chapitre, quelques préliminaires sur les équations différentielles ordinaires, l'équation d'onde linéaire et l'analyse asympto-

1. Multiple scales methode

tique sont données (définition de perturbations, méthode des échelles multiples, . . .). En particulier, l'application de la méthode des échelles multiples est illustrée sur une équation différentielle ordinaire. Dans le deuxième chapitre, on applique la méthode des échelles multiples sur le problème (P_ε) , pour un cas linéaire. Une autre variante de la méthode des échelles multiples, due à Chikwendu et Kevorkian [2], est présentée en détaille dans le dernier chapitre, avec des applications sur des problèmes linéaires et non linéaires. Une conclusion et quelques références sur le sujet sont donnés à la fin de ce travail.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Equations différentielles ordinaires

1.1.1 Equations linéaires du premier ordre.

Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle est linéaire par rapport à la fonction inconnue y et par rapport à sa dérivée y' . Une telle équation peut toujours s'écrire sous la forme

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = f(x), \quad (1.1)$$

où les fonctions a, b et f sont données

Une solution de (1.1) est une fonction y de classe C^1 sur un intervalle I vérifiant (1.1) pour tout $x \in I$.

On appelle équation différentielle homogène associée à (1.1) l'équation :

$$a(x)y'(x) + b(x)y(x) = 0. \quad (1.2)$$

Solution de l'équation homogène

Supposons que les fonctions a et b sont définies et continues sur l'intervalle I et tel que $a(x) \neq 0$, pour tout $x \in I$. Alors la solution générale de (1.2) est

$$y_h(x) = Ce^{u(x)},$$

avec $u(x) = -\frac{b(x)}{a(x)}$ et C est une constante arbitraire.

Solution générale

Soit y_p une solution particulière de (1.1), alors les solutions générales de (1.1) s'écrivent

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

où y_h est la solution générale de l'équation homogène (1.2).

Recherche d'une solution particulière

On commence toujours par regarder s'il n'y a pas de solution évidente, sinon on peut appliquer l'une des méthodes suivantes :

- Pour une équation à coefficients constants, si le second membre est de la forme $f(x) = e^{\lambda x} p_n(x)$ où p_n est un polynôme de degré n .
 - Si $\lambda \neq r = -\frac{b}{a}$: alors on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = Q_n(x)e^{\lambda x}$ où Q_n est un polynôme de degré n .
 - Si $\lambda = r = -\frac{b}{a}$: on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = xQ_n(x)e^{\lambda x}$ où Q_n est un polynôme de degré n .
- Si $y_h(x)$ est une solution de l'équation homogène, on cherche une solution particulière en variant la constante, c.-à-d. $y_p(x) = C(x)y_h(x)$ et C' vérifie alors : $C'(x) = \frac{f(x)}{a(x)y_h(x)}$.

1.1.2 Equation de Bernoulli

Une équation de Bernoulli est une équation différentielle scalaire de la forme

$$y' + p(x)y + q(x)y^r = 0, \quad (1.3)$$

où $r \in \mathbb{R}$, p et q sont deux fonctions définies continues sur un intervalle I de \mathbb{R} . C'est une équation nonlinéaire si $r \notin \{0, 1\}$.

Remarque 1.1 Une fonction strictement positive y , différentiable sur I , est une solution de l'équation (1.3) si et seulement si $u = y^{1-r}$ est une solution strictement positive de l'équation linéaire

$$u' + (1-r)p(x)u + (1-r)q(x) = 0. \quad (1.4)$$

Connaissant la solution générale de l'équation (1.4), on peut déduire les solutions strictement positives de l'équation (1.3).

1.1.3 Equations différentielles linéaires du second ordre

Une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est du type :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x), \quad (1.5)$$

où les réels a, b, c sont des constantes et f est une fonction donnée appelée second membre, Une fonction y , de classe C^2 sur un intervalle I , est une solution de (1.5) si elle vérifie (1.5) pour tout $x \in I$.

On appelle équation différentielle homogène associée à (1.5) l'équation :

$$ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0. \quad (1.6)$$

Solution de l'équation homogène

On appelle équation caractéristique associée à (1.6) :

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

1. Si $\Delta > 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions $r_1 \neq r_2$ réelles. La solution générale de (1.6) s'écrit :

$$y_h(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{R} \text{ constantes arbitraires.}$$

2. Si $\Delta < 0$ alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes conjuguées $r = \alpha + i\beta$ et $\bar{r} = \alpha - i\beta$. Comme précédemment on a donc :

$$y_h(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{\bar{r}x}, \text{ avec } C_1, C_2 \in \mathbb{C}, \text{ solutions complexes.}$$

ou bien si on veut les solutions réelles de (1.6) :

$$y_h(x) = e^{\alpha x} (A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x)), \text{ avec } A, B \in \mathbb{R}, \text{ solutions réelles.}$$

3. Si $\Delta = 0$ alors l'équation caractéristique admet une unique solution $r = -\frac{b}{2a}$ (racine double) et les solutions de (1.6) s'écrivent :

$$y_h(x) = (A + Bx)e^{rx}, \text{ où } A \text{ et } B \text{ sont deux constantes arbitraires réelles.}$$

Solution générale

La solution générale de l'EDO de (1.5) s'écrit :

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x),$$

où y_h est solution de l'équation homogène associée et y_p une solution particulière de (1.5).

Recherche d'une solution particulière

On commence toujours par regarder s'il n'y a pas de solution évidente, sinon on peut appliquer l'une des méthodes suivantes.

— Solution particulière selon la forme de Second membre

— Si le second membre est de la forme $f(x) = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x)$ alors on peut chercher une solution sous la forme :

$$y_p(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

— Si le second membre est de la forme $f(x) = e^{\lambda x} P_n(x)$ avec P_n polynôme de degré n :

Si $a\lambda^2 + b\lambda + c \neq 0$ i.e. $\lambda \neq r_1$ et $\lambda \neq r_2$, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = e^{\lambda x} Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme de degré n .

Si $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ et $2a\lambda + b \neq 0$ i.e. si $\lambda = r_1$ ou $\lambda = r_2$ avec $r_1 \neq r_2$, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = e^{\lambda x} x Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme de degré n .

Si $\lambda = r_1 = r_2$, on cherche une solution sous la forme $y_p(x) = e^{\lambda x} x^2 Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme de degré n .

— Méthode de variation des constantes : Soit y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de l'équation (1.6). On a une solution particulière de l'équation (1.5) sous la forme

$$y = \lambda_1(x)y_1 + \lambda_2(x)y_2,$$

avec λ_1, λ_2 sont des fonctions de x dérivables, déterminer par le système :

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = \frac{f(x)}{a}, \\ \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0. \end{cases}$$

1.2 Equations aux dérivées partielles

Une EDP est une équation dont les solutions sont des fonctions à plusieurs variables

$$(x, y, \dots) \mapsto u(x, y, \dots),$$

vérifiant une relation entre les variables u et ces dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots$

1.2.1 Equation d'onde linéaire

On appelle équation des ondes linéaire (homogène) l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (1.7)$$

où c est un nombre réel positif donné. Cette équation est le prototype des équations "hyperbolique" linéaire et modélise les petite vibration d'une corde composée infini, Voir [7]

Soit ϕ et ψ deux fonctions définies sur \mathbb{R} , avec $\phi \in C^2$ et $\psi \in C^1$. Alors le problème (1.7) avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

admet une solution unique, u de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, qui peut être déduit par plusieurs méthode (formule de d'Alembert, transformée de Fourier, ...).

La formule de D'Alembert

Théorème 1.2 *La solution u du problème (1.7) – (1.8) est donnée par la formule de D'Alembert*

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \{ \phi(x + ct) + \phi(x - ct) \} + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds.$$

Démonstration. Nous utiliserons le changement de variable :

$$\sigma = x - ct, \quad \xi = x + ct,$$

et introduisons la fonction :

$$U(\xi, \sigma) = u(x, t),$$

donc il est facile de vérifier qu'elle satisfait

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \sigma \partial \xi} = 0.$$

Nous en déduisons qu'il existe deux fonctions d'une variable $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ telles que :

$$U(\xi, \sigma) = f(\xi) + g(\sigma).$$

En revenant à l'inconnue originale u , nous obtenons :

$$u(x, t) = f(x + ct) + g(x - ct).$$

Pour obtenir f et g nous utilisons les conditions initiales :

$$\begin{cases} u(x, 0) = \phi(x) \implies f(x) + g(x) = \phi(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \psi(x) \implies c\{f'(x) - g'(x)\} = \psi(x). \end{cases}$$

Nous en déduisons qu'il existe une constante A telle que :

$$\begin{cases} f(x) + g(x) = \phi(x), \\ f(x) - g(x) = \frac{1}{c} \int_0^x \psi(s) ds + A, \end{cases}$$

d'où nous tirons les identités :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\phi(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{A}{2}, \\ g(x) = \frac{1}{2}\phi(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{A}{2}, \end{cases}$$

expressions dont le résultat annoncé se déduit en prenant la somme. ■

1.2.2 Equation avec dissipation

Les effets de dissipation sont très importants dans des phénomènes de propagation d'onde. La dissipation peut être dû au frottement du milieu qui peut être inclus dans le modèle mathématique. Nous pouvons assumer, par exemple, que la loi du frottement est linéaire exprimant une force proportionnelle à la vitesse de la vibration. dans ce cas l'équation finale prend la forme,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (1.9)$$

où ρ la densité linéaire de la corde au repos. L'équation (1.9) est aussi dite l'équation du télégraphiste.

Pour une corde avec les points finals fixes (c.-à-d. de 0 à L). En multipliant l'équation (1.9) par une fonction $v \in H_0^1(0, L)$ et en intégrant sur $(0, L)$ on obtient

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx - c \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v dx + \rho \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(0, L),$$

en intégrant par partie dans le deuxième intégrale, on obtient

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx + c \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \rho \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} v dx = 0, \quad \forall v \in H_0^1(0, L),$$

On prend comme fonction de test $v = \frac{\partial u}{\partial t}$,

$$\int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u}{\partial t} dx + c \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx + \int_0^L \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = 0,$$

c.-à-d.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial u}{\partial t} (t) \right|_{L^2(0,L)}^2 + \frac{c}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{L^2(0,L)}^2 + \int_0^L \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx = 0.$$

En appelant l'énergie la quantité

$$E(t) = \frac{1}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial t} (t) \right|_{L^2(0,L)}^2 + \frac{c}{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{L^2(0,L)}^2,$$

alors

$$\frac{d}{dt} E(t) = - \int_0^L \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leq 0. \quad (1.10)$$

Ce qui montre un taux de dissipation d'énergie proportionnel à la vitesse de l'onde et on a $E(t) \leq E(0)$, $\forall t \geq 0$. En particulier, pour l'équation (1.9), l'unicité de la solution suit de (1.10), puisque $E(0) = 0$ implique $E(t) = 0$ pour tous $t > 0$.

D'autres formes de dissipation, linéaire et non linéaire, peuvent être considéré, par exemple si on prend en compte l'échauffement de la corde du à la friction entre les particules, ce qui entraîne aussi un changement de ces caractéristiques physiques avec le temps. Voir [6].

1.2.3 Fonction de Bessel et fonction de Bessel modifiée

On utilisera ces fonctions pour obtenir la solution exacte de (1.9) dans le chapitre suivant.

Equation de Bessel

L'équation différentielle du deuxième ordre donné par

$$t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t \frac{\partial u}{\partial t} + (t^2 - v^2) u = 0.$$

Est connu comme l'équation de Bessel. Les solutions de cette équation qui sont bornés au voisinage de 0 sont les fonctions de Bessel du premier type d'ordre $v = 0, 1, 2 \dots$, noté $J_v(t)$

Equation de Bessel modifiée

L'équation de Bessel modifiée d'ordre v , est donné par

$$t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t \frac{\partial u}{\partial t} - (t^2 + v^2) u = 0.$$

Ses solutions, borné au voisinage de 0, sont appelées les fonctions de Bessel modifiées du premier type d'ordre $v = 0, 1, 2 \dots$, noté $I_v(t)$. Il y a une relation entre I_v et J_v donnée par

$$I_v(t) = i^{-v} J_v(it).$$

On a aussi

$$I_v(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(j+1) \Gamma(j+v+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2j+v},$$

où $\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$. Pour $t \rightarrow 0$,

$$I_v(t) \rightarrow \left(\frac{t}{2}\right)^v \frac{1}{\Gamma(v+1)}. \quad (1.11)$$

Voir [7] pour plus de détails.

1.2.4 Transformée de Fourier

On utilisera la transformée de Fourier pour résoudre une équation d'onde étudiée dans le dernier chapitre.

Transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R}^n)$

Définition 1.3 Notons $S(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ disparaissant rapidement à l'infini, c.-à-d., telle sorte que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^m \partial^\alpha u(x) = 0,$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ et multi-indice α .

Soit $u \in S(\mathbb{R}^n)$, Sa transformée de Fourier est donnée par

$$\widehat{u}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x) e^{-ix \cdot k} dx.$$

Lorsque aussi $\widehat{u} \in S(\mathbb{R}^n)$, u peut être reconstruit à partir de \widehat{u} par la formule d'inversion suivante

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(k) e^{ix \cdot k} dk.$$

Transformée de Fourier dans $S'(\mathbb{R}^n)$

Lemme 1.4 Soit $u \in S'(\mathbb{R}^n)$. La fonctionnelle linéaire

$$\phi \mapsto \langle u, \widehat{\phi} \rangle, \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n),$$

est une distribution tempérée

Définition 1.5 Soit $u \in S'(\mathbb{R}^n)$. La transformée de Fourier de u est la distribution tempérée notée \widehat{u} définie par

$$\langle \widehat{u}, \phi \rangle = \langle u, \widehat{\phi} \rangle, \quad \forall \phi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Exemple 1.6 Nous savons que la distribution de Dirac ou point 0 est dans $S'(\delta_0 \in S'(\mathbb{R}^n))$. Donc nous calculons la transformée de Fourier de δ_0 :

Nous avons pour toute $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$

$$\langle \widehat{\delta}_0, \phi \rangle = \langle \delta_0, \widehat{\phi} \rangle = \widehat{\phi}(0),$$

et parce que $\widehat{\phi}(k) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot k} \phi(x) dx$ (Transformée de Fourier dans $S(\mathbb{R}^n)$), alors

$$\langle \widehat{\delta}, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) dx = \langle 1, \phi \rangle.$$

Donc

$$\widehat{\delta}_0 = 1.$$

Transformée de Fourier dans $L_1(\mathbb{R}^n)$

Soit $u, \hat{u} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de u et la transformée inverse de \hat{u} ont les mêmes formules où $u, \hat{u} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Voir [6] pour plus de détails.

1.3 Rappels d'analyse asymptotique

1.3.1 Perturbations

D'un point de vue heuristique, la théorie des perturbations est une méthode mathématique générale qui permet de trouver une solution approchée d'une équation mathématique P_ε dépendante d'un paramètre ε lorsque la solution de l'équation P_0 , correspondant à la valeur $\varepsilon = 0$, est connue exactement.

L'équation mathématique P_ε peut être une équation algébrique, une équation différentielle, une équation aux valeurs propres, ... La méthode consiste à chercher la solution approchée de l'équation P_ε sous la forme d'un développement en série des puissances du paramètre ε , cette solution approchée étant supposé être une approximation d'autant meilleure de la solution exacte, mais inconnue, que la valeur absolue du paramètre ε est plus «petite».

1.3.2 Symboles d'ordres

Nous nous intéressons à la façon dont les fonctions se comportent lorsque qu'un paramètre, typiquement ε , devient petit. Par exemple, la fonction $\phi(\varepsilon) = \varepsilon$ ne converge pas vers zéro plus vite que $f(\varepsilon) = \varepsilon^2$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, et nous avons besoin d'une notation pour éclairer ce fait.

Définition 1.7

1. $f = O(\phi)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ signifie qu'il y a les constantes k_0 et ε_1 (indépendant de ε) de sorte que

$$|f(\varepsilon)| \leq k_0 |\phi(\varepsilon)| \text{ pour } \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_1,$$

nous disons que " f est grand O de ϕ " lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

2. $f = o(\phi)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ signifie que pour chaque δ positif, il y a un ε_2 (indépendant de ε) de telle sorte que

$$|f(\varepsilon)| \leq \delta |\phi(\varepsilon)| \text{ pour } \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_2,$$

nous disons que " f est petite o de ϕ " lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

Le théorème suivant facilite l'application de cette définition.

Théorème 1.8

1. Si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = L \text{ où } -\infty < L < \infty,$$

alors $f = O(\phi)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

2. Si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0} \frac{f(\varepsilon)}{\phi(\varepsilon)} = 0,$$

alors $f = o(\phi)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$.

Voir [5, 3] pour plus de détails.

1.3.3 Théorème de Taylor

Etant donné une fonction $f(\varepsilon)$, l'un des outils les plus importants pour ce faire est le théorème de Taylor.

Théorème 1.9 *Etant donné une fonction $f(\varepsilon)$, supposons que sa $(n+1)$ ème dérivée f^{n+1} est continue pour $\varepsilon_a < \varepsilon < \varepsilon_b$. Dans ce cas, si ε_0 et ε sont des points dans l'intervalle $(\varepsilon_a, \varepsilon_b)$, alors*

$$f(\varepsilon) = f(\varepsilon_0) + (\varepsilon - \varepsilon_0)f'(\varepsilon_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(\varepsilon - \varepsilon_0)^n f^{(n)}(\varepsilon_0) + R_{n+1},$$

où

$$R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}(\varepsilon - \varepsilon_0)^{n+1} f^{(n+1)}(\zeta),$$

avec ζ est un point entre ε_0 et ε .

1.3.4 Méthode des échelles Multiples

Nous allons présenter les idées sous-jacentes de la méthode en passant par un exemple relativement simple. Le problème à considérer est de trouver la fonction $y(t)$ qui satisfait

$$y'' + 2\varepsilon y' + y = 0 \text{ pour } t > 0, \quad (1.12)$$

où

$$y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 3. \quad (1.13)$$

Cette équation correspond à un oscillateur (c.-à-d. une masse-ressort-amortisseur) avec amortissement faible.

Expansion régulière

Supposant

$$y(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \dots \quad (1.14)$$

En substituant ceci dans (1.12) donne

$$y_0'' + \varepsilon y_1'' + 2\varepsilon y_0' + y_0 + \varepsilon y_1 = 0.$$

En regroupant les termes avec des puissances égales de ε , nous obtenons les deux équations différentielles linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} y_0'' + y_0 &= 0, \\ y_1'' + y_1 &= -2y_0'. \end{aligned}$$

Pour les conditions initiales, en remplaçant (1.14) dans (1.13) on trouve

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) = 0 \text{ et } y_0'(0) + \varepsilon y_1'(0) = 3,$$

donc il est nécessaire que

$$\begin{aligned} y_0(0) &= 0 \text{ et } y_0'(0) = 3, \\ y_1(0) &= 0 \text{ et } y_1'(0) = 0. \end{aligned}$$

Maintenant on peut trouver y_0 comme solution du problème suivant :

$$O(1) \quad \begin{cases} y_0'' + y_0 = 0, \\ y_0(0) = 0, \quad y_0'(0) = 3. \end{cases}$$

C'est une équation différentielle dont la solution est donné par [voir page 5]

$$y_0(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t \text{ avec } c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

et les conditions initiales donnent, $c_1 = 0$ et $c_2 = 3$ alors

$$y_0(t) = 3 \sin t. \tag{1.15}$$

Une fois y_0 est connu, on peut trouver y_1 comme solution du problème

$$O(\varepsilon) \quad \begin{cases} y_1'' + y_1 = -6 \cos(t), \\ y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 0, \end{cases} \tag{1.16}$$

la solution générale de cette équation différentielle est donnée par $y_1(t) = y_{1h}(t) + y_{1p}(t)$, de même manière, comme ce que nous avons fait dans le problème $O(1)$,

$$y_{1h}(t) = 0,$$

pour trouver la solution particulière $y_{1p}(t)$ on suppose qu'il prend la forme

$$y_{1p}(t) = t (A \cos t + B \sin t).$$

ce qui implique

$$y_{1p}''(t) = -2A \sin t + 2B \cos t - t(A \cos t + B \sin t),$$

en remplaçant ces deux dernières expressions dans l'équation (1.16) nous trouvons

$$y_1(t) = y_{1p}(t) = -3t \sin t.$$

Enfin à partir de cette dernière avec (1.15) et (1.14) on obtient une approximation $O(\varepsilon)$ donnée par

$$y(t) \sim 3 \sin t - 3\varepsilon t \sin t. \tag{1.17}$$

On prend comme appellation cette approximation de l'expansion régulière,

$$y_{reg}(t) \sim 3 \sin t - 3\varepsilon t \sin t \tag{1.18}$$

Expansion à échelles multiples

Il est évident que la méthode ne donne pas une bonne approximation de la solution pour $0 \leq t \leq \infty$. En effet, le second terme de l'expansion (1.17) est plus grand que le premier terme lorsque $\varepsilon t \approx 1$. Pour cette raison, le second terme est dit être un terme séculaire, et pour que l'expansion soit bien ordonné, c.-à-d. nous devons avoir $\varepsilon t \ll 1$. Le problème avec cette méthode vient du fait que la solution exacte du problème (1.12) est décroissant, mais le premier terme de (1.17) ne décroît pas lorsque $t \rightarrow +\infty$. Le second terme tente de compenser pour cela, et dans le processus, il devient finalement aussi grand que le premier terme.

Pour construire une approximation valable pour t de l'ordre $O(\frac{1}{\varepsilon})$ on utilise la méthode des échelles multiples de temps dans le problème on introduit les variables

$$t_1 = t, \quad t_2 = \varepsilon t.$$

Ces deux échelles de temps seront considérées indépendantes. Une conséquence de ceci est que la dérivée originale de temps transforme comme suit :

$$\frac{d}{dt} \longrightarrow \frac{dt_1}{dt} \frac{\partial}{\partial t_1} + \frac{dt_2}{dt} \frac{\partial}{\partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2}, \quad (1.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} &\longrightarrow \frac{dt_1}{dt} \frac{\partial}{\partial t_1} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \right) + \frac{dt_2}{dt} \frac{\partial}{\partial t_2} \left(\frac{\partial}{\partial t_1} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t_2} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Pour simplifier la notation, nous utilisons le symbole ∂_{t_1} au lieu de $\frac{\partial}{\partial t_1}$. En Substituant (1.19) et (1.20) dans (1.12) et (1.13) on obtient le résultat suivant

$$\left(\partial_{t_1}^2 + 2\varepsilon \partial_{t_1} \partial_{t_2} + \varepsilon^2 \partial_{t_2}^2 \right) y + 2\varepsilon (\partial_{t_1} + \varepsilon \partial_{t_2}) y + y = 0, \quad (1.21)$$

où

$$y(0, 0) = 0 \text{ et } (\partial_{t_1} + \varepsilon \partial_{t_2}) y(0, 0) = 3. \quad (1.22)$$

Les avantages de présenter ces deux variables de temps ne sont pas encore évidents. En fait, l'on a pourrait arguer que nous avons fait le problème plus difficile puisque l'équation différentielle ordinaire originale a été transformée en une équation différentielle partielle.

Les raisons de faire ceci deviendront évidentes dans la discussion qui suit. Noter que la solution de (1.21), (1.22) n'est pas unique et que nous devons imposer plus de conditions pour l'unicité de la solution. Cette liberté nous permettra d'empêcher des termes séculaires d'apparaître dans l'expansion (au moins sur les échelles de temps que nous utilisons).

Nous allons maintenant utiliser un développement en série de puissance de la forme

$$y \sim y_0(t_1, t_2) + \varepsilon y_1(t_1, t_2) + \dots \quad (1.23)$$

En substituant ceci dans (1.21) on obtient

$$\begin{aligned} (\partial_{t_1}^2 + 2\varepsilon\partial_{t_1}\partial_{t_2} + \varepsilon^2\partial_{t_2}^2)(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) \\ + 2\varepsilon(\partial_{t_1} + \varepsilon\partial_{t_2})(y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) + y_0 + \varepsilon y_1 + \dots = 0, \end{aligned}$$

c.-à-d.

$$\partial_{t_1}^2 y_0 + 2\varepsilon\partial_{t_1}\partial_{t_2} y_0 + \varepsilon\partial_{t_1}^2 y_1 + 2\varepsilon\partial_{t_1} y_0 + y_0 + \varepsilon y_1 + \dots = 0,$$

En regroupant des termes avec des puissances égales de ε , nous obtenons les deux équations différentielles linéaires suivantes :

$$\partial_{t_1}^2 y_0 + y_0 = 0, \quad (1.24)$$

$$\partial_{t_1}^2 y_1 + y_1 = -2\partial_{t_1}\partial_{t_2} y_0 - 2\partial_{t_1} y_0. \quad (1.25)$$

Maintenant pour les conditions initiales, en substituant (1.23) dans (1.22) on a

$$y_0(0, 0) + \varepsilon y_1(0, 0) = 0 \text{ et } \partial_{t_1} y_0(0, 0) + \varepsilon\partial_{t_1} y_1(0, 0) + \varepsilon\partial_{t_2} y_0(0, 0) + \dots = 3,$$

c.-à-d.

$$y_0(0, 0) = 0 \text{ et } \partial_{t_1} y_0(0, 0) = 3,$$

$$y_1(0, 0) = 0 \text{ et } \partial_{t_1} y_1(0, 0) = -\partial_{t_2} y_0(0, 0).$$

La fonction y_0 est la solution du problème

$$O(1) \quad \begin{cases} (\partial_{t_1}^2 + 1)y_0 = 0, \\ y_0(0, 0) = 0, \quad \partial_{t_1} y_0(0, 0) = 3. \end{cases}$$

La solution générale de ce problème est

$$y_0 = a_0(t_2) \sin(t_1) + b_0(t_2) \cos(t_1), \quad (1.26)$$

les coefficients $a_0(t_2)$ et $b_0(t_2)$ sont des fonctions arbitraires de t_2 sauf qu'ils sont exigés pour satisfaire les conditions initiales

$$a_0(0) = 3 \text{ et } b_0(0) = 0, \quad (1.27)$$

les fonctions $a_0(t_2)$, $b_0(t_2)$ doit être choisies pour empêcher l'apparition des termes séculaires, pour cela nous utilisons l'équation déterminante y_1 . On utilise (1.25) et (1.26), y_1 est la solution de

$$O(\varepsilon) \quad \begin{cases} (\partial_{t_1}^2 + 1)y_1 = -2\partial_{t_1}\partial_{t_2}y_0 - 2\partial_{t_1}y_0, \\ y_1(0,0) = 0, \partial_{t_1}y_1(0,0) = -\partial_{t_2}y_0(0,0), \end{cases}$$

et à partir le résultat du problème $O(1)$, l'équation pour y_1 est

$$(\partial_{t_1}^2 + 1)y_1 = 2(b'_0 + b_0) \sin t_1 - 2(a'_0 + a_0) \cos t_1. \quad (1.28)$$

La solution générale de cette équation différentielle est donnée par $y_1(t_1, t_2) = y_{1h}(t_1, t_2) + y_{1p}(t_1, t_2)$ avec

$$y_{1h} = a_1(t_2) \sin t_1 + b_1(t_2) \cos t_1,$$

qui ne produira pas du terme séculaire pour $t_1 \rightarrow +\infty$ et t_2 borné. On cherche une solution particulière sous la forme

$$y_{1p} = t_1(A \cos t_1 + B \sin t_1),$$

ce qui implique

$$\partial_{t_1}^2 y_{1p}(t_1, t_2) = -2A \sin t_1 + 2B \cos t_1 - t_1(A \cos t_1 + B \sin t_1),$$

en remplaçant ces deux résultats dans l'équation (1.28) nous trouvons

$$y_{1p}(t) = -(b'_0 + b_0) t_1 \cos t_1 - (a'_0 + a_0) t_1 \sin t_1, \quad (1.29)$$

dans (1.29), il y a une possibilité d'avoir des termes séculaires. Cependant, les fonctions a_0 et b_0 peuvent être choisies pour empêcher ceci. en exigeant que

$$b'_0 + b_0 = 0 \text{ et } a'_0 + a_0 = 0,$$

ces deux équations différentielles dont les solutions sont données par

$$b_0(t_2) = \beta_0 e^{-t_2} \text{ et } a_0(t_2) = \alpha_0 e^{-t_2},$$

dans la dernière étape, nous imposons les conditions initiales données dans (1.27). on obtient

$$b_0(t_2) = 0 \text{ et } a_0(t_2) = 3e^{-t_2}.$$

En rapportant ceci dans (1.26) on obtient

$$y_0 = 3e^{-t_2} \sin(t_1),$$

c.-à-d.

$$y \sim 3e^{-\varepsilon t} \sin t.$$

C'est un premier terme d'approximation qui est valable jusqu'au moins à $t = O(\frac{1}{\varepsilon})$. On prend comme appellation pour cette approximation de l'expansion à échelles multiples

$$y_{echm} \sim 3e^{-\varepsilon t} \sin t. \quad (1.30)$$

Comparaison avec la solution exacte

L'équation (1.12) est une équation différentielle linéaire du second ordre dont l'équation caractéristique associée est donné par $r^2 + 2\varepsilon r + 1 = 0$, alors

$$r_1 = -\varepsilon - i\sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad r_2 = -\varepsilon + i\sqrt{1 - \varepsilon^2}.$$

et la solution a la forme

$$y(t) = e^{-\varepsilon t} \left(A \cos(\sqrt{1 - \varepsilon^2}t) + B \sin(\sqrt{1 - \varepsilon^2}t) \right),$$

avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$, on obtient

$$y(t) = \frac{3}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} e^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{1 - \varepsilon^2}t).$$

On prend comme appellation pour la solution exacte

$$y_{ext}(t) = \frac{3}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} e^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{1 - \varepsilon^2}t). \quad (1.31)$$

Pour voir l'efficacité de la méthode des échelles multiples pour obtenir une bonne approximation de la solution exacte (1.31), nous comparons graphiquement la solution exacte avec le rapprochement (1.18) de l'expansion régulière, et avec le rapprochement multi-échelles (1.30).

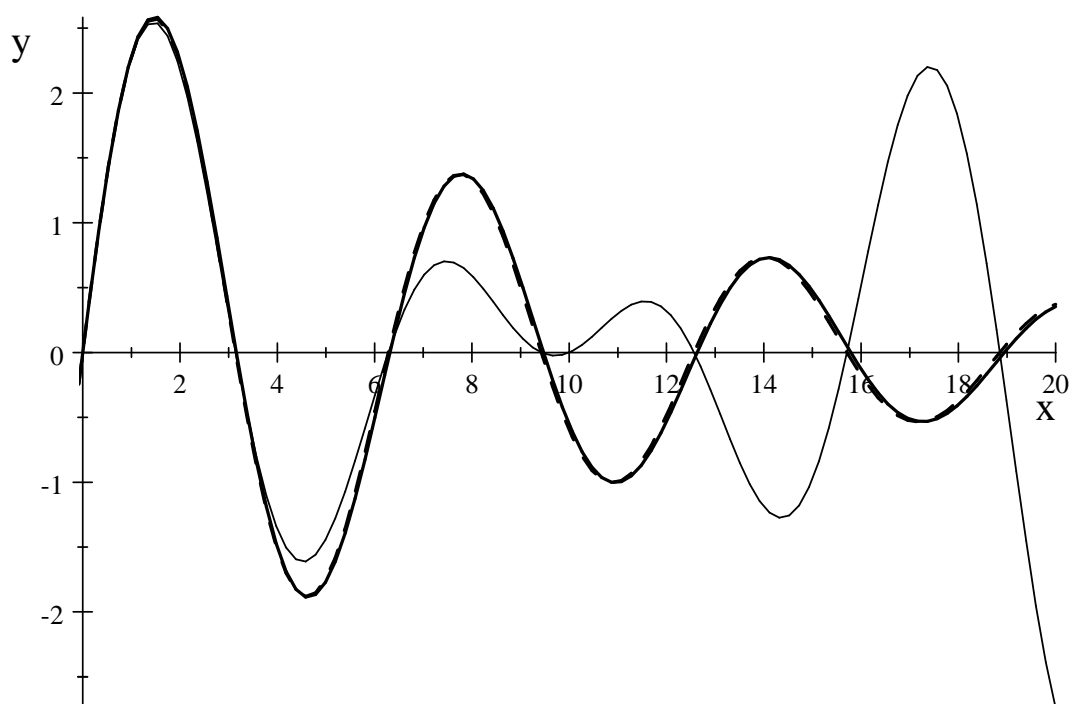


FIGURE 1.1 – Comparaison entre y_{ext} — et y_{echm} - - - et y_{reg} —

Chapitre 2

Equation d'ondes avec un amortissement faible linéaire

Dans ce chapitre nous expliquerons comment s'applique la méthode des échelles multiples sur une EDP, et nous avons choisi l'équation d'onde perturbée suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}, t \geq 0, -\infty < x < +\infty, \quad (2.1)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \rho(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \mu(x). \quad (2.2)$$

Et on le suppose que $\rho(x)$, $\mu(x)$ est lisse et borné.

2.1 Expansion régulière

Supposant

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + \dots \quad (2.3)$$

En substituant ceci dans (2.1) on trouve

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + \dots) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + \dots) \\ = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + \dots), \end{aligned}$$

alors

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) + O(\varepsilon^2) = 0.$$

En regroupant les termes avec des puissances égales de ε , nous obtenons les deux équations hyperboliques linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= -\frac{\partial u_0}{\partial t}. \end{aligned}$$

En substituant (2.3) dans (2.2) on a les conditions initiales

$$\begin{aligned} u_0(x, 0) &= \rho(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0) = \mu(x), \\ u_1(x, 0) &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Donc le problème $O(1)$ prend la forme suivante :

$$O(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0, \\ u_0(x, 0) = \rho(x), \\ \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0) = \mu(x), \end{cases}$$

c'est un problème d'équation d'onde homogène, sa solution donnée par la formule d'Alembert

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} [\rho(\sigma) + \rho(\xi)] + \frac{1}{2} \int_{\sigma}^{\xi} \mu(s) ds,$$

c.-à-d.

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} [\rho(x-t) + \rho(x+t)] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \mu(s) ds,$$

regarder la sous-section [1.2.1].

Et le problème $O(\varepsilon)$ prend la forme suivante :

$$O(\varepsilon) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\frac{\partial u_0}{\partial t}, \\ u_1(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Nous utilisons les coordonnées caractéristiques et la solution du problème $O(1)$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2} - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma \partial \xi} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2} + 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma \partial \xi} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2}, \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} &= \frac{1}{2}[\rho'(\xi) - \rho'(\sigma)] + \frac{1}{2}[\omega'(\xi) + \omega'(\sigma)],\end{aligned}$$

où ω est la primitive de la fonction μ . D'après ces 3 expressions l'équation du problème $O(\varepsilon)$ devient

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma \partial \xi} = -\frac{1}{8}[\rho'(\xi) - \rho'(\sigma) + \omega'(\xi) + \omega'(\sigma)],$$

en intégrant ceci par rapport à σ , nous obtenons

$$\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{8}[\sigma\rho'(\xi) - \rho(\sigma) + \sigma\omega'(\xi) + \omega(\sigma)] + g'_1(\xi),$$

autre fois en intégrant cette dernière par rapport à ξ , nous obtenons

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{8}\sigma\rho(\xi) + \frac{1}{8}\xi\rho(\sigma) - \frac{1}{8}\sigma\omega(\xi) - \frac{1}{8}\xi\omega(\sigma) + g_1(\xi) + f_1(\sigma),$$

où $f_1(\sigma)$ et $g_1(\xi)$ sont des fonctions arbitraires définie sur $-\infty < x < +\infty$, cette solution contient des termes séculaires. Ainsi l'approximation régulière $u_0 + \varepsilon u_1$ devient imprécis pour $t \rightarrow +\infty$, c.-à-d. pour ξ et σ tend vers $\pm\infty$.

2.2 Expansion à échelles multiples

En raison de l'aspect des termes séculaires dans l'expansion régulière, nous allons utiliser des échelles multiples du temps pour trouver une approximation asymptotique de la solution.

$$\sigma = x - t, \quad \xi = x + t, \quad \tau = \varepsilon t,$$

ce qui signifie que

$$\begin{aligned}\partial_x &= \partial_\sigma + \partial_\xi, \\ \partial_x^2 &= \partial_x(\partial_\sigma + \partial_\xi) \\ &= \partial_\sigma(\partial_\sigma + \partial_\xi) + \partial_\xi(\partial_\sigma + \partial_\xi) \\ &= \partial_\sigma^2 + \partial_\xi^2 + 2\partial_\sigma\partial_\xi,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \partial_t &= -\partial_\sigma + \partial_\xi + \varepsilon\partial_\tau, \\
 \partial_t^2 &= \partial_t(-\partial_\sigma + \partial_\xi + \varepsilon\partial_\tau) \\
 &= -\partial_\sigma(-\partial_\sigma + \partial_\xi + \varepsilon\partial_\tau) + \partial_\xi(-\partial_\sigma + \partial_\xi + \varepsilon\partial_\tau) + \varepsilon\partial_\tau(-\partial_\sigma + \partial_\xi + \varepsilon\partial_\tau) \\
 &= \partial_\sigma^2 + \partial_\xi^2 - 2\partial_\sigma\partial_\xi - 2\varepsilon\partial_\sigma\partial_\tau + 2\varepsilon\partial_\xi\partial_\tau.
 \end{aligned}$$

En substituant ces derniers résultats dans (3.12), on obtient l'équation suivante :

$$[4\partial_\sigma\partial_\xi + 2\varepsilon(\partial_\sigma\partial_\tau - \partial_\xi\partial_\tau) + O(\varepsilon^2)] u = \varepsilon(-\partial_\sigma + \partial_\xi + O(\varepsilon)) u,$$

c.-à-d. :

$$[4\partial_\sigma\partial_\xi + \varepsilon(2\partial_\sigma\partial_\tau - 2\partial_\xi\partial_\tau + \partial_\sigma - \partial_\xi) + O(\varepsilon^2)] u = 0. \quad (2.4)$$

Noter en outre que les conditions initiales à $t = 0$ correspondent maintenant aux $\sigma = \xi = x$ et $\tau = 0$. En fait, les conditions initiales dans (2.2) deviennent

$$u = \rho(\sigma) \text{ et } (-\partial_\sigma + \partial_\xi + \varepsilon\partial_\tau)u = \mu(\sigma), \text{ avec } \sigma = \xi, \tau = 0. \quad (2.5)$$

L'étape suivante consiste à introduire l'expansion de la solution. Pour ce problème, il est simplement

$$u(\sigma, \xi, \tau) = u_0(\sigma, \xi, \tau) + \varepsilon u_1(\sigma, \xi, \tau) + \dots, \quad (2.6)$$

la substitution de ceci dans (2.4) donne

$$4\partial_\sigma\partial_\xi u_0 + \varepsilon(2\partial_\sigma\partial_\tau - 2\partial_\xi\partial_\tau + \partial_\sigma - \partial_\xi)u_0 + 4\varepsilon\partial_\sigma\partial_\xi u_1 + O(\varepsilon^2) = 0.$$

En regroupant les termes avec des puissances égales de ε , nous obtenons les deux équations hyperboliques linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
 \partial_\sigma\partial_\xi u_0 &= 0, \\
 4\partial_\sigma\partial_\xi u_1 &= -(2\partial_\sigma\partial_\tau - 2\partial_\xi\partial_\tau + \partial_\sigma - \partial_\xi)u_0.
 \end{aligned}$$

La substitution de (2.6) dans (2.5) produit

$$\begin{aligned}
 u_0 + \varepsilon u_1 &= \rho(\sigma) \text{ avec } \sigma = \xi, \tau = 0, \\
 (-\partial_\sigma + \partial_\xi)u_0 + \varepsilon(-\partial_\sigma + \partial_\xi)u_1 + \varepsilon\partial_\tau u_0 &= \mu(\sigma), \text{ avec } \sigma = \xi, \tau = 0,
 \end{aligned}$$

c.-à-d.

$$\begin{aligned} u_0 &= \rho(\sigma) \quad \text{et } u_1 = 0, \quad \text{avec } \sigma = \xi, \tau = 0, \\ (-\partial_\sigma + \partial_\xi)u_0 &= \mu(\sigma) \quad \text{et } (-\partial_\sigma + \partial_\xi)u_1 = -\partial_\tau u_0, \quad \text{avec } \sigma = \xi, \tau = 0. \end{aligned}$$

Donc le problème $O(1)$ prend la forme suivante :

$$O(1) \quad \begin{cases} \partial_\sigma \partial_\xi u_0 = 0, \\ u_0 = \rho(\sigma) \quad \text{avec } \sigma = \xi, \tau = 0, \\ (-\partial_\sigma + \partial_\xi)u_0 = \mu(\sigma) \quad \text{avec } \sigma = \xi, \tau = 0. \end{cases}$$

En intégrant l'équation de ce problème par rapport à σ , nous trouvons

$$\partial_\xi u_0 = k(\xi, \tau) \implies u_0 = \int^\xi k(\xi, \tau) d\xi + f_0(\sigma, \tau),$$

noté $g_0(\xi, \tau) = \int^\xi k(\xi, \tau) d\xi$ donc La solution générale de l'équation différentielle du problème $O(1)$ est donnée par

$$u_0(\sigma, \xi, \tau) = f_0(\sigma, \tau) + g_0(\xi, \tau).$$

En appliquant les conditions initiales on a

$$\begin{aligned} f_0(\sigma, 0) + g_0(\xi, 0) &= \rho(\sigma), & \text{et } \sigma = \xi, \\ -\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, 0) + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}(\xi, 0) &= \mu(\sigma), & \text{et } \sigma = \xi, \end{aligned}$$

c.-à-d.

$$f_0(\sigma, 0) = \frac{1}{2}\rho(\sigma) - \frac{1}{2} \int^\sigma \mu(s) ds, \quad \text{et } \sigma = \xi, \quad (2.7)$$

$$g_0(\xi, 0) = \frac{1}{2}\rho(\xi) - \frac{1}{2} \int^\xi \mu(s) ds, \quad \text{et } \sigma = \xi. \quad (2.8)$$

Comme ce que nous avons vu dans la sous-section (1.3.4), lorsque nous avons utilisé la méthode des échelles multiples en raison de l'émergence des termes séculaire, nous avons trouvé que la solution contient des inconnues, pour cela, nous avons dû aller à résoudre le problème $O(\varepsilon)$ afin de déterminer ces inconnues.

Donc, ici aussi pour déterminer les fonctions f_0 et g_0 nous tournons vers le problème $O(\varepsilon)$ et nous le résoudrons. Où le problème $O(\varepsilon)$ prend la forme suivante :

$$O(\varepsilon) \begin{cases} 4\partial_\sigma\partial_\xi u_1 = (-2\partial_\sigma\partial_\tau + 2\partial_\xi\partial_\tau - \partial_\sigma + \partial_\xi) u_0, \\ u_1 = 0, \text{ avec } \sigma = \xi, \tau = 0, \\ (-\partial_\sigma + \partial_\xi)u_1 = -\partial_\tau u_0, \text{ avec } \sigma = \xi, \tau = 0. \end{cases}$$

En substituant la solution $O(1)$ dans l'équation de ce problème, on trouve que

$$4\partial_\sigma\partial_\xi u_1 = -2\partial_\sigma\partial_\tau f_0 - 2\partial_\sigma\partial_\tau g_0 + 2\partial_\xi\partial_\tau f_0 + 2\partial_\xi\partial_\tau g_0 - \partial_\sigma f_0 - \partial_\sigma g_0 + \partial_\xi f_0 + \partial_\xi g_0,$$

ce qui implique

$$4\partial_\sigma\partial_\xi u_1 = -2\partial_\sigma\partial_\tau f_0 + 2\partial_\xi\partial_\tau g_0 - \partial_\sigma f_0 + \partial_\xi g_0,$$

en intégrant cette dernière expression par rapport à σ on trouve

$$4\partial_\xi u_1 = -2\partial_\tau f_0 + 2\sigma\partial_\xi\partial_\tau g_0 - f_0 + \sigma\partial_\xi g_0 + g(\xi, \tau),$$

en intégrant cette dernière expression par rapport à ξ on trouve

$$4u_1 = -2\xi\partial_\tau f_0 + 2\sigma\partial_\tau g_0 - \xi f_0 + \sigma g_0 + \int^\xi g(\xi, \tau)d\xi + f(\sigma, \tau),$$

noté $g_1(\xi, \tau) = \frac{1}{4} \int^\xi g(\xi, \tau)d\xi$ et $f_1(\sigma, \tau) = \frac{1}{4}f(\sigma, \tau)$ alors

$$u_1 = -\frac{1}{4}\xi(2\partial_\tau + 1)f_0 + \frac{1}{4}\sigma(2\partial_\tau + 1)g_0 + g_1(\xi, \tau) + f_1(\sigma, \tau),$$

Pour éviter des termes séculaires, nous prenons

$$(2\partial_\tau + 1)f_0(\sigma, \tau) = 0,$$

$$(2\partial_\tau + 1)g_0(\xi, \tau) = 0.$$

En intégrant ces équations et en utilisant les conditions initiales (2.7) et (2.8) rapporte

$$f_0(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}e^{\frac{-\tau}{2}} \left(\rho(\sigma) - \int^\sigma \mu(s)ds \right) \text{ et } g_0(\xi, \tau) = \frac{1}{2}e^{\frac{-\tau}{2}} \left(\rho(\xi) + \int^\xi \mu(s)ds \right).$$

Par conséquent, le premier terme d'approximation de la solution qui est valide pour grand t est,

$$u(x, t) \sim \frac{1}{2} \left[\rho(x-t) + \rho(x+t) + \int_{x-t}^{x+t} \mu(s)ds \right] e^{\frac{-\varepsilon t}{2}}.$$

2.3 Solution exacte

la solution exacte est donnée par Tychonov and Samarskii [1]

$$u = \frac{1}{2}[\rho(x-t) + \rho(x+t)]e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} + \frac{1}{4}e^{\frac{-\varepsilon t}{2}} \int_{x-t}^{x+ct} [M(x, t, z)\rho(z) + L(x, t, z)\mu(z)] dz.$$

où

$$\begin{aligned} M(x, t, z) &= \varepsilon I_0\left(\frac{\varepsilon}{2}s\right) + \frac{\varepsilon t}{s} I_1\left(\frac{\varepsilon}{2}s\right), \\ L(x, t, z) &= 2I_0\left(\frac{\varepsilon}{2}s\right), \end{aligned}$$

$s = \sqrt{t^2 - (x-z)^2}$, et I_0, I_1 sont des fonctions de Bessel modifiées.

Voir [5]

Remarque 2.1 Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on a $\frac{\varepsilon}{2}s \rightarrow 0$ alors à partir de (1.11),

$$I_0\left(\frac{\varepsilon}{2}s\right) \rightarrow 1, \quad \text{et} \quad I_1\left(\frac{\varepsilon}{2}s\right) \rightarrow \frac{\varepsilon s}{4\Gamma(2)} = \frac{\varepsilon s}{4}.$$

ce qui induit que $M \rightarrow 0$ et $L \rightarrow 2$. D'après tous cela, la solution exacte devient presque la solution approchée.

Remarque 2.2 Si $\mu = 0$. on obtient que la précision de l'approximation trouvée par cette méthode est assez bonne, en effet c'est la solution exacte du problème. Voir[5].

Chapitre 3

La méthode de Chikwendu et Kevorkian

Chikwendu et Kevorkian [2] misent une nouvelle façon d'appliquer la méthode des échelles multiples pour obtenir une bonne approximation de la solution de l'équation d'ondes suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon H\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (3.1)$$

avec les conditions initiales

$$u(x, 0) = \rho(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \mu(x), \quad (3.2)$$

On suppose que $\rho(x)$, $\mu(x)$, $u(x, t; \varepsilon)$ et ses dérivées de premier ordre uniformément bornée et le terme d'amortissement H est suffisamment régulière.

3.1 Changement d'échelle du temps

Nous développons u en une série de la forme

$$u(x, t; \varepsilon) = u_0(x, \tilde{t}; \tau) + \varepsilon u_1(x, \tilde{t}; \tau) + \varepsilon^2 u_2(x, \tilde{t}; \tau) + \dots, \quad (3.3)$$

avec les deux échelles

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon^3 \omega_3 + \dots)t, \\ \tau &= \varepsilon t. \end{aligned}$$

Le terme avec $\varepsilon\omega_1$ dans le premier échelle de temps a été omise, parce que la dépendance de la solution à εt est représenté par le variable τ

Pour substituer (3.3) dans (3.1), nous devons utiliser l'expansions simple. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \varepsilon \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial u_2}{\partial \tau} \right) + \dots \\ &= (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \varepsilon (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{t}} + \dots,\end{aligned}$$

alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} \right) + \varepsilon^2 \left(\omega_2 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial u_1}{\partial \tau} + \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{t}} \right) + \dots,$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[(1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon^2 \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{t}} \right] + \dots \\ &= (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} \right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right] \\ &\quad + \varepsilon (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[\frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} \right] + \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial u_2}{\partial \tau} \right] + \dots,\end{aligned}$$

on dérive u_0, u_1, u_2 par rapport à t , alors

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[(1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right] \\ &\quad + \varepsilon (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[(1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right] + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \left[(1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial \tau} \right] \\ &\quad + \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left[(1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon \frac{\partial u_2}{\partial \tau} \right] + \dots \\ &= (1 + 2\varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t}^2} + \varepsilon (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t} \partial \tau} + \varepsilon (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau \partial \tilde{t}} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \\ &\quad + \varepsilon (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t}^2} + \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t} \partial \tau} + \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots) \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau \partial \tilde{t}} \\ &\quad + \varepsilon^2 (1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots)^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tilde{t}^2} + \dots,\end{aligned}$$

alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t}^2} + \varepsilon \left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t} \partial \tau} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t}^2} \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t} \partial \tau} + 2 \omega_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t}^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tilde{t}^2} \right) + \dots,$$

et

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2},$$

et

$$\begin{aligned} H\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) &= H\left(\frac{\partial}{\partial t}(u_0(x, \tilde{t}, \tau) + \varepsilon u_1(x, \tilde{t}, \tau)), \frac{\partial}{\partial x}(u_0(x, \tilde{t}, \tau) + \varepsilon u_1(x, \tilde{t}, \tau))\right) \\ &= H\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}} + \varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}}\right), \frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

en posant :

$$X = \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, Y = \frac{\partial u_0}{\partial x}, h = \varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}}\right), k = \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x},$$

d'après Taylor :

$$\begin{aligned} H(X + h, Y + k) &= H(X, Y) + h \frac{\partial H}{\partial X}(X, Y) + k \frac{\partial H}{\partial Y}(X, Y) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial X^2}(X, Y) + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial Y^2}(X, Y) + h.k \frac{\partial^2 H}{\partial X \partial Y}(X, Y) + \dots, \end{aligned}$$

donc

$$H\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = H\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}}\right) \frac{\partial H}{\partial u_t}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial u_x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \dots,$$

L'insertion de ces expressions dans (3.1) donne :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t}^2} + \varepsilon\left(2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t} \partial \tau} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t}^2}\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t} \partial \tau} + 2\omega_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t}^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tilde{t}^2}\right) \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\right) + \varepsilon\left[H\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}}\right) \frac{\partial H}{\partial u_t}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial u_x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right] = 0, \end{aligned}$$

c.-à-d.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \varepsilon\left[2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t} \partial \tau} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + H\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right] \\ &\quad + \varepsilon^2\left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t} \partial \tau} + 2\omega_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t}^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}}\right) \frac{\partial H}{\partial u_t}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial u_x}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\right] = 0. \end{aligned}$$

En regroupant les termes avec des puissances égales de ε , nous obtenons l'ensemble d'équa-

tions hyperboliques linéaires suivantes :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} &= 0, \\
 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t} \partial \tau} - H \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right), \\
 \frac{\partial^2 u_2}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} - 2\omega_2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t}^2} - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t} \partial \tau} \\
 &\quad - \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} \right) \frac{\partial H}{\partial u_t} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) - \frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial u_x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x} \right).
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Conservant les conditions initiales, la substitution de (3.3) dans (3.2) produit

$$u_0(x, 0, 0) + \varepsilon u_1(x, 0, 0) + \varepsilon^2 u_2(x, 0, 0) = \rho(x),$$

et

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) + \varepsilon \left(\frac{\partial u_0}{\partial \tau}(x, 0, 0) + \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) \right) \\
 + \varepsilon^2 \left(\omega_2 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) + \frac{\partial u_1}{\partial \tau}(x, 0, 0) + \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) \right) = \mu(x),
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 u_0(x, 0, 0) &= \rho(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) = \mu(x), \\
 u_1(x, 0, 0) &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) = -\frac{\partial u_0}{\partial \tau}(x, 0, 0), \\
 u_2(x, 0, 0) &= 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) = -\omega_2 \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) - \frac{\partial u_1}{\partial \tau}(x, 0, 0).
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.1.1 Calcul de u_0

Le problème $O(1)$ est de la forme suivante :

$$O(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0, \\ u_0(x, 0, 0) = \rho(x), \\ \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) = \mu(x). \end{cases}$$

La solution de ce problème "l'équation d'onde homogène" est donnée par la formule de D'Alembert (Voir la sous-section (1.2.1))

$$u_0(x, \tilde{t}, \tau) = f_0(\sigma, \tau) + g_0(\xi, \tau), \tag{3.6}$$

où f_0 et g_0 sont fonctions de τ et les variables caractéristiques

$$\sigma = x - \tilde{t}, \quad \xi = x + \tilde{t}. \quad (3.7)$$

On applique les conditions initiales, on obtient :

$$f_0(x, 0) + g_0(x, 0) = \rho(x), \quad (3.8)$$

$$-\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, 0) + \frac{\partial g_0}{\partial x}(x, 0) = \mu(x), \quad (3.9)$$

d'après ces deux résultats

$$\begin{cases} f_0(x, 0) = \frac{1}{2}\rho(x) - \frac{1}{2}\int^x \mu(s)ds, \\ g_0(x, 0) = \frac{1}{2}\rho(x) + \frac{1}{2}\int^x \mu(s)ds. \end{cases}$$

On a pour $\tau = 0$:

$$\begin{aligned} u_0(x, \tilde{t}, 0) &= f_0(x - \tilde{t}, 0) + g_0(x + \tilde{t}, 0) \\ &= \frac{1}{2}\rho(x - \tilde{t}) - \frac{1}{2}\int^{x-\tilde{t}} \mu(s)ds + \frac{1}{2}\rho(x + \tilde{t}) + \frac{1}{2}\int^{x+\tilde{t}} \mu(s)ds, \end{aligned}$$

alors

$$u_0(x, \tilde{t}, 0) = \frac{1}{2}[\rho(x - \tilde{t}) + \rho(x + \tilde{t})] + \frac{1}{2}\int_{x-\tilde{t}}^{x+\tilde{t}} \mu(s)ds,$$

donc les conditions (3.8) et (3.9) ne suffit pas pour déterminer le τ dépendance des fonctions f_0 et g_0 (c.-à-d. le τ dépendance de u_0) mais ceux-ci doivent être obtenues à partir de la condition que u_1 et ses dérivés devrait être bornée.

Comme ce que nous avons vu dans la sous-section (1.3.4), lorsque nous avons utilisé la méthode des échelles multiples en raison de l'émergence des termes séculaire, nous avons trouvé que la solution contient des inconnues, pour cela, nous avons dû aller à résoudre le problème $O(\varepsilon)$ afin de déterminer ces inconnues.

Donc, ici aussi pour déterminer le τ dépendance de u_0 (déterminer les fonctions f_0 et g_0) nous tournons vers le problème $O(\varepsilon)$ et nous le résoudrons.

3.1.2 Calcul de u_1

A partir les deux équations (3.4) et (3.5), Le problème $O(\varepsilon)$ prend la forme suivante :

$$O(\varepsilon) \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t}^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t} \partial \tau} - H\left(\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right), \\ u_1(x, 0, 0) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) = -\frac{\partial u_0}{\partial \tau}(x, 0, 0). \end{cases}$$

On a

$$-2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tilde{t} \partial \tau} = 2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau}(\sigma, \tau) - 2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \xi \partial \tau}(\xi, \tau),$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}}(\sigma, \xi, \tau) &= \frac{\partial \sigma}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial u_1}{\partial \sigma}(\sigma, \xi, \tau) + \frac{\partial \xi}{\partial \tilde{t}} \frac{\partial u_1}{\partial \xi}(\sigma, \xi, \tau) \\ &= -\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}(\sigma, \xi, \tau) + \frac{\partial u_1}{\partial \xi}(\sigma, \xi, \tau), \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tilde{t}^2}(\sigma, \xi, \tau) &= \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}(\sigma, \xi, \tau) \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi}(\sigma, \xi, \tau) \right) \\ &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2}(\sigma, \xi, \tau) - 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma \partial \xi}(\sigma, \xi, \tau) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2}(\sigma, \xi, \tau), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x}(\sigma, \xi, \tau) &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial \sigma}(\sigma, \xi, \tau) + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial \xi}(\sigma, \xi, \tau) \\ &= \frac{\partial u_1}{\partial \sigma}(\sigma, \xi, \tau) + \frac{\partial u_1}{\partial \xi}(\sigma, \xi, \tau), \\ \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}(\sigma, \xi, \tau) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial \sigma}(\sigma, \xi, \tau) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial \xi}(\sigma, \xi, \tau) \right) \\ &= \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma^2}(\sigma, \xi, \tau) + 2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma \partial \xi}(\sigma, \xi, \tau) + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2}(\sigma, \xi, \tau). \end{aligned}$$

Donc l'équation (3.4) se lit dans les variables caractéristiques (3.7) comme suit

$$-4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \sigma \partial \xi}(\sigma, \xi, \tau) = 2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau}(\sigma, \tau) - 2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \xi \partial \tau}(\xi, \tau) - H\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}, \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right).$$

En intégrant par rapport à ξ on obtient :

$$-4 \frac{\partial u_1}{\partial \sigma}(\sigma, \xi, \tau) = 2\xi \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau}(\sigma, \tau) - 2 \frac{\partial g_0}{\partial \tau}(\xi, \tau) - \int_{\xi}^{\xi} H\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}, \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right) d\xi + \frac{\partial f_1}{\partial \sigma}(\sigma, \tau),$$

et en intégrant par rapport à σ on obtient :

$$-4 \frac{\partial u_1}{\partial \xi}(\sigma, \xi, \tau) = 2 \frac{\partial f_0}{\partial \tau}(\sigma, \tau) - 2\sigma \frac{\partial^2 g_0}{\partial \xi \partial \tau}(\xi, \tau) - \int^{\sigma} H\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}, \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right) d\sigma + \frac{\partial g_1}{\partial \xi}(\xi, \tau),$$

où f_1 et g_1 sont encore des fonctions inconnues à déterminer à partir de (3.4), (3.5) et l'exigence que u_2 et ses dérivées sont bornées.

3.1.3 Elimination des termes séculaires

Parce que u_1 et ses dérivées sont bornées nous devons avoir après la division de ces deux dernier expressions par ξ respectivement σ que

$$2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau}(\sigma, \tau) = -\frac{4}{\xi} \frac{\partial u_1}{\partial \sigma}(\sigma, \xi, \tau) + \frac{2}{\xi} \frac{\partial g_0}{\partial \tau}(\xi, \tau) + \frac{1}{\xi} \int^{\xi} H\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}, \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right) d\xi - \frac{1}{\xi} \frac{\partial f_1}{\partial \sigma}(\sigma, \tau),$$

et

$$2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \xi \partial \tau}(\xi, \tau) = \frac{4}{\xi} \frac{\partial u_1}{\partial \xi}(\sigma, \xi, \tau) + \frac{2}{\sigma} \frac{\partial f_0}{\partial \tau}(\sigma, \tau) - \frac{1}{\sigma} \int^{\sigma} H\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}, \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right) d\sigma + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial g_1}{\partial \xi}(\xi, \tau),$$

si $\xi \rightarrow \infty$ alors

$$2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau}(\sigma, \tau) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int^{\xi} H\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}, \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right) d\xi, \quad (3.10)$$

et si $\sigma \rightarrow \infty$ alors

$$2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \xi \partial \tau}(\xi, \tau) = - \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \int^{\sigma} H\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}, \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right) d\sigma. \quad (3.11)$$

Ces équations (3.10) et (3.11), avec (3.8) et (3.9) déterminent la fonction f_0 et g_0 ; alors nous obtenons le premier terme u_0 de l'expansion (3.3). Pour calculer f_0 et g_0 nous avons besoin d'une intégration par rapport à τ .

3.2 Exemples

3.2.1 Equation d'onde avec un amortissement linéaire

Nous commençons encore par l'équation pour une corde élastique avec amortissement faible. Nous considérons le problème de valeur initiale suivant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}, \quad t \geq 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (3.12)$$

avec les conditions initiales suivantes

$$u(x, 0) = \rho(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\frac{d\rho}{dx}(x). \quad (3.13)$$

Nous prenons cet exemple simple parce que nous pouvons résoudre ce problème de valeur initiale exactement et de faire une comparaison avec l'approximation. En outre, nous avons choisi les conditions initiales de telle sorte que nous obtenons pour $\varepsilon = 0$ seulement des ondes progressives de la forme $u(x, t; 0) = \bar{u}(x - \tilde{t})$, parceque on a connu que la solution de l'équation d'onde homogène est donné par

$$u(x, t; 0) = f_0(x - \tilde{t}) + g_0(x + \tilde{t}),$$

et à partir de (3.13) on a

$$\begin{aligned} f_0(x) + g_0(x) &= \rho(x), \\ f_0(x) - g_0(x) &= \rho(x), \end{aligned}$$

ce qui implique que $g_0(x + \tilde{t}) = 0$. Donc le premier terme de l'expansion approchante prend la forme $u_0(x, \tilde{t}, \tau) = f_0(\sigma, \tau)$ et ainsi une simplification des résultats de la méthode. La fonction $f_0(\sigma, \tau)$ satisfait selon (3.10) et (3.12) l'équation

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau}(\sigma, \tau) &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{\xi} H\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}, 0\right) d\xi \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int_{\xi}^{\xi} -\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) d\xi \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) \cdot \xi\right), \end{aligned}$$

alors

$$2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau}(\sigma, \tau) = -\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, \tau). \quad (3.14)$$

Pour les conditions initiales, en substituant (3.3) dans (3.13) nous trouvons

$$u_0(x, 0, 0) = \rho(x) \text{ et } \frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) = -\frac{d\rho}{dx}(x),$$

et puisque $u_0(x, 0, 0) = f_0(x, 0)$ et $\frac{\partial u_0}{\partial \tilde{t}}(x, 0, 0) = -\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, 0)$, alors

$$\begin{aligned} f_0(\sigma, 0) &= \rho(\sigma), \\ \frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, 0) &= \frac{d\rho}{d\sigma}(\sigma). \end{aligned}$$

Posons $y(\tau) = \frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, \tau)$, alors $y_0 = y(0) = \frac{d\rho}{d\sigma}(\sigma)$ et l'équation différentielle (3.14) peut s'écrire comme

$$2y' = -y,$$

alors

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \int_0^\tau d\tau \implies y = y_0 e^{-\frac{1}{2}\tau},$$

c.-à-d.

$$\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) = \frac{d\rho}{d\sigma}(\sigma) e^{-\frac{1}{2}\tau},$$

en intégrant par rapport à σ nous trouvons

$$f_0(\sigma, \tau) = \rho(\sigma) e^{-\frac{1}{2}\tau},$$

donc

$$u_0(x, \tilde{t}, \tau) = \rho(x - \tilde{t}) e^{-\frac{1}{2}\tau}. \quad (3.15)$$

Et nous comptons que cette expression est une approximation de premier ordre du problème de valeur initiale (3.12)-(3.13).

La solution exact Pour vérifier cette affirmation nous comparons la solution approchée avec la solution exacte de (3.12) et (3.13) où nous prenons $\rho(x) = \sin(px)$ et par conséquent $\rho(\sigma) = \sin(p\sigma)$ en utilisant par exemple la transformée de Fourier, on obtient

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) - F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = -\varepsilon F\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

alors

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + \varepsilon \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} - k^2 \hat{u}(k, t) = 0, \quad (3.16)$$

c'est une équation différentielle linéaire du second ordre son équation caractéristique associée est $r^2 + \varepsilon r - k^2 = 0$, alors

$$\Delta = \varepsilon^2 - 4k^2, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (\text{pour } k \neq 0 \implies \Delta < 0),$$

alors $\Delta = 4i^2(k^2 - \frac{\varepsilon^2}{4})$, et

$$r_1 = -\frac{\varepsilon}{2} - i\sqrt{k^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}}, \quad r_2 = -\frac{\varepsilon}{2} + i\sqrt{k^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}}.$$

Posons $w(k) = \sqrt{k^2 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$, la solution de (3.16) s'écrit sous la forme

$$\widehat{u}(k, t) = e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} [c_1(k) \cos(w(k)t) + c_2(k) \sin(w(k)t)]. \quad (3.17)$$

Et avec les conditions initiales, on a

$$c_1(k) = \widehat{u}(k, 0) = \widehat{\sin px} \Rightarrow c_1(k) = i\pi[\delta_p - \delta_{-p}],$$

et

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(k, 0) = -\frac{\varepsilon}{2}i\pi[\delta_p - \delta_{-p}] + w(k)e^{-\frac{\varepsilon}{2}t}c_2(k) = -p\widehat{\cos px} = -p\pi[\delta_p + \delta_{-p}],$$

alors

$$c_2(k) = -p\pi \frac{1}{w(k)}[\delta_p + \delta_{-p}] + \frac{\varepsilon}{2}i\pi \frac{1}{w(k)}[\delta_p - \delta_{-p}],$$

c.-à-d.

$$c_1(k) \cos(w(k)t) = i\pi \cos(w(k)t)[\delta_p - \delta_{-p}],$$

$$c_2(k) \sin(w(k)t) = -p\pi e^{\frac{\varepsilon}{2}t} \frac{1}{w(k)} \sin(w(k)t)[\delta_p + \delta_{-p}] + \frac{\varepsilon}{2}i\pi e^{\frac{\varepsilon}{2}t} \frac{1}{w(k)} \sin(w(k)t)[\delta_p - \delta_{-p}].$$

On a

$$\langle \cos(w(k)t)\delta_p, \varphi \rangle = \langle \delta_p, \cos(w(k)t)\varphi \rangle = \cos(w(p)t)\varphi(p),$$

et

$$\begin{aligned} \langle \cos(w(k)t)\delta_{-p}, \varphi \rangle &= \langle \delta_{-p}, \cos(w(k)t)\varphi \rangle = \cos(w(-p)t)\varphi(-p) \\ &= \cos(w(p)t)\varphi(-p), \end{aligned}$$

car w est une fonction paire, de même manière :

$$\left\langle \frac{1}{w(k)} \sin(w(k)t)\delta_p, \varphi \right\rangle = \frac{1}{w(p)} \sin(w(p)t)\varphi(p),$$

et

$$\left\langle \frac{1}{w(k)} \sin(w(k)t)\delta_{-p}, \varphi \right\rangle = \frac{1}{w(p)} \sin(w(p)t)\varphi(-p),$$

donc

$$c_1(k) \cos(w(k)t) = i\pi \cos(w(p)t)[\delta_p - \delta_{-p}],$$

$$c_2(k) \sin(w(k)t) = -p\pi \frac{1}{w(p)} \sin(w(p)t)[\delta_p + \delta_{-p}] + \frac{\varepsilon}{2}i\pi \frac{1}{w(p)} \sin(w(p)t)[\delta_p - \delta_{-p}],$$

donc

$$\begin{cases} c_1(k) \cos(w(k)t) = \cos(w(p)t) \widehat{\sin px}, \\ c_2(k) \sin(w(k)t) = \frac{-p}{w(p)} \sin(w(p)t) \widehat{\cos px} + \frac{\varepsilon}{2w(p)} \sin(w(p)t) \widehat{\sin px}. \end{cases}$$

En remplaçant ceci dans (3.17) on obtient

$$\widehat{u}(k, t) = -\frac{pe^{-\frac{\varepsilon}{2}t}}{w(p)} \sin(w(p)t) \widehat{\cos px} + e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \cos(w(p)t) \widehat{\sin px} + \frac{\varepsilon}{2w(p)} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \sin(w(p)t) \widehat{\sin px},$$

et

$$\begin{aligned} u(x, t) &= F^{-1}(\widehat{u}(k, t)) \\ &= -\frac{pe^{-\frac{\varepsilon}{2}t}}{w(p)} \sin(w(p)t) \cos px + e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \cos(w(p)t) \sin px + \frac{\varepsilon}{2w(p)} e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \sin(w(p)t) \sin px \\ &= e^{-\frac{\varepsilon}{2}t} \cos(w(p)t) \sin px - \frac{pe^{-\frac{\varepsilon}{2}t}}{w(p)} \left[\cos px - \frac{\varepsilon}{2p} \sin px \right] \sin(w(p)t). \end{aligned}$$

Finalement, la solution exact du problème (3.12)-(3.13) est donnée par

$$u(x, t) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} \left\{ \sin(px) \cos \left(\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 t} \right) - \frac{p}{\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}} \left(\cos(px) - \frac{\varepsilon}{2p} \sin(px) \right) \sin \left(\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 t} \right) \right\}.$$

Et symbolisé par $u_{ext}(x, t)$. On va développer cette solution pour ε au voisinage de 0 et $\varepsilon t = O(1)$. En utilisant le développement de Taylor, on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2}} &= 1 + \frac{\varepsilon^2}{8p^2} + O(\varepsilon), \\ (\cos(px) - \frac{\varepsilon}{2p} \sin(px)) \sin \left(\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 t} \right) &= \cos(px) \sin(pt) + O(\varepsilon), \\ \sin(px) \cos \left(\sqrt{p^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 t} \right) &= \sin(px) \cos(pt) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

donc

$$u(x, t) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} (\sin(px) \cos(pt) - \cos(px) \sin(pt)) + O(\varepsilon),$$

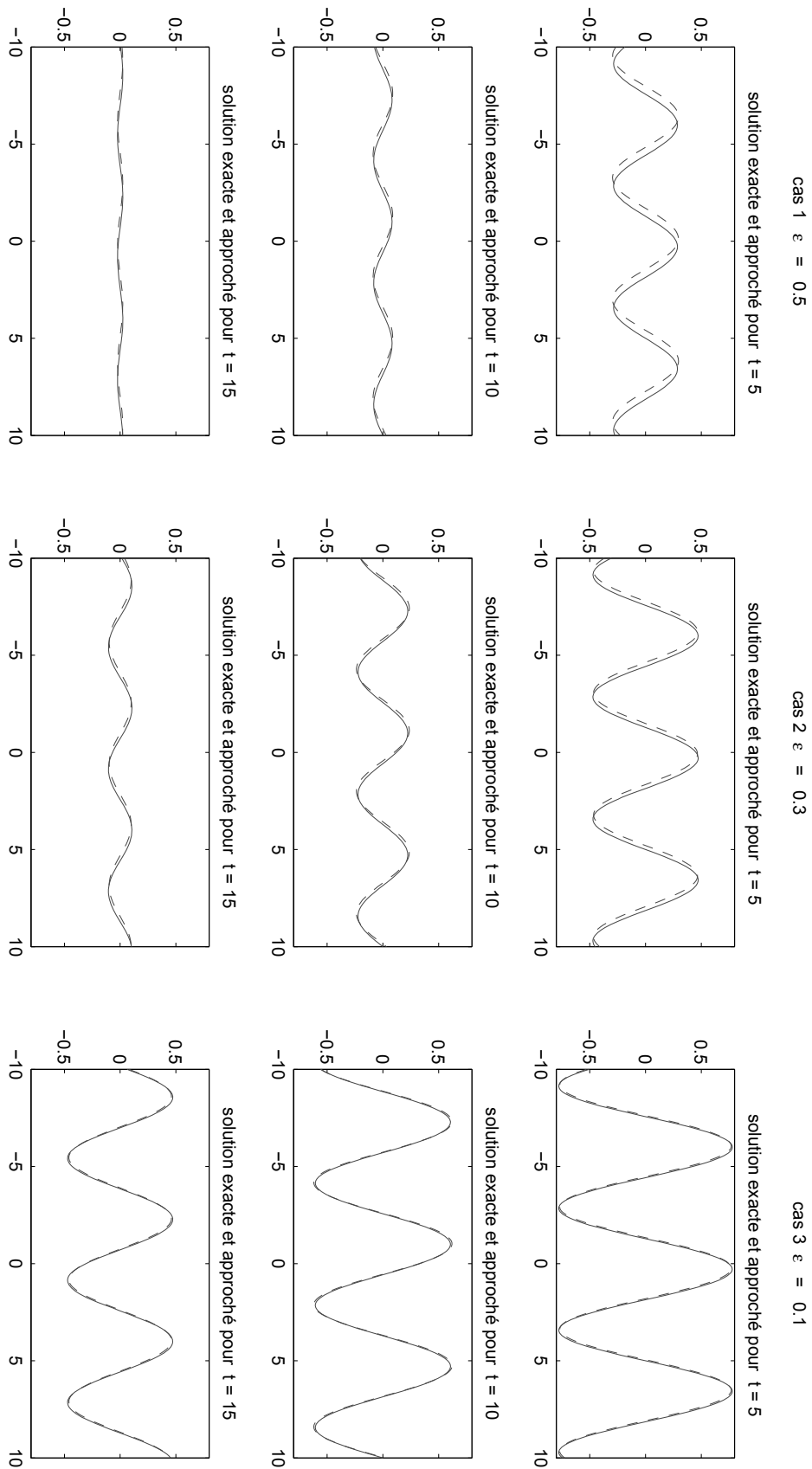
finalement

$$u_{ext}(x, t) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} \sin p(x - t) + O(\varepsilon), \forall x, \forall t \geq 0.$$

Rappelons que (3.15) donne

$$u_{app}(x, t) \sim u(x, \tilde{t}, \tau) = e^{-\frac{1}{2}\tau} \sin p(x - \tilde{t}) = e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} \sin p(x - t).$$

Donc l'approximation de premier ordre de Chikwendu-Kevorkian est correcte uniformément jusqu'à $O(\varepsilon)$.

FIGURE 3.1 – Comparaison entre la solution exact u_{ext} et la solution approchée u_{app}

3.2.2 Equation d'onde avec amortissement non linéaire

Supposons que nous avons un amortissement non linéaire $H = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^3$ et ainsi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^3, t \geq 0, -\infty < x < +\infty. \quad (3.18)$$

Nous prenons deux cas différentes pour les conditions initiales et nous étudions ce problème avec chacun des deux cas où nous trouvons dans chaque cas une solution différente de l'autre.

1^{er} cas

Nous prenons les conditions initiales suivantes

$$u(x, 0) = \rho(x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = -\frac{d\rho(x)}{dx}, \quad (3.19)$$

cela donne une simplification radicale, comme dans ce cas

$$u_0 = f_0(\sigma, \tau).$$

De (3.10) Les conditions de secularité se réduisent à

$$\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau} &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int_0^\xi H\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}, 0\right) d\xi \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, \tau)\right)^3 d\xi \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, \tau)\right)^3 \int_0^\xi d\xi, \end{aligned}$$

alors

$$2\frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau} + \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, \tau)\right)^3 = 0. \quad (3.20)$$

Pour les conditions initiales de même manière, comme ce que nous avons fait dans la sous section [3.2.1], on obtient

$$f_0(\sigma, 0) = \rho(\sigma) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, 0) = \frac{d\rho}{d\sigma}(\sigma).$$

Posons $y(\tau) = \frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, \tau)$ alors $y_0 = y(0) = \frac{d\rho}{d\sigma}(\sigma)$ et l'équation (3.20) peut s'écrire comme

$$2y' + y^3 = 0,$$

c'est une équation de Bernoulli, alors on pose $z = y^{-2} \implies z' = -2y^{-3}y'$ et en multipliant cette dernière équation par y^{-3} on trouve

$$z' - 1 = 0,$$

alors $z = z_0 + \tau$, c.-à-d.

$$y = \frac{1}{(y_0^{-2} + \tau)^{\frac{1}{2}}} \implies \frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) = \frac{1}{\left(\left(\frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}\right)^{-2} + \tau\right)^{\frac{1}{2}}},$$

en intégrant par rapport à σ de 0 jusqu'à σ on obtient

$$\begin{aligned} f_0(\sigma, \tau) &= f_0(\sigma, 0) + \int_0^\sigma \frac{1}{\left(\left(\frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}\right)^{-2} + \tau\right)^{\frac{1}{2}}} d\sigma, \\ &= \rho(0) + \int_0^\sigma \frac{\frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}}{\left(1 + \left(\frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}\right)^2 \tau\right)^{\frac{1}{2}}} d\sigma. \end{aligned}$$

Finalement, l'approximation au premier ordre est donnée par

$$u_0(\sigma, \tau) = \rho(0) + \int_0^\sigma \frac{\frac{d\rho(\rho)}{d\sigma}}{\left(1 + \left(\frac{d\rho(\sigma)}{d\sigma}\right)^2 \tau\right)^{\frac{1}{2}}} d\sigma,$$

pour un certain nombre de fonctions élémentaires $\rho(x)$, nous pouvons évaluer l'intégrale explicitement.

Remarque 3.1 *Nous avons commencé avec une onde progressive initiale, ce qui simplifie le calcul. Pour des conditions initiales plus générales, nous devons le mettre $u_0 = f_0(\sigma, \tau) + g_0(\xi, \tau)$, qui permet la présence d'une autre onde se déplaçant vers la gauche.*

2^{eme} cas

Nous présentons une approximation de premier ordre de la solution du problème de valeur initiale (3.18) avec les conditions initiales suivantes

$$u(x, 0) = 2 \sin(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.21)$$

Comme ce que nous avons fait dans le section (3.1), La première approximation $u_0(x, \tilde{t}, \tau)$ satisfait le problème de valeur initiale

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = 0,$$

avec $u_0(x, 0, 0) = 2 \sin(x)$ et $\frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0, 0) = 0$.

En substituant (3.6) dans ces conditions initiale on trouve

$$f_0(x, 0) + g_0(x, 0) = 2 \sin(x), \quad (3.22)$$

et

$$-\frac{\partial f_0}{\partial x}(x, 0) + \frac{\partial g_0}{\partial x}(x, 0) = 0,$$

en intégrant cette dernière par rapport à x on obtient

$$-f_0(x, 0) + g_0(x, 0) = 0, \quad (3.23)$$

les deux équations (3.22)et (3.23) donnent

$$\begin{aligned} f_0(x, 0) &= f_0(\sigma, 0) = \sin \sigma, \\ g_0(x, 0) &= g_0(\xi, 0) = \sin \xi. \end{aligned}$$

En particulier f_0 et g_0 doivent être 2π périodiques dans σ et ξ respectivement. Pour calculer f_0 et de façon similaire g_0 nous avons besoin selon (3.10) et (3.18) l'équation

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau} &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int_0^\xi H\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}, 0\right) d\xi \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right)^3 d\xi \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \left\{ \int_0^\xi \left[\left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right)^3 - 3\left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right] d\xi + 3\left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}\right)^2 \int_0^\xi \frac{\partial g_0}{\partial \xi} d\xi - \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}\right)^3 \int_0^\xi d\xi \right\}, \end{aligned}$$

donc

$$2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int_0^\xi \left[\left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right)^3 - 3\left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right)^2 \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right] d\xi + \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{3}{\xi} g_0 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}\right)^3, \quad (3.24)$$

puisque g_0 et $\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}$ sont bornée,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{3}{\xi} g_0 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}\right)^2 = 0,$$

et puisque $\frac{\partial g_0}{\partial \xi}$ est impaire en ce qui concerne $\xi = \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int^{\xi} \left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)^3 d\xi = 0,$$

donc l'équation (3.24) devient,

$$2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau} + 3 \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int^{\xi} \left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)^2 d\xi + \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right)^3 = 0.$$

Alors, nous devons résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} 2 \frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma \partial \tau} + 3 \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} b(\tau) + \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right)^3 = 0, \\ f_0(\sigma, 0) = \sin \sigma, \\ \frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, 0) = \cos \sigma, \end{cases} \quad (3.25)$$

avec

$$b(\tau) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{1}{\xi} \int^{\xi} \left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)^2 d\xi.$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \sigma \partial \tau} &= - \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \int^{\sigma} H\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}, 0\right) d\sigma \\ &= - \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \int^{\sigma} \left(-\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}\right)^3 d\sigma \\ &= - \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)^3 \int^{\sigma} d\sigma + \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{3}{\sigma} \left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)^2 \int^{\sigma} \frac{\partial f_0}{\partial \sigma} d\sigma \\ &\quad - \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \int^{\sigma} \left[3 \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right)^2 \frac{\partial g_0}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right)^3 \right] d\sigma, \end{aligned}$$

donc

$$2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \sigma \partial \tau} = - \left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)^3 + \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{3}{\sigma} f_0 \left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)^2 - 3 \frac{\partial g_0}{\partial \xi} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \int^{\sigma} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right)^2 d\sigma + \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \int^{\sigma} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right)^3 d\sigma,$$

puisque f_0 et $\frac{\partial g_0}{\partial \sigma}$ sont bornée,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{3}{\sigma} f_0 \left(\frac{\partial g_0}{\partial \xi} \right)^2 = 0,$$

et puisque $\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}$ est impaire en ce qui concerne $\sigma = \frac{\pi}{2}$,

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \int^{\sigma} \left(\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} \right)^3 d\sigma = 0,$$

donc nous obtenons le problème suivant

$$\begin{cases} 2\frac{\partial^2 g_0}{\partial\sigma\partial\tau} + 3\frac{\partial g_0}{\partial\xi}a(\tau) + \left(\frac{\partial g_0}{\partial\xi}\right)^3 = 0, \\ g_0(\xi, 0) = \sin \xi, \\ \frac{\partial g_0}{\partial\xi}(\xi, 0) = \cos \xi, \end{cases} \quad (3.26)$$

avec

$$a(\tau) = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \int_0^\sigma \left(\frac{\partial f_0}{\partial\sigma}\right)^2 d\sigma. \quad (3.27)$$

Pour avoir une idée comment construire une solution de (3.25) nous prenons au lieu de $b(\tau)$ une constante, disons $\frac{1}{3}c$ avec $c > 0$, et posons $y(\tau) = \frac{\partial f_0}{\partial\sigma}(\sigma, \tau)$ alors le problème (3.25) devient

$$\begin{cases} 2y' + cy + y^3 = 0, \\ y(0) = \cos(\sigma), \end{cases}$$

c'est une équation de Bernoulli alors on pose $z = y^{-2} \implies z' = -2y^{-3}y'$ et en multipliant cette dernière équation par y^{-3} on trouve

$$-z' + cz = -1,$$

alors

$$-\left(z + \frac{1}{c}\right)' + c\left(z + \frac{1}{c}\right) = 0,$$

donc $z = -\frac{1}{c} + Me^{c\tau}$, c.-à-d.

$$y = \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{c} + Me^{c\tau}}},$$

en appliquant la condition initiale on trouve

$$\frac{1}{\sqrt{M - \frac{1}{c}}} = \cos \sigma \implies M = \frac{1}{\cos^2 \sigma},$$

ce qui implique

$$y = \sqrt{c} \frac{e^{-\frac{1}{2}c\tau}}{\sqrt{1 + \frac{c}{\cos^2 \sigma} - e^{-c\tau}}}.$$

Finalement $\frac{\partial f_0}{\partial\sigma}$ est donnée par

$$\frac{\partial f_0}{\partial\sigma} = \sqrt{c} \frac{e^{-\frac{1}{2}c\tau}}{\sqrt{F(\sigma) - e^{-c\tau}}},$$

où $F(\sigma) = 1 + \frac{c}{\cos^2 \sigma}$ est une fonction arbitraire de σ . Regardant ce résultat, nous supposons maintenant que la solution générale de (3.25) à la forme.

$$\frac{\partial f_0}{\partial \sigma} = \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{F(\sigma) - \varphi(\tau)}},$$

où les fonctions λ et φ devraient être déterminées tels que cette dernière satisfait (3.25), la substitution de cette expression dans l'équation du problème (3.25) donne après un petit calcul

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \lambda^2(\tau) \text{ et } 2\frac{d\lambda}{d\tau} + 3\lambda(\tau)b(\tau) = 0. \quad (3.28)$$

De façon similaire, nous obtenons que la solution générale de (3.26)

$$\frac{\partial g_0}{\partial \xi} = \frac{\mu(\tau)}{\sqrt{G(\xi) - \psi(\tau)}},$$

où G est une fonction arbitraire de ξ et où μ et ψ satisfont les équations

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \mu^2(\tau) \text{ et } 2\frac{d\mu}{d\tau} + 3\mu(\tau)a(\tau) = 0.$$

En raison de la symétrie des conditions initiales du problème (3.25) et (3.26) il est clair que $a(\tau) = b(\tau)$ et $\lambda(\tau) = \mu(\tau)$ et donc nous pouvons limiter nos calculs à la fonction f_0 . En utilisant la condition initiale de (3.25) nous trouvons

$$\frac{\lambda(0)}{\sqrt{F(\sigma) - \varphi(0)}} = \cos \sigma.$$

On a

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \implies \sec^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

qui est satisfait par conséquent $F(\sigma) = \sec^2 \sigma$, $\lambda(0) = 1$, et $\varphi(0) = 0$, donc

$$\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) = \frac{\lambda(\tau) \cos \sigma}{\sqrt{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma}}, \quad (3.29)$$

alors

$$\begin{aligned} f_0(\sigma, \tau) &= \int^{\sigma} \frac{\lambda(\tau) \cos \sigma}{\sqrt{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma}} d\sigma \\ &= \int^{\sigma} \frac{\lambda(\tau) \cos \sigma}{\sqrt{1 + \varphi(\tau)(1 - \sin^2 \sigma)}} d\sigma \\ &= \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{1 + \varphi(\tau)}} \int^{\sigma} \frac{\cos \sigma}{\sqrt{1 - \frac{\varphi(\tau)}{1 + \varphi(\tau)} \sin^2 \sigma}} d\sigma, \end{aligned}$$

on pose

$$y = \sqrt{\frac{\varphi(\tau)}{1 + \varphi(\tau)}} \sin \sigma \implies d\sigma = \frac{\sqrt{1 + \varphi(\tau)}}{\sqrt{\varphi(\tau)} \cos \sigma} dy,$$

donc

$$f_0(\sigma, \tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\varphi(\tau)}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} dy = \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\varphi(\tau)}} \arcsin(y).$$

Finalement

$$f_0(\sigma, \tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\varphi(\tau)}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varphi(\tau)}{1 + \varphi(\tau)}} \sin \sigma\right).$$

De façon analogue on obtient

$$g_0(\xi, \tau) = \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\varphi(\tau)}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varphi(\tau)}{1 + \varphi(\tau)}} \sin \xi\right).$$

Pour établir enfin le premier terme de l'approximation (3.6), nous avons encore besoin de la fonction $\varphi(\tau)$ et $\lambda(\tau)$. A partir de (3.27) et (3.29) nous obtenons

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma} \int \frac{\lambda^2(\tau) \cos^2 \sigma}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi n + \sigma'} \int_0^{2\pi n + \sigma'} \frac{\lambda^2(\tau) \cos^2 \sigma}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\pi + \frac{\sigma'}{n}} \right) \left(\int_0^{2\pi n} \frac{\lambda^2(\tau) \cos^2 \sigma}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma + \int_{2\pi n}^{2\pi n + \sigma'} \frac{\lambda^2(\tau) \cos^2 \sigma}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma \right), \end{aligned}$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \sigma' < 2\pi$. En utilisant la périodicité de la fonction à intégrer cette expression devient

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\pi + \frac{\sigma'}{n}} \right) \left(n \int_0^{2\pi} \frac{\lambda^2(\tau) \cos^2 \sigma}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma + \int_0^{\sigma'} \frac{\lambda^2(\tau) \cos^2 \sigma}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma \right), \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi + \frac{\sigma'}{n}} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\lambda^2(\tau) \cos^2 \sigma}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma + \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2\pi + \frac{\sigma'}{n}} \right) \int_0^{\sigma'} \frac{\lambda^2(\tau) \cos^2 \sigma}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma, \end{aligned}$$

on a $\int_0^{\sigma'} \frac{\lambda^2(\tau) \cos^2 \sigma}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma$ est bornée alors

$$\begin{aligned} a(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda^2(\tau) \cos^2 \sigma}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda^2(\tau)}{\varphi(\tau)} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\tau) \cos^2 \sigma + 1 - 1}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\lambda^2(\tau)}{\varphi(\tau)} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} \right) d\sigma \right) \\ &= \frac{\lambda^2(\tau)}{\varphi(\tau)} - \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda^2(\tau)}{\varphi(\tau)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma, \end{aligned}$$

posons : $j = \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma$, alors

$$j = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \varphi(\tau) \cos^2 \sigma} d\sigma = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\varphi(\tau)}{2} \left[\frac{2}{\varphi(\tau)} + 1 + \cos 2\sigma \right]} d\sigma = \frac{4}{\varphi(\tau)} \int_0^{\pi} \frac{1}{\frac{2}{\varphi(\tau)} + \frac{1}{2} + \cos \sigma} d\sigma.$$

Posons $A(\tau) = \frac{2}{\varphi(\tau)} + 1$, alors

$$j = \frac{4}{\varphi(\tau)} \int_0^{\pi} \frac{1}{A(\tau) + \cos \sigma} d\sigma = \frac{4}{\varphi(\tau)} \int_0^{\pi} \frac{1}{A(\tau) + \frac{1 - \tan^2 \frac{\sigma}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\sigma}{2}}} dx,$$

en utilisant le changement de variable usuel $t = \tan \frac{\sigma}{2}$ on à :

$$j = \frac{4}{\varphi(\tau)} \int_0^{\infty} \frac{\frac{2}{1+t^2}}{A + \frac{1-t^2}{1+t^2}} dt = \frac{8}{\varphi(\tau)} \int_0^{\infty} \frac{dt}{(A-1)t^2 + A+1} = \frac{4}{\varphi(\tau) + 1} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{\varphi(\tau)+1}} \right)^2 + 1},$$

posons $z = \frac{t}{\sqrt{\varphi(\tau)+1}}$, $dt = \sqrt{\varphi(\tau)+1} dz$, alors

$$j = \frac{4}{\sqrt{\varphi(\tau)+1}} \int_0^{\infty} \frac{dt}{z^2 + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \varphi(\tau)}},$$

donc

$$a(\tau) = \frac{\lambda^2(\tau)}{\varphi(\tau)} - \frac{\lambda^2(\tau)}{\varphi(\tau)} \frac{1}{\sqrt{1 + \varphi(\tau)}}.$$

Il se ensuit maintenant de

$$\begin{cases} a(\tau) = b(\tau), \\ \varphi'(\tau) = \lambda^2(\tau), \\ 2\lambda'(\tau) + 3\lambda(\tau)b(\tau) = 0, \end{cases}$$

que

$$\begin{aligned} 2\lambda' + 3\lambda\left(\frac{\lambda^2}{\varphi} - \frac{\lambda^2}{\varphi} \frac{1}{\sqrt{1+\varphi}}\right) &= 0 \\ \implies -\frac{2\lambda'}{3\lambda} &= \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{\varphi'}{\varphi\sqrt{1+\varphi}}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \log \lambda^{-\frac{2}{3}} &= \log \varphi - \int^{\tau} \frac{\varphi'}{\varphi\sqrt{1+\varphi}} d\tau + \text{const}, \\ &= \log \varphi - \int^{\tau} \frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi}} \times \frac{1}{(\sqrt{1+\varphi}-1)(\sqrt{1+\varphi}+1)} d\tau + \text{const}, \end{aligned}$$

on a

$$\frac{1}{(\sqrt{1+\varphi}-1)(\sqrt{1+\varphi}+1)} = \frac{1}{2\sqrt{1+\varphi}-1} - \frac{1}{2\sqrt{1+\varphi}+1},$$

donc

$$\begin{aligned} \log \lambda^{-\frac{2}{3}} &= \log \varphi - \int^{\tau} \frac{\frac{\varphi'}{2\sqrt{1+\varphi}}}{\sqrt{1+\varphi}-1} d\tau + \int^{\tau} \frac{\frac{\varphi'}{2\sqrt{1+\varphi}}}{\sqrt{1+\varphi}+1} d\tau + \text{const}, \\ &= \log \varphi - \log(\sqrt{1+\varphi}-1) + \log(\sqrt{1+\varphi}+1) + \text{const}, \end{aligned}$$

enfin

$$\log \lambda^{-\frac{2}{3}} = \log \varphi - \log \frac{\sqrt{1+\varphi}-1}{\sqrt{1+\varphi}+1} + \text{const}.$$

D'autre part encore par (3.28)

$$\log \lambda^{-\frac{2}{3}} = \log(\varphi')^{-\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad \lambda = \sqrt{\varphi'}.$$

Ces équations donnent finalement la fonction $\lambda(\tau)$ et $\varphi(\tau)$ et la première approximation de notre problème de valeur initiale (3.18) – (3.21) est donnée par

$$u(x, \tilde{t}, \tau) \sim \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\varphi(\tau)}} \left\{ \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varphi(\tau)}{1+\varphi(\tau)}} \sin \sigma\right) + \arcsin\left(\sqrt{\frac{\varphi(\tau)}{1+\varphi(\tau)}} \sin \xi\right) \right\}.$$

Dans cet exemple relativement simple que nous impliquons que la méthode de deux échelles appliquées au problème de valeur initiale du type (3.1) – (3.2) conduit facilement

à des complications techniques, parce que l'équation de $\frac{\partial f_0}{\partial \sigma}$ et $\frac{\partial g_0}{\partial \xi}$ sont couplées et même une perturbation plutôt simple $\varepsilon H(u_x, u_t)$ peut conduire ensuite des difficultés pour la solution explicite.

Remarque 3.2 *On peut aussi considérer par cette méthode une équation d'onde avec le terme de dissipation $H = -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{3}(\frac{\partial u}{\partial t})^3$, Voir [8].*

Remarque 3.3 *La validité de l'approche de Chikwendu et Kevorkian est démontrée par Echaus [4], voire aussi [3, Chapitre 6].*

Conclusion

Dans ce travail, on a utilisé la méthode des échelles multiples, et en particulier l'approche de Chikwendu et Kevorkian [2], pour étudier le problème de perturbation suivant,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon H\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, & -\infty < x < +\infty, t \geq 0, 0 < \varepsilon \ll 1, \\ u(x, 0) = \rho(x), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \mu(x). \end{cases}$$

pour différents choix du terme de dissipation $H\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Sur les exemples étudiés, on a constaté que la méthode donne une bonne approximation de la solution, valable pour $t = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Bibliographie

- [1] B. M. BUDAK, A. A. SAMARSKII, & A. N. TIKHONOV, *A collection of problems in mathematical physics (Vol. 52)*, Courier Corporation, **1988**.
- [2] S. C. CHIKWENDU AND J.KERVORKIAN, *A perturbation method for hyperbolic equations with small nonlinearities*, Siam J. Appl. Math, Vol. 22, No. 2, March **1972**.
- [3] E.M.DE JAGER AND J. FURU, *The Theory of Singular Perturbations*, Vol. 42, Elsevier, **1996**.
- [4] W. ECKHAUS, *New approach to the asymptotic theory of nonlinear oscillations and wave-propagation*, J. math. Anal. Appl, 49(3), 575-611, **1975**.
- [5] M.H. HOLMES, *Introduction to Perturbation Methods*, Springer, **2012**.
- [6] S. SALSA, *Partial Differential Equations in Action, From Modelling to Theory*, Springer, **2008**.
- [7] W.A. STRAUSS, *Partial Differential Equations, An introduction*, John Wiley & sons, **2007**.
- [8] F. VERHULST, *Methods and Applications of Singular Perturbations, Boundary Layers and MultipleTimescale Dynamics*, Springer, **2006**.