



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDP et applications

Thème

Problème d'évolution pour une équation parabolique fractionnaire avec une condition intégrale

Présenté par :

M^{elle} SALMI Cheima

Soutenu publiquement le : 23/09/2020.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r MERZOUGUI Abdelkrim*

Encadreur : *M^r NOUIRI Brahim*

Co-Encadreur : *M^{me} DJERIOUI Khayra*

Examineur : *M^r ABDELKEBIR Saad*

Prof., Université de M'sila

M.C.A, Université de M'sila

M.A.A, Université de M'sila

M.A.A, Université de M'sila

Remerciements

Au nom d'Allah le clément et le miséricordieux

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant qui ma donné le courage et la persévérance pour la réalisation de ce modeste mémoire.

Je remercie profondément Monsieur Nouiri Brahim mon encadreur, qui m'a beaucoup aidé pour terminer ce travaille malgré ses nombreuses charges, il m'a quidé durant mon recherche, et sans oublier ses précieux conseils.

mes remerciements vont aussi au Madame Djérioui Khayra ma co-encadreur.

Mes sincères remerciements a Monsieur Merzougui Abdelkrim, qui ma fait l'honneur d'accepter de présider le jury de ce mémoire.

Je remercie vivement Monseur Abdelkebir Saad qu'a accepté d'examine mon travail.

Je voudrais également remercier tous mas enseignants, tous mes collégeus de deuxème année Master EDP et application, en particulier J.Mari, J.Mibarki, N.Elaakle, je leur souhaite une bonne continuation.

De tous mon coeur je remercie mes parents et mes prières que Dieu les protégé et les accord santé et longue vie.

Enfin, j'adresse un grand remerciement à mes soeurs, mes frères et tout ma famille, qui m'ont donné beaucoup de soutien constant et d'encouragement.

Dédicaces

Je dédie ce modeste mémoire

À mes très chères parents.

À mes très chères soeurs : Rima, Fatima.

À mes frères : Hicham, Sami, Kousai, sehaybe.

À mes oncles, mes cousins et tout les members de ma famille.

À tous qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver à ce
niveau d'étude.

À tout les gents qui m'ont aimé.

S. Cheima

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons traité un problème d'évolution pour une équation parabolique fractionnaire avec une condition de Neumann et une condition de type intégrale. Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution de ce problème par la méthode des inégalités d'énergie. Ensuite, nous avons introduit un schéma de différence finie implicite pour le problème équivalent et démontré la stabilité et la convergence de ce schéma en utilisant la démonstration par récurrence et l'analyse matricielle. Enfin, nous avons présenté des exemples numériques pour valider l'efficacité de ce schéma.

Mots-Clés : Calcul fractionnaire, Équation parabolique fractionnaire, Méthode des inégalités d'énergie, Analyse matricielle, Méthode de différences finies.

In this memoir, we have dealt with an evolution problem for a fractional parabolic equation with Neumann condition and an integral condition. We have demonstrated the existence and uniqueness of the solution of this problem by the method of energy inequalities. Next, we introduced an implicit finite difference scheme for the equivalent problem and demonstrated the stability and convergence of this scheme using induction proof and matrix analysis. Finally, we presented numerical examples to validate the efficiency of this scheme.

Keywords : Fractional calculation, Fractional parabolic equation, Energy inequalities method, Matrix analysis, Finite difference method.

Table des matières

Introduction	viii
1 Notions préliminaires	9
1.1 Opérateurs linéaires non-bornés	10
1.2 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert	11
1.3 Traces des fonctions des espaces de Sobolev	11
1.3.1 Existence de trace	11
1.3.2 La densité de $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$	11
1.4 Fonctions spéciales	12
1.5 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-liouville	13
1.6 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-liouville	13
1.7 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo	14
1.7.1 Intégration par parties fractionnaire	15
1.8 Espaces fonctionnels et inégalités élémentaires	15
1.8.1 L'espace $L^2_\rho(\Omega)$	15
1.8.2 L'espace de Bouziani	16
1.8.3 Les espaces fractionnaires ${}^R H_0^\alpha(\Omega)$ et ${}^R B_0^\alpha(\Omega)$	17
1.9 Généralités sur les matrices	20
1.10 Les normes vectorielles et matricielles	21
1.10.1 Normes Vectorielles	21
1.10.2 Normes matricielles	22
1.11 Schéma de différences finies	23
1.11.1 Stabilité et convergence	23

2	Étude théorique	25
2.1	Position du problème	26
2.2	Estimation a priori et l'unicité de la solution	27
3	Étude numérique	35
3.1	Problème équivalent	36
3.2	Schéma de différence finie implicite	36
3.2.1	Stabilité et convergence du schéma de différence	41
3.3	Exemples numériques	50

Table des figures

3.1	Solutions exactes et approchées de l'exemple 3.1 pour $\alpha = 0.1$	50
3.2	Variation d'erreur absolue de l'exemple 3.1.	51
3.3	Solutions exactes et approchées pour l'exemple 3.2	52
3.4	Variation d'erreur absolue de l'exemple 3.2.	53
3.5	Solutions exactes et approchées pour l'exemple 3.3	54
3.6	Variation d'erreur absolue de l'exemple 3.3.	54

Introduction générale

Les équations différentielles fractionnaires (EDF) peuvent être considérées comme des généralisations d'équations différentielles d'ordre entier à un ordre arbitraire. Ces types des équations apparaissent dans une grande variété de domaines, tels que l'ingénierie, la physique et les mathématiques appliquées. Certains développements récents dans les équations différentielles fractionnaires (EDF) ont été proposés dans [5, 6, 16, 18–20, 22, 23, 25, 30, 33].

Un grand nombre de problèmes de la physique et de la technologie modernes sont énoncés en utilisant des conditions non locales pour les équations aux dérivées partielles, qui sont décrites en utilisant des conditions intégrales. Les conditions aux limites intégrales reçoivent beaucoup d'attention en raison de leurs applications dans la dynamique des populations, les modèles de flux sanguin, le génie chimique et les systèmes cellulaires ; voir par exemple [10–14, 31, 32].

L'existence et l'unicité des solutions aux problèmes d'évolutions pour les équations aux dérivées partielles fractionnaires a été largement étudiée par de nombreux auteurs ; voir par exemple [1, 2, 4, 7, 8, 21, 28]. Certains des résultats d'existence et d'unicité ont été obtenus en utilisant le théorème de Lax-Milgram, théorèmes de point fixe et la méthode des inégalités d'énergie, [17, 28, 34, 38].

L'objectif de ce mémoire est l'étude théorique et numérique d'un problème d'évolution pour une équation parabolique fractionnaire suivante :

$${}^c\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + f(x, t), \quad (x, t) \in]0, 1[\times]0, T[, \quad (1)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in]0, 1[, \quad (2)$$

la condition au limite de Neumann

$$a(0, 1) \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \mu(t), \quad t \in [0, T], \quad (3)$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad t \in [0, T], \quad (4)$$

où $a(x, t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\mu(t)$ et $E(t)$ sont des fonctions données et ${}^c\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t)$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha \leq 1$, voir [24], définie par :

$${}^c\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, s)}{\partial s} \frac{ds}{(t-s)^\alpha}, \quad (5)$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction Gamma d'Euler, Voir [24].

Cette étude est concernée les deux aspects suivantes :

- ✓ **Aspect théorique** : nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution par la méthode des inégalités d'énergie. Cette dernière appelée la méthode d'analyse fonctionnelle ou la méthode des estimations a priori.
- ✓ **Aspect numérique** : nous avons résoudre numériquement ce problème par la méthode de différences finies.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les opérateurs linéaires non bornés, les espaces fonctionnels, le calcul fractionnaire et quelques lemmes techniques.

Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème (1)-(4). On commence par de transférer le problème (1)-(4) à un autre non-locale aussi, mais moins compliqué et qui ne contient pas de condition intégrale, puis on démontre l'existence et l'unicité de la solution forte. La démonstration est basée sur la méthode des inégalités d'énergie et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

Dans le dernier chapitre, nous avons introduit un schéma de différence finie implicite pour le problème équivalent. Ensuite, nous avons démontré la stabilité et la convergence de ce schéma en utilisant la démonstration par récurrence et l'analyse matricielle. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de ce schéma.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les opérateurs linéaires non bornés, les espaces fonctionnels, le calcul fractionnaire et quelques lemmes techniques.

1.1 Opérateurs linéaires non-bornés

Définition 1.1. Soient E et F deux espaces vectoriels. Un opérateur T est une application de E dans F :

$$T : E \rightarrow F$$

Tout opérateur T linéaire est complètement défini par son graphe $G(T)$ qui est un sous-espace vectoriel de $E \times F$ défini par $G(T) = \{(u, Tu), u \in D(T)\}$, $D(T)$ est le domaine de définition de l'opérateur T .

Définition 1.2. Un opérateur T de E dans F est dit linéaire si et seulement si :

$$\forall u_1, u_2 \in E, \mu, \lambda \in \mathbb{C}, T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda T(u_1) + \mu T(u_2),$$

où \mathbb{C} est le corps des scalaires de E et F .

Définition 1.3. On dit que S est une extension de T si $D(T) \subset D(S)$ et $Tu = Su$ pour tout $u \in D(T)$ (Autrement dit, $G(T) \subset G(S)$).

Remarque 1.1. Il n'est pas vrai que tout sous espace de $E \times F$ est le graphe d'un opérateur.

Définition 1.4. On dit que T est fermé si son graphe $G(T)$ est un fermé de $E \times F$.

Proposition 1.1. Un sous espace $G \subset E \times F$ est le graphe d'un opérateur linéaire si et seulement si :

$$(0, y) \in G \Rightarrow y = 0. \quad (1.1)$$

Démonstration. On note $p_1 : G \rightarrow E$ la projection donnée par $p_1(x; y) = x$. Si la propriété (1.1) est vraie, alors $(x; y_1) \in G$ et $(x; y_2) \in G$ implique que $y_1 = y_2$.

Donc, l'application $T : p_1 G \rightarrow F$ qui associe $x \in p_1 G$, l'unique $y \in F$ tel que $(x; y) \in G$ est bien définie et possède G comme son graphe. □

Définition 1.5. On dit qu'un opérateur linéaire T est fermable dans E s'il admet un prolongement fermé.

On vérifie aussitôt que T est fermable dans E si et seulement si l'adhérence $\overline{G(T)}$ de son graphe est un graphe (Car, on a $T \subset \overline{T}$ implique $G(T) \subset G(\overline{T})$, comme le prolongement \overline{T} est fermé, alors $G(\overline{T})$ est fermé. Donc $G(T) \subset G(\overline{T})$ implique $\overline{G(T)} \subset \overline{G(\overline{T})} = G(\overline{T})$).

Autrement dit T est fermable si et seulement si pour toute suite $(u_n) \subset D(T)$ telle que $u_n \rightarrow 0$ et $Tu_n \rightarrow v$, alors $v = 0$.

L'opérateur fermé \overline{T} dont le graphe $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ est appelé fermeture de T . ($G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$ implique que $\overline{G(T)}$ soit un graphe : $\forall (u_n; Tu_n) \in G(T) \Rightarrow (\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n, \lim_{n \rightarrow +\infty} Tu_n) \in \overline{G(T)}$ et $(0; v) \in \overline{G(T)}$, qui nécessite $v = 0$ pour assurer que $\overline{G(T)}$ soit un graphe).

Théorème 1.1 (Théorème de l'isomorphisme). .

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et bijectif de E sur F . Alors T^{-1} est continu de F dans E .

Théorème 1.2 ((Théorème du graphe fermé)). Soient E et F deux espaces de Banach. Soit T un opérateur linéaire de E dans F . On suppose que le graphe de T , $G(T)$, est fermé dans $E \times F$: Alors T est continu.

1.2 Relation entre l'orthogonalité et la densité dans les espaces de Hilbert

Définition 1.6. Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F , on définit M^\perp l'orthogonal de M , par

$$M^\perp = \{f \in F, \langle f, g \rangle_F = 0, \forall g \in M\}.$$

Proposition 1.2. Soit M un sous-espace vectoriel de l'espace de Hilbert F : Alors M est dense dans F si et seulement si $M^\perp = \{0\}$.

Démonstration. Supposons d'abord que M est dense dans F . Soit $f \in M^\perp \subset F$, soit $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ suite déléments de M qui converge vers f . On $\langle f, f_n \rangle = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En passant la limite, on en conclut que $\|f\|_F = 0$. Donc $f = 0$, qui donne $M^\perp = \{0\}$.

Réciproquement, supposons que $M^\perp = \{0\}$. Alors on a $(M^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = F$, et comme $M \subset \overline{M}$ il s'en suit que $(\overline{M})^\perp \subset M^\perp$, et donc $(M^\perp)^\perp \subset ((\overline{M})^\perp)^\perp$, mais \overline{M} est un fermé, alors $((\overline{M})^\perp)^\perp = \overline{M}$, alors on trouve $(M^\perp)^\perp \subset \overline{M} \Rightarrow F \subset \overline{M}$. D'où $F = \overline{M}$. □

1.3 Traces des fonctions des espaces de Sobolev

1.3.1 Existence de trace

On considère l'ensemble $L^2(\partial\Omega) = \{w \text{ mesurable sur } \partial\Omega, \text{ tel que } \int_{\partial\Omega} w^2 d\Gamma < +\infty\}$ C'est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire usuel.

Théorème 1.3 ((Existence de trace). Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^N , frontière « suffisamment régulière ». Alors l'application trace

$$\begin{aligned} l : C^\infty(\overline{\Omega}) &\rightarrow L^2(\partial\Omega) \\ u &\rightarrow lu = u|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

se prolonge par continuité en application linéaire continue, notée encore l , de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et il existe une constante c^* indépendante de u telle que

$$\|lu\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c^* \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Remarque 1.2. L'application trace l n'est pas surjective de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Par contre, elle est surjective sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$, où $H^{1/2}(\partial\Omega)$ est l'espace de Sobolev d'indice fractionnaire 1/2. On a :

$$H^{1/2}(\partial\Omega) = \{w \in L^2(\partial\Omega), \text{ tel que } \exists v \in H^1(\Omega), w = l(v)\}$$

1.3.2 La densité de $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$

Proposition 1.3. On suppose que Ω est un ouvert de classe C^1 dans \mathbb{R}^N , Alors $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$.

Démonstration. Puisque Ω est de classe C^1 , il existe un prolongement g linéaire continue de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Soit $U \in W^{1,p}(\Omega)$, alors on a $l(U) = u \in L^2(\partial\Omega)$. Par la densité de $D(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, donc il existe une suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\mathbb{R}^N)$ telle que :

$$\|U_n - g(U)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0, \quad g(U) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Soit u_n la restriction de U_n à Ω ($\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D(\Omega)$). Comme la restriction de $g(U)$ à Ω est U , on en déduit que :

$$\|u_n - U\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0, \quad U \in W^{1,p}(\Omega).$$

Par l'utilisation de la continuité de l'application de trace l , il en résulte :

$$\|l(u_n - U)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c^* \|u_n - U\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

où c^* est une constante positive. Ensuite, d'après la linéarité de l'application de trace l , on a

$$\|l(u_n) - u\|_{L^2(\partial\Omega)} = \|l(u_n - U)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c^* \|u_n - U\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

qui implique :

$$\|l(u_n) - u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq c^* \|u_n - U\|_{W^{1,p}(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Donc, on trouve

$$\|l(u_n) - u\|_{L^2(\partial\Omega)} \rightarrow 0.$$

Or, comme $l(u_n) \in l(W^{1,p}(\Omega)) = W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, on conclut que $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$. □

1.4 Fonctions spéciales

Définition 1.7 ([36]). On appelle fonction Gamma, la fonction définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } \operatorname{Re}(z) > 0$$

Propriétés 1.1. Nous avons les propriétés suivantes

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

1.5 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-liouville

Définition 1.8 ([24, 37]). Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur \mathbb{R} et $f \in L^1([a, b])$ fonction intégrable sur Ω . Les intégrales

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds \quad , t > a, \quad Re(\alpha) > 0, \quad (1.2)$$

$$\mathcal{I}_{b-}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds \quad , t < b, \quad Re(\alpha) > 0, \quad (1.3)$$

sont appelés les intégrales fractionnaires à gauche (à droite) de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha) > 0)$ respectivement.

Remarque 1.3. L'intégrale d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (t-a)^{\alpha} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f(t) = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} (b-t)^{\alpha}$$

$$f(t) = C \in \mathbb{R}$$

Propriétés 1.2. [37, page 34] Soient $f \in C([a, b])$ et $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$ Les intégrales fractionnaires de Riemann Liouville posséd les propriétés suivantes :

1. $\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\beta} f(t) = \mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f(t) = \mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta} f(t)$
2. $\mathcal{I}_{b-}^{\alpha} \mathcal{I}_{b-}^{\beta} f(t) = \mathcal{I}_{b-}^{\beta} \mathcal{I}_{b-}^{\alpha} f(t) = \mathcal{I}_{b-}^{\alpha+\beta} f(t)$

1.6 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-liouville

Définition 1.9. [24, page 70] Soit $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur $[a, b]$. Les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-liouville $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t)$ et $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(t)$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Re(\alpha) > 0)$ sont définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n (\mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f(t)) \\ \mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds \quad , n = [Re(\alpha)] + 1; t > a, \end{aligned} \quad (1.4)$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n (\mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha} f(t)) \\ \mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f(s) ds \quad , n = [Re(\alpha)] + 1; t > a. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Respectivement, où $[Re(\alpha)]$ est la partie entière de $Re(\alpha)$.

Propriétés 1.3. [24, Page 71] Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons

1. $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} (t-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}$
2. $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} (b-t)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}$

Propriétés 1.4. 1. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers $\forall m \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{a^+}^m f(t) = f^m(t), \\ \mathcal{D}_{b^-}^m f(t) = (-1)^m f^m(t). \end{cases}$$

2. Si $0 < \alpha < 1$, alors $n = [\alpha] + 1 = 1$. Donc, (1.4) et (1.5) devient

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right) \int_a^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds \quad , t > a,$$

$$\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt} \right) \int_t^b (s-t)^{-\alpha} f(s) ds \quad , t < b.$$

3. Si $\beta = 1$ et $0 < Re(\alpha) < 1$, alors la dérivée au sens de Riemann Liouville d'une fonction constante en générale n'est pas nulle

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha 1 = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{b^-}^\alpha 1 = \frac{(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

4. Pour tout $j = 1, 2, \dots, n = [Re(\alpha)] + 1$ avec $Re(\alpha) \geq 0$, nous avons

$$\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\alpha-j} = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\alpha-j} = 0$$

1.7 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.10 ([24]). Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [Re(\alpha)] + 1$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1([a, b])$. Les dérivées fractionnaires d'ordre α de f au sens de Caputo sont définies par

$${}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \quad (1.6)$$

et

$${}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = (-1)^n \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(s) ds \quad (1.7)$$

Proposition 1.4 ([36]). Soit $\alpha > 0, \beta > 0, n = [\alpha] + 1$, on a les propriétés suivantes Si $f(t) \in \mathcal{C}^n([a, b])$, alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha {}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \\ (\mathcal{I}_{b^-}^\alpha {}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k. \end{aligned}$$

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha {}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) &= f(t) - f(a), \\ (\mathcal{I}_{b^-}^\alpha {}^C \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f)(t) &= f(t) - f(b). \end{aligned}$$

Proposition 1.5. [24, Page 91] Les relations entre les dérivées au sens de Caputo (1.6), (1.7) et les dérivées au sens de Riemann-Liouville (1.4), (1.5) sont données par

$${}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \quad (1.8)$$

$${}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k \right] \quad (1.9)$$

On remarque que si $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$ alors

$${}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) \quad \text{et} \quad {}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t)$$

1.7.1 Intégration par parties fractionnaire

Si $v \in L^p(\Omega)$, $w \in L^q(\Omega)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$, alors la formule suivante

$$\int_0^T v(t) \cdot (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha w)(t) dt = \int_0^T w(t) \cdot (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha v)(t) dt$$

définit l'intégration par parties fractionnaire .

1.8 Espaces fonctionnels et inégalités élémentaires

1.8.1 L'espace $L_\rho^2(\Omega)$

Pour l'étude de quelques problèmes posés, on a besoin de rappeler quelques espaces fonctionnels. Soit $L^2(0, 1)$, l'espace de Hilbert usuel muni d'un produit scalaire noté $(\cdot, \cdot)_{L^2(0,1)}$ et d'une norme associée $\|u\|_{L^2(0,1)}$. L'espace de Hilbert $L^2(\Omega) := L^2(0, T, L^2(0, 1))$ ($\Omega = (0, 1) \times (0, T)$) est constitué de (classes de) fonctions définies et de carrés intégrables dans Ω . Le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ est noté $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$ avec la norme $\|u\|_{L^2(\Omega)}$. On désigne par $L_\rho^2(\Omega)$ l'espace de Hilbert des fonctions des carrés intégrables avec poids muni d'un produit scalaire dénoté $(\cdot, \cdot)_{L_\rho^2(\Omega)}$, défini par :

$$(u, v)_{L_\rho^2(\Omega)} = (\sqrt{\rho}u, \sqrt{\rho}v)_{L^2(\Omega)}$$

et d'une norme associée dénotée $\|u\|_{L_\rho^2(\Omega)}$ définie par :

$$\|u\|_{L_\rho^2(\Omega)} = \|\sqrt{\rho}u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega \rho(x) |u(x, \cdot)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Si $\rho(x) = 1$, $L_\rho^2(\Omega)$ sont identifiés avec les espaces standards $L^2(\Omega)$.

1.8.2 L'espace de Bouziani

On dénote par $C_0(0, 1)$ l'espace des fonctions continues à support compact dans $(0, 1)$. Comme une telle fonction est intégrable au sens de Lebesgue par rapport dx , on peut définir sur $C_0(0, 1)$ la forme bilinéaire donnée par :

$$(u, w) = \int_0^1 \mathfrak{S}_x u \cdot \mathfrak{S}_x w dx, \quad (1.10)$$

où

$$\mathfrak{S}_x = \int_0^1 u(\xi, \cdot) d\xi,$$

qui est considéré comme un produit scalaire dans $C_0(0, 1)$ pour lequel $C_0(0, 1)$ n'est pas complet.

On dénote $B_2(0, 1)$ la complétée de $C_0(0, 1)$ pour le produit scalaire défini par (1.10), où $B_2(0, 1)$ est appelé **l'espace de Bouziani** ou l'espace des fonctions primitives de carré intégrable sur $(0, 1)$. La norme associée au produit scalaire (1.10) est

$$\|u\|_{B_2(0,1)} = \sqrt{(u, u)_{B_2(0,1)}} = \|\mathfrak{S}_x u\|_{L^2(0,1)}. \quad (1.11)$$

Lemme 1.1. Pour $u \in B_2(0, 1)$, on a l'estimation :

$$\|u\|_{B_2(0,1)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(0,1)}. \quad (1.12)$$

Démonstration. L'inégalité de Cauchy-Schwarz entraîne :

$$\begin{aligned} (\mathfrak{S}_x u)^2 &= \left[\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right]^2 \leq \left[\int_0^x d\xi \right] \left[\int_0^x |u(\xi, t)|^2 d\xi \right] \\ &\leq x \int_0^x |u(\xi, t)|^2 d\xi \\ &\leq x \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx. \end{aligned}$$

par l'intégration sur $(0, 1)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (\mathfrak{S}_x u)^2 dx &\leq \left(\int_0^1 x dx \right) \left(\int_0^1 |u(x, t)|^2 dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 |u(x, t)|^2 dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, on aura :

$$\|u\|_{B_2(0,1)}^2 \leq \frac{1}{2} \|u\|_{L^2(0,1)}.$$

□

On dénote par $L^2(0, T, B_2(0, 1)) := B_2(\Omega)$ l'espace des fonctions u mesurables sur $[0, T]$ valeurs dans $B_2(0, 1)$, telles que

$$(u, w)_{L^2(0, T, B_2(0, 1))} = \int_0^T ((u, \cdot), (w, \cdot))_{B_2(0, 1)} \quad (1.13)$$

Puisque l'espace $B_2(0, 1)$ est un espace de Hilbert, on peut montrer que $L^2(0, T, B_2(0, 1))$ est un espace de Hilbert aussi.

1.8.3 Les espaces fractionnaires ${}^R H_0^\alpha(\Omega)$ et ${}^R B_0^\alpha(\Omega)$

Soit $C^\infty(0, T)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur $(0, T)$ et $C_0^\infty(0, T)$ désigne l'espace des fonctions indéfiniment différentiables support compact dans $(0, T)$.

Définition 1.11. pour tout réel $\alpha > 0$, L'application :

$${}^R H_0^\alpha(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+; \quad u \mapsto \left\| {}_0^R \partial_t^\alpha u \right\|_{L^2(\Omega)},$$

définit une semi-norme sur ${}^R H_0^\alpha(\Omega)$. On note :

$$|u|_{{}^R H_0^\alpha(\Omega)} := \left\| {}_0^R \partial_t^\alpha u \right\|_{L^2(\Omega)},$$

et l'application :

$${}^R H_0^\alpha(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+; \quad u \mapsto \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_{{}^R H_0^\alpha(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

définit une norme sur ${}^R H_0^\alpha(\Omega)$. On note :

$$\begin{aligned} \|u\|_{{}^R H_0^\alpha(\Omega)} &:= \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + |u|_{{}^R H_0^\alpha(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| {}_0^R \partial_t^\alpha u \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

Donc, on définit l'espace ${}^R H_0^\alpha(\Omega)$ comme une complétion de l'espace $C_0^\infty(0, T)$ pour la norme $\|u\|_{{}^R H_0^\alpha(\Omega)}$.

Remarque 1.4. Premièrement, On a $|u|_{{}^R H_0^\alpha(\Omega)}$ est une semi norme et pas une norme car, si on met :

$$u = (t - \tau)^\alpha (t - 2\tau),$$

pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned} |u|_{RH_0^\alpha(\Omega)}^2 &= \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{[(t-\tau)^\alpha(t-2\tau)]}{(t-\tau)^\alpha} d\tau \right)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t (t-2\tau) d\tau \right)^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Alors, on trouve $u \neq 0$, malgré que $|u|_{RH_0^\alpha(\Omega)} = 0$. Deuxièmement, il suffit d'appliquer la définition d'une norme, et de vérifier les trois propriétés essentielles. La difficulté principale est l'inégalité triangulaire, et pour la norme $\|u\|_{RH_0^\alpha(\Omega)}$, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 1.12. pour tout réel $\alpha > 0$, on définit sur l'espace usuel de Sobolev $H_0^\alpha(\Omega)$, le semi-norme

$$|u|_{H_{t,r}^\alpha(\Omega)} := \langle {}_0^R \partial_t^\alpha u, {}_0^R \partial_T^\alpha \rangle_{L^2(\Omega)}^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.13. Pour tout réel $\alpha > 0$, L'application :

$${}^R B_0^\alpha(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+; \quad u \mapsto \|{}_0^R \partial_t^\alpha (\mathfrak{S}_x u)\|_{L^2(\Omega)},$$

définit une semi-norme sur ${}^R B_0^\alpha(\Omega)$. On note :

$$|u|_{{}^R B_0^\alpha(\Omega)} := \|{}_0^R \partial_t^\alpha (\mathfrak{S}_x u)\|_{L^2(\Omega)},$$

et l'application :

$${}^R B_0^\alpha(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+; \quad u \mapsto \left(\|u\|_{B_2(\Omega)}^2 + |u|_{{}^R B_0^\alpha(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

définit une norme sur ${}^R B_0^\alpha(\Omega)$. On note :

$$\begin{aligned} \|u\|_{{}^R B_0^\alpha(\Omega)} &:= \left(\|u\|_{B_2(\Omega)}^2 + |u|_{{}^R B_0^\alpha(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\|u\|_{B_2(\Omega)}^2 + \|{}_0^R \partial_t^\alpha (\mathfrak{S}_x u)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (1.15)$$

Donc, on définit l'espace ${}^R B_0^\alpha(\Omega)$ comme une complétion de l'espace $C_0^\infty(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{{}^R B_0^\alpha(\Omega)}$.

Remarque 1.5. D'après la définition et la remarque précédente, on peut prouver que $|u|_{{}^R B_0^\alpha(\Omega)}$ est une semi norme et $\|u\|_{{}^R B_0^\alpha(\Omega)}$ est une norme, alors que pour l'inégalité triangulaire, on va utiliser l'inégalité de Minkowski.

Lemme 1.2. $\forall \alpha > 0$, si $w \in {}^R B_0^\alpha(\Omega)$ et $v \in C_0^\infty(\Omega)$, alors :

$$\left({}_0^R \partial_t^\alpha w(\cdot, y), v(\cdot, y) \right)_{(0,T)} = \left(w(\cdot, y), {}_t^R \partial_T^\alpha v(\cdot, y) \right)_{(0,T)}$$

Démonstration. Par l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
({}_0^R \partial_t^\alpha w(\cdot, y), v(\cdot, y))_{(0,T)} &= \int_0^T ({}_0^R \partial_t^\alpha w) \cdot v dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^T ({}_0^R \partial_t^\alpha w) \cdot v dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{w(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau \right) \cdot v dt \\
&= \frac{-1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^T \left(\int_0^t \frac{w(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau \right) \cdot v' dt,
\end{aligned}$$

et par l'intégration par parties fractionnaires, on retrouve

$$\begin{aligned}
({}_0^R \partial_t^\alpha w(\cdot, y), v(\cdot, y))_{(0,T)} &= \int_0^T ({}_0^R \partial_t^\alpha w) \cdot v dt \\
&= \frac{-1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^T \left(\int_0^t \frac{w(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau \right) \cdot v' dt \\
&= \frac{-1}{\Gamma(\alpha - 1)} \int_0^T \left(\int_0^t \frac{v'(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau \right) \cdot w dt \\
&= \int_0^T ({}_t^R \partial_T^\alpha v) \cdot w dt \\
&= (w(\cdot, y), {}_t^R \partial_T^\alpha v(\cdot, y))_{(0,T)}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 1.3. Pour $0 < \alpha < 1$, les semi-normes $|u|_{RH_0^\alpha(\Omega)}$ et $|u|_{H_{l,r}^\alpha(\Omega)}$ sont équivalentes. On pose

$$|u|_{RH_0^\alpha(\Omega)} \cong |u|_{H_{l,r}^\alpha(\Omega)}$$

Lemme 1.4. Pour tout réel $\alpha > 0$, L'espace ${}^R B_0^\alpha(\Omega)$ avec la norme (1.15) est complet.

Démonstration. Soit v_n une suite de Cauchy sous la norme $\|\cdot\|_{{}^R B_0^\alpha(\Omega)}$, alors il existe v, w vérifiant :

$$\mathfrak{S}_x v_n \rightarrow \mathfrak{S}_x v \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (1.16)$$

$${}_0^R \partial_t^\alpha (\mathfrak{S}_x v_n) \rightarrow \mathfrak{S}_x w \text{ dans } L^2(\Omega), \quad (1.17)$$

Dans ce qui suit, on veut prouver que ${}_0^R \partial_t^\alpha (\mathfrak{S}_x v) = \mathfrak{S}_x w$
D'après (1.17), on a :

$$\int_\Omega ({}_0^R \partial_t^\alpha (\mathfrak{S}_x v_n)) \cdot \varphi d\Omega \rightarrow \int_\Omega \mathfrak{S}_x w \cdot \varphi d\Omega, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \quad (1.18)$$

D'autre part, partir du Lemme 1.2 et (1.16), on obtient

$$\int_\Omega ({}_0^R \partial_t^\alpha (\mathfrak{S}_x v_n)) \cdot \varphi d\Omega = \int_\Omega (\mathfrak{S}_x v_n) \cdot {}_t^R \partial_T^\alpha \varphi d\Omega \rightarrow \int_\Omega (\mathfrak{S}_x v) \cdot {}_t^R \partial_T^\alpha \varphi d\Omega = \int_\Omega ({}_0^R \partial_t^\alpha (\mathfrak{S}_x v)) \cdot \varphi d\Omega. \quad (1.19)$$

En combinant (1.18) et (1.19),

$$\int_{\Omega} ({}^R_0\partial_t^\alpha(\mathfrak{S}_x v)) \cdot \varphi d\Omega = \int_{\Omega} \mathfrak{S}_x w \cdot \varphi d\Omega \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

On conclut :

$${}^R_0\partial_t^\alpha(\mathfrak{S}_x v) = \mathfrak{S}_x w$$

□

1.9 Généralités sur les matrices

Définition 1.14 ([9]). Soit $m, n \in \mathbb{N}$. Une matrice de type (m, n) sur \mathbb{R} à m lignes et n colonnes

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nous utilisons les abréviations suivantes, $A = (a_{ij})$ avec $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$, et $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices (m, n) sur \mathbb{R} .

Définition 1.15 ([9]). Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, la **transposée** de A noté A^T , est la matrice de $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ définie par

$$(A^T)_{ij} = A_{ji} \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \text{ et } j = 1, \dots, m$$

si $A^T = A$ on dit que A est **symétrique**.

Soit A une matrice carrée, $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

Définition 1.16 ([9]). On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice B de taille n telle que

$$AB = BA = I_n$$

la matrice B est appelée **inverse** de A et noté A^{-1} .

Définition 1.17 ([9]). On dit que A est **tridiagonale** si $a_{ij} = 0$ pour tout i, j tels que $|i - j| \geq 2$, i.e., si les seuls coefficients non nuls sont les coefficients diagonaux, ceux juste au dessus de la diagonale, et ceux juste en-dessous de la diagonale

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ \mathbf{0} & & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Définition 1.18 ([9]). On dit que A est à **diagonale strictement dominante par ligne** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad \text{avec } 1 \leq i \leq n$$

Théorème 1.4 ([9]). Une matrice à **diagonale strictement dominante par ligne** est **inversible**.

Démonstration. On doit montrer que

$$AX = 0 \Rightarrow X = 0$$

Soit $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ et k un indice tel que $|x_k| = \|X\|_\infty$. Alors,

$$\begin{aligned} AX = 0 &\Rightarrow a_{kk} \cdot x_k = - \sum_{j=1, j \neq k}^n a_{kj} \cdot x_j \\ &\Rightarrow |a_{kk}| \cdot |x_k| \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \cdot |x_j| \\ &\Rightarrow |a_{kk}| \cdot \|X\|_\infty \leq \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}| \cdot \|X\|_\infty \\ &\Rightarrow \left\{ \underbrace{|a_{kk}| - \sum_{j=1, j \neq k}^n |a_{kj}|}_{>0} \right\} \cdot \|X\|_\infty \leq 0 \\ &\Rightarrow \|X\|_\infty \leq 0 \\ &\Rightarrow X = 0 \end{aligned}$$

□

Définition 1.19 ([9]). Le **rayon spectral** de A est défini par

$$\rho(A) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$$

où λ_i sont les **valeurs propres** de la matrice A .

1.10 Les normes vectorielles et matricielles

1.10.1 Normes Vectorielles

Définition 1.20 ([9]). Une norme sur \mathbb{K}^n est une application $\|\cdot\| : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que

1. $\|x\| = 0_{\mathbb{K}}$ implique $x = 0_n$ pour tout $x \in \mathbb{K}^n$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout $x, y \in \mathbb{K}^n$ (inégalité triangulaire).

On définit la p -norme, pour $1 \leq p < +\infty$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Les normes les plus usuelles sont

1. La norme :

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

2. La norme (norme euclidienne) :

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. La norme (norme du sup) :

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

1.10.2 Normes matricielles

A partir de normes vectorielles, on définit les trois normes matricielles subordonnée $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p,$$

où $p = 1, 2$, ou ∞ .

Proposition 1.6. Pour chacune de ces trois normes, on a pour toutes A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|,$$

et

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|,$$

où $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ ou $\|\cdot\|_2$ ou $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque 1.6. si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors,

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |A_{ij}|.$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |A_{ij}|.$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}.$$

Théorème 1.5. [15, page 18] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors pour toute norme matricielle $\|\cdot\|$

$$\rho(A) \leq \|A\|.$$

1.11 Schéma de différences finies

Définition 1.21. Un maillage est un ensemble de points isolés (appelés nœuds) situés dans le domaine de définition des fonctions assujetties aux équations aux dérivées partielles. On appelle pas de maillage la distance entre deux nœuds voisins.

Définition 1.22 ([27]). Soit $u(x)$ représente une fonction d'une variable, les schémas de différences finies sont obtenus grâce aux formules de Taylor.

Formules de Taylor d'ordre 01

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + O(h). \quad (1.20)$$

Formules de Taylor d'ordre 02

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + O(h^2). \quad (1.21)$$

En un point $x \in [l, L]$ et pour une valeur h de pas de discrétisation donné par $h = \frac{L-l}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, la formule (1.20) nous permet d'approximer $u'(x)$ comme suite

approximation avant

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h). \quad (1.22)$$

approximation arrière

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x+h)}{h} + O(h). \quad (1.23)$$

approximation centré

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h). \quad (1.24)$$

et se basant sur(1.21) et(1.24) nous obtenons

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h).$$

1.11.1 Stabilité et convergence

Un certain nombre de notion est nécessaire lors de la résolution d'équations aux dérivées partielles au moyen de leurs équivalents discrétisés. Les deux principales sont **la stabilité** et la

convergence.

Définition 1.23 ([3]). Un schéma aux différence finie est dite stable pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, s'il existe une constante $C > 0$ indépendante de pas de maillage , telle que

$$\|u^n\|_\infty \leq C. \|u^0\|_\infty, \text{ pour tout } n \geq 0$$

,
 quelle que soit la donnée initiale u^0 .

Définition 1.24 (Erreur de troncature, [26]). On appelle erreur de troncature la quantité obtenue en remplaçant l'inconnue par la solution exacte dans le schéma numérique, que nous désignons par R_i .

Proposition 1.7 ([27]). Soit u_i l'approximation de la solution exacte $u(x_i)$, il est naturel d'utiliser les erreurs ponctuelles $u_i - u(x_i)$. Si on pose \hat{U} le vecteur des valeurs exactes et U le vecteur des valeurs discrètes, alors le vecteur d'erreur E définie par

$$E = U - \hat{U}$$

Définition 1.25 ([27]). Une méthode est dite convergente si

$$\|E\| \rightarrow 0 \text{ lorsque } h \rightarrow 0$$

ÉTUDE THÉORIQUE

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème (1)-(4). On commence par de transférer le problème (1)-(4) à un autre non-locale aussi, mais moins compliqué et qui ne contient pas de condition intégrale, puis on démontre l'existence et l'unicité de la solution forte. La démonstration est basée sur la méthode des inégalités d'énergie et sur la densité de l'image de l'opérateur engendré par le problème considéré.

2.1 Position du problème

Pour tout réel positif $0 < \alpha < 1$, la dérivée de Caputo et de Riemann Liouville sont respectivement définies comme suit :

- Dérivée au sens de **Caputo à gauche**

$${}_0^C \partial_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{(t-\tau)^\alpha}. \quad (2.1)$$

- Dérivée au sens de **Riemann-Liouville à gauche**

$${}_0^R \partial_t^\alpha = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau. \quad (2.2)$$

D'après (1.8), on trouve

$${}_0^R \partial_t^\alpha = {}_0^C \partial_t^\alpha \frac{u(x, 0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}. \quad (2.3)$$

Dans le domaine $\Omega =]0, 1[\times]0, T[, T < +\infty$, on considère l'équation aux dérivées partielles fractionnaire de type parabolique suivante :

$$\mathcal{L}v = {}_0^C \partial_t^\alpha v(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, t) \frac{\partial v}{\partial x}(x, t) \right] = F(x, t), \quad (2.4)$$

avec la condition initiale

$$\ell v = v(x, 0) = \phi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.5)$$

la condition au limite de type Neumann

$$v_x(0, t) = \mu(t), \quad (2.6)$$

et la condition intégrale

$$\int_0^1 v(x, t) dx = E(t), \quad 0 < t < T. \quad (2.7)$$

Où a, F, ϕ, μ , et E sont des fonctions données.

On suppose que la fonction ϕ vérifie les conditions de compatibilité (2.6) et (2.7), i.e.

$$\frac{\partial \phi(0)}{\partial x} = \mu(0), \quad \int_0^1 \phi(x) dx = E(0).$$

Etant donné que les conditions aux limites sont non homogènes, il est commode de les ramener à des conditions homogènes. On construit la fonction

$$U(x, t) = x \left(1 - \frac{3}{2}x \right) \mu(t) + 3x^2 E(t),$$

en introduisant une nouvelle fonction inconnue \tilde{v} définie par

$$\tilde{v}(x, t) = v(x, t) - U(x, t).$$

Alors, cette transformation nous permet de formuler le problème (2.4)-(2.7) à :

$$\mathcal{L}\tilde{v} = {}_0^C \partial_t^\alpha \tilde{v}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, t) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x}(x, t) \right] = F(x, t) - \mathcal{L}U = \tilde{F}(x, t), \quad (2.8)$$

$$\ell \tilde{v} = \tilde{v}(x, 0) = \phi(x) - \ell U = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.9)$$

$$\tilde{v}_x(0, t) = 0, \quad (2.10)$$

$$\int_0^1 \tilde{v}(x, t) dx = 0, \quad 0 < t < T. \quad (2.11)$$

où φ satisfait aux conditions de compatibilité (2.10) et (2.11).

Encore une fois, on introduit une nouvelle fonction $u(x, t) = \tilde{v}(x, t) - \varphi(x)$ et à l'aide de (2.3) le problème (2.8)-(refeq 2.11) devient sous la forme :

$$\mathcal{L}u = {}_0^C \partial_t^\alpha u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] = \tilde{F}(x, t) + \left[a(x, t) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} \right] = f(x, t), \quad (2.12)$$

$$\ell u = u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad (2.13)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad (2.14)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0, \quad 0 < t < T. \quad (2.15)$$

2.2 Estimation a priori et l'unicité de la solution

Dans ce chapitre on étudie un problème mixte lié à une équation parabolique fractionnaire du second ordre, mariant une condition classique de type Neumann et une condition intégrale. On démontre l'existence et l'unicité de la solution dans un espace fonctionnel fractionnaire de Sobolev.

Cette étude menée principalement à l'aide de la méthode des inégalités d'énergie.

Ainsi, pour étudier le problème posé, nous introduisons les espaces fonctionnels nécessaires.

On peut ramène le problème (2.12)-(2.15) à l'équation opérationnelle suivante :

$$Lu = f. \quad (2.16)$$

où $L = (\mathcal{L}, \ell)$, avec le domaine de définition $D(L)$ constitué de fonctions $u \in L^2(0, T, L^2(0, 1)) := L^2(\Omega)$ telles que ${}_0^R \partial_t^\alpha u, u_x, u_{xx} \in L^2(\Omega)$ et u satisfait la condition (refeq 2.15), l'opérateur L est considéré de E dans $L^2(\Omega)$, où E est l'espace de Banach des fonctions (il peut être vérifié en utilisant le Lemme 1.4 constitué de tous les éléments $u(x, t)$ ayant la norme finie

$$\|u\|_E^2 = \|u\|_{R B_0^{\frac{\alpha}{2}}(\Omega)}^2$$

et $L^2(\Omega)$ est l'espace de Hilbert constitué de tous les éléments f .

Théorème 2.1 ([35]). *si $a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\epsilon}{2} > 0$, où $\epsilon \ll 1$ Alors, pour toute fonction $u \in E$, on a l'estimation a priori*

$$\|u\|_E \leq q \|Lu\|_{L^2(\Omega)} \quad (2.17)$$

où q est une constante positive indépendante de u .

[35]. Multiplions scalairement l'équation (2.12) par le suivant Mu :

$$Mu = \int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi$$

puis en intégrant sur le sous-domaine $\Omega^\tau = (0, 1) \times (0, \tau)$, où $0 \leq \tau \leq T$, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau} \mathcal{L}u \cdot Mu \, dxdt \\ &= \int_{\Omega^\tau} ({}^R_0 \partial_t^\alpha u(x, t)) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt \\ & - \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt \\ &= \int_{\Omega^\tau} f(x, t) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Par l'intégration par parties de la première intégrale du côté gauche de l'égalité (2.18), on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau} ({}^R_0 \partial_t^\alpha u(x, t)) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt \\ &= \int_{\Omega^\tau} \left[{}^R_0 \partial_t^\alpha \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \right] \cdot \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dxdt, \end{aligned}$$

par l'application du Lemme 2.8 [28], formule(2 :21a)], on trouve

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^\tau} ({}^R_0 \partial_t^\alpha u(x, t)) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dxdt \\ &= \int_{\Omega^\tau} \left[{}^R_0 \partial_t^\alpha \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \right] \cdot \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dxdt, \\ &= \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0 \partial_t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \cdot \left({}^R_t \partial_T^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right). \end{aligned}$$

On peut réécrire la formule précédente comme suit :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^\tau} ({}^R_0\partial_t^\alpha u(x, t)) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dx dt \\
&= \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \cdot \left({}^R_t\partial_T^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dx dt. \\
&= \left\langle {}^R_0\partial_t^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi, {}^R_t\partial_T^{\frac{\alpha}{2}} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right\rangle_{L^2(\Omega^\tau)} \\
&=: |(\mathfrak{S}_x u)|_{RH_{l,r}^{\frac{\alpha}{2}}}^2
\end{aligned}$$

En vertu du Lemme 2.6 [28] et à partir du Lemme 2.4 [29], on peut conclure que les semi-normes des espaces ${}^R H_{l,r}^{\frac{\alpha}{2}}$ et ${}^R H_0^{\frac{\alpha}{2}}$ sont équivalentes, alors on obtient

$$|(\mathfrak{S}_x u)|_{RH_{l,r}^{\frac{\alpha}{2}}}^2 \cong \left\| {}^R_0\partial_t^{\frac{\alpha}{2}} (\mathfrak{S}_x u) \right\|_{L^2(\Omega)} := |u|_{RB_0^{\frac{\alpha}{2}}}$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^\tau} ({}^R_0\partial_t^\alpha u(x, t)) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dx dt \\
&=: |(\mathfrak{S}_x u)|_{RH_{l,r}^{\frac{\alpha}{2}}}^2 \\
&\cong \left\| {}^R_0\partial_t^{\frac{\alpha}{2}} (\mathfrak{S}_x u) \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0\partial_t^\alpha \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dx dt. \tag{2.19}
\end{aligned}$$

Utilisant une intégration par parties sur la deuxième intégrale du côté gauche de l'égalité (2.18) en tenant compte des conditions (2.13)-(2.15), on obtient

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dx dt \\
& = - \int_0^\tau \left[\left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_{x=0}^{x=1} dt \\
& - \int_{\Omega^\tau} a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dx dt \\
& = - \int_0^\tau \left[\left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) \left(a(x, t) u(x, t) \right) \right]_{x=0}^{x=1} dt \\
& + \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial a}{\partial x} u(x, t) \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dx dt + \int_{\Omega^\tau} a(x, t) (u(x, t))^2 dx dt \\
& = \frac{1}{2} \int_0^\tau \left[\frac{\partial a}{\partial x} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 \right]_{x=0}^{x=1} dt \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dx dt \\
& + \int_{\Omega^\tau} a(x, t) (u(x, t))^2 dx dt \\
& = \int_{\Omega^\tau} a(x, t) (u(x, t))^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dx dt
\end{aligned} \tag{2.20}$$

En intégrant par parties et en appliquant l' ϵ -inégalité de Cauchy sur le côté droit de l'égalité (2.18), on aura

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^\tau} f(x, t) \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) dx dt \\
& = - \int_0^\tau \left[\left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi u(\eta, t) d\eta \right) d\xi \right) \left(\int_0^x f(\xi, t) d\xi \right) \right]_{x=0}^{x=1} dt \\
& + \int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x f(\xi, t) d\xi \right) \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right) dx dt \\
& \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dx dt + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x f(\xi, t) d\xi \right)^2 dx dt \\
& \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega^\tau} (u(x, t))^2 dx dt + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Substituons (2.19)-(2.21) en (2.18), on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0\partial_t^\alpha \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt + \int_{\Omega^\tau} a(x, t) (u(x, t))^2 dxdt \\
& \leq \frac{\epsilon}{2} \int_{\Omega^\tau} (u(x, t))^2 dxdt + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dxdt \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Omega^\tau} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt \\
& \leq \int_{\Omega^\tau} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\epsilon}{2} \right) (u(x, t))^2 dxdt + \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dxdt,
\end{aligned}$$

comme $a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\epsilon}{2} > 0$, il vient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0\partial_t^\alpha \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt \\
& + \left(a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\epsilon}{2} \right) \int_{\Omega^\tau} (u(x, t))^2 dxdt \\
& \leq \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dxdt, \tag{2.22}
\end{aligned}$$

à partir de (1.12), on a

$$\int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega^\tau} (u(x, t))^2 dxdt,$$

Donc, (2.22) devient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0\partial_t^\alpha \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt \\
& + 2 \left(a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\epsilon}{2} \right) \int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt \\
& \leq \frac{1}{2\epsilon} \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dxdt,
\end{aligned}$$

Alors, on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega^\tau} \left({}^R_0\partial_t^\alpha \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt + \int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt \\
& + 2 \left(a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\epsilon}{2} \right) \int_{\Omega^\tau} \left(\int_0^x u(\xi, t) d\xi \right)^2 dxdt \\
& \leq q_1 \int_{\Omega^\tau} (f(x, t))^2 dxdt, \tag{2.23}
\end{aligned}$$

où

$$q_1 = \frac{1}{2\epsilon \min \left(1, 2 \left(a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\epsilon}{2} \right) \right)}.$$

Comme la partie droite de (2.23) est indépendante de τ , passant au supremum du côté gauche par rapport sur l'intervalle $[0, T]$, on obtient l'inégalité désirée, où $q = (q_1)^{\frac{1}{2}}$ \square

Proposition 2.1 ([35]). *L'opérateur L de E dans $L^2(\Omega)$ est fermable.*

Théorème 2.1 est valide pour une solution forte, c-a-d que lon peut prolonger à l'inégalité

$$\|u\|_E \leq q \|\bar{L}u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in D(\bar{L}) \quad (2.24)$$

Par conséquent, on obtient les corollaires suivants :

Corollaire 2.1 ([35]). *Une solution du problème (2.12)-(2.15) est unique, si elle existe, et dépend continûment de $\mathcal{F} \in L^2(\Omega)$.*

Corollaire 2.2 ([35]). *L'ensemble des valeurs $R(\bar{L})$ de l'opérateur \bar{L} est égale la fermeture $R(\bar{L})$ de $R(L)$.*

Pour montrer l'existence de la solution, on fait la preuve que $R(L)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ pour tout $u \in E$ et pour tout arbitraire $f \in L^2(\Omega)$.

Théorème 2.2 ([35]). *Si les conditions du Théorème 2.1 sont satisfaites. Donc pour chaque $\omega \in L^2(\Omega)$ et $u \in E$, si on a*

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}u \cdot \omega dxdt = 0, \quad (2.25)$$

alors ω s'annule presque partout dans Ω , ce qui implique que le problème (2.12)-(2.15) admette une solution forte unique $u = \bar{L}^{-1}f$.

[35]. Le produit scalaire de $L^2(\Omega)$ est défini par

$$(Lu, \omega)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \mathcal{L}u \cdot \omega dxdt,$$

On peut reformuler l'égalité (2.25) comme suit :

$$\int_{\Omega} ({}^R_0 \partial_t^\alpha u(x, t)) \cdot \omega dxdt = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) \cdot \omega dxdt, \quad (2.26)$$

Pour assurer que ${}^R_0 \partial_t^\alpha u(x, t) = {}^C_0 \partial_t^\alpha u(x, t)$, on met

$$u(x, t) = \mathfrak{S}_t(z(x, \tau)) = \int_0^t z(x, \tau) d\tau,$$

où $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z(x, \tau))}{\partial x} \right), {}^R_0 \partial_t^\alpha z \in L^2(\Omega)$ et z satisfait aux mêmes conditions (2.12)-(2.15). partir de (2.26), on obtient l'égalité

$$\int_{\Omega} ({}^R_0 \partial_t^\alpha \mathfrak{S}_t(z(x, \tau))) \cdot \omega dxdt = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, t) \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z(x, \tau))}{\partial x} \right) \cdot \omega dxdt, \quad (2.27)$$

Maintenant, on est en train de déterminer la fonction ω en se servant de l'égalité (2.27), on donne ω en fonction de z comme suit :

$$\omega = \int_x^1 \left(\int_0^\xi (\mathfrak{S}_t(z(\eta, \tau)) d\tau) d\eta \right) d\xi. \quad (2.28)$$

Donc, $\omega \in L^2(\Omega)$. Remplaçant ω dans (2.27) par sa représentation (2.28), et suite une intégration par parties de chaque terme dans (2.27) en tenant compte des conditions de la fonction z , on aura

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ({}^R_0 \partial_t^\alpha \mathfrak{S}_t(z(x, \tau))) \cdot \omega dx dt \\ & \cong \int_{\Omega} \left({}^R_0 \partial_t^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\tau \right) d\xi \right)^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.29)$$

et

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z(x, \tau))}{\partial x} \right) \cdot \omega dx dt \\ & = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x} \left(a \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z(x, \tau))}{\partial x} \right) \left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi (\mathfrak{S}_t(z(\eta, \tau)) d\tau) d\eta \right) d\xi \right) \\ & = \int_0^\tau \left[\left(\int_x^1 \left(\int_0^\xi (\mathfrak{S}_t(z(\eta, \tau)) d\tau) d\eta \right) d\xi \right) \left(a \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z)}{\partial x} \right) \right]_{x=0}^{x=1} dt \\ & + \int_{\Omega} \left(a \frac{\partial \mathfrak{S}_t(z)}{\partial x} \right) \left(\int_0^x (\mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\tau) d\xi \right) dx dt \\ & = \int_0^\tau \left[a \left(\int_0^x (\mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\tau) d\xi \right) (\mathfrak{S}_t(z)) \right]_{x=0}^{x=1} dt \\ & - \int_{\Omega} \frac{\partial a}{\partial x} (\mathfrak{S}_t(z)) \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z) \right) dx dt - \int_{\Omega} a (\mathfrak{S}_t(z))^2 dx dt \\ & = -\frac{1}{2} \int_0^\tau \left[\frac{\partial a}{\partial x} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z) \right)^2 \right]_{x=0}^{x=1} dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z) \right)^2 dx dt \\ & - \int_{\Omega} a (\mathfrak{S}_t(z))^2 dx dt \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\tau \right)^2 dx dt - \int_{\Omega} a(x, t) (\mathfrak{S}_t(z))^2 dx dt. \end{aligned} \quad (2.30)$$

En combinant (2.29) et (2.30), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left({}^R_0 \partial_t^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\tau \right) d\xi \right)^2 dx dt \\ & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\tau \right)^2 dx dt - \int_{\Omega} a(x, t) (\mathfrak{S}_t(z))^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.31)$$

estimons le côté droit de (2.31), il se cède

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\xi \right) \right)^2 dxdt. \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\xi \right)^2 dxdt - \int_{\Omega} a(x, t) (\mathfrak{S}_t(z))^2 dxdt \\
&\leq \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - a(x, t) \right] (\mathfrak{S}_t z(\xi, \tau))^2 dxdt, \tag{2.32}
\end{aligned}$$

Quand $a(x, t) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 a(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\epsilon}{2} > 0$, il parvient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left({}^R_0\partial_t^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_0^x \mathfrak{S}_t(z(\xi, \tau)) d\xi \right) \right)^2 dxdt. \\
&\leq \int_{\Omega} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - a(x, t) \right] (\mathfrak{S}_t z(\xi, \tau))^2 dxdt, \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

ceci implique que $z = 0$ sur Ω , il sensuit que $\omega = 0$ sur Ω . Ce qui achève la démonstration du Théorème 2.2. \square

ÉTUDE NUMÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous avons introduit un schéma de différence finie implicite pour le problème équivalent. Ensuite, nous avons démontré la stabilité et la convergence de ce schéma en utilisant la démonstration par récurrence et l'analyse matricielle. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de ce schéma.

3.1 Problème équivalent

Dans le domaine $\Omega =]0, 1[\times]0, T[, T < +\infty$, le problème (1)-(4) est équivalent le problème suivant :

$${}^C \mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega, \quad (3.1)$$

avec la condition initiale

$$u(x, t) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (3.2)$$

les conditions aux limites de type Neumann

$$\begin{cases} a(0, t) u_x(0, t) = \mu(t), & 0 < t < T, \\ a(1, t) u_x(1, t) = {}^C \mathcal{D}_t^\alpha E(t) + \mu(t) - \int_0^1 f(x, t) dx = \psi(t), & 0 < t < T. \end{cases} \quad (3.3)$$

Où a, f, φ, μ, ψ et E sont des fonctions données. ${}^C \mathcal{D}_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $0 < \alpha \leq 1$ définie par (5).

3.2 Schéma de différence finie implicite

Considérons l'équation de diffusion fractionnaire temporelle (3.1) avec la condition initiale (3.2) et les conditions aux limites (3.3) Commençons d'abord par la méthode numérique pour le problème direct donne par l'équation (3.1) avec la condition initiale et les conditions aux limites (3.2)-(3.3). Basé sur la définition de Caputo (5) pour la dérivée fractionnaire, voir [24,36]. Premièrement, nous discrétisons le domaine de l'espace par

$$x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad h = \frac{1}{M} \text{(pas de maillage de l'espace),} \\ \text{donc, } x_0 = 0 \text{ et } x_M = 1,$$

et le domaine temporel par

$$t_n = nl, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad l = \frac{T}{N} \text{(pas de maillage de temporel),} \\ \text{donc, } t_0 = 0 \text{ et } x_N = T,$$

Puis, on calcule la dérivée de Caputo définie par (5) en point de maillage (x_i, t_{n+1}) , nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x_i, t_{n+1}) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^{t_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial s}(x_i, s) \times \frac{ds}{(t_{n+1}-s)^\alpha}, \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=0}^n \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{\partial u}{\partial s}(x_i, s) \times \frac{ds}{(t_{n+1}-s)^\alpha}, \end{aligned}$$

d'autre parte

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{n+1}) = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{l} + O(l),$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{n+1} - s)^{-\alpha} ds &= \left[\frac{-(t_{n+1} - s)^{-\alpha+1}}{-\alpha + 1} \right]_{t_k}^{t_{k+1}}, \\
&= \frac{1}{1 - \alpha} [(t_{n+1} - t_k)^{1-\alpha} - (t_{n+1} - t_{k+1})^{1-\alpha}], \\
&= \frac{1}{1 - \alpha} [((n+1)l - kl)^{1-\alpha} - ((n+1)l - (k+1)l)^{1-\alpha}], \\
&= \frac{l^{1-\alpha}}{1 - \alpha} [(n+1-k)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}],
\end{aligned}$$

alors, on obtient

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x_i, t_{n+1}) = \frac{l^{1-\alpha}}{1 - \alpha \Gamma(1 - \alpha)} \sum_{k=0}^n \left[\frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{l} \right] \times [(n+1-k)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}] + O(l),$$

et d'après Propriétés 1.1, on a

$$(1 - \alpha)\Gamma(1 - \alpha) = \Gamma(2 - \alpha),$$

donc,

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x_i, t_{n+1}) = \frac{l^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{k=0}^n [u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)] \times [(n+1-k)^{1-\alpha} - (n-k)^{1-\alpha}] + O(l),$$

On pose $k' = n - k \Leftrightarrow k = n - k'$, nous avons

$$\begin{cases} k = 0 \Rightarrow k' = n, \\ k = n \Rightarrow k' = 0. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x_i, t_{n+1}) &= \frac{l^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{k=0}^n [u(x_i, t_{n+1-k'}) - u(x_i, t_{n-k'})] \\
&\times [(k'+1)^{1-\alpha} - (k')^{1-\alpha}] + O(l),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Enfin, nous discrétisons les dérivées d'ordre entier $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial u}{\partial x}$, en utilisant un schéma général de différence centré sur deux ordre et schéma de différence arrière sur un ordre, respectivement

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{n+1}) = \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1})}{h^2} + O(h^2), \tag{3.5}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{n+1}) = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_{i-1}, t_{n+1})}{h} + O(h). \tag{3.6}$$

soit $u_i^n \approx u(x_i, t_n)$, $a_i^n \approx a(x_i, t_n)$.

D'après (3.1), nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x, t) &= \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right] + g(x, t), \\ &= a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{\partial a}{\partial x}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + f(x, t),\end{aligned}\quad (3.7)$$

en remplaçant (3.4) et (3.7) dans (3.1) on obtient

$$\begin{aligned}\frac{l^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^n [u_i^{n+1-k} - u_i^{n-k}] [(k+1)^{1-\alpha} - (k)^{1-\alpha}] \\ &= a_i^{n+1} \times \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{a_i^{n+1} + a_{i-1}^{n+1}}{h} \\ &\times \frac{u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h} + f_i^{n+1}.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Donc, on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n [u_i^{n+1-k} - u_i^{n-k}] [(k+1)^{1-\alpha} - (k)^{1-\alpha}] \\ &= \frac{a_i^{n+1} l^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{h^2} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + \frac{(a_i^{n+1} + a_{i-1}^{n+1}) l^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{h^2} \\ &\times (u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + f_i^{n+1} l^\alpha \Gamma(2-\alpha),\end{aligned}\quad (3.9)$$

où $i = 1, 2, \dots, M-1$.

On pose

$$p_i^{n+1} = \frac{a_i^{n+1} l^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{h^2}, \quad q_i^{n+1} = \frac{(a_i^{n+1} + a_{i-1}^{n+1}) l^\alpha \Gamma(2-\alpha)}{h^2}\quad (3.10)$$

En remplaçant (3.10) dans (3.9), on obtient

$$\begin{aligned}u_i^{n+1} &- p_i^{n+1} (u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) - q_i^{n+1} (u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \\ &= u_i^n - \sum_{k=1}^n [u_i^{n+1-k} - u_i^{n-k}] [(k+1)^{1-\alpha} - (k)^{1-\alpha}] \\ &+ l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f_i^{n+1}.\end{aligned}$$

Alors, l'équation (3.9) peut être réorganisée comme suit

$$\begin{aligned}(q_i^{n+1} - p_i^{n+1}) u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2p_i^{n+1} - q_i^{n+1}) u_i^{n+1} - p_i^{n+1} u_{i+1}^{n+1} \\ &= u_i^n - \sum_{k=1}^n [u_i^{n+1-k} - u_i^{n-k}] [(k+1)^{1-\alpha} - (k)^{1-\alpha}] \\ &+ l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f_i^{n+1}.\end{aligned}$$

La condition initiale et les conditions aux limites sont discrétisées comme suit

$$u_i^0 = \varphi(x_i) = \varphi_i, \quad \text{la condition initiale}\quad (3.11)$$

$u_x(0, t_{n+1}) = \phi(t_{n+1}), \quad u_x(1, t_{n+1}) = \psi(t_{n+1}),$ les conditions de Neumann

$$\begin{aligned} u_x(0, t_{n+1}) = \phi(t_{n+1}) &\Leftrightarrow \frac{u(x_1, t_{n+1}) - u(x_0, t_{n+1})}{h} = \phi(t_{n+1}), \\ &\Leftrightarrow u(x_0, t_{n+1}) = u(x_1, t_{n+1}) - h\phi(t_{n+1}), \\ &\Leftrightarrow u_{n+1}^0 = u_{n+1}^1 - \phi(t_{n+1}). \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} u_x(1, t_{n+1}) = \psi(t_{n+1}) &\Leftrightarrow \frac{u(x_M, t_{n+1}) - u(x_{M-1}, t_{n+1})}{h} = \psi(t_{n+1}), \\ &\Leftrightarrow u(x_M, t_{n+1}) = u(x_{M-1}, t_{n+1}) + h\psi(t_{n+1}), \\ &\Leftrightarrow v_{n+1}^M = v_{n+1}^{M-1} + h\psi(t_{n+1}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Par conséquent, un schéma de différence finie implicite peut être donné comme suit pour $n = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} (q_i^1 - p_i^1)u_{i-1}^1 + (1 + 2p_i^1 - q_i^1)u_i^1 - p_i^1u_{i+1}^1 \\ = u_i^0 + l^\alpha \Gamma(2 - \alpha) f_i^1, \end{aligned} \quad (3.14)$$

pour $n > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} (q_i^{n+1} - p_i^{n+1})u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2p_i^{n+1} - q_i^{n+1})u_i^{n+1} - p_i^{n+1}u_{i+1}^{n+1} \\ = v_i^n - \sum_{k=1}^n u_i^{n+1-k} [(k+1)^{1-\alpha} - (k)^{1-\alpha}] + \sum_{k=1}^n u_i^{n-k} [(k+1)^{1-\alpha} - (k)^{1-\alpha}] \\ + l^\alpha \Gamma(2 - \alpha) f_i^{n+1}. \end{aligned}$$

On pose $k = k' - 1 \Leftrightarrow k' = k + 1$, nous avons

$$\begin{cases} k = 1 \Rightarrow k' = 2, \\ k = n \Rightarrow k' = n + 1. \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^n u_i^{n-k} [(k+1)^{1-\alpha} - (k)^{1-\alpha}] = \sum_{k'=2}^{n+1} u_i^{n+1-k'} [(k')^{1-\alpha} - (k'-1)^{1-\alpha}]$$

D'où

$$\begin{aligned} u_i^n + \sum_{k=1}^n u_i^{n-k} [(k+1)^{1-\alpha} - (k)^{1-\alpha}] &= \sum_{k=1}^{n+1} u_i^{n+1-k} [(k)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] \\ &= \sum_{k=1}^n u_i^{n+1-k} [(k)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] + u_i^0 [(n+1)^{1-\alpha} - (n)^{1-\alpha}], \end{aligned}$$

alors,

$$= \sum_{k=1}^n u_i^{n+1-k} [2k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] + u_i^0 [(n+1)^{1-\alpha} - (n)^{1-\alpha}] + l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f_i^{n+1}. \quad (3.15)$$

Donc, le système matricielle correspondant est

– pour $i = 1$, on a

$$(q_1^{n+1} - p_1^{n+1})u_0^{n+1} + (1 + 2p_1^{n+1} - q_1^{n+1})u_1^{n+1} - p_1^{n+1}u_2^{n+1} \\ = \sum_{k=1}^n u_1^{n+1-k} [2k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] + u_1^0 [(n+1)^{1-\alpha} - (n)^{1-\alpha}] + l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f_1^{n+1},$$

– pour $i = 2$, on a

$$(q_2^{n+1} - p_2^{n+1})u_1^{n+1} + (1 + 2p_2^{n+1} - q_2^{n+1})u_2^{n+1} - p_2^{n+1}u_3^{n+1} \\ = \sum_{k=1}^n u_2^{n+1-k} [2k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] + u_2^0 [(n+1)^{1-\alpha} - (n)^{1-\alpha}] + l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f_2^{n+1},$$

⋮

⋮

– pour $i = M - 1$, on a

$$(q_{M-1}^{n+1} - p_{M-1}^{n+1})u_{M-2}^{n+1} + (1 + 2p_{M-1}^{n+1} - q_{M-1}^{n+1})u_{M-1}^{n+1} - p_{M-1}^{n+1}u_M^{n+1} \\ = \sum_{k=1}^n u_{M-1}^{n+1-k} [2k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] + u_{M-1}^0 [(n+1)^{1-\alpha} - (n)^{1-\alpha}] + l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f_{M-1}^{n+1},$$

En remplaçant (3.11), (3.12) et (3.13) dans le système matricielle nous obtenons

– pour $i = 1$, on a

$$(1 + p_1^{n+1})u_1^{n+1} - p_1^{n+1}u_2^{n+1} = \sum_{k=1}^n u_1^{n+1-k} [2k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] \\ + \varphi_1 [(n+1)^{1-\alpha} - (n)^{1-\alpha}] + l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f_1^{n+1} + (q_1^{n+1} - p_1^{n+1})h\phi(t_{n+1}),$$

– pour $i = 2$, on a

$$(q_2^{n+1} - p_2^{n+1})u_1^{n+1} + (1 + 2p_2^{n+1} - q_2^{n+1})u_2^{n+1} - p_2^{n+1}u_3^{n+1} \\ = \sum_{k=1}^n u_2^{n+1-k} [2k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] + \varphi_2 [(n+1)^{1-\alpha} - (n)^{1-\alpha}] + l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f_2^{n+1},$$

⋮
⋮

– pour $i = M - 1$, on a

$$(q_{M-1}^{n+1} - p_{M-1}^{n+1})u_{M-2}^{n+1} + (1 + p_{M-1}^{n+1} - q_{M-1}^{n+1})u_{M-1}^{n+1} = \sum_{k=1}^n v_{M-1}^{n+1-k} [2k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] \\ + \varphi_{M-1} [(n+1)^{1-\alpha} - (n)^{1-\alpha}] + l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f_{M-1}^{n+1} + p_{M-1}^{n+1} h \psi(t_{n+1}),$$

soit

$$U^k = (u_1^K, \dots, u_{M-1}^K)^T, \\ \varphi = (\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{M-1}))^T, \\ f^n = (f_1^n, \dots, f_{M-1}^n)^T, \\ V^{n+1} = ((q_1^{n+1} - p_1^{n+1})h\phi(t_{n+1}), 0, \dots, 0, p_{M-1}^{n+1} h\psi(t_{n+1}))$$

et

$$c_k = 2k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.16)$$

$$b_n = (n+1)^{1-\alpha} - (n)^{1-\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (3.17)$$

et la matrice $A^{n+1} = (a_{ij}^{n+1})$, $i, j = 1, 2, \dots, M-1$ est définie par

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 + p_1^{n+1} & -p_1^{n+1} & & & \mathbf{0} \\ q_2^{n+1} - p_2^{n+1} & 1 + 2p_2^{n+1} - q_2^{n+1} & -p_2^{n+1} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & q_{M-1}^{n+1} - p_{M-1}^{n+1} & 1 + p_{M-1}^{n+1} - q_{M-1}^{n+1} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Donc, le schéma implicite (3.14) et (3.15) peut être réécrit sous la forme suivante

$$\begin{cases} A^1 U^1 = U^0 + l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f^1 + V^1, & U^0 = \varphi, \\ A^{n+1} U^{n+1} = c_1 U^n + c_2 U^{n-1} + \dots + c_n U^1 + b_n U^0 + l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f^{n+1} + V^{n+1}. \end{cases} \quad (3.19)$$

La matrice A^{n+1} est tridiagonale à diagonale strictement dominante par ligne pour tout $n = 1, 2, \dots, N-1$, donc le système (3.19) admet une solution unique.

3.2.1 Stabilité et convergence du schéma de différence

Tout d'abord, en notant les définitions d'un a_{ij}^{n+1} de l'élément de la matrice A^{n+1} , et p_i avec q_i donné par (3.10)

Lemme 3.1. *Supposons que $a(x, t)$ prenne seulement une valeur positive pour $(x, t) \in \Omega$. Puis la matrice A^{n+1} définie par (3.18) et à diagonale strictement dominante par ligne, on a*

$$a_{ii}^{n+1} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} |a_{ij}^{n+1}|, \quad (3.20)$$

Avec $\sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} a_{ij}^{n+1} < 0$ pour $i = 1, 2, \dots, M-1$

Démonstration. Pour $i = 1$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq 1}^{M-1} |a_{1j}^{n+1}| &= |a_{12}^{n+1}| \\ &= |-p_1^{n+1}| \\ &= p_1^{n+1}, \end{aligned}$$

et on a

$$a_{11}^{n+1} = 1 + p_1^{n+1}$$

donc

$$a_{11}^{n+1} = 1 + \sum_{j=1, j \neq 1}^{M-1} |a_{1j}^{n+1}|$$

– supposons que

$$a_{M-2M-2}^{n+1} = 1 + \sum_{j=1, j \neq M-2}^{M-1} |a_{M-2j}^{n+1}|$$

– montrons l'égalité pour $i = M-1$

$$a_{M-1M-1}^{n+1} = 1 + p_{M-1}^{n+1} - q_{M-1}^{n+1}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{j=1, j \neq M-1}^{M-1} |a_{M-1j}^{n+1}| &= |a_{M-1M-2}^{n+1}| \\ &= |q_{M-1}^{n+1} - p_{M-1}^{n+1}| \\ &= -(q_{M-1}^{n+1} - p_{M-1}^{n+1}) \\ &= p_{M-1}^{n+1} - q_{M-1}^{n+1}, \end{aligned}$$

alors

$$a_{M-1M-1}^{n+1} = 1 + \sum_{j=1, j \neq M-1}^{M-1} |a_{M-1j}^{n+1}|$$

D'où

$$a_{ii}^{n+1} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^{M-1} |a_{ij}^{n+1}|, \text{ pour } i = 1, 2, \dots, M-1$$

□

Ensuite, il y a une égalité fondamentale pour les coefficients c_k et b_n donnés par (3.16) et (3.17), respectivement

Lemme 3.2. Pour $n = 1, 2, \dots, N - 1$, on a

$$\sum_{k=1}^n c_k + b_n = 1, \quad (3.21)$$

où

$c_k (k = 1, 2, \dots, n)$ est définie par (3.16) et $b_n (n = 1, 2, \dots, N - 1)$ est donné par (3.17).

Démonstration. En utilisant la démonstration par récurrence

– si $n = 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^1 c_k + b_1 &= c_1 + b_1 \\ &= [2(1)^{1-\alpha} - (1+1)^{1-\alpha} - (1-1)^{1-\alpha}] + [(1+1)^{1-\alpha} - 1^{1-\alpha}] \\ &= [2 - 2^{1-\alpha} + 2^{1-\alpha} - 1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

– supposons que

$$\sum_{k=1}^{N-2} c_k + b_{N-2} = 1$$

– montrons que l'égalité est valable pour $n = N - 1$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N-1} c_k + b_{N-1} &= \sum_{k=1}^{N-2} c_k + c_{N-1} + b_{N-1} \\ &= 1 - b_{N-2} + c_{N-1} + b_{N-1} \\ &= 1 - [((N-2)+1)^{1-\alpha} - (N-2)^{1-\alpha}] \\ &\quad + [2(N-1)^{1-\alpha} - ((N-1)+1)^{1-\alpha} - ((N-1)-1)^{1-\alpha}] \\ &\quad + [((N-1)+1)^{1-\alpha} - (N-1)^{1-\alpha}] \\ &= 1 - (N-1)^{1-\alpha} + (N-2)^{1-\alpha} + 2(N-1)^{1-\alpha} \\ &\quad - N^{1-\alpha} - (N-2)^{1-\alpha} + N^{1-\alpha} - (N-1)^{1-\alpha} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Alors,

$$\sum_{k=1}^n c_k + b_n = 1, \text{ pour } k = 1, 2, \dots, n \text{ et } n = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Proposition 3.1. Dans les conditions du Lemme 3.1, on a

$$1 < \rho(A^{n+1}) < 2 \|a^{n+1}\|_{\infty} - 1, \quad (3.22)$$

et

$$\frac{1}{2 \|a^{n+1}\|_{\infty} - 1} < \rho((A^{n+1}))^{-1} < 1, \quad (3.23)$$

implique que

$$1 - a_{kk}^{n+1} < |\lambda^{n+1}| - a_{kk}^{n+1} < a_{kk}^{n+1} - 1$$

finalement on obtient

$$1 < |\lambda^{n+1}| < 2a_{kk}^{n+1} - 1$$

. Ce qui signifie que les assertions (3.22) et (3.23) sont toutes deux valides.

Théorème 3.1. *Le schéma de différence finie implicite défini par (3.19) est inconditionnellement stable.*

Démonstration. Soit $\bar{\varphi}$ une conditions initiale perturbée à laquelle on associe une nouvelle solution \bar{u}^n et à l'aide de système de différence linéaire (3.19) nous avons

$$\begin{cases} A^1 \bar{U}^1 = \bar{U}^0 + l^\alpha \Gamma(2 - \alpha) f^1 + V^1, & \bar{U}^0 = \bar{\varphi}, \\ A^{n+1} \bar{U}^{n+1} = c_1 \bar{U}^n + c_2 \bar{U}^{n-1} + \dots + c_n \bar{U}^1 + b_n \bar{U}^0 + l^\alpha \Gamma(2 - \alpha) f^{n+1} + V^{n+1}, \end{cases} \quad (3.24)$$

et soit $E^n = \bar{u}^n - u^n$ désigne l'erreur de solution pour l'itération d'étape n , et $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

En utilisant (3.19) et (3.24), on obtient

$$\begin{cases} A^1 E^1 = E^0, & E^0 = \bar{\varphi} - \varphi, \\ A^{n+1} E^{n+1} = c_1 E^n + c_2 E^{n-1} + \dots + c_n E^1 + b_n E^0, \end{cases} \quad (3.25)$$

pour montrer que $\|E^{n+1}\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty$, pour $n = 0, 1, \dots, N - 1$, on utilise la récurrence

– si $n = 0$, par (3.25) on a

$$A^1 E^1 = E^0$$

on multiplie par $(A^1)^{-1}$ on obtient

$$E^1 = (A^1)^{-1} E^0,$$

d'où

$$\|E^1\|_\infty = \|(A^1)^{-1} E^0\|_\infty,$$

d'après les propriétés de la norme matricielle on obtient

$$\|E^1\|_\infty = \|(A^1)^{-1}\|_\infty \|E^0\|_\infty,$$

d'autre part, de Théorème 1.5, nous avons

$$\rho(A) \leq \|A\|_\infty,$$

Alors

$$\|(A^1)^{-1}\|_\infty \leq \rho((A^1)^{-1}),$$

et en utilisant 3.1 on trouve

$$\|(A^1)^{-1}\|_\infty \leq \rho((A^1)^{-1}) < 1,$$

d'où

$$\|(A^1)^{-1}\|_\infty < 1,$$

par conséquent

$$\|E^1\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty,$$

– supposons qu'il existe

$$\|E^k\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty, \text{ pour } k = 2, \dots, n,$$

– d'après (3.25) on a

$$A^{n+1}E^{n+1} = c_1E^n + c_2E^{n-1} + \dots + c_nE^1 + b_nE^0,$$

alors

$$E^{n+1} = (A^{n+1})^{-1}(c_1E^n + c_2E^{n-1} + \dots + c_nE^1 + b_nE^0),$$

d'où

$$\|E^{n+1}\|_\infty = \|(A^{n+1})^{-1}(c_1E^n + c_2E^{n-1} + \dots + c_nE^1 + b_nE^0)\|_\infty,$$

d'après les propriétés de la norme matricielle on obtient

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq \left(\underbrace{\|(A^{n+1})^{-1}\|_\infty}_{<1} \right) \|(c_1E^n + c_2E^{n-1} + \dots + c_nE^1 + b_nE^0)\|_\infty,$$

en utilisant l'hypothèse précédente on trouve

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq \left(\sum_{k=1}^n c_k + b_n \right) \|E^0\|_\infty,$$

et d'après Lemme 3.2 on obtient

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty,$$

donc

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq \|E^0\|_\infty, \text{ pour } n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.26)$$

Ce qui signifie que le schéma de différence implicite (3.19) est stable.

Théorème 3.2. *La solution de différence du système linéaire (3.19) est convergente à la solution exacte du problème (3.1), (3.2), (3.3) lorsque $h, l \rightarrow 0$ pour le domaine de temps fini.*

Démonstration. Soit $e_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$ ($i = 1, 2, \dots, M-1, n = 1, 2, \dots, N-1$), où $u(x_i, t_n)$ est la solution exacte du problème (3.1) avec (3.2)-(3.3) à point de maillage (x_i, t_n) , et u_i^n est la solution de schéma de différence (3.19) aussi à (x_i, t_n) . Où $e^n = (e_1^n, e_2^n, \dots, e_{M-1}^n)^T$, on remarque que $e_i^0 = u(x_i, 0) - \varphi_i = 0$, donc, $e^0 = 0$. Nous avons $u_i^n = u(x_i, t^n) - e_i^n$ en le remplaçant dans (3.14) et (3.15) donc,

– pour $n = 0$ on a

$$\begin{aligned} & (q_i^1 - p_i^1) [u(x_{i-1}, t_1) - e_{i-1}^n] + (1 + 2p_i^1 - q_i^1) [u(x_i, t_1) - e_i^n] - p_i^1 [u(x_{i+1}, t_1) - e_{i+1}^n] \\ & = u(x_i, 0) + l^\alpha \Gamma(2 - \alpha) f(x_i, t_1), \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} & (q_i^1 - p_i^1) e_{i-1}^n + (1 + 2p_i^1 - q_i^1) e_i^n - p_i^1 e_{i+1}^n \\ & = (q_i^1 - p_i^1) u(x_{i-1}, t_1) + (1 + 2p_i^1 - q_i^1) u(x_i, t_1) - p_i^1 u(x_{i+1}, t_1) \\ & \quad - u(x_i, 0) - l^\alpha \Gamma(2 - \alpha) f(x_i, t_1), \end{aligned}$$

– pour $n > 0$, on a

$$\begin{aligned} & (q_i^{n+1} - p_i^{n+1}) e_{i-1}^{n+1} + (1 + 2p_i^{n+1} - q_i^{n+1}) e_i^{n+1} - p_i^{n+1} e_{i+1}^{n+1} \\ & = \sum_{k=1}^n e_i^{n+1-k} [2k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] + (q_i^{n+1} - p_i^{n+1}) u(x_{i-1}, t_{n+1}) \\ & \quad + (1 + 2p_i^{n+1} - q_i^{n+1}) u(x_i, t_{n+1}) - p_i^{n+1} u(x_{i+1}, t_{n+1}) - \sum_{k=1}^n u(x_i, t_{n+1-k}) \\ & \quad [2k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] - u(x_i, 0) [(n+1)^{1-\alpha} - (n)^{1-\alpha}] - l^\alpha \Gamma(2 - \alpha) f(x_i, t_{n+1}). \end{aligned}$$

Soit $R^n = (R_1^n, R_2^n, \dots, R_{M-1}^n)^T$ une erreur de troncature dans l'approximation des solutions pour $n = 1, 2, \dots, N$, on a $e_M^{n+1} = e_{M-1}^{n+1}$, et en utilisant le système de différence linéaire (3.19), nous avons

$$\begin{cases} A^1 E^1 = R^1, \\ A^{n+1} E^{n+1} = c_1 E^n + c_2 E^{n-1} + \dots + c_n E^1 + R^{n+1}, \end{cases} \quad (3.27)$$

Où, pour $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

$$\begin{aligned} R_i^{n+1} & = (q_i^{n+1} - p_i^{n+1}) u(x_{i-1}, t_{n+1}) + (1 + 2p_i^{n+1} - q_i^{n+1}) u(x_i, t_{n+1}) - p_i^{n+1} u(x_{i+1}, t_{n+1}) \\ & \quad - \sum_{k=1}^n u(x_i, t_{n+1-k}) [2k^{1-\alpha} - (k+1)^{1-\alpha} - (k-1)^{1-\alpha}] \\ & \quad - u(x_i, 0) [(n+1)^{1-\alpha} - (n)^{1-\alpha}] - l^\alpha \Gamma(2 - \alpha) f(x_i, t_{n+1}). \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} R_i^{n+1} & = (q_i^{n+1} - p_i^{n+1}) u(x_{i-1}, t_{n+1}) + (1 + 2p_i^{n+1} - q_i^{n+1}) u(x_i, t_{n+1}) - p_i^{n+1} u(x_{i+1}, t_{n+1}) \\ & \quad - v(x_i, t_n) + \sum_{k=1}^n [u(x_i, t_{n+1-k}) - u(x_i, t_{n-k})] \\ & \quad [(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}] - l^\alpha \Gamma(2 - \alpha) f(x_i, t_{n+1}). \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
R_i^{n+1} &= \sum_{k=0}^n [u(x_i, t_{n+1-k}) - u(x_i, t_{n-k})] [(k+1)^{1-\alpha} - (k)^{1-\alpha}] \\
&- a(x_i, t_{n+1}) l^\alpha \Gamma(2-\alpha) \times \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1})}{h^2} - \frac{a(x_i, t_{n+1}) + a(x_{i-1}, t_{n+1})}{h} \\
&\times \frac{u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1})}{h} - l^\alpha \Gamma(2-\alpha) f(x_i, t_{n+1}).
\end{aligned}$$

Par expressions approximatives (3.4), (3.5) et (3.6) nous obtenons

$$R_i^{n+1} = l^\alpha \Gamma(2-\alpha) \left[\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x_i, t_{n+1}) - \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x_i, t_{n+1}) \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{n+1}) \right) + f(x_i, t_{n+1}) \right) + O(l+h) \right],$$

d'après l'équation (3.1) on trouve

$$R_i^{n+1} = l^\alpha \Gamma(2-\alpha) O(l+h),$$

ce qui implique que il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\|R_i^{n+1}\|_\infty \leq M l^\alpha (l+h), \text{ pour } n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.28)$$

par récurrence, on peut démontrer l'inégalité suivante

$$\|e^{n+1}\|_\infty < \frac{1}{b_n} M l^\alpha (l+h),$$

où $M > 0$ représente une constante positive arbitraire et b_n est donné par (3.17)

– pour $n = 0$, d'après (3.27) on a

$$e^1 = (A^1)^{-1} R^1$$

alors

$$\begin{aligned}
\|e^1\|_\infty &= \|(A^1)^{-1} R^1\|_\infty \\
&\leq \|(A^1)^{-1}\|_\infty \|R^1\|_\infty \\
&< \|R^1\|_\infty,
\end{aligned}$$

et d'après (3.28)

$$\|e^1\|_\infty < M l^\alpha (l+h),$$

– on pose que

$$\|e^k\|_\infty < \frac{1}{b_{k-1}} l^\alpha (l+h), \text{ pour } K = 1, \dots, n. \quad (3.29)$$

et d'après (3.27)

$$e^{n+1} = (A^{n+1})^{-1} (c_1 e^n + c_2 e^{n-1} + \dots + c_n e^1 + R^{n+1}),$$

alors

$$\begin{aligned} \|e^{n+1}\|_\infty &= \|(A^{n+1})^{-1}(c_1e^n + c_2e^{n-1} + \dots + c_n e^1 + R^{n+1})\|_\infty \\ &\leq \|(A^{n+1})^{-1}\|_\infty \|(c_1e^n + c_2e^{n-1} + \dots + c_n e^1 + R^{n+1})\|_\infty \\ &< \frac{1}{b_n} (b_n c_1 \|e^n\|_\infty + b_n c_2 \|e^{n-1}\|_\infty + \dots + b_n c_n \|e^1\|_\infty + b_n \|R^{n+1}\|_\infty) \end{aligned}$$

de (3.17) nous avons $b_n < 1$, et d'après (3.28) et (3.29) on obtient

$$\|e^{n+1}\|_\infty < \frac{1}{b_n} \left(\sum_{k=1}^n c_k + b_n \right) M l^\alpha (h + l),$$

et en utilisant Lemme3.2 on trouve

$$\|e^{n+1}\|_\infty < \frac{1}{b_n} M l^\alpha (h + l). \quad (3.30)$$

D'auter part,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n n^\alpha} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{1-\alpha} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1 \right] n^\alpha} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} - 1 \right]} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n \left(1 + \frac{1-\alpha}{n} - 1\right)} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

On a $t_n = nl \Rightarrow l^\alpha = \frac{t_n^\alpha}{n^\alpha}$ donc, par (3.30) on obtient

$$\|e^{n+1}\|_\infty < \frac{M}{b_n n^\alpha} t^\alpha (h + l),$$

et nous avons $\frac{t^\alpha}{n^\alpha} \leq \frac{T^\alpha}{n^\alpha}$

Alors, pour n suffisamment grand on peut déduire que

$$\|e^{n+1}\|_\infty < \frac{M}{1-\alpha} T^\alpha (h + l).$$

ce qui implique que l'affirmation du théorème est valide.

3.3 Exemples numériques

Exemple 3.1. Pour $x, t \in [0, 1]$, on considère le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[xt \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + \frac{2(x-x^2)t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - (1-4x)t^3, & 0 < \alpha < 1, \\ u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = t^2, \\ \int_0^1 u(x, t) dx = t^2/6. \end{cases} \quad (3.31)$$

Le problème (3.31) est équivalent le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[xt \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + \frac{2(x-x^2)t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - (1-4x)t^3, & 0 < \alpha < 1, \\ u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = t^2, \\ \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = -t^2. \end{cases} \quad (3.32)$$

La solution exacte du problème (3.32) est $u(x, t) = t^2(x - x^2)$.

Pour $\alpha = 0.1$, $t = 0.25, 0.50, 0.75, 1$ et avec un programme sur Matlab, la solution exacte et la solution approché de problème (3.32) sont données par Figure 3.1.

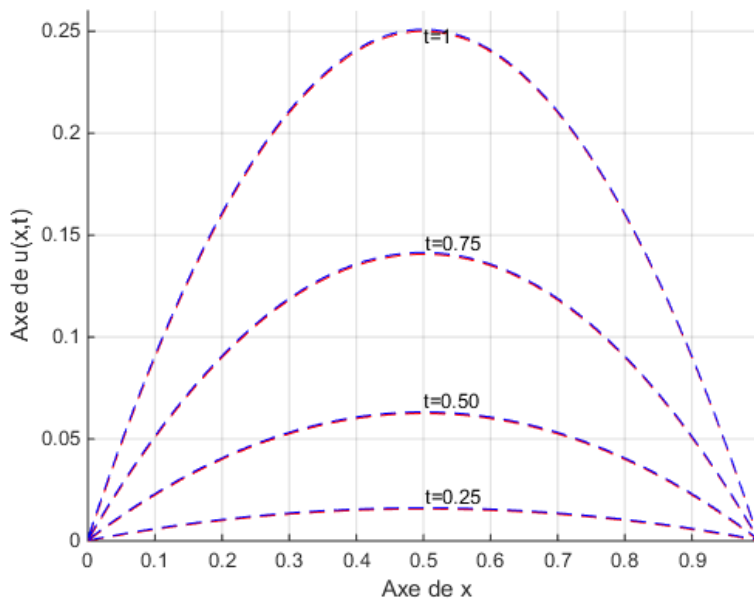


FIGURE 3.1 – Solutions exactes et approchées de l'exemple 3.1 pour $\alpha = 0.1$.

La variation de l'erreur absolue pour $t = 1$ est donnée par Figure 3.2.

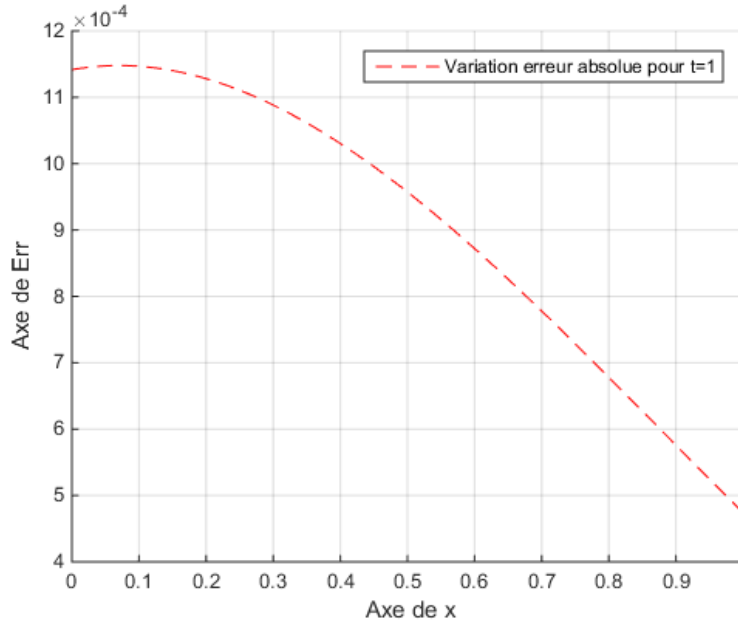


FIGURE 3.2 – Variation d'erreur absolue de l'exemple 3.1.

Exemple 3.2. Soit le problème d'évolution suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c \mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{x+t} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + \frac{2t^\alpha \Gamma(2\alpha) x \sin(\pi x)}{\Gamma(\alpha)} \\ -t^{2\alpha} e^{x+t} (\sin(\pi x) + \pi(x+2) \cos(\pi x) - \pi^2 x \sin(\pi x)), \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \\ \int_0^1 u(x, t) dx = t^{2\alpha} / \pi, \end{array} \right. \quad (3.33)$$

où $x, t \in [0, 1]$. Le problème (3.33) est équivalent le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^c \mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[e^{x+t} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + \frac{2t^\alpha \Gamma(2\alpha) x \sin(\pi x)}{\Gamma(\alpha)} \\ -t^{2\alpha} e^{x+t} (\sin(\pi x) + \pi(x+2) \cos(\pi x) - \pi^2 x \sin(\pi x)), \quad 0 < \alpha < 1, \\ u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = -\pi t^{2\alpha}. \end{array} \right. \quad (3.34)$$

La solution exacte du problème (3.34) est $u(x, t) = t^{2\alpha} x \sin(\pi x)$.

Pour $\alpha = 0.3, 0.50, 0.70, 0.90$, $t = 0.25, 0.50, 0.75, 1$ et avec un programme sur Matlab, la solution exacte et la solution approché de problème (3.34) sont données par Figure 3.3.

La variation de l'erreur absolue pour $t = 1$ et $\alpha = 0.50$ est donnée par Figure 3.4.

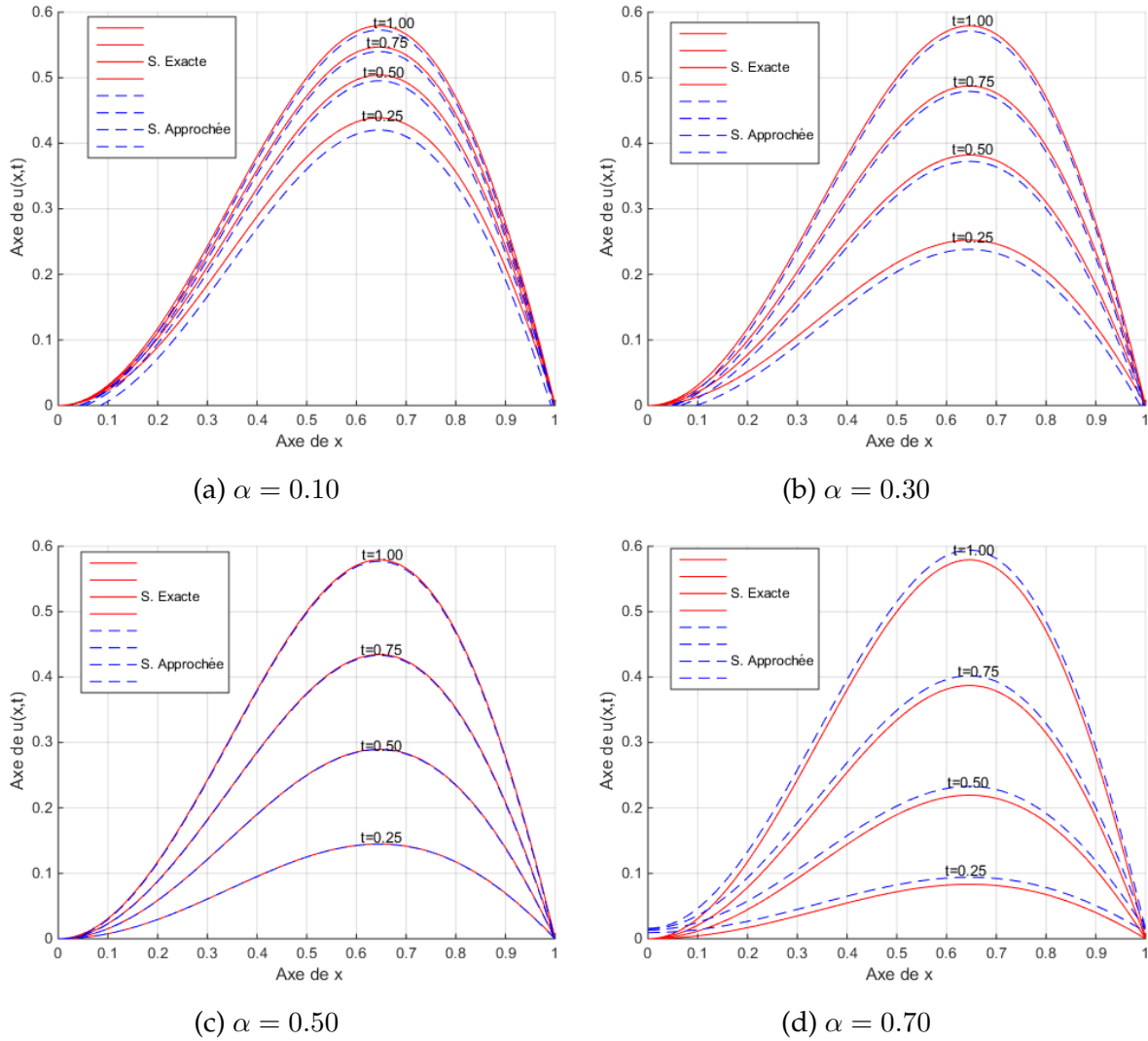


FIGURE 3.3 – Solutions exactes et approchées pour l'exemple 3.2

Exemple 3.3. Soit le problème d'évolution suivant :

$$\begin{cases} {}^c \mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \alpha \Gamma(\alpha) e^{x+\alpha} - (2 - t^\alpha) e^{x+\alpha} \\ u(x, 0) = 2e^{x+\alpha}, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = (2 - t^\alpha) e^\alpha, \\ \int_0^1 u(x, t) dx = (2 - t^\alpha) (e^{1+\alpha} - e^\alpha), \end{cases} \quad (3.35)$$

où $x, t \in [0, 1]$. Le problème (3.35) est équivalent le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^c \mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \alpha \Gamma(\alpha) e^{x+\alpha} - (2 - t^\alpha) e^{x+\alpha}, \\ u(x, 0) = 2e^{x+\alpha}, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = (2 - t^\alpha) e^\alpha, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = (2 - t^\alpha) e^{1+\alpha}, \end{cases} \quad (3.36)$$

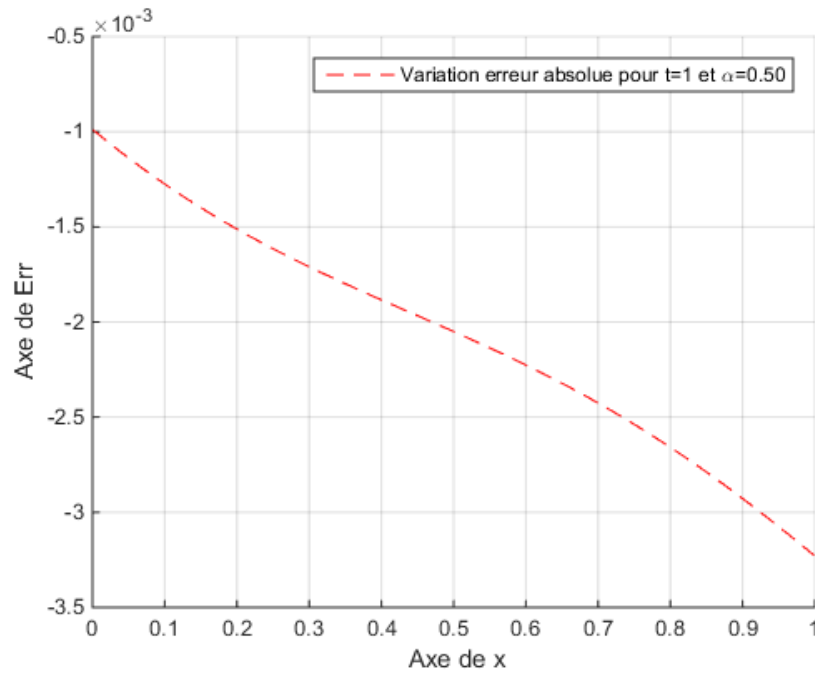


FIGURE 3.4 – Variation d'erreur absolue de l'exemple 3.2.

La solution exacte du problème (3.36) est $u(x, t) = (2 - t^\alpha) e^{x+\alpha}$.

Pour $\alpha = 0.1, 0.40, 0.50, 0.70$, $t = 0.001, 0.002, 0.003, 0.004$ et avec un programme sur Matlab, la solution exacte et la solution approché de problème (3.36) sont données par Figure 3.5.

La variation de l'erreur absolue pour $t = 0.004$ et $\alpha = 0.90$ est donnée par Figure 3.6.

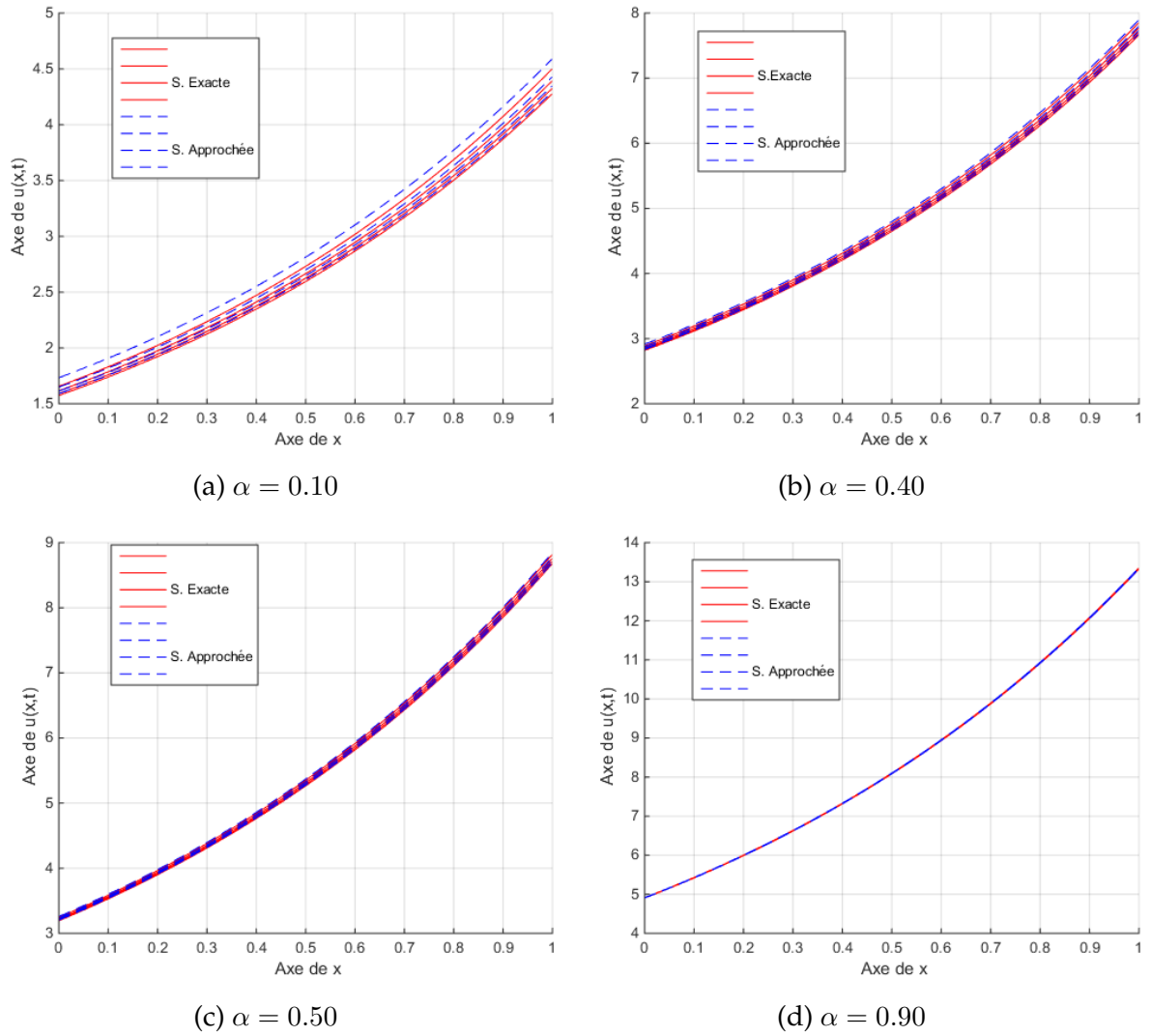


FIGURE 3.5 – Solutions exactes et approchées pour l'exemple 3.3

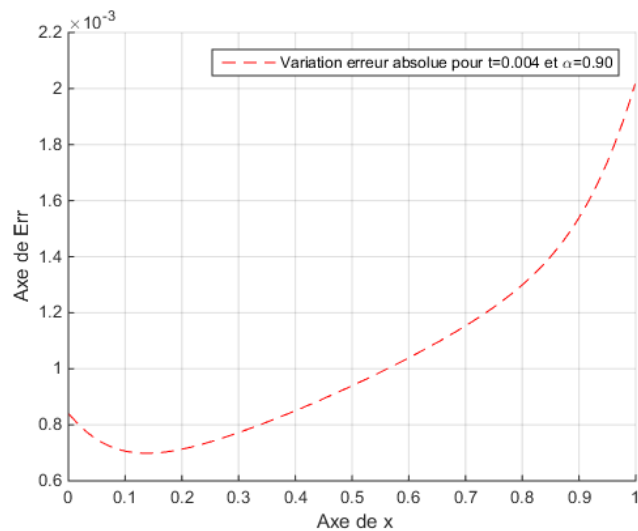


FIGURE 3.6 – Variation d'erreur absolue de l'exemple 3.3.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons traité un problème d'évolution pour une équation parabolique fractionnaire avec une condition de Neumann et une condition de type intégrale. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Aspect théorique** : nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution par la méthode des inégalités d'énergie. Cette dernière appelée la méthode d'analyse fonctionnelle ou la méthode des estimations a priori.
- ✓ **Aspect numérique** : nous avons introduit un schéma de différence finie implicite pour le problème équivalent et démontré la stabilité et la convergence de ce schéma en utilisant la démonstration par récurrence et l'analyse matricielle. Enfin, nous avons présenté des exemples numériques pour valider l'efficacité de ce schéma.

Comme perspectives, nous avons prévu le sujet de recherche suivant :

Problème d'évolution pour une équation d'onde fractionnaire avec une condition de type intégrale :

$$\begin{cases} {}^c\mathcal{D}_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[a(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] + f(x, t), \\ u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \\ \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = \mu(x), \\ \int_0^1 u(x, t) dx = E(t). \end{cases}$$

Où $x, t \in [0, 1]$, $a(x, t)$, $f(x, t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\mu(x)$ et $E(t)$ sont des fonctions données et $1 < \alpha \leq 2$.

Bibliographie

- [1] R. P. Agarwal, M. Benchohra, and S. Hamani. A survey on existence results for boundary value problems of nonlinear fractional differential equations and inclusions. *Acta Appl. Math.*, Doi 10.1007/s10440-008-9356-6.
- [2] B. Ahmad and J. Nieto. Existence results for nonlinear boundary value problems of fractional integro differential equations with integral boundary conditions. *Boundary Value Problems*, 2009 :Article ID 708576, 11 pages, 2009.
- [3] G. Allaire. *Analyse Numérique et optimisation*. Prs, Janvier 2005.
- [4] A. Anguraj and P. Karthikeyan. Existence of solutions for fractional semilinear evolution boundary value problem. *Commun. Appl. Anal.*, 14 :505–514, 2010.
- [5] Z. Bai and H. Lu. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 311(2) :495–505, 2005.
- [6] D. Baleanu, Z.B. Güvenç, and J.A.T. Machado. *New Trends in Nanotechnology and Fractional Calculus Applications*. Springer, Dordrecht, 2010.
- [7] M. Belmekki and M. Benchohra. Existence results for fractional order semilinear functional differential equations. *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 146 :9–20, 2008.
- [8] M. Benchohra, J. R. Graef, and S. Hamani. Existence results for boundary value problems with nonlinear fractional differential equations. *Appl. Anal.*, 87 :851–863, 2008.
- [9] C. Bolley. *Analyse numérique*. École Centrale de Nantes, 2012.
- [10] A. Bouziani. On the solvability of a class of singular parabolic equations with nonlocal boundary conditions in nonclassical function spaces. *IJMMS*, 30(7) :435–447, 2002.
- [11] A. Bouziani. On the solvability of parabolic and hyperbolic problems with a boundary integral condition. *IJMMS journal*, 31(4) :201–213, 2002.
- [12] A. Bouziani. On the weak solution of a three-point boundary value problem for a class of parabolic equations with energy specification. *Abstract and Applied Analysis*, 2003(10) :573–589, 2003.
- [13] A. Bouziani. On a class of nonlinear reaction-diffusion systems with nonlocal boundary conditions. *Abstract and Applied Analysis*, 2004(9) :793–813, 2004.
- [14] A. Bouziani. Solution of a transmission problem for semilinear parabolic-hyperbolic equations by the time-discretization method. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2006 :Article ID 61439, 23 pages, 2006.
- [15] P. G. Ciarlet. *Introduction à L'analyse Numérique matricielle et à L'optimisation*. Université Pierre et Marie Curie, 1988.
- [16] V. Daftardar-Gejji and H. Jafari. Boundary value problems for fractional diffusion-wave equation. *Aust. J. Math. Anal. Appl.*, 3(1) :16, 2006.

- [17] N. J. Ford, J. Xiao, and Y. Yan. A finite element method for time fractional partial differential equations. *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 14(3) :454–474, 2011.
- [18] K.M. Furati and N. Tatar. An existence result for a nonlocal fractional differential problem. *J. Fract. Calc.*, 26 :43–51, 2004.
- [19] K.M. Furati and N. Tatar. Behavior of solutions for a weighted cauchy-type fractional differential problem. *J. Fract. Calc. Appl.*, 28 :23–42, 2005.
- [20] S. Hadid and A. Merad. Homotopy analysis method for solving fractional differential equations. *Aust. J. Basic Appl. Sci.*, 9 :233–237, 2015.
- [21] R. W. Ibrahim and S. Momani. On existence and uniqueness of solutions of a class of fractional differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 334(1) :1–10, 2007.
- [22] E.R. Kaufmann and E. Mboumi. Positive solutions of a boundary value problem for a nonlinear fractional differential equation. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equations*, 2008(3) :1–11, 2008.
- [23] S. Kazem, S. Abbasbandy, and S. Kumar. Fractional-order legendre functions for solving fractional-order differential equations. *Appl. Math. Modelling*, 37(7) :5498–5510, 2013.
- [24] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujillo. *THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. ELSEVIER, 2006.
- [25] A.A. Kilbas and S.A. Marzan. Nonlinear differential equations with the caputo fractional derivative in the space of continuously differentiable functions. *Differ. Equations*, 41 :84–89, 2005.
- [26] A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [27] R.J. LeVeque. *Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations*. University of Washington, Seattle, Washington, 2007.
- [28] X. J. Li and C. J. Xu. Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation. *Communications in Computational Physics*, 8(5) :1016–1051, 2010.
- [29] Xianjuan Li and Chuanju Xu. A space-time spectral method for the time fractional diffusion equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 47(3) :2108–2131, 2009.
- [30] A. Merad and S. Hadid. Analytical solution of non-integer extra-ordinary differential equation via adomian decomposition method. *Malaya J. Mat.*, 4 :126–135, 2016.
- [31] N. Merazga and A Bouziani. Rothe method for a mixed problem with an integral condition for the two-dimensional diffusion equation. *Abstract and Applied Analysis*, 2003(16) :899–922, 2003.
- [32] N. Merazga and A Bouziani. Rothe time-discretization method for a nonlocal problem arising in thermoelasticity. *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, 2005(1) :13–28, 2005.
- [33] S.M. Momani, S.B. Hadid, and Z.M. Alawenh. Some analytical properties of solutions of differential equations of noninteger order. *Int. J. Math. Math. Sci.*, 13 :697–701, 2004.
- [34] T. Oussaeif and A. Bouziani. Existence and uniqueness of solutions to parabolic fractional differential equations with integral conditions. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014(179) :1–10, 2014.

- [35] Taki Eddine Oussaeif and Toufik Zaimi. *L'Etude de la solution des problèmes pour une classe d'équations aux dérivées partielles avec une condition non locale de type intégrale*. PhD thesis, Université d'Oum El Bouaghi, 2015.
- [36] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.
- [37] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.
- [38] O. Zigen. Existence and uniqueness of the solutions for a class of nonlinear fractional order partial differential equations with delay. *Computers and Mathematics with Applications*, 61(4) :860–870, 2011.

ملخص: في هذه المذكرة ، قمنا بمعالجة مسألة التطور لمعادلة القطع المكافئ الكسري مع شرط حدي لنيومان وشرط تكاملي. لقد أثبتنا وجود ووحدانية الحل لهذه المسألة من خلال طريقة المتراجحات في الطاقة. بعد ذلك ، قدمنا مخطط للفروق المنتهية الضمنية للمسألة المكافئة ثم بينا استقرار وتقارب هذا المخطط باستخدام البرهان بالتراجع والتحليل المصفوفي. أخيرًا، قدمنا أمثلة عددية للتحقق من كفاءة هذا المخطط.

كلمات مفتاحية: الحساب الكسري ، معادلة القطع المكافئ الكسري ، طريقة المتراجحات في الطاقة ، التحليل المصفوفي ، طريقة الفروق المنتهية.

Dans ce mémoire, nous avons traité un problème d'évolution pour une équation parabolique fractionnaire avec une condition de Neumann et une condition de type intégrale. Nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution de ce problème par la méthode des inégalités d'énergie. Ensuite, nous avons introduit un schéma de différence finie implicite pour le problème équivalent et démontré la stabilité et la convergence de ce schéma en utilisant la démonstration par récurrence et l'analyse matricielle. Enfin, nous avons présenté des exemples numériques pour valider l'efficacité de ce schéma.

Mots-Clés : Calcul fractionnaire, Équation parabolique fractionnaire, Méthode des inégalités d'énergie, Analyse matricielle, Méthode de différences finies.

In this memoir, we have dealt with an evolution problem for a fractional parabolic equation with Neumann condition and an integral condition. We have demonstrated the existence and uniqueness of the solution of this problem by the method of energy inequalities. Next, we introduced an implicit finite difference scheme for the equivalent problem and demonstrated the stability and convergence of this scheme using induction proof and matrix analysis. Finally, we presented numerical examples to validate the efficiency of this scheme.

Keywords : Fractional calculation, Fractional parabolic equation, Energy inequalities method, Matrix analysis, Finite difference method.