

Université Mohamed Boudiaf - M'sila

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES



Numéro de série :.....

Numéro d'inscription :.....

Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTORAT EN SCIENCES

Spécialité: Mathématiques
Option: Mathématiques appliquées

THEME

CALCUL NUMÉRIQUE D'UN JET BIDIMENSIONNEL D'UN FLUIDE DEVANT UN MUR DE FORME QUELCONQUE

Présenté Par

ABDELKADER AMARA


Soutenu le : 03/07/ 2018

Devant le jury composé de:

<u>Nom & Prénom</u>	<u>Grade</u>	<u>Etablissement</u>	<u>Qualité</u>
Brahim Bouderah	Professeur	Uni. de M'sila	Président
Abdelkader Gasmi	Professeur	Uni. de M'sila	Encadreur
Abdelouahab Mansour	Professeur	Uni. de El-Oued	Examineur
Brahim Nouiri	MCA	Uni. de M'sila	Examineur
Mabrouk Meflah	MCA	Uni. d'Ouargla	Examineur
Abdelhafid Younsi	MCA	Uni. de Djelfa	Examineur

Année Universitaire :2017/2018

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



Remerciements

En premier lieu, je tiens à témoigner ma reconnaissance à dieu tout puissant, de m'avoir donnée la possibilité de terminer ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur **Abdelkader Gasmi** d'avoir proposer et encadrer ce travail de recherche. Sa disponibilité, sa confiance, ses conseils et ses encouragements m'ont été d'un précieux secours dans la réalisation de ce travail.

Je suis heureux de lui exprimer ma profonde gratitude, mes vifs et sincères remerciements. Monsieur **Brahim Bouderah** me fait un grand honneur en acceptant de présider ce jury. Mes remerciements vont également à Messieurs : **Abdelouahab Mansour**, **Nouiri Brahim**, **Mabrouk Meflah**, et à Monsieur **Abdelhafid Younsi**, qui ont accepté de participer comme examinateurs dans le jury de ma thèse.

Je tiens aussi à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail modeste à mes chers parents qui m'ont donné les efforts et les encouragements pour continuer mon étude et mes recherches, à ma famille mes soeurs et mes frères, aussi je dédie mon travail à ma chère femme et mes chers enfants.

À mes oncles et mes tantes, et sans oublier mes amis et mes collègues.

Table des matières

Notations	10
Introduction	12
1 Écoulement bidimensionnel à surface libre et fonctions analytiques	15
1.1 Quelques définitions et résultats sur les écoulements potentiels	15
1.1.1 Tension de surface	15
1.1.2 Le champ de vitesse	19
1.1.3 Définitions	19
1.1.4 Fonction potentielle complexe	21
1.2 Fonctions holomorphes	23
1.2.1 Formule intégrale de Cauchy	24
1.2.2 Transformation de Schwarz-Christoffel	24
2 Résolution analytique d'un problème de type jet devant un obstacle de forme U	29
2.1 Position du problème	29
2.2 Résolution du problème	32
3 Résolution numérique d'un problème d'écoulement dans un canal de forme U par la méthode de troncation de la série	43
3.1 Position du problème	43
3.2 Résolution numérique	48
3.2.1 Formulation de la série	54
3.2.2 Forme de la surface libre	56
3.3 Résultats et discussion	57
3.3.1 Solution sans effet de tension de surface	57
3.3.2 Solution du problème avec tension de surface	59

4	Application de la méthode d'équation intégral-différentielle à un jet dans un tube semi infini	65
4.1	Introduction	65
4.2	Position du problème	65
4.3	Formulation du problème	66
4.4	Procédure numérique	72
4.5	Forme de la surface libre	73
4.6	Résultats et discussion	74
4.6.1	Solution sans effet de tension de surface	74
4.6.2	Solution avec effet de tension $T \neq 0$	74
	Conclusion générale	78
	Annexe A	79
	Annexe B	82
	Bibliographie	87

Table des figures

1.1	Présentation de la surface libre	17
1.2	Surface de tension	18
1.3	Position du champ de vitesse	20
1.4	Transformation conforme	25
1.5	Plan de variable Ω	27
1.6	Plan de variable λ	28
2.1	Un jet entrant dans une boîte. La profondeur du fluide est $2H$	30
2.2	Schéma d'un écoulement bidimensionnel dans un canal de la forme U	31
2.3	Plan Ω	34
2.4	Plan f	35
2.5	Plan λ	36
2.6	Forme de la surface libre ABC	41
3.1	Schéma d'un écoulement bidimensionnel dans un canal de forme U	45
3.2	Le plan potentiel complexe $f = \phi + i\psi$	50
3.3	Plan de la variable t	51
3.4	Comparaison la solution numérique avec la solution théorique	58
3.5	Formes de surface libres pour différentes valeurs du nombre de Weber We avec $t_D = 0.14$	60
3.6	Formes de surface libre pour le nombre de Weber $We = 10^8$ et différentes valeurs de t_D	61
3.7	La position du point tournant x_0 pour $t_D = 0.14$ et différentes valeurs de nombre de Weber	62
3.8	La position du point tournant x_0 pour le nombre de Weber $We = 10^8$ et différentes valeurs de t_D	63
4.1	L'écoulement dans le plan complexe ζ	67
4.2	Le chemin de l'intégration autour du contour γ	68

4.3	Comparaison entre la solution exacte et la solution approche pour We tends vers l'infini, $N = 180$, $\Delta = 0.3$ et erreur = 10^{-16}	75
4.4	Comparaison entre les deux méthode pour la même de nombre de Weber We tends vers l'infini	76
4.5	Formes de surface libres pour différentes valeurs du nombre de Weber We et différentes H	77

Liste des tableaux

2.1	Transformation le domaine d'écoulement plan- z à le domaine plan- Ω	33
2.2	Transformation le domaine d'écoulement plan- z à le domaine plan- f	33
2.3	Transformation le domaine plan- f à le domaine plan- λ	37
2.4	Transformation le domaine plan- Ω à le domaine plan- λ	38
3.1	La correspondance entre des principaux points de l'écoulement dans les deux plans.	48
3.2	quelques valeurs des coefficients a_k pour différentes valeurs de t_D	57
3.3	Quelques valeurs de coefficients a_k pour différentes valeurs de t_D et We	59
4.1	La position des principaux points du problème dans les deux plans	66

Notations

- Les variables avec tilde (\sim) sont les variables de dimensions physiques et les variables sans tilde (\sim) sont des variables sans dimensions.

Soit \vec{V} champ vectoriel tel que $\vec{V} = (u(x, y), v(x, y))$

- $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$
- $\vec{rot}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$
- $div(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$
- $\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2}$
- T Tension de surface
- We Nombre de Weber
- K Courbure de la surface libre
- R Rayon de courbure
- ρ Densité du fluide
- p Pression du fluide
- p_0 la pression atmosphérique
- q Module de la vitesse
- f Fonction potentielle complexe
- φ Fonction potentielle de vitesse
- ψ Fonction de courant

- H Hauteur du fluide
- U Vitesse à l'infini
- ξ Vitesse complexe conjugué
- θ L'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale

Introduction

Les écoulements bidimensionnels de type jet peuvent être observés dans des nombreux phénomènes naturels ou physiques qui interviennent dans le domaine industriel. Ainsi de son importance majeur, ce type d'écoulement fait l'objet de plusieurs travaux de recherche scientifique, comme exemple celui de l'aérodynamique, l'injection des carburant et l'ingénierie pétrolière ou hydrauliques etc....

Il est bien connu que son intérêt dans le domaine des milieux continus est très indispensable. Ces écoulements sont basés sur les aspects principaux de la mécanique des fluides comme la loi de quantité de mouvement des milieux continus et les tensions superficielles qui sont des forces existent au niveau de toute interface entre deux milieux différents (le fluide et l'air), ces forces provient de la variation de pression entre deux milieux et elles sont gouvernées par la loi de Laplace, cette loi liant la courbure locale de l'interface séparant ces deux milieux à la différence de pression (aussi appelée pression de Laplace) entre ces deux milieux.

Notre travail de recherche entre dans le cadre général d'une étude analytique et numérique d'un jet bidimensionnel devant un mur de forme quelconque. Il poursuit des études précédentes déjà effectuées au sein de notre équipe de recherche MANUCAF du laboratoire LMPA par Bouderah (2007) [6] sur l'écoulement devant une plaque vertical par Gasmi (2003) [18] sur un jet issu d'un orifice. Dans cette étude le fluide est considéré comme incompressible, non visqueux et les effets de la gravité sont négligés. Avec ces hypothèses, nous obtenons des simplifications sur les équations qui gouvernent ce problème. Ainsi nous pouvons appliqués la théorie des fonctions de la variable complexe telles que les propriétés des fonctions analytiques et les transformations conformes.

De nombreux travaux de recherche antérieure ont été réalisés par plusieurs auteurs pour ce genre des problèmes, en particulier Lamb [21] a considéré le problème à surface libre au-dessus d'un obstacle semi elliptique submergé en présence de la gravité. Il a trouvé la solution pour différentes valeurs de nombre de Froude. Dias et Vanden Broeck [11] ont étudiés le problème d'un écoulement à surface libre au-dessus d'une plaque incliné et submergé dans un canal de largeur fini. Forbes et Schwartz [12] ont traité le problème d'un écoulement dans un canal avec un obstacle semi-circulaire. Ils ont formulé le problème sous forme d'une équation intégro-différentielle qu'ils l'ont résolu numériquement.

Le problème considéré dans ce travail est caractérisé par la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la frontière libre d'une part et d'autre part la forme

inconnue de ce jet. Dans le cas où l'effet de la tension de surface est négligé, la solution exacte peut être calculée en utilisant la théorie des lignes de courant libre introduite par Helmholtz en 1868 [14] et Kirchhoff en 1869 [20]. Mais si on considère la tension superficielle cette condition rend le problème très difficile de résoudre analytiquement, ce qui nous oblige à employer des techniques et des méthodes numériques qui appuient sur les transformations conformes pour le résoudre. L'avantage principale de ces méthodes est de transformer les problèmes bidimensionnels à des problèmes unidimensionnels. Nous avons appliqués en premier lieu la technique de la troncation de série introduite par Birkhoff et Zarantello [8], nous cherchons la solution sous forme d'une série tronquée de N termes. Ainsi nous utilisons la méthode d'équation intégral-différentielle qui base sur le théorème de Cauchy.

Ce document est organisé en quatre chapitres :

Nous commençons dans le premier chapitre par une analyse bibliographique dans laquelle nous avons exposés les notions préliminaires qui ont rapport à la étude d'un écoulement potentiel et bidimensionnel à surface libre dû à un jet, la deuxième partie du chapitre est consacrée à la théorie des fonctions holomorphe et précisément les transformations conforme.

Le second chapitre s'ouvre sur la présentation du problème physique d'un jet dans un canal semi infini et sa modélisation mathématique, la deuxième partie de ce chapitre est consacrée la résolution analytique du problème considérée dans le cas où les effets de gravité et tension de surface sont négligés, en utilisant la théorie des lignes libres Batchelor [3] qui est basée sur les transformations conformes pour déterminer la forme du jet. Les résultats trouvés sont publiés par Gasmi et Amara [15].

Dans le troisième chapitre nous présentons le problème dans le cas où l'effet de tension de surface est pris en considération, ainsi que la formulation mathématique du problème en utilisant la technique de la troncation de la série utilisée par Vanden Broeck et Mekias [24], Bouderah et Mekias [7] et Gasmi [16]. Le problème est caractérisé par deux paramètres le nombre de Weber et la largeur du canal. La solution est calculée pour différentes valeurs de ces paramètres. Afin de valider notre procédure numérique, une comparaison est illustrée entre la solution numérique lorsque le nombre de Weber est nul et la solution exacte du chapitre 2, il montre que ces deux résultats sont confondus. Ainsi que les résultats obtenus font l'objet d'un article Amara et Gasmi [1].

Le chapitre quatre traite le même problème considéré dans le chapitre précédent mais on utilise la méthode intégral-différentielle utilisée par Mekias et Vanden Broeck [23]. Nous avons pu calculer la solution pour plusieurs valeurs de Weber et la largeur du canal.

Les résultats trouvés confirment ceux trouvés dans le chapitre 3.

Nous achevons cette thèse par une conclusion générale dans laquelle nous discutons le bilan de notre contribution, et nous ouvrons des perspectives sur nos travaux futurs.

Chapitre 1

Écoulement bidimensionnel à surface libre et fonctions analytiques

Dans ce chapitre, on va présenter quelques concepts de base de la mécanique des fluides tel que les propriétés des fluides, les équations qui régissent les mouvement des écoulements potentiel, bidimensionnel et irrotationnel

1.1 Quelques définitions et résultats sur les écoulements potentiels

Définition 1. [27] *Un écoulement est dit à surface libre lorsqu'il se produit avec une interface libre entre l'air et liquide voir figure (1.1)*

1.1.1 Tension de surface

La tension de surface est une force qui existe au niveau de toute interface entre deux milieux différents (liquide- air) lié aux interactions moléculaires d'un fluide. Elle résulte de l'augmentation de l'énergie à l'interface entre deux fluides. La tension superficielle peut être aussi écrite en terme de différence de pression entre deux milieux non miscibles séparés par une interface. Ceci est fait en introduisant le terme de courbure, et donne ce que l'on l'équation de capillarité de Laplace. La dérivation de cette équation est calculée par [10].

Pour un élément de surface libre $ds \rightarrow 0$ on peut considérer cet élément comme un arc d'un cercle de centre O et de rayon R voir figure (1.2). L'élément de surface est divisé par BO de telle sorte que $A\hat{O}B = B\hat{O}C = d\theta$

La force résultante due à la tension de surface agissant sur cet élément, dans la direction

normale, est simplement égale à la somme des forces aux deux extrémités, et donc :

$$\text{Force résultante} = 2T \sin(d\theta) .$$

Comme $ds \rightarrow 0$, on a $d\theta \rightarrow 0$ et donc

$$2T \sin(d\theta) \sim 2T d\theta .$$

Cette force est aussi considérée comme la différence de pression à travers la surface libre
On a alors :

$$2T d\theta = (p - p_0) ds. \tag{1.1}$$

D'une autre part si on considère $ds \rightarrow 0$ la longueur de l'élément de surface peut être exprimée en fonction de la rayon R et l'angle $d\theta$:

$$ds = 2R d\theta. \tag{1.2}$$

En remplace (1.1) dans (1.2) on trouve :

$$(p - p_0) ds = \frac{T}{R} ds \implies (p - p_0) = \frac{T}{R}. \tag{1.3}$$

Donc

$$T = R(p - p_0). \tag{1.4}$$

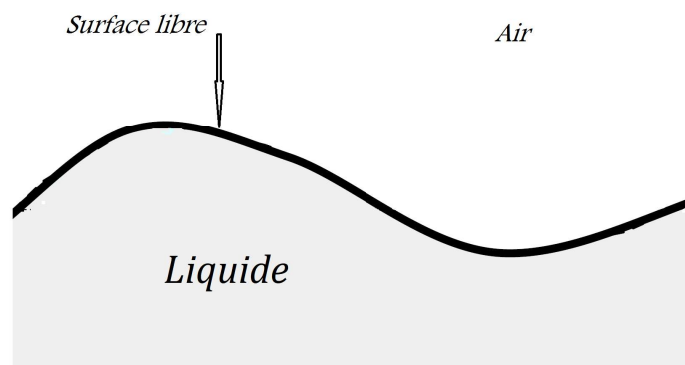


FIGURE 1.1 – Présentation de la surface libre

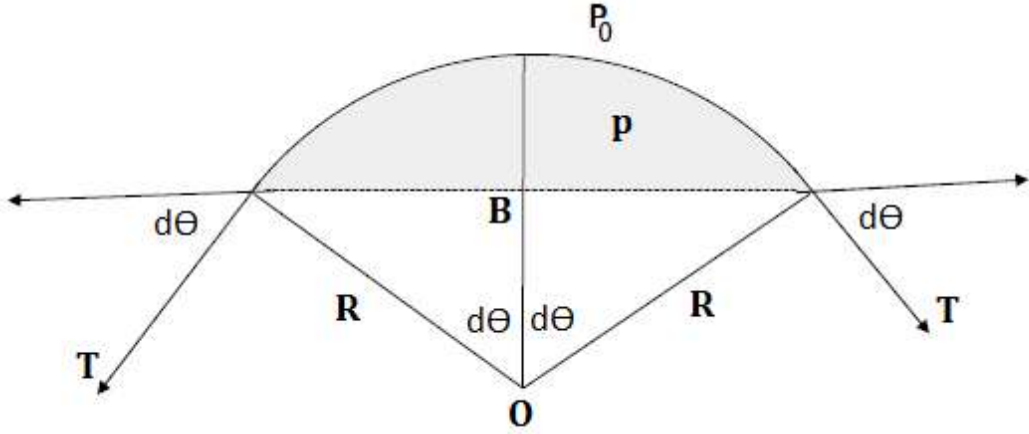


FIGURE 1.2 – Surface de tension

1.1.2 Le champ de vitesse

La description d'un fluide en mouvement peut s'interpréter de deux façons. La première ce que on peut choisir de suivre les particules de ce fluide dans leur mouvement (méthode de Lagrange) comme on peut faire un cliché à un instant donné du champ de vitesse de toutes les particules fluides (méthode d'Euler). Nous allons adopter la méthode d'Euler par ce que il est plus commode pour la description du mouvement d'un fluide

Méthode Eulérienne

La méthode d'Euler consiste à décrire l'écoulement en donnant les composantes du vecteur vitesse et autres quantités physiques en chaque point de l'espace, c'est-à-dire, on fixe un point dans l'espace et on constate les variations des quantités liées aux particules du fluide passant par ce point.

- Chaque instant t_1 on peut déterminer au point M une particule p_1 de vitesse \vec{V} et d'autres caractéristiques physiques.
- Et a l'instant $t_2 = t_1 + dt$, on trouve au même point M de l'espace, une autre particule p_2 de vitesse et des caractéristiques physiques différentes.

Donc, on a en M et à l'instant t_1

$$\vec{V} = \vec{V}(p_1, t_1) = \vec{V}(x, y, t_1)$$

et à l'instant t_2 , on a en même point M

$$\vec{V} = \vec{V}(p_2, t_2) = \vec{V}(x, y, t_2)$$

1.1.3 Définitions

Écoulement stationnaire

On dit qu'un écoulement est stationnaire ou encore écoulement permanent, si toutes ces caractéristiques quantitatives sont indépendantes du temps, en particulier pour la vitesse on :

$$\frac{\partial \vec{V}(x, y, t)}{\partial t} = \vec{0} .$$

Écoulement irrotationnel

Un écoulement est dit irrotationnel si

$$rot(\vec{V}) = \vec{0} .$$

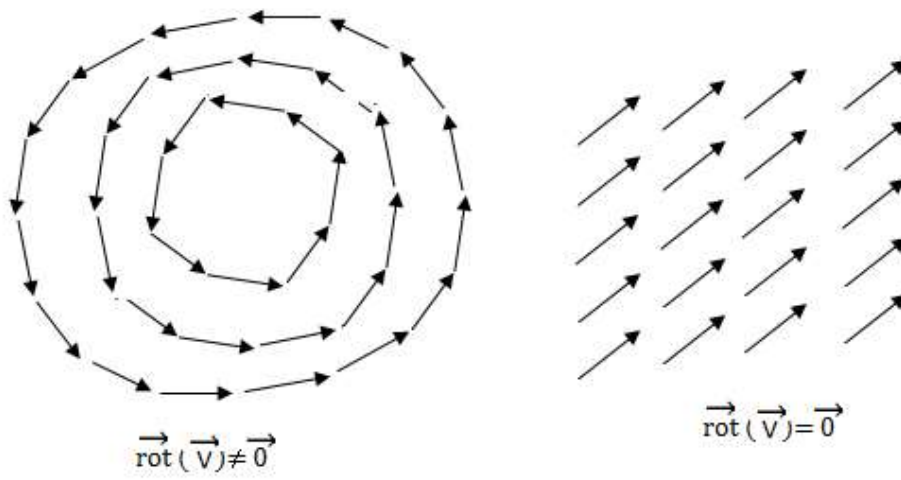


FIGURE 1.3 – Position du champ de vitesse

Écoulement uniforme

On dit qu'un écoulement est uniforme si ces composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées de l'espace, sinon il est non-uniforme.

Écoulement bidimensionnel

Un écoulement est dit bidimensionnel ou un écoulement plan, si toutes ces caractéristiques sont dépendantes de deux variables spatiales (x, y) et du temps t

Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est constante par rapport au temps. c'est-à-dire

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 .$$

Les fluides en mouvement sans frottements entre les molécules au cours de son déplacement qu'on appelle fluides parfaits ou non visqueux.

1.1.4 Fonction potentielle complexe

Fonction de courant

Si l'écoulement est incompressible alors l'équation de continuité (conservation de la masse) se réduit à :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$$

En deux dimensions $\vec{V} = (u(x, y), v(x, y))$ où u et v sont les composantes de la vitesse

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

Cela implique que la forme différentielle $-vdx + udy$ est une différentielle totale d'une certaine fonction ψ tel que

$$d(\psi) = -vdx + udy.$$

Alors, on :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = -vdx + udy$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.5)$$

ψ s'appelle la fonction de courant et les surfaces définies par les lignes $\psi = \text{constante}$ sont des lignes de courant.

Potentiel de vitesse

Si l'écoulement est irrotationnel alors sa vitesse dans tout le domaine de l'écoulement l'équation suivante :

$$\text{rot}(\vec{V}) = 0$$

En deux dimensions $\vec{V} = (u(x, y), v(x, y))$ où u et v sont les composantes de la vitesse

$$\text{rot}(\vec{V}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

Cela implique que la forme différentielle $udx + vdy$ est une différentielle totale d'une certaine fonction φ :

$$d(\varphi) = udx + vdy.$$

On peut donc écrire que :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \end{cases} \quad (1.6)$$

Le symbole φ représente le potentiel de vitesse.

On définit la fonction f de la variable complexe $z = x + iy$ comme suit :

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Cette fonction est dite fonction potentiel

1.2 Fonctions holomorphes

On peut définir un point z du plan complexe \mathbb{C} par la donnée de deux coordonnées réelles de différentes manières.

Soit (x, y) les coordonnées cartésiennes d'un point du plan, pour utiliser la notion de variable complexe on introduit la variable z :

$$z = x + iy \text{ où } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ou bien encore

$$z = r \exp(i\theta), \quad r = |z|, \quad \theta = \text{Arg}(z)$$

Où r est le module de la variable z et θ son argument

Un disque dans le plan complexe est désigné par

$$D(z_0, r_0) = \{z \in \mathbb{C}, |z - z_0| < r_0\}$$

D est appelé disque ouvert de centre z_0 et de rayon r_0 , la fonction

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Où φ et ψ sont deux fonctions réelles de deux variables elles vérifiant les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right. \quad (1.7)$$

De plus, on a :

$$\Delta\varphi = \Delta\psi = 0$$

Les lignes $\varphi = \text{const}$ et $\psi = \text{const}$ constituent des familles orthogonales.

La vitesse complexe est donnée par :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = u - iv$$

1.2.1 Formule intégrale de Cauchy

Soit f une fonction analytique partout à l'intérieur d'un contour fermé simple C parcouru dans le sens direct, ainsi que sur ce contour lui-même. Si z est un point quelconque intérieur à C on a :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad (1.8)$$

1.2.2 Transformation de Schwarz-Christoffel

Transformation conforme

Soit f une fonction de variable complexe de Le plan Z (l'ensemble de départ) vers le plan W (l'ensemble d'arrivée)

Définition 2. [22] Une transformation $f(z)=w$ est conforme, si l'angle entre deux courbes du plan Z est égal à l'angle qu'il y a entre les images de ces courbes dans le plan W . Le sens de l'angle doit être respecté.

Théorème 3. Une transformation analytique est conforme à tous les point où $f'(z) \neq 0$

Preuve

Pour la démonstration, voir [22] page 286

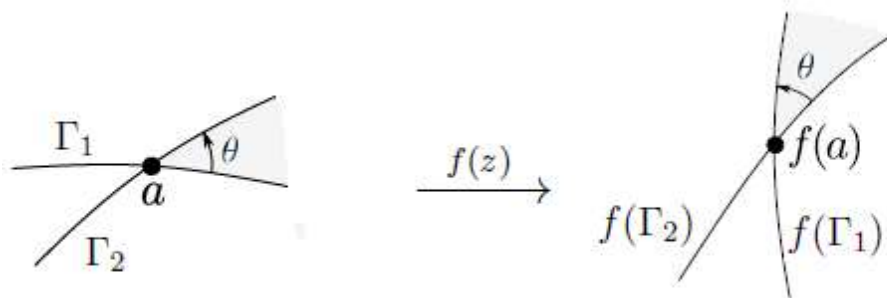


FIGURE 1.4 – Transformation conforme

Transformation de Schwarz-Christoffel

La transformation de Schwarz-Christoffel est une transformation conforme est très utilisée dans la résolution des problèmes d'écoulements. Cette transformation réalise une transformation l'intérieur d'un polygone du plan complexe figure (1.5) en demi-plan supérieur figure (1.6) de la variable complexe λ .

Soient a_1, a_2, \dots, a_n les points correspondants respectivement à $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ de l'axe réel du plan λ voir figure 1.6 On définit la transformation de Schwarz-Christoffel qui représente l'intérieur du polygone à demi plan supérieur par la formule :

$$\Omega = k \int (\lambda - \lambda_1)^{\frac{\alpha_1}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_2)^{\frac{\alpha_2}{\pi} - 1} (\lambda - \lambda_3)^{\frac{\alpha_3}{\pi} - 1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{\alpha_n}{\pi} - 1} d\lambda + M \quad (1.9)$$

où k et M sont des constantes complexes, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres réels et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les angles intérieurs au polygone.

Remarques

- La transformation $\Omega(\lambda)$ est conforme sauf aux points λ_i .
- Le point anguleux est transformé en au point non anguleux.
- La transformation de α_i vers l'infini, alors on omet le facteur $(\lambda - \lambda_n)$ dans la transformation puisqu'il serait associé à l'exposant 0, on dit que le polygone est dégénéré en ce point.
- On peut choisir trois points arbitraires parmi les n points $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

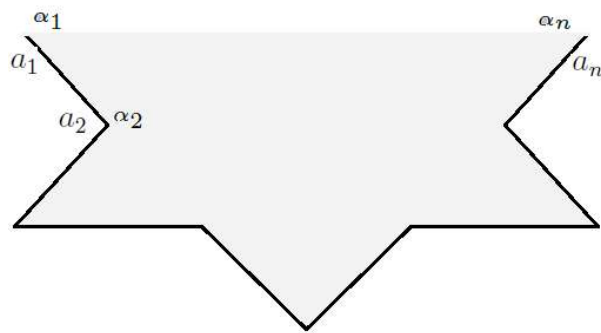
FIGURE 1.5 – Plan de variable Ω .



FIGURE 1.6 – Plan de variable λ .

Chapitre 2

Résolution analytique d'un problème de type jet devant un obstacle de forme U

Dans ce chapitre nous considérons un problème d'écoulement d'un jet dans un tube semi infini. Le fluide est considéré comme incompressible et non visqueux. Dans le cas où en négligeant les effets de la gravité et de la tension de surface, la solution exacte peut être calculer en utilisant la théorie des lignes de courant libre introduite par Kirchhoff [20]. Les résultats trouvés présentent une généralisation du travail présentée par B.Bouderah, A. Gasmi A et H. Serguine [5]

2.1 Position du problème

Considérons un écoulement potentiel et bidimensionnel d'amplitude finie $2L$ d'un fluide incompressible et non visqueux et irrotationnel dans un canal rectangulaire et semi infini voir figure 2.1, en raison de la symétrie de l'écoulement on peut restreindre l'étude du problème au demi-plan supérieur. Nous choisissons comme repère de référence, BO sur l'axe xox' , AD' et CD sont parallèles à l'axe xox' et DD' sur l'axe yoy' , l'écoulement est limité par les parois du canal AD' , $D'OD$ et DC et la surface libre ABC .

Nous supposons que l'écoulement est uniforme lorsque x tend vers moins l'infini, aux points D et D' la vitesse est nulle voir figure (2.2).

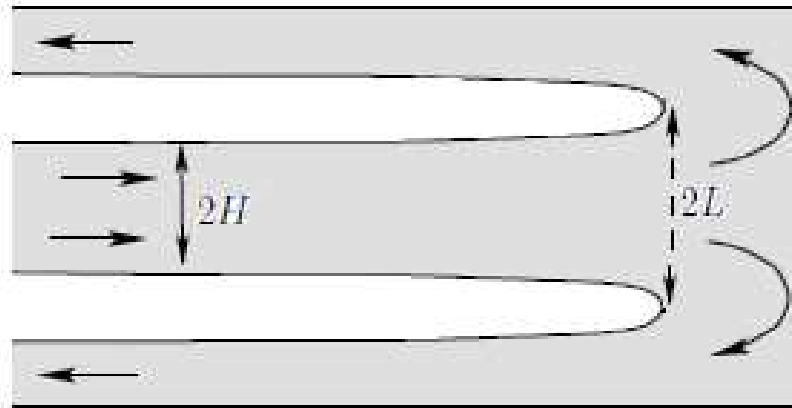


FIGURE 2.1 – Un jet entrant dans une boîte. La profondeur du fluide est $2H$

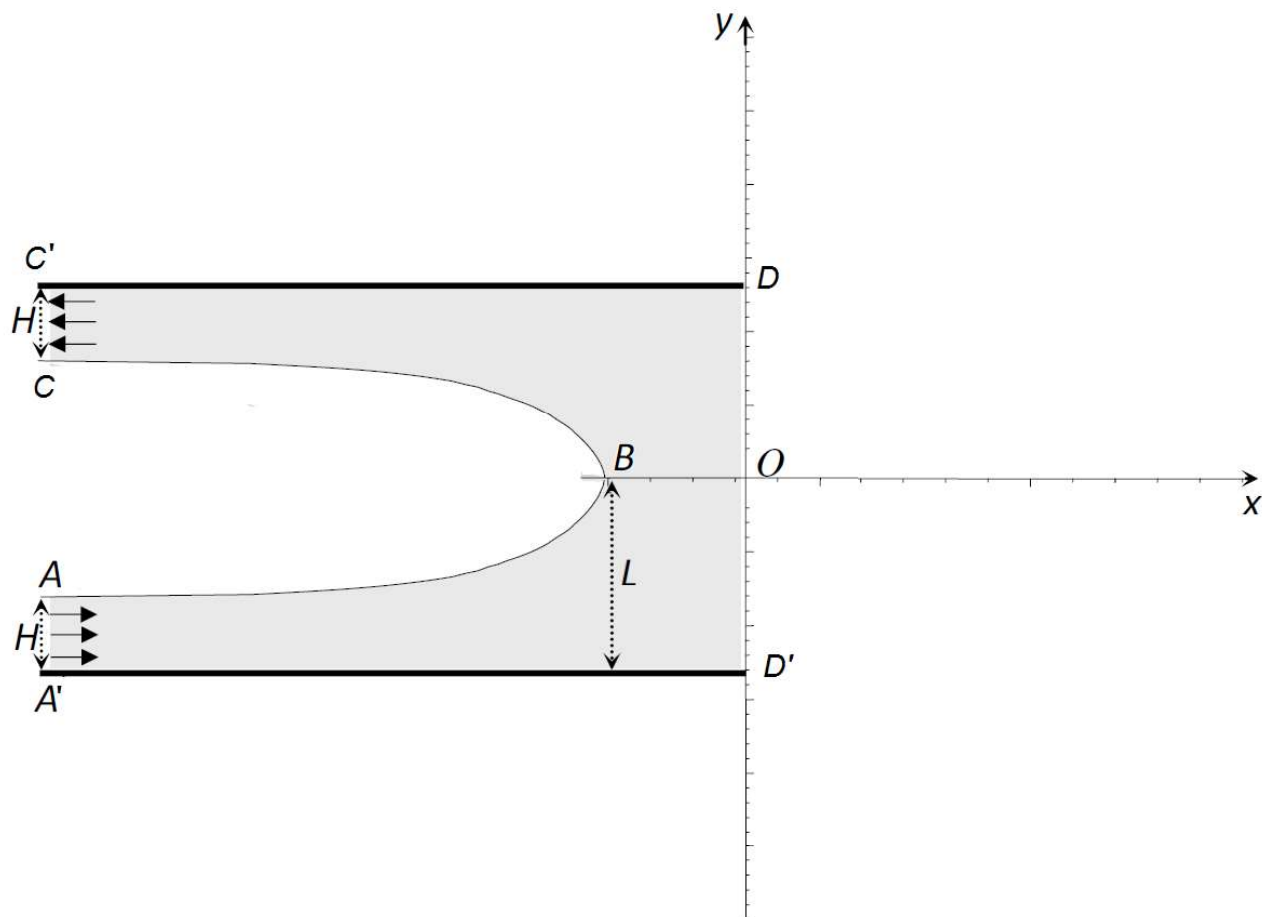


FIGURE 2.2 – Schéma d'un écoulement bidimensionnel dans un canal de la forme U

Nous nous intéressons à des écoulements potentiels, irrotationnels et bidimensionnelle, nous pouvons définir un potentiel complexe :

$$f = \varphi + i\psi,$$

où φ et ψ représentent la fonction potentiel et la fonction de courant respectivement, la dérivée de ce potentiel par rapport à $z = x + iy$ fournit la vitesse complexe

$$\frac{df}{dz} = u - iv.$$

Puisque l'effet de la surface tension et l'effet de gravité sont négligés l'équation de Bernoulli sur la surface libre écrire comme suite

$$\frac{1}{2}q^2 + \frac{p}{\rho} = c^{te}, \quad (2.1)$$

où q est le module de vecteur vitesse, p est la pression et ρ la densité de fluide. On a la densité et la pression sont des constantes sur la surface libre de l'écoulement, donc la forme de l'équation de Bernoulli devient

$$q = c^{te} \quad \text{sur } ABC \quad (2.2)$$

2.2 Résolution du problème

Dans cette section nous allons utiliser la transformation de Schwarz-Christoffel et la méthode des lignes de courant libres pour trouver la solution exacte de notre problème, en utilisant la technique utilisée par Kirchhoff [1869].

Avant de résoudre ce problème il est nécessaire de présenter la transformation suivante :

Transformation d'hodographe

Cette transformation est basée sur l'idée d'introduire la fonction complexe Ω définie par :

$$\Omega = \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \log\left(\frac{U}{u - iv}\right) = \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta, \quad (2.3)$$

Où θ est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et U est la vitesse de référence qui peut être considérée comme unité de vitesse.

On note que la fonction Ω possède les propriétés suivantes :

- Puisque q est constante alors $\log\left(\frac{U}{q}\right)$ est aussi constante pour chaque ligne de courant
- θ est constante pour chaque paroi rigide rectiligne.

Maintenant pour trouver la solution exacte nous utilisons les étapes suivantes.

1^{ère} étape

En utilisant la transformation (2.3) pour transformé le domaine d'écoulement réel (x, y) figure (2.2) à un domaine d'écoulement de frontière polygonale dans le plan de variable complexe Ω figure (2.3) comme suit

Plan z	Plan Ω
$A = (-\infty, H - L)$	$A = (0, 0)$
$B = (-L, 0)$	$B = (0, \frac{\pi}{2})$
$C = (-\infty, L - H)$	$C = (0, \pi)$
$D = (0, L)$	$D = (\pi, +\infty)$
$D' = (0, -L)$	$D' = (0, +\infty)$

TABLE 2.1 – Transformation le domaine d'écoulement plan- z à le domaine plan- Ω .

2^{ème} étape

Le domaine d'écoulement réel, dans le plan z est transformé à une bonde de largeur HU dans le plan de la variable $f = \phi + i\psi$ (figure 2.4) puis que ψ est constante pour chaque linge de courant, la transformation est donnée par le tableau suivant

Plan z	Plan f
$A = (-\infty, H - L)$	$A = (-\infty, HU)$
$B = (-L, 0)$	$B = (0, HU)$
$C = (-\infty, L - H)$	$C = (\infty, HU)$
$D = (0, L)$	$D = (0, \phi_D)$
$D' = (0, -L)$	$D' = (0, -\phi_D)$

TABLE 2.2 – Transformation le domaine d'écoulement plan- z à le domaine plan- f .

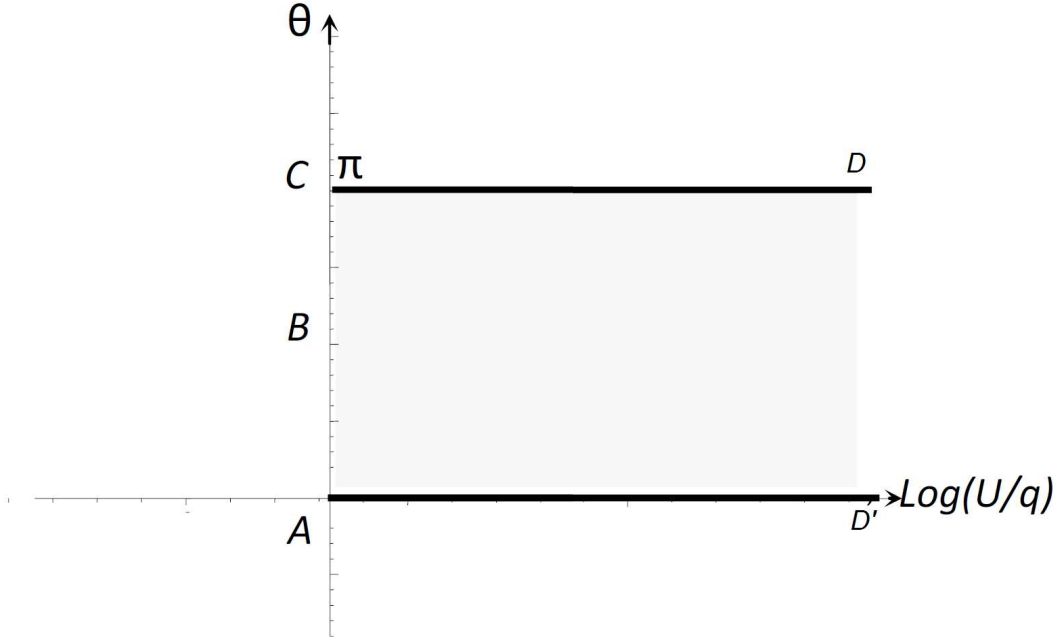
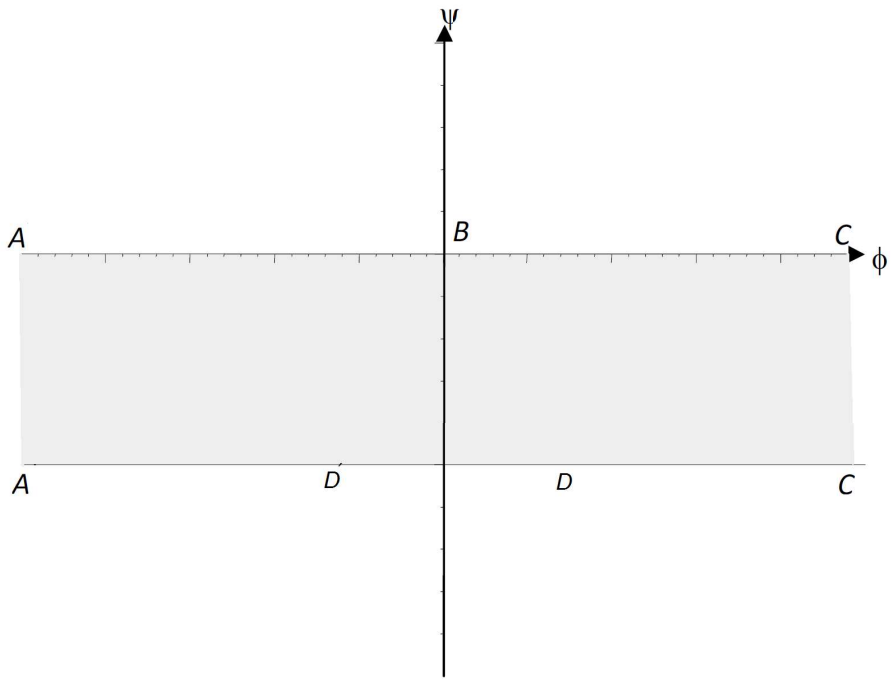
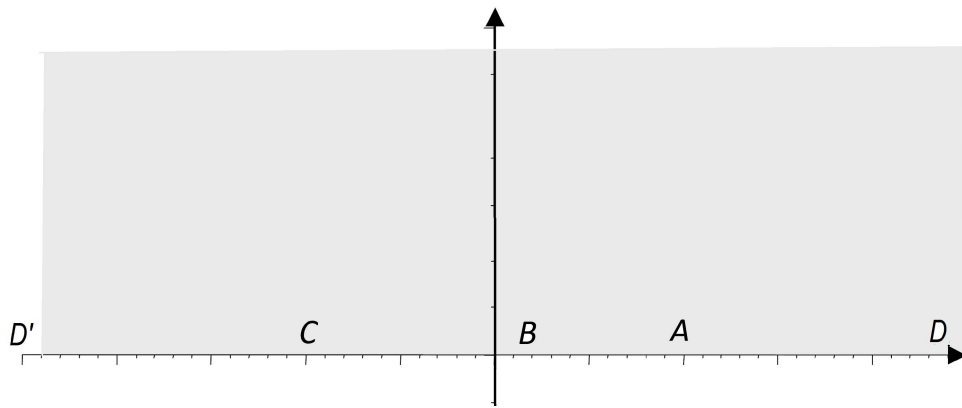


FIGURE 2.3 – Plan Ω

FIGURE 2.4 – Plan f

FIGURE 2.5 – Plan λ

3^{ème} étape

En utilisant la transformation de Christoffel-Schwarz pour transformer la bande de largeur HU du plan f en demi plan supérieur de la variable λ figure (2.5).

Plan f	Plan λ
A	$A = (1, 0)$
B	$B = (0, 0)$
C	$C = (-1, 0)$
D	$D = (+\infty, 0)$
D'	$D' = (-\infty, 0)$

TABLE 2.3 – Transformation le domaine plan- f à le domaine plan- λ .

La transformation de Christoffel-Schwarz définie par :

$$\frac{df}{d\lambda} = M(\lambda - \lambda_3)^{\frac{p_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_4)^{\frac{p_2}{\pi}-1} \dots (\lambda - \lambda_n)^{\frac{p_n}{\pi}-1} ,$$

où p_1, p_2, \dots, p_n les angles intérieurs de polygone dans le plan f

Nous cherchons l'expression de cette transformation, par définition on a :

$$\frac{df}{d\lambda} = M(\lambda + 1)^{-1}(\lambda - 1)^{-1} = \frac{M}{\lambda^2 - 1}. \quad (2.4)$$

Par calcul simple, on trouve :

$$f - f_0 = \frac{M}{2} \ln\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right). \quad (2.5)$$

On va déterminer les valeurs f_0 et M :

Dû à la symétrie de les deux plans d'écoulements f - plan et λ - plan, on détermine cette transformation pour $\lambda \geq 0$. Nous choisissons le point $D(\lambda = \infty, f = -UH)$ et par l'utilisation de l'équation (2.5) nous obtenons :

$$-UH = \frac{M}{2} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\ln\left(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}\right) \right) + f_0.$$

Il est clair que : $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} (\ln(\frac{\lambda - 1}{\lambda + 1})) = 0$ quand $\lambda \mapsto \infty$ Donc la valeur f_0 est donnée par

$$f_0 = -UH.$$

Pour déterminer la valeur de M , nous choisissons le point $B(\lambda = 0, f = iHU)$ et le remplacer dans l'équation (2.5)

$$iHU = \frac{M}{2} \ln\left(\frac{0 - 1}{0 + 1}\right) - UH$$

$$iHU + UH = \frac{M}{2} \ln(-1)$$

$$iHU + UH = Mi\frac{\pi}{2}$$

Par calcul simple la valeur de M est donnée par

$$M = \frac{2HU}{\pi}(1 - i).$$

On substitue ces données dans l'équation (2.4) on trouve :

$$\frac{df}{d\lambda} = \frac{2HU}{\pi}(1 - i)\frac{1}{\lambda^2 - 1} \quad (2.6)$$

4^{ème} étape

En utilisant la transformation de Schwarz-Christoffel, pour trouver l'expression de transformation qui transforme la plan f en demi plan supérieur de la variable Ω (figure 2.5)

Plan Ω	Plan λ
A	$A = (1, 0)$
B	$B = (0, 0)$
C	$C = (-1, 0)$
D	$D = (+\infty, 0)$
D'	$D' = (-\infty, 0)$

TABLE 2.4 – Transformation le domaine plan- Ω à le domaine plan- λ .

Par définition la transformation est donnée par

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda - \lambda_1)^{\frac{p_1}{\pi}-1}(\lambda - \lambda_2)^{\frac{p_2}{\pi}-1} + \dots + (\lambda - \lambda_n)^{\frac{p_n}{\pi}-1}. \quad (2.7)$$

Où p_1, p_2, \dots, p_n sont les angles intérieurs de polygone.

Pour déterminer cette transformation nous utilisons les points A, C et B entre les deux plans, on substitue ces données dans l'équation (2.7) on trouve :

$$\frac{d\Omega}{d\lambda} = k(\lambda - 1)^{-\frac{1}{2}}(\lambda + 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

L'intégration des deux côtés de cette équation nous donne

$$\Omega - \Omega_0 = k \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}). \quad (2.8)$$

Ensuite on va déterminer les valeurs de Ω_0 et k :

On remplace le point $A(\lambda = 1, \Omega = 0)$ dans l'équation (2.8) on trouve :

$$0 = \Omega_0 + k \ln(1 + \sqrt{1 - 1}).$$

Donc la valeur de premier constante est donnée par

$$\Omega_0 = 0.$$

La détermination de k :

En substitue le point $B(\lambda = 0, \Omega = i\frac{\pi}{2})$ dans l'équation (2.8), pour calculer la valeur de la deuxième constante k , on trouve :

$$k = 1.$$

On déduit la transformation

$$\Omega = \ln(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}). \quad (2.9)$$

5^{ème} étape

Pour trouver la transformation qui transforme le plan- z au plan- λ nous utilisons la fonction de Kirchoff définie par

$$\Omega = \log\left(U \frac{dz}{df}\right). \quad (2.10)$$

Par l'utilisation des relations (2.9) et (2.10) la transformation (2.10) peut s'écrire sous la forme suivante

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{U}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}). \quad (2.11)$$

6^{ème} étape

Pour trouver la forme de la surface libre on utilise la formule suivante

$$U \frac{dz}{d\lambda} = U \frac{dz}{df} \cdot \frac{df}{d\lambda}. \quad (2.12)$$

On remplace (2.6) et (2.11) dans (2.12) on obtient

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{2HU}{\pi} (1 - i) \frac{1}{\lambda^2 - 1} \left(\frac{1}{U} (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}) \right).$$

Ce qui nous donne après intégration :

$$z - z_0 = \frac{H}{\pi} [\ln(1 - \lambda^2) - 2 \arcsin(\lambda) - i(2 \arcsin(\lambda) + \ln(1 - \lambda^2))].$$

Pour déterminer la constante z_0 on a :

Lorsque $z = (x_0, 0)$ (au point B), $\lambda = 0$ alors : $z_0 = x_0$

Finalement l'équation paramétrique de la surface libre est donnée par

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{H}{\pi} [\ln(1 - \lambda^2) - 2 \arcsin(\lambda)] \\ y = -\frac{H}{\pi} [2 \arcsin(\lambda) + \ln(1 - \lambda^2)] \end{cases} \quad -1 \leq \lambda \leq 1$$

Dont le graphe est donné dans la figure (2.6)

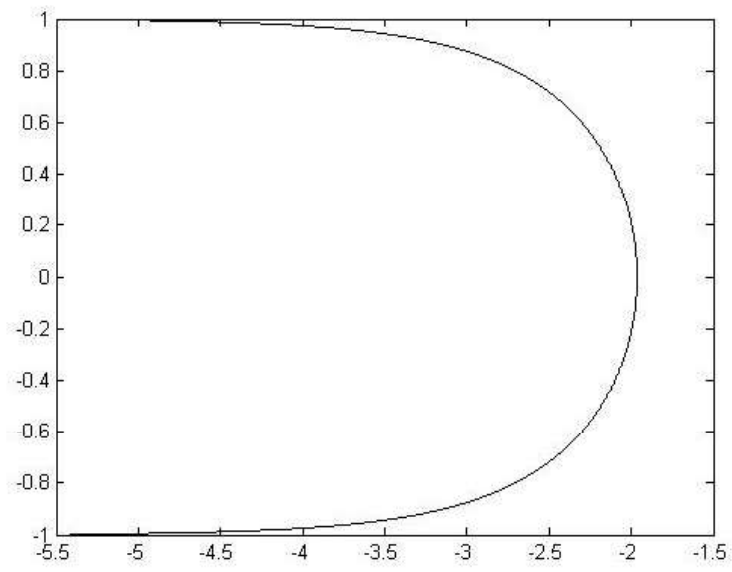


FIGURE 2.6 – Forme de la surface libre ABC .

Chapitre 3

Résolution numérique d'un problème d'écoulement dans un canal de forme U par la méthode de troncation de la série

Dans ce chapitre, on va étudier le même problème posé dans le deuxième chapitre, mais en tenant compte de l'effet de la tension. Ce problème devient très difficile à résoudre analytiquement à cause de la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la surface libre, alors une approche numérique dite technique de la troncation de la série est adoptée pour le résoudre. Cette méthode est introduite par Vanden-Broeck et Keller [32]; ainsi qu'elle sa bonne performance est montrée dans plusieurs travaux antérieurs citons par exemple [6], [7],[16], [18] et [23]. L'idée principale de cette méthode est basée sur la théorie des transformations conformes et qui consiste à transformer le domaine occupé par l'écoulement en un demi disque d'un autre plan où la surface libre aura porté sur la circonférence et les parois rigides sur les rayons.

Par cette méthode on a pu déterminer avec précision le comportement du vecteur au voisinage des points de contact des parois rectilignes et la solution qui est caractérisé par un paramètre dite nombre de Weber.

3.1 Position du problème

Considérons un écoulement potentiel et bidimensionnel d'un fluide incompressible et non visqueux de profondeur fini H dans un canal semi-infini de la forme U figure (3.1). On maintient la configuration du chapitre 2 et on choisit comme un système de coordonnées la ligne $D'D$ sur l'axe $y'oy$, les pointes B et O sur l'axe $x'ox$ et la courbe ABC désigne la surface libre. Nous supposons que la tension superficielle est prise en considération mais en

néglige l'effet de la présentateur. Nous supposons que la pression à l'intérieur de la cavité est constante et la vitesse de l'écoulement s'approche de la vitesse uniforme \tilde{U} quand x tends vers moins l'infini. Le problème est caractérisé par le nombre de Weber noté We , défini par la formule suivante :

$$We = \frac{\tilde{\rho}\tilde{U}^2\tilde{H}}{\tilde{T}}, \quad (3.1)$$

où \tilde{T} est la tension de surface, $\tilde{\rho}$ est la densité du fluide et \tilde{H} profondeur du fluide. Comme l'écoulement est bidimensionnel on peut utiliser la notion de la variable complexe en supposant : $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y}$ et $\vec{V} = (\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}), \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}))$ désigne le champ du vecteur vitesse de l'écoulement. On définit la fonction potentielle complexe \tilde{f} par

$$\tilde{f} = \tilde{\varphi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + i\tilde{\psi}(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

où $\tilde{\varphi}$ est la fonction potentielle de vitesse et $\tilde{\psi}$ la fonction de courant. Dû à l'équation de continuité donnée par (1.7) ces fonctions vérifient les relations de Cauchy Riemann, ce montre que la fonction \tilde{f} est analytique.

Par définition la fonction de vitesse complexe $\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{z}}$ est donnée par :

$$\frac{d\tilde{f}}{d\tilde{z}} = \tilde{u} - i\tilde{v}. \quad (3.2)$$

On remarque aussi que cette fonction de la variable z est analytique le problème mathématique consiste à déterminer la fonction complexe $\tilde{\varphi}(\tilde{z})$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\tilde{\varphi} = 0 & \text{dans le demaine de l'écoulement} \\ \tilde{v} = 0 & \text{sur } A'D' \text{ et } DC' \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } D'D \\ \frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2 + \frac{\tilde{p}_0}{\tilde{\rho}} & \text{sur } ABC \end{array} \right. \quad (3.2.1)$$

Où $\tilde{q} = \sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}$ est le module du vecteur de vitesse, \tilde{p} est la pression du fluide sur la surface libre ABC , $\tilde{\rho}$ est la densité du fluide et \tilde{p}_0 la pression atmosphérique à l'intérieur de la cavité.

La relation entre \tilde{p} et \tilde{p}_0 est donnée par la loi de Laplace

$$\tilde{p} - \tilde{p}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}}$$

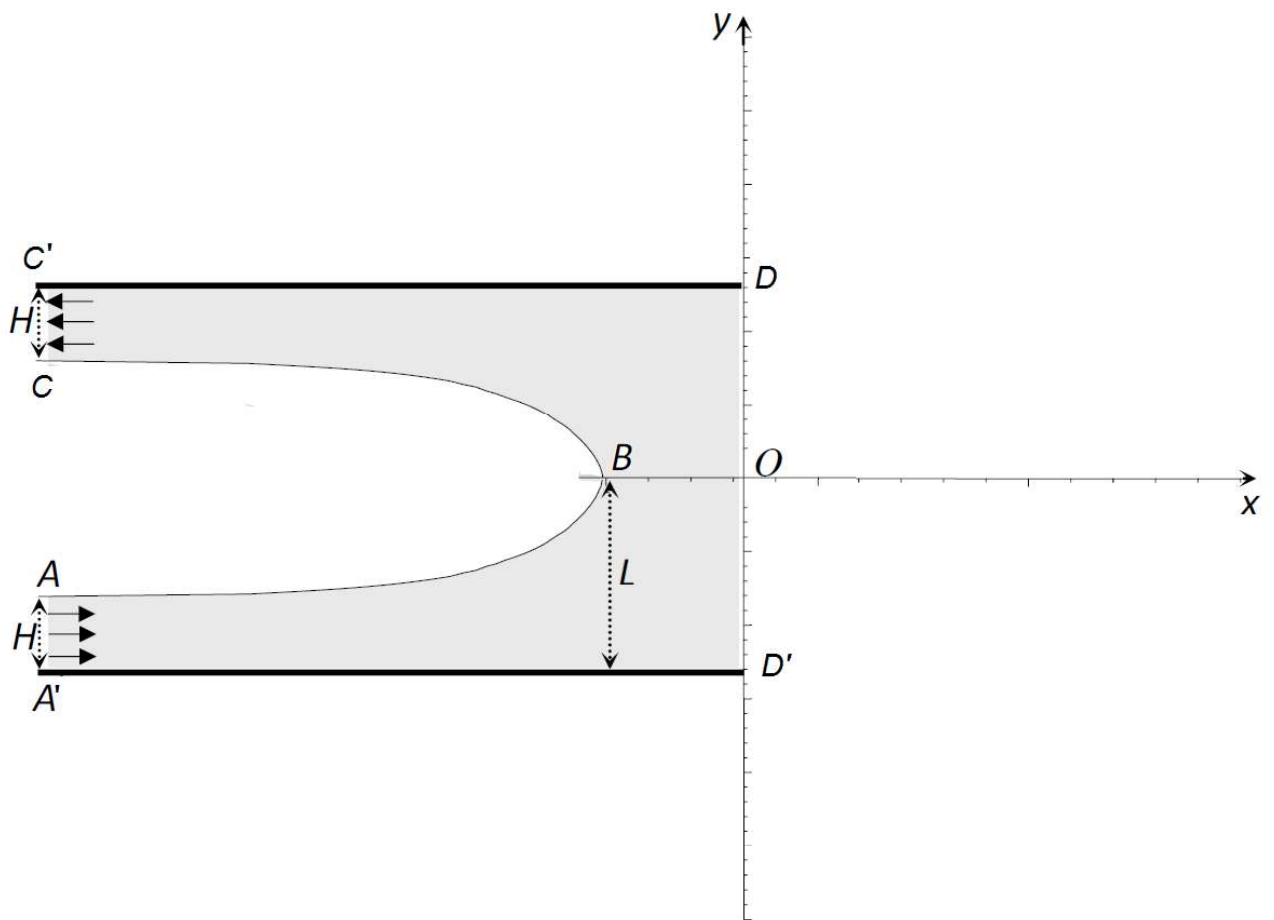


FIGURE 3.1 – Schéma d'un écoulement bidimensionnel dans un canal de forme U

Où \tilde{R} désigne le rayon de la courbure de la surface libre.

En utilisant cette relation l'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}}\tilde{K} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2, \quad (3.3)$$

où $\tilde{K} = \frac{1}{\tilde{R}}$ désigne la courbure de la surface libre

Pour rendre cette équation sans dimension, en utilisant l'analyse adimensionnelle et on choisit \tilde{H} comme unité de longueur et \tilde{U} comme unité de vitesse et nous introduisons les variables sans dimensions suivantes

$$\begin{cases} q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{U}} \\ u = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}}, \\ R = \frac{\tilde{R}}{\tilde{H}} \end{cases} \quad v = \frac{\tilde{v}}{\tilde{U}}. \quad (3.4)$$

En substituant (3.4) dans (3.3) on trouve :

$$\frac{1}{2}(Uq)^2 + \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}R\tilde{H}} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2. \quad (3.5)$$

Donc l'équation de Bernoulli devient :

$$q^2 + \frac{2}{We}K = 1, \quad (3.6)$$

où We est le nombre de Weber donné par l'équation (3.1)

La vitesse complexe devient :

$$u - iv = \frac{\tilde{u}}{\tilde{U}} - i\frac{\tilde{v}}{\tilde{U}}.$$

Comme $u - iv$ est analytique alors on peut écrire la fonction sous la forme suivante

$$u - iv = e^{\tau - i\theta} \quad (3.7)$$

Où θ désigne l'angle entre le vecteur de vitesse et l'horizontal

De l'équation (3.7) on obtient $u = e^\tau \cos(\theta)$ et $v = -e^\tau \sin(\theta)$, alors on a :

$$\vec{V} = e^\tau \cos(\theta) - ie^\tau \sin(\theta)$$

En coordonnées intrinsèques on a :

$$\vec{V} = |\vec{V}|\vec{e}_T$$

où $\vec{e}_T = \cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j}$ est le vecteur unitaire tangentiel

Par définition

$$\frac{d\vec{e}_T}{ds} = K\vec{e}_N = \frac{1}{R}\vec{e}_N \quad (3.8)$$

Ce qui implique la relation :

$$\left| \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right| = \frac{1}{R} \quad (3.9)$$

Où \vec{e}_T et \vec{e}_N sont les vecteurs unitaires tangent et normal à la surface libre respectivement et ds désigne un élément de longueur d'arc sur la surface libre.

On a :

$$q = |\vec{V}| = e^\tau.$$

Alors l'équation (3.9) peut s'écrire comme suit :

$$\left| \frac{d\vec{e}_T}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| \left| \frac{dt}{ds} \right| = \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| \left| \frac{1}{q} \right|$$

Donc on a,

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| e^{-\tau}.$$

Et d'autre part on a :

$$\frac{d\vec{e}_T}{dt} = \left(-\frac{d\theta}{dt} \sin(\theta), \frac{d\theta}{dt} \cos(\theta) \right).$$

Alors

$$|d\vec{e}_T dt| = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|.$$

Et comme

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial\theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\theta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\theta}{\partial\phi} \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} \right] \\ &= \frac{\partial\theta}{\partial\phi} e^{2\tau} \end{aligned}$$

D'où

$$\frac{1}{R} = K = \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| e^\tau \text{ sur } ABC.$$

Par suite, l'équation de Bernoulli en variable non dimensionnelles sur la ligne de courant ABC s'écrit sous la forme suivante :

$$e^{2\tau} - \frac{2}{We} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| e^\tau = 1 \quad (3.10)$$

Et les conditions (3.2.1) et (3.2.2) deviennent

$$\begin{cases} v = 0 & \text{on } \psi = 0, & -\infty \leq \phi \leq \phi_{D'} & \text{ou} & \phi_D \leq \phi \leq +\infty \\ u = 0 & \text{on } \psi = 0, & \phi_{D'} \leq \phi \leq \phi_D \end{cases} \quad (3.11)$$

3.2 Résolution numérique

Dans cette section on utilise la technique de Vanden-Broeck et Keller [32] pour la résolution numérique du problème considéré précédemment. Cette technique nous permet de calculer la fonction de vitesse complexe $\xi(z) = u(x, y) - iv(x, y)$

Par définition la fonction potentielle $f = \phi + i\psi$ transforme le domaine de l'écoulement du plan z en une bande infini $0 \leq \psi \leq 1$ et $-\infty \leq \phi \leq +\infty$ comme suit (voir figure 3.2)

Les points	plan f
$A = (-\infty, -H)$	$\phi = -\infty, \psi = 1$
$B = (x_0, 0)$	$\phi = 0, \psi = 1$
$C = (-\infty, H)$	$\phi = +\infty, \psi = 1$
$C' = (-\infty, L)$	$\phi = 0, \psi = +\infty$
$A' = (-\infty, -L)$	$\phi = 0, \psi = -\infty$
$D' = (0, L)$	$\phi = -1, \psi = 0$
$D = (0, -L)$	$\phi = 1, \psi = 0$
$O = (0, 0)$	$\phi = 0, \psi = 0$

TABLE 3.1 – La correspondance entre des principaux points de l'écoulement dans les deux plans.

On utilise la transformation conforme suivante

$$f = \frac{2}{\pi} \log \frac{t+1}{t-1} \quad (3.12)$$

Par cette transformation la bonde (figure 3.2) se transforme en un demi disque unitaire supérieur dans la plan de variable t (figure 3.3).

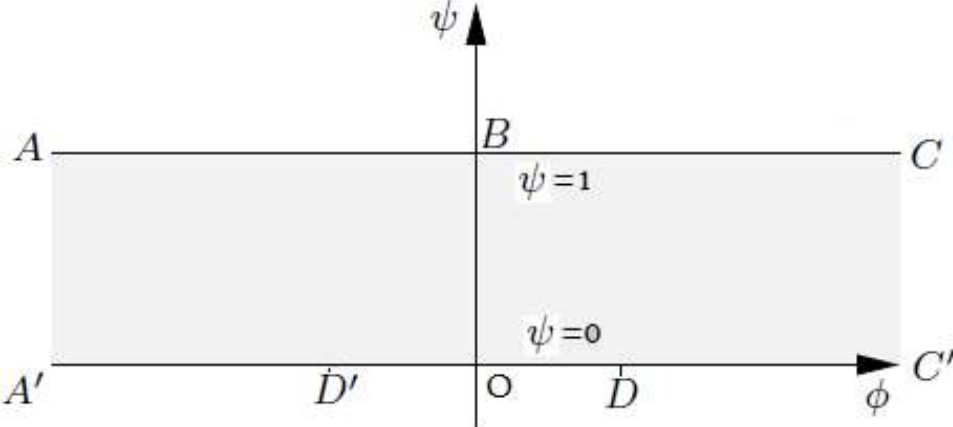


FIGURE 3.2 – Le plan potentiel complexe $f = \phi + i\psi$

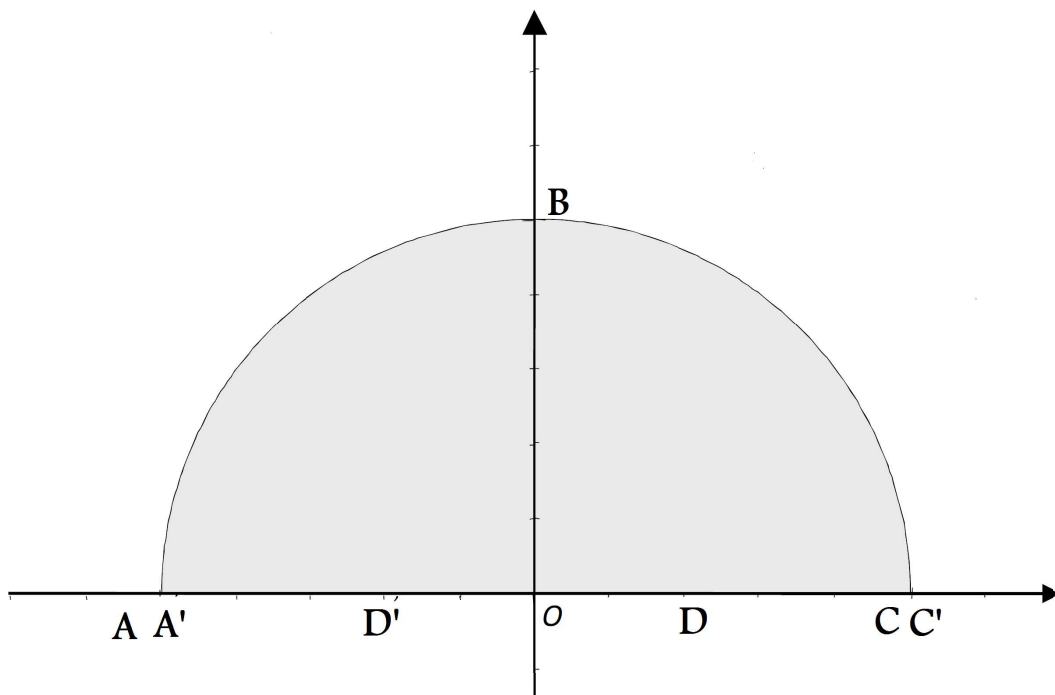


FIGURE 3.3 – Plan de la variable t

La surface libre ABC est transformé sur la circonférence et les parois rigides sur les rayons du disque.

Les points de la surface libre dans le plan t sont alors donnés par la relation :

$$t = |t|e^{i\sigma} = e^{i\sigma} \text{ tel que } 0 \leq \sigma \leq \pi. \quad (3.13)$$

Et dans le f -plan par :

$$f = \varphi + i \text{ ou } -\infty \leq \varphi \leq +\infty \quad \text{sur } ABC. \quad (3.14)$$

Les points A', D', O, D, C', A, B et C dans le f -plan se transforment respectivement aux points $-1, t_{D'}, 0, t_D, +1, -1, i$ et $+1$ dans le t -plan .

En substituant (3.13) et (3.14) dans l'équation (3.12) on trouve :

$$f = \varphi + i = \frac{2}{\pi} \log \frac{e^{i\sigma} + 1}{e^{i\sigma} - 1} \quad \text{sur } ABC.$$

Alors

$$\frac{df}{d\sigma} = \frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{2}{\pi \sin(\sigma)}$$

Donc

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = \frac{d\sigma}{d\varphi} = \frac{-\pi \sin(\sigma)}{2} \quad \text{sur } ABC \quad (3.15)$$

D'autre part, on a sur la surface libre

$$\frac{\partial\theta}{\partial\phi} = \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} \frac{\partial\sigma}{\partial\phi}$$

Ceci aussi nous donne

$$\frac{\partial\theta}{\partial\phi} = \frac{-\pi \sin(\sigma)}{2} \frac{\partial\theta}{\partial\sigma}$$

Donc l'équation de Bernoulli sur la surface libre devient

$$e^{2\tau} - \frac{\pi}{We} e^\tau \sin(\sigma) \left| \frac{\partial\theta}{\partial\sigma} \right| = 1 \quad \text{sur } ABC \quad (3.16)$$

Puisque $\xi(t) = \exp(\tau(t) - i\theta(t))$ est analytique dans tout le domaine d'écoulement sauf aux points D et D' (la vitesse est nulle), une étude asymptotique est nécessaire pour obtenir le comportement de la vitesses des ces points.

Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_D$

L'écoulement au voisinage de $t = t_D$ est un écoulement dans un angle $\gamma = \frac{\pi}{2}$, ce point correspond au point z_D dans le plan z donc l'écoulement est asymptotiquement caractérisé par la fonction potentielle complexe f est donnée par :

$$f(z) \sim \frac{a\gamma}{\pi}(z - z_D)^{\frac{\pi}{\gamma}} - f_D \quad \text{quand } z \longrightarrow z_D \quad (3.17)$$

En utilisant la transformation (3.12), cette condition devient :

$$\xi \sim a \left[\frac{4}{a\pi} (k_1(t - t_D)) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } t \longrightarrow t_D.$$

Alors

$$\xi \sim C_1 (t - t_D)^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } t \longrightarrow t_D.$$

Avec

$$C_1 = a \left(\frac{4a}{\pi} k_1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors

$$\xi = O\left(\frac{t - t_D}{1 - t_D}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.18)$$

Comportement asymptotique au voisinage de $t = t_{D'}$

L'écoulement au voisinage de $t = t_{D'}$ est un écoulement dans un angle $\gamma = \frac{\pi}{2}$, ce point correspond au point $z_{D'}$ dans le plan z donc l'écoulement est asymptotiquement caractérisé par la fonction potentielle complexe f est donnée par :

$$f(z) \sim \frac{a\gamma}{\pi}(z - z_{D'})^{\frac{\pi}{\gamma}} - f_{D'} \quad \text{quand } z \longrightarrow z_{D'}. \quad (3.19)$$

En utilisant la transformation (3.12), cette condition devient :

$$\xi \sim a \left[\frac{4}{a\pi} (k_1(t - t_{D'})) \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } t \longrightarrow t_{D'}.$$

Alors

$$\xi \sim C_2(t - t_{D'})^{\frac{1}{2}} \quad \text{quand } t \longrightarrow t_{D'}$$

Avec

$$C_2 = a\left(\frac{4a}{\pi} k_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors

$$\xi = O\left(\frac{t - t_{D'}}{1 - t_{D'}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.20)$$

3.2.1 Formulation de la série

Après avoir déterminé les comportements locaux de l'écoulement au voisinage des points $t = t_D$, $t = t_{D'}$, on cherche à trouver $\xi(t)$ sous la forme :

$$\xi(t) = g(t) \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k}\right). \quad (3.21)$$

Où les coefficients a_k sont des réels à déterminer et $g(t)$ contient les zéros de la fonction vitesse donnés en (3.18) et (3.20) alors (3.21) devient

$$\xi = u - iv = \left(\frac{t - t_D}{1 - t_D}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{t - t_{D'}}{1 - t_{D'}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k}\right) \quad (3.22)$$

Par la symétrie de l'écoulement, on a : $t_{D'} = -t_D$ et l'équation (3.22) devient

$$\xi = u - iv = \left(\frac{t^2 - t_D^2}{1 - t_D^2}\right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{2k}\right). \quad (3.23)$$

En substituant (3.7) et (3.13) dans (3.23)

On obtient

$$\exp(\tau - i\theta) = \left(\frac{e^{i2\sigma} - t_B^2}{1 - t_B^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i2k\sigma}\right).$$

Après des simplifications on trouve

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{\sin(2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(2k\sigma)) + t_B^2 \sin(-2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(2k\sigma) + 2\sigma)}{-\cos(2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(2k\sigma)) + t_B^2 \cos(-2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sin(2k\sigma) + 2\sigma)}\right) - \sigma.$$

D'où

$$\frac{d\theta}{d\sigma} = - \sum_{k=0}^{\infty} 2(k-1)a_k \cos(2(k-1)\sigma) - \frac{1}{2} + \frac{(t_B^4 - 1)}{2(1 + t_B^4 - 2t_B^2 \cos(2\sigma))}, \quad (3.24)$$

et

$$e^\tau = \frac{(1 + t_D^4 - 2t_D^2 \cos(2\sigma))^{\frac{1}{4}}}{(1 - t_D^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma)\right) \quad (3.25)$$

Pour exprimer l'équation de Bernoulli en terme de σ , on remplace $\tau(\sigma)$ et $\theta(\sigma)$ par leurs valeurs dans l'équation (3.10) on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + t_B^4 - 2t_B^2 \cos(2\sigma))^{\frac{1}{2}}}{1 - t_B^2} \exp\left(2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma)\right) - \frac{\pi \times \sin(\sigma)}{\alpha} \times \frac{(1 + t_B^4 - 2t_B^2 \cos(2\sigma))^{\frac{1}{4}}}{(1 - t_B^2)^{\frac{1}{2}}} \\ & \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma)\right) \left| \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2a_k(k-1) \sin(2(k-1)\sigma)\right) - \frac{1}{2} + \frac{t_B^4 - 1}{1 + t_B^4 - 2t_B^2 \cos(2\sigma)} \right| = 1 \quad (3.26) \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients a_k de la série ci-dessus, faisant une troncation de la série après termes donnée dans (3.26) après N termes, puis on discrétise l'intervalle $[0, \pi]$ en N points comme suit :

$$\sigma_I = -\frac{\pi}{2N} \left(I - \frac{1}{2} \right), \quad I = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.27)$$

En satisfaisant l'équation (3.26) en ces points donnés par (3.27) on obtient un système de N équations algébriques non linéaires à N inconnus a_1, a_2, \dots, a_{N-1} .

$$\begin{aligned} & \frac{(1 + t_B^4 - 2t_B^2 \cos(2\sigma(i)))^{\frac{1}{2}}}{1 - t_B^2} \exp\left(2 \sum_{k=1}^N a_k \cos(2(k-1)\sigma(i))\right) - \\ & \frac{\pi \times \sin(\sigma(i))}{\alpha} \times \frac{(1 + t_B^4 - 2t_B^2 \cos(2\sigma(i)))^{\frac{1}{4}}}{(1 - t_B^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(\sum_{k=1}^N a_k \cos(2(k-1)\sigma(i))\right) \times \\ & \times \left| \left(\sum_{k=1}^N 2a_k(k-1) \sin(2(k-1)\sigma(i))\right) - \frac{1}{2} + \frac{t_B^4 - 1}{1 + t_B^4 - 2t_B^2 \cos(2\sigma(i))} \right| = 1 \quad (3.28) \end{aligned}$$

Où

$$I = 1, \dots, N \quad \text{et} \quad 0 \leq \sigma(I) \leq \pi$$

Pour la résolution de ce système non linéaire on utilise la méthode de Newton, et on utilise MATLAB comme un outil de programmation

3.2.2 Forme de la surface libre

Pour déterminer la forme de la surface libre, on utilise la relation suivante :

$$\exp(\tau + i\theta) = \frac{\partial x}{\partial \varphi} + i \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{1}{u - iv} = e^{-\tau + i\theta}$$

Par identification, on trouve que

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases} \quad (3.29)$$

Avec

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \quad \text{et} \quad \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \quad (3.30)$$

Finalement on trouve les valeurs de $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$ et $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$ en chaque point de σ_I i.e.,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial \sigma}(\sigma_i) = \frac{2}{\pi \times \sin(\sigma(i))} \frac{(1 + t_B^4 - 2t_B^2 \cos(2\sigma))^{-\frac{1}{4}}}{(1 - t_B^2)^{\frac{1}{2}}} \exp(-\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma) \times \\ \times \cos \left[\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sin(2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma) + t_B^2 \sin(-2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma) + 2\sigma)}{-\cos(2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma) + t_B^2 \sin(-2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma) + 2\sigma)} \right) - \sigma \right] \\ \frac{\partial y}{\partial \sigma}(\sigma_i) = \frac{2}{\pi \times \sin(\sigma(i))} \frac{(1 + t_B^4 - 2t_B^2 \cos(2\sigma))^{-\frac{1}{4}}}{(1 - t_B^2)^{\frac{1}{2}}} \exp(-\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma) \times \\ \times \sin \left[\frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\sin(2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma) + t_B^2 \sin(-2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma) + 2\sigma)}{-\cos(2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma) + t_B^2 \sin(-2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2(k-1)\sigma) + 2\sigma)} \right) - \sigma \right] \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Où

$$I = 1, \dots, N$$

Ainsi, la forme de la surface libre est obtenue en intégrant numériquement (Méthode d'Euler) les relations ci-dessus avec la condition initiale $x(N) = H$ et $y(N) = 0$. Les résultats présentés ici sont obtenus pour $N = 40$.

3.3 Résultats et discussion

3.3.1 Solution sans effet de tension de surface

Lorsque le nombre de Weber We tend vers l'infini, c'est-à-dire que l'effet de tension tend vers zéro, le système 3.28 se réduit à :

$$\frac{(1 + t_B^4 - 2t_B^2 \cos(2\sigma(i)))^{\frac{1}{2}}}{1 - t_B^2} \exp(2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2(k-1)\sigma(i))) = 1$$

Où $I = 1, 2, \dots, N$ et σ_I sont données par la relation (3.21).

Nous utilisons la procédure numérique décrite précédemment, on trouve les coefficient a_k . Le tableau ci-dessous montre quelques valeurs de a_k de la série (3.23) pour différentes valeurs de t_D

t_D	a_1	a_{10}	a_{20}	a_{30}	a_{40}
0.14	-9.8973×10^{-3}	6.3100×10^{-11}	$1,2794 \times 10^{-11}$	$4,0731 \times 10^{-12}$	3.1546×10^{-13}
0,25	-3.2269×10^{-2}	6.9850×10^{-11}	1.3956×10^{-11}	4.4409×10^{-12}	3.4391×10^{-13}
0,5	$-3,2269 \times 10^{-2}$	$2,1203 \times 10^{-7}$	$2,0767 \times 10^{-11}$	$6,5548 \times 10^{-12}$	$5,0723 \times 10^{-13}$
0,75	$-4,1333 \times 10^{-1}$	$3,1321 \times 10^{-4}$	$4,7053 \times 10^{-7}$	$9,9194 \times 10^{-10}$	$2,7207 \times 10^{-12}$

TABLE 3.2 – quelques valeurs des coefficients a_k pour différentes valeurs de t_D

La comparaison de la solution numérique calculée avec la procédure décrite ci-dessus avec celle obtenue analytiquement est donnée dans la figure (3.4) . Cette dernière montre un bon accord entre les deux solutions

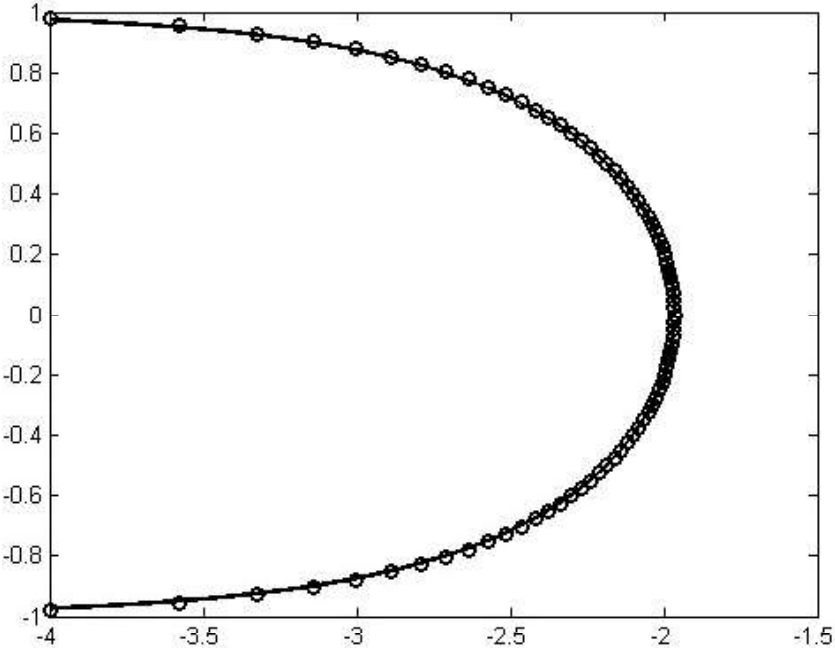


FIGURE 3.4 – Comparaison la solution numérique avec la solution théorique

3.3.2 Solution du problème avec tension de surface

On utilise la méthode numérique décrite précédemment pour résoudre le système non linéaire (3.28) pour différentes valeurs du nombre de Weber We et différentes valeurs de t_D . On trouve pour chaque valeur de We les coefficients a_k de la série (3.23), le tableau ci-dessus présente quelques valeurs de a_k trouvées.

We	t_D	a_1	a_{10}	a_{20}	a_{30}	a_{40}
0.7	0.14	$-9,0360 \times 10^{-1}$	$1,0631 \times 10^{-2}$	$2,5860 \times 10^{-3}$	$7,9960 \times 10^{-4}$	$5,2632 \times 10^{-5}$
	0,25	$-9,1477 \times 10^{-1}$	$1,0894 \times 10^{-2}$	$2,6494 \times 10^{-3}$	$8,1919 \times 10^{-4}$	$5,3923 \times 10^{-5}$
	0,5	$-9,6954 \times 10^{-1}$	$1,2269 \times 10^{-1}$	$2,9796 \times 10^{-3}$	$9,2122 \times 10^{-4}$	$6,0647 \times 10^{-5}$
5	0.14	$-1,9030 \times 10^{-1}$	$1,62038 \times 10^{-3}$	$3,4971 \times 10^{-4}$	$1,0764 \times 10^{-4}$	$7,2814 \times 10^{-6}$
	0,25	$-2,0822 \times 10^{-1}$	$1,7285 \times 10^{-3}$	$3,7219 \times 10^{-4}$	$1,1452 \times 10^{-4}$	$7,7458 \times 10^{-6}$
	0,5	$-2,9883 \times 10^{-1}$	$2,3547 \times 10^{-3}$	$4,9863 \times 10^{-4}$	$1,5299 \times 10^{-4}$	$1,0341 \times 10^{-5}$
	0,75	$-5,2598 \times 10^{-1}$	$4,8725 \times 10^{-3}$	$9,4693 \times 10^{-4}$	$2,8546 \times 10^{-4}$	$1,9222 \times 10^{-5}$
10	0.14	$-1,0408 \times 10^{-1}$	$7,3824 \times 10^{-4}$	$1,5494 \times 10^{-4}$	$4,8059 \times 10^{-5}$	$3,3262 \times 10^{-6}$
	0,25	$-1,2393 \times 10^{-1}$	$7,9639 \times 10^{-4}$	$1,6666 \times 10^{-4}$	$5,1670 \times 10^{-5}$	$3,5758 \times 10^{-6}$
	0,5	$-2,2372 \times 10^{-1}$	$1,1410 \times 10^{-3}$	$2,3345 \times 10^{-4}$	$7,2129 \times 10^{-5}$	$4,9879 \times 10^{-6}$
	0,75	$-4,7002 \times 10^{-1}$	$2,7938 \times 10^{-3}$	$4,8225 \times 10^{-4}$	$1,4530 \times 10^{-4}$	$9,9974 \times 10^{-6}$
20	0.14	$-5,8083 \times 10^{-2}$	$3,4467 \times 10^{-4}$	$7,1171 \times 10^{-5}$	$2,2274 \times 10^{-5}$	$1,5841 \times 10^{-6}$
	0,25	$-7,9101 \times 10^{-2}$	$3,7433 \times 10^{-4}$	$7,7055 \times 10^{-5}$	$2,4104 \times 10^{-5}$	$1,7141 \times 10^{-6}$
	0,5	$-1,8440 \times 10^{-1}$	$5,5246 \times 10^{-4}$	$1,1082 \times 10^{-5}$	$3,4544 \times 10^{-14}$	$2,4546 \times 10^{-6}$
	0,75	$-4,4172 \times 10^{-1}$	$1,6084 \times 10^{-3}$	$1,6084 \times 10^{-3}$	$2,4026 \times 10^{-4}$	$7,2647 \times 10^{-5}$
100	0.14	$-1,9719 \times 10^{-2}$	$6,4342 \times 10^{-5}$	$1,3096 \times 10^{-5}$	$4,1512 \times 10^{-6}$	$3,1161 \times 10^{-7}$
	0,25	$-4,1804 \times 10^{-2}$	$7,0293 \times 10^{-5}$	$1,4262 \times 10^{-5}$	$4,5189 \times 10^{-6}$	$3,3918 \times 10^{-7}$
	0,5	$-1,5205 \times 10^{-1}$	$1,0650 \times 10^{-4}$	$2,0996 \times 10^{-5}$	$6,6288 \times 10^{-6}$	$4,9717 \times 10^{-7}$
	0,75	$-4,1901 \times 10^{-1}$	$5,8125 \times 10^{-4}$	$4,7708 \times 10^{-5}$	$1,4452 \times 10^{-5}$	$1,0774 \times 10^{-6}$
200	0.14	$-1,4820 \times 10^{-2}$	$3,1862 \times 10^{-5}$	$6,4731 \times 10^{-6}$	$2,0561 \times 10^{-6}$	$1,5643 \times 10^{-7}$
	0,25	$-3,7047 \times 10^{-2}$	$3,4836 \times 10^{-5}$	$7,0552 \times 10^{-6}$	$2,2400 \times 10^{-6}$	$1,7040 \times 10^{-7}$
	0,5	$-1,4795 \times 10^{-1}$	$5,3052 \times 10^{-5}$	$1,0417 \times 10^{-5}$	$3,2960 \times 10^{-6}$	$2,5055 \times 10^{-7}$
	0,75	$-4,1617 \times 10^{-1}$	$4,4778 \times 10^{-4}$	$2,4021 \times 10^{-5}$	$7,2192 \times 10^{-6}$	$5,4547 \times 10^{-7}$

TABLE 3.3 – Quelques valeurs de coefficients a_k pour différentes valeurs de t_D et We

On constate d'après le tableau précédent que les coefficients de la série décroît rapidement lorsque n croît la figure (3.5) et figure (3.6) représenter la forme de la surface libre pour différentes valeur de nombre de Weber et t_D

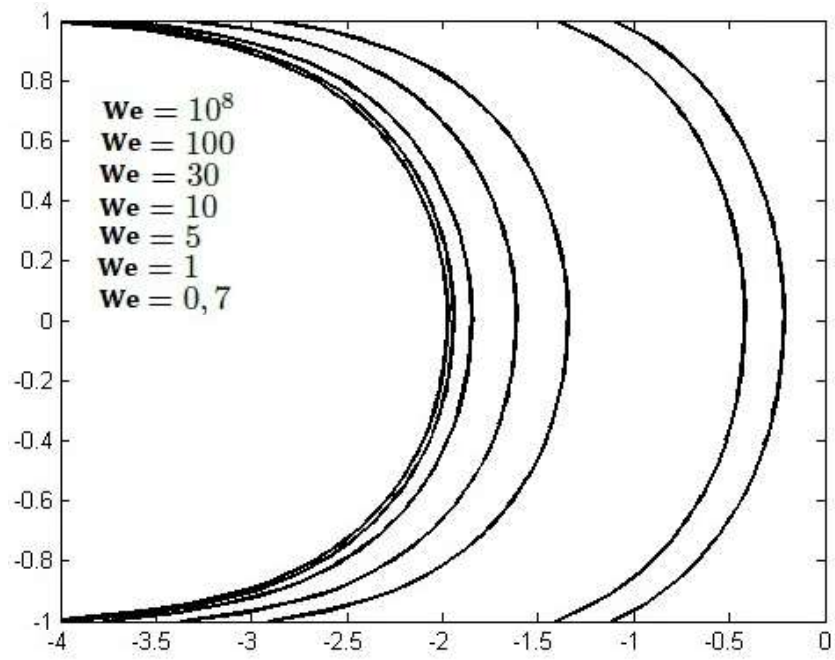


FIGURE 3.5 – Formes de surface libres pour différentes valeurs du nombre de Weber We avec $t_D = 0.14$

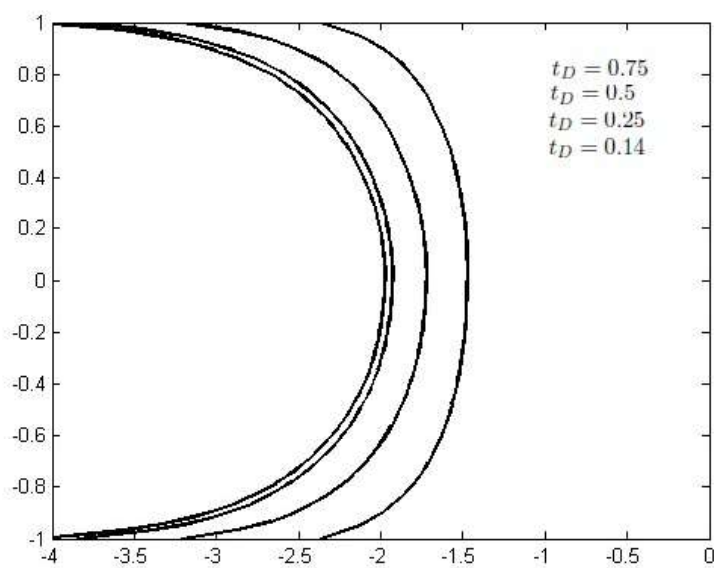


FIGURE 3.6 – Formes de surface libre pour le nombre de Weber $We = 10^8$ et différentes valeurs de t_D

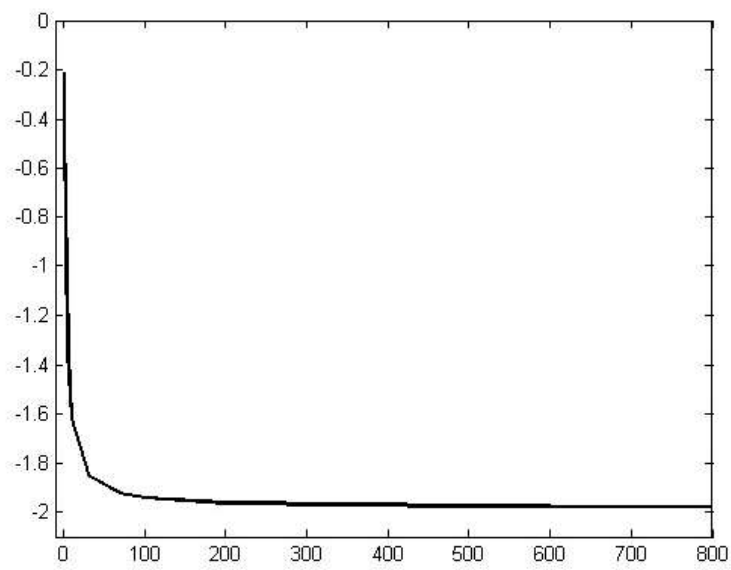


FIGURE 3.7 – La position du point tournant x_0 pour $t_D = 0.14$ et différentes valeurs de nombre de Weber

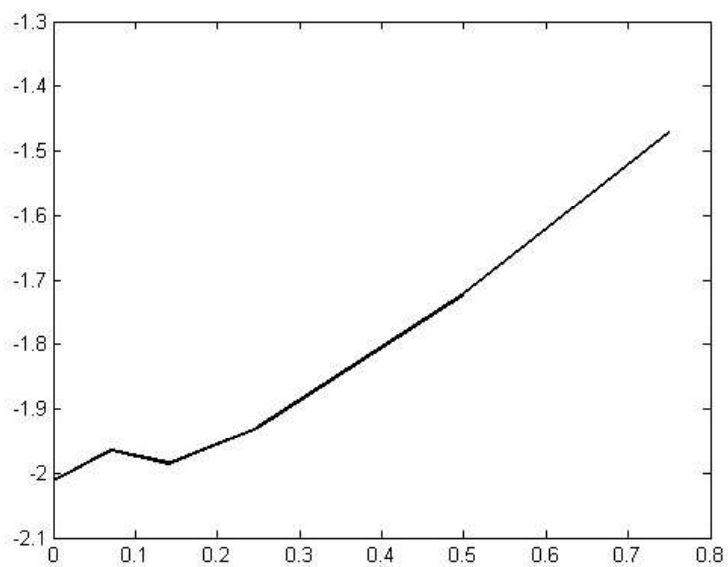


FIGURE 3.8 – La position du point tournant x_0 pour le nombre de Weber $We = 10^8$ et différentes valeurs de t_D

Chapitre 4

Application de la méthode d'équation intégral-différentielle à un jet dans un tube semi infini

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous traitons numériquement le même problème considéré dans le chapitre précédent mais on utilise pour la résolution une méthode différente dite méthode d'équation intégral-différentielle. Cette méthode est également utilisée de nombreux auteurs ([8], [10], [11], [21], [28], [29]). L'idée principale de cette méthode est d'utiliser le théorème d'intégrale de Cauchy pour reformuler le problème sous forme d'une équation intégral-différentielle. On constate que l'avantage de cette méthode est de traiter le problème considéré uniquement sur la surface libre. Ainsi on voit que le problème bidimensionnel se réduit à un problème unidimensionnel, ce que nous permet de faire une discrétisation uniquement sur la surface libre. On obtient un système non-linéaire mais non résoluble analytiquement. On applique la méthode de Newton pour donner une solution approchée à ce problème.

4.2 Position du problème

Voir le chapitre précédent

4.3 Formulation du problème

Nous reformulons maintenant le problème physique considéré dans le chapitre III sous forme d'une équation intégrale. D'abord, nous transformons le domaine de l'écoulement du plan z en un demi plan inférieur d'un autre plan ζ par la transformation

$$\zeta = \alpha + i\beta = e^{-\pi f} \quad (4.1)$$

Le tableau suivant présente la concrescence des points entre les deux plans :

les points .0	Plan f	Plan ζ
A	$\phi = -\infty, \psi = 1$	$\alpha = +\infty, \beta = 0$
B	$\phi = 0, \psi = 1$	$\alpha = 1, \beta = 0$
C	$\phi = +\infty, \psi = 1$	$\alpha = 0, \beta = 0$
C'	$\phi = 0, \psi = +\infty$	$\alpha = 0, \beta = 0$
D'	$\phi = -1, \psi = 0$	$\alpha = -\exp(-\pi), \beta = 0$
D	$\phi = 1, \psi = 0$	$\alpha = -\exp(\pi), \beta = 0$
O	$\phi = 0, \psi = 0$	$\alpha = -1, \beta = 0$

TABLE 4.1 – La position des principaux points du problème dans les deux plans

Par conséquent, la surface libre a été transformée sur l'axe réel positif du plan- ζ et les parois limites du tube ont été transformée sur l'axe réel négatif du plan- ζ , alors le domaine de l'écoulement dans le nouveau plan ζ est illustré dans la figure (4.1). En utilisant l'équation (4.1), les conditions (3.11) deviennent

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = 0 \quad \text{on, } -\infty \leq \alpha \leq \alpha_{D'} \\ \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{on, } \alpha_{D'} \leq \alpha \leq \alpha_D \\ \theta = -\pi \quad \text{on, } \alpha_D \leq \alpha \leq 0 \\ e^{2\tau} - \frac{2}{We} \left| \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right| e^\tau = 1 \quad \text{on, } 0 \leq \alpha \leq +\infty \end{array} \right. \quad (4.2)$$

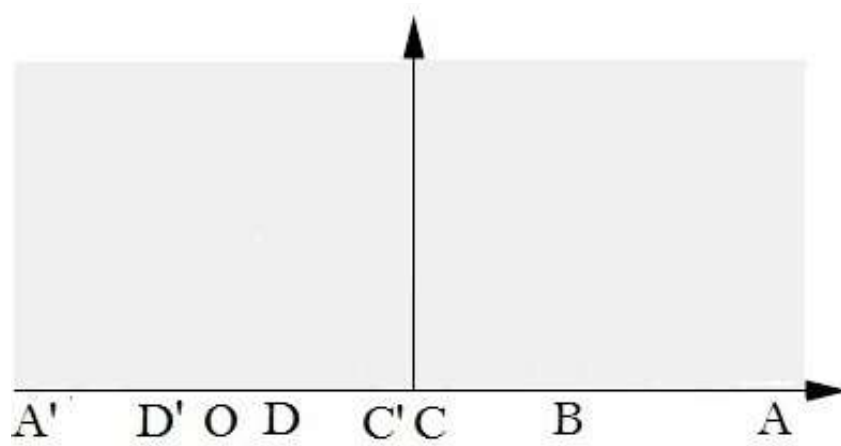


FIGURE 4.1 – L'écoulement dans le plan complexe ζ

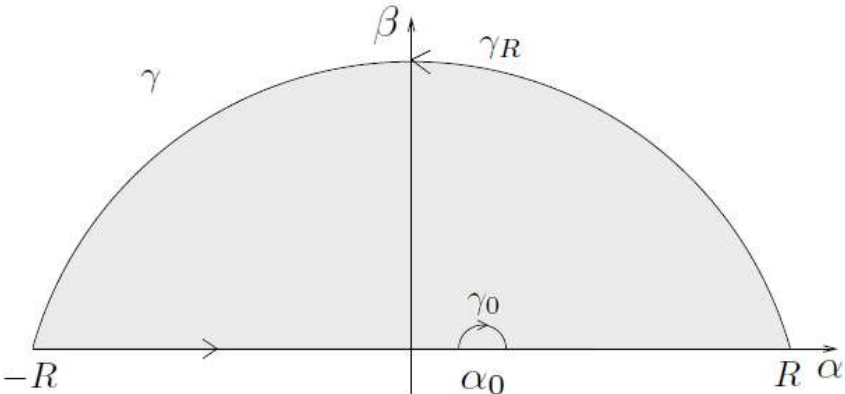


FIGURE 4.2 – Le chemin de l'intégration autour du contour γ

On introduit l'intégrale curviligne ou intégrale de contour de la fonction $\tau - i\theta$ sur un chemin fermé γ par

$$\oint_{\gamma} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta \quad (4.3)$$

Où α_0 est un point image d'un point quelconque sur la surface libre : i.e $\alpha_0 \in ABC$

On peut écrire l'intégrale (4.3) comme suit

$$\oint_{\gamma} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} = \int_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha_0 \quad (4.4)$$

D'après le théorème de Cauchy et comme la fonction $\tau - i\theta$ est analytique à l'intérieur du chemin qui est un domaine simplement connexe, alors son intégrale prise le long de ce contour est nulle alors on a :

$$\int_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha_0 = 0 \quad (4.5)$$

En regardant aux intégrales dans (4.5) séparément et en commençant par l'intégrale sur γ_0 , Soit

$$\zeta = \alpha_0 + re^{i\lambda}$$

Par simplification on trouve

$$\alpha = \alpha_0 + r \cos(\lambda)$$

$$\beta = r \sin(\lambda)$$

La dérivé de ζ par rapport à λ est donnée par

$$d\zeta = ire^{i\lambda} d\lambda$$

Donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta &= \int_{\pi}^0 \frac{\tau(\alpha_0 + r \cos(\lambda), r \sin(\lambda)) - i\theta(\alpha_0 + r \cos(\lambda), r \sin(\lambda))}{re^{i\lambda}} ire^{i\lambda} d\lambda \\ &= \int_{\pi}^0 [\tau(\alpha_0 + r \cos(\lambda), r \sin(\lambda)) - i\theta(\alpha_0 + r \cos(\lambda), r \sin(\lambda))] id\lambda \end{aligned} \quad (4.6)$$

Pour $r \rightarrow 0$

$$= [\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0)]i \int_{\pi}^0 d\lambda \quad (4.7)$$

$$= -i\pi(\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0)) \quad (4.8)$$

En remplaçant ce résultat dans (4.5) on obtient

$$\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0) = \frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \frac{1}{i\pi} \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (4.9)$$

Pour $R \rightarrow \infty$

1) Le second terme de cette équation précédent devient

$$\frac{1}{i\pi} \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha$$

2) On a $|\beta|$ tend vers $+\infty$, de la relation (4.1) on peut écrire β sous la forme suivante

$$\beta = \exp(-\pi\phi) \sin(\pi\psi) \quad (4.10)$$

On peut voir que lorsque $\phi \rightarrow -\infty$, l'écoulement devient un uniforme horizontal i.e. $u - iv \rightarrow 1$. D'après (3.7), on constate que $\tau - i\theta$ tends vers 0

Par conséquent, la limite de la première intégrale sur le côté droit de (4.9) et comme R tends vers $+\infty$ est

$$\frac{1}{i\pi} \int_{\gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta = 0 \quad (4.11)$$

L'équation (4.9) se réduit a

$$\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (4.12)$$

En prenant la partie réelle de (4.12) , la relation intégrale entre τ et θ , sur la surface libre, est obtenue.

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (4.13)$$

Où

$$\theta(\alpha) = \theta(\alpha, 0) \text{ et } \tau(\alpha) = \tau(\alpha, 0)$$

On utilise les conditions (4.2)

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = -\frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{\alpha_{D'}} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_{D'}}^{\alpha_D} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_D}^0 \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \right) \quad (4.14)$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = -\frac{1}{\pi} \left(\int_{\alpha_{D'}}^{\alpha_D} \frac{\frac{\pi}{2}}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_D}^0 \frac{\pi}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \right) \quad (4.15)$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} \log\left(\frac{\alpha_D - \alpha_0}{\alpha_{D'} - \alpha_0}\right) + \pi \log\left(\frac{-\alpha_0}{\alpha_D - \alpha_0}\right) + \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \right)$$

En utilisant une autre fois (4.2). Ces résultats signifient que (4.13) peuvent être réécrites

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{\alpha_D - \alpha_0}{\alpha_{D'} - \alpha_0}\right) - \log\left(\frac{-\alpha_0}{\alpha_D - \alpha_0}\right) - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (4.16)$$

Cette équation est donnée le long de la surface libre et donc en utilisant (4.1), avec $\psi = 0$ donne

$$\alpha = e^{-\pi\phi} \quad (4.17)$$

En substituant (4.17) dans (4.16) on trouve

$$\tau'(\phi_0) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{e^{\phi_D} - e^{\phi_0}}{e^{\phi_{D'}} - e^{\phi_0}}\right) - \log\left(\frac{-e^{\phi_0}}{e^{\phi_D} - e^{\phi_0}}\right) - \int_0^{+\infty} \frac{\theta'(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{\phi_0}} d\phi \quad (4.18)$$

Où $\tau'(\phi_0) = \tau(e^{-\pi\phi_0})$ et $\theta'(\phi) = \theta(e^{-\pi\phi})$

$$e^{2\tau'} - \frac{2}{We} \left| \frac{\partial\theta'}{\partial\phi} \right| e^\tau = 1 \quad (4.19)$$

En remplaçant (4.18) dans (4.19), on trouve une équation integro-différentielle non linéaire de l'inconnue θ

4.4 Procédure numérique

Pour résoudre l'équation integro-différentielle non linéaire obtenu dans la section précédente. On utilise la procédure numérique et avant tous ça. L'expression (4.18) est utilisée pour calculer τ le long de la surface libre. Il est nécessaire d'avoir des points, ϕ_0 , le long de la surface libre dont lesquelles les valeurs τ peuvent être évaluées.

Ceci se fait en créant une discrétisa de la fonction potentielle, sur la surface libre. i.e $0 < \phi < +\infty$

Soit

$$\phi_I = ((I - 1)\Delta) \quad I = 1, \dots, N. \quad (4.20)$$

Où $\Delta > 0$

$$\phi_I^m = \frac{\phi_{I+1} + \phi_I}{2} \quad I = 1, \dots, N - 1. \quad (4.21)$$

Tout d'abord, (4.18) est réécrit comme

$$\tau_I^m = \tau'(\phi_I^m) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{e^{\phi_D} - e^{\phi_I^m}}{e^{\phi_{D'}} - e^{\phi_I^m}}\right) - \log\left(\frac{-e^{\phi_I^m}}{e^{\phi_D} - e^{\phi_I^m}}\right) - \int_0^{+\infty} \frac{\theta'(\phi)e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{\phi_I^m}} d\phi \quad (4.22)$$

Ensuite, l'utilisation de la règle trapézoïdale donne

$$\tau_I^m = \tau'(\phi_I^m) = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{e^{\phi_D} - e^{\phi_I^m}}{e^{\phi_{D'}} - e^{\phi_I^m}}\right) - \log\left(\frac{-e^{\phi_I^m}}{e^{\phi_D} - e^{\phi_I^m}}\right) - \sum_{j=0}^N \frac{\theta_j e^{-\pi\phi_j} \Delta w_j}{e^{-\pi\phi_j} - e^{\phi_I^m}} \quad I = 1, \dots, N-1 \quad (4.23)$$

$$\tau_I^m = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{e^{-\pi} + e^{\phi_I^m}}{e^{\pi} - e^{\phi_I^m}}\right) - \log\left(\frac{e^{\phi_I^m}}{e^{-\pi} + e^{\phi_I^m}}\right) - \sum_{j=0}^N \frac{\theta_j e^{-\pi\phi_j} \Delta w_j}{e^{-\pi\phi_j} - e^{\phi_I^m}} \quad I = 1, \dots, N-1 \quad (4.24)$$

Où w_j est la fonction de pondération telle que

$$W_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & J = 2, \dots, N - 1 \\ 1 & \text{autrement} \end{cases}$$

On substitue (4.23) dans (4.19), et par l'utilisation de la discrétisation (4.21), un système d'équations non linéaires N-1 de N inconnues est obtenu

La dérivée $\frac{\partial \theta}{\partial \phi}$ aux points donnés par (4.23), est approximée par une différence finie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \phi} = \frac{\theta_{I+1} - \theta_I}{\Delta} \quad I = 1, \dots, N - 1 \quad (4.26)$$

L'équation (4.19) deviennent comme suit

$$e^{2 \times \tau_I^m} - \frac{2}{We} \left| \frac{\theta_{I+1} - \theta_I}{\Delta} \right| e^{\tau_I^m} = 1 \quad I = 1, \dots, N - 1 \quad (4.27)$$

On peut ajouté l'équation suivante

$$\theta_N = \frac{\pi}{2} \quad (4.28)$$

Maintenant nous avons un système de N équations non linéaires avec N inconnues

Pour calculer les valeurs θ_k pour différentes valeurs du nombre de Weber, on utilise la méthode de Newton

4.5 Forme de la surface libre

Les calculs numériques des sections précédentes, donner une solution en ce qui concerne les variables τ et θ . Ces variables sont maintenant utilisées pour obtenir l'équation du profil de la surface libre dans la forme paramétrique $x = x(\phi)$ et $y = y(\phi)$. En prenant les parties réelles et imaginaires de (3.7) on obtient

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \cos(\theta). \quad (4.29)$$

Et

$$\frac{\partial y}{\partial \phi} = \exp(-\tau) \sin(\theta), \quad (4.30)$$

Par l'approximation des valeurs des dérivés à ϕ_I^m pour $I = 1, \dots, N - 1$ (voir 4.21), une

différence centrale peut être utilisée pour donner les relations récursives suivantes

$$x_{I+1} = x_I + \Delta \exp(-\tau_I^m) \cos(\theta_I^m) \quad (4.31)$$

Et

$$y_{I+1} = y_I + \Delta \exp(-\tau_I^m) \sin(\theta_I^m) \quad (4.32)$$

Les valeurs de θ_I sont déjà été calculé dans la procédure numérique, mais un travail supplémentaire est nécessaire pour calculer les (θ_I^m) .

4.6 Résultats et discussion

4.6.1 Solution sans effet de tension de surface

Des résultats numériques sont obtenues lorsque le nombre de Weber α tend vers l'infini, c'est-à-dire lorsque l'effet de tension de surface tend vers zéro, le système (3.2.1) se réduit à :

$$e^{2 \times \tau_I^m} = 1 \quad I = 1, \dots, N - 1 \quad (4.33)$$

où $I = 1, 2, \dots, N$ et τ_I^m sont données par la relation (4.24).

Nous utilisons a méthode de résolution décrite ci-dessus pour résoudre le système (4.33). On trouve que nos résultats sont identiques au résultats que nous avons déjà trouvé dans le chapitre 2 voir le figure 4.3

4.6.2 Solution avec effet de tension $T \neq 0$

On utilise la la même procédure numérique pour résoudre le système non linéaire (4.19) pour différentes valeurs du nombre de Weber We .

le calcule numérique montre qu'il existe une valeur minimale.

$We = 8$ pour la quelle notre procédure numérique converge

Pour $We \geq 300$ tous les graphes décrivant la forme de la surface libre sont identiques et coïncident avec la solution exacte, on peut dire alors que de la tension de surface après cette valeur peut être négligée

Le figure 4.5 montre les différentes profiles de la surface libre pour $We \geq 10$ et les quelques valeurs différentes de H .

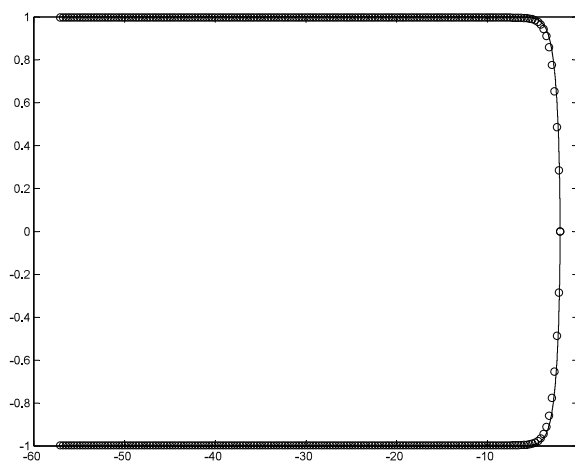


FIGURE 4.3 – Comparaison entre la solution exacte et la solution approché pour We tend vers l'infini, $N = 180$, $\Delta = 0.3$ et erreur = 10^{-16}

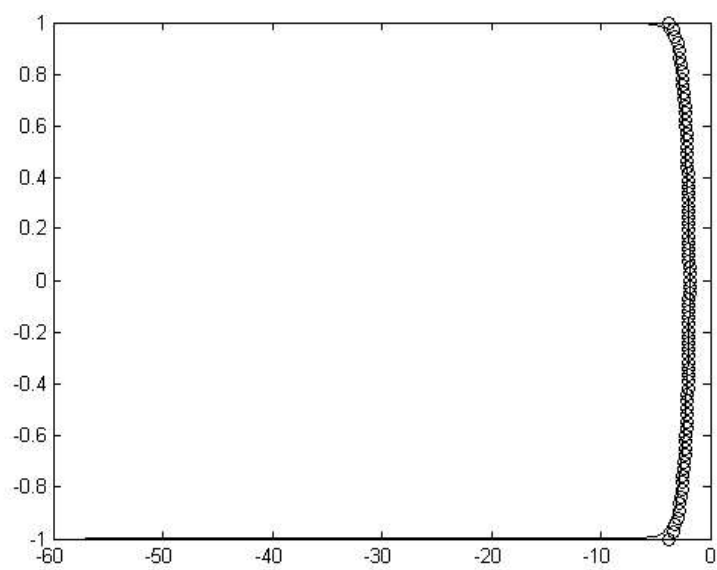


FIGURE 4.4 – Comparaison entre les deux méthode pour la même de nombre de Weber
 We tends vers l'infini

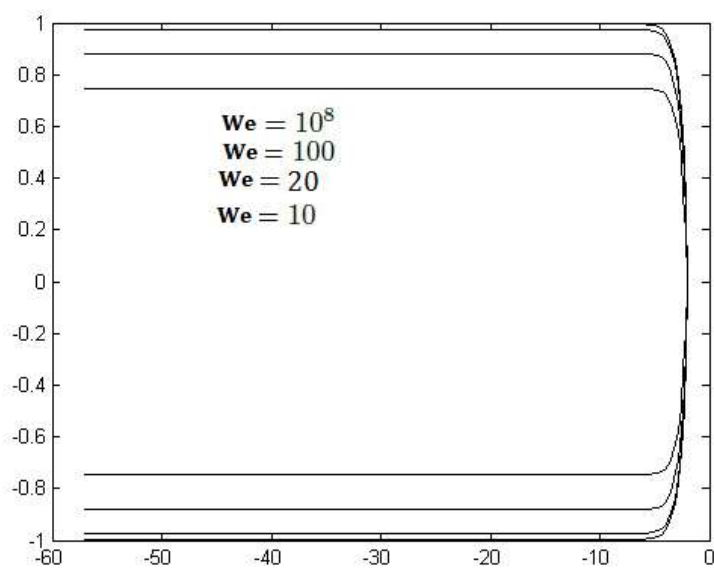


FIGURE 4.5 – Formes de surface libres pour différentes valeurs du nombre de Weber We et différentes H

Conclusion générale

Dans ce travail, nous affectons une étude mathématique d'un problème bidimensionnel d'un jet devant un mur de forme quelconque, dans le cas où l'effet de la tension de surface soit pris en considérations, due à cette cause le problème devient très difficile à cause de la condition non-linéaire sur la frontière libre du domaine de l'écoulement. Pour traiter ce problème on a utilisé des méthodes analytiques et numériques basés sur la théorie des variables complexes, nous pensons que l'ensemble des résultats suivants ont été atteints :

- Le premier était de donné une formulation mathématique du problème considéré, en utilisant les aspects théoriques de la fonction d'une variable complexe.
- Le second résultat test d'utiliser la théorie des lignes de courant libre et la transformation de Schwarz-Christoffel qui envoie le semi bande sur un demi-plan supérieur, pour trouver la solution exacte du problème dans le cas où l'effet de la tension de surface est négligé et les résultats obtenus fait l'objet d'un article apparu dans d'un journal de renommais [15].
- Ainsi, l'utilisation de la technique numérique basée sur les transformations conformes et la troncature de la série qui utilise les variables complexes. Elle a été utilisée avec succès pour calculer la solution approximée du jet pour différente valeurs de nombre de Weber, ainsi que cette étude a été publié dans une revue internationale [1].
- Enfin l'application de la méthode d'équation intégral-différentielle qui découle aussi de l'utilisation des transformations conformes et le théorème de Cauchy. Cette méthode a montré son efficacité pour trouver la solution numérique du problème.

Ces deux méthodes rentrent des simplifications très importantes sur le traitement de ce type de problème, dans notre cas elles permettent de réduire la dimension du problème, et de transformer le problème bidimensionnel considéré à un autre unidimensionnel. Nous constatons que les deux solutions trouvées par ces méthodes employées sont confondues pour les différentes valeurs de nombre de Weber considérées. Suite à ce travail et comme des perspectives, plusieurs idées sont apparues. Tout d'abord la généralisation du problème pour différentes configurations du mur, par exemple dans le cas d'un mur rectiligne ou courbe. Il paraît intéressant aussi de considérer le problème dans le cas tridimensionnel. Enfin, il est nécessaire d'employer d'autres méthodes numériques comme la méthode des éléments finies ou la méthode des volumes finis pour résoudre ce genre de problème.

Annexe A

Considérons une valeur principale de Cauchy dans le formulaire

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt \quad a < x < b. \quad (4.34)$$

Tout d'abord, un maillage également espacé est créé dans la région $[a,b]$. Ceci est fait en laissant

$$t_I = a + \frac{(b-a)}{(N-1)}(I-1) \quad I = 1, \dots, N$$

Où N est un nombre entier pair. Réécrire 4.34 dans le formulaire

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt = \int_a^b \frac{f(t) - f(x)}{t-x} dt + f(x) \int_a^b \frac{dt}{t-x}. \quad (4.35)$$

La deuxième intégrale sur le côté droit de 4.35 est une valeur principale de Cauchy, mais elle peut être évaluée analytiquement pour donner

$$\int_a^b \frac{f(x)}{t-x} dt = f(x) [\ln(t-x)]_a^b = 0 \quad (4.36)$$

La première intégrale n'est pas une valeur principale de Cauchy et peut donc être évaluée en utilisant la règle trapézoïdale pour donner

$$\sum_{I=1}^N \frac{f(t_I) - f(x)}{t_I - x} w_I \Delta, \quad (4.37)$$

Où $w_1 = w_N = \frac{1}{2}$ et $w_I = 1$ sinon. Ici $\Delta = \frac{(b-a)}{N-1}$ est la taille du maillage. 4.37 est réécrit pour donner

$$\sum_{I=1}^N \frac{f(t_I)}{t_I - x} w_I \Delta - f(x) \sum_{I=1}^N \frac{w_I \Delta}{t_I - x} \quad (4.38)$$

La deuxième somme est égale à zéro, en raison de la symétrie des points autour de x . Cela signifie que pour un maillage équidistant, avec $x = \frac{(a+b)}{2}$, une valeur de principe de Cauchy peut être évaluée en utilisant la règle trapézoïdale comme s'il s'agissait d'une intégrale ordinaire. Cela signifie que

$$\int_a^b \frac{f(t)}{t-x} dt = \sum_{I=1}^N \frac{f(t_I)}{t_I - x} w_I \Delta \quad (4.39)$$

Méthode de Newton pour la résolution d'un système d'équations non linéaire

$$F(X) = 0$$

Si on a un système d'équation non linéaires suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right. \quad (4.40)$$

Où f_1, f_2, \dots, f_n sont des fonctions réelles non linéaires des variables $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$.
le système 4.40 peut s'écrire sous la forme matricielle

$$f(X) = 0. \quad (4.41)$$

La méthode de Newton consiste à résoudre le système d'équation linéaires précédent en trouvant l'ensemble des n valeurs réelles : $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^t$ vérifiant les n équations du système 4.40.

Le système 4.40 se réduit à un système, en suivant les étapes suivantes :

En supposant les fonctions f_i sont des fonctions continument différentiables, on fait le développement de Taylor dans un voisinage X^k donné à la k -ième itération, on obtient

$$f_i(X^*) = f_i(X^k) + \sum_{j=1}^n (x_j^* - x_j^k) \frac{\partial f_i(X^k)}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n (x_j^* - x_j^k)(x_r^* - x_r^k) \frac{\partial^2 f_i(X^k)}{\partial x_j \partial x_r} + \dots = 0 \quad (4.42)$$

pour $i = 1, 2, \dots, n$

Si X^k est un estimé proche de X^* , les termes $(X_j^* - X_j^k)^m$, $m \geq 2$, sont négligeables et le système 4.42 devient

$$\sum_{r=1}^n (x_j^* - x_j^k) \frac{\partial f_i(X^k)}{\partial x_j} \simeq f_i(X^k), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.43)$$

Ou bien sous terme matricielle

$$E^{(k)} \Delta X^{(k)} = F^{(k)} \quad (4.44)$$

Où

$$E_{ij}^{(k)} = \frac{\partial f_i(X^k)}{\partial x_j}, \quad \Delta X_j^{(k)} = x_j^* - x_j^k, \quad F^{(k)} = -f_i(X^k) \quad (4.45)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$$

On obtient donc le système linéaire 4.44. Notant que les quantités $\Delta X_j^{(k)}$, $j = 1, 2, \dots, n$ sont les inconnues du système.

Pour obtenir la solution de ce système, on utilise la méthode de factorisation LU dans programme de MATLAB, afin d'obtenir les valeurs des inconnues $\Delta X^{(k)}$.

Pour obtenir une relation récurrente, on remplace $X^{(*)}$ par $X^{(k+1)}$ supposé une meilleure approximation que $X^{(k)}$ donc, on écrit :

$$\Delta X^{(k)} = X^{(k+1)} - X^{(k)} \quad (4.46)$$

Où $X^{(k+1)}$ est une meilleure approximation estimée de $X^{(*)}$;

$\Delta X^{(k)}$ est l'estime de l'erreur commise de l'approximation de $X^{(*)}$ par $X^{(k)}$.

On fait l'itération jusqu'à ce que : $|f_i(X^{(k+1)})| < \epsilon$, ϵ une erreur fixée à priori.

Annexe B

Code numérique pour le problème du chapitre 3.

```

PROGRAMME DE NEWTON
r=valeur , alpha= valeur, N= valeur, k=valeur, x0=valeur y0=valeur
*****
LA FORMULE QUI EXPRIME LES ANGLE SIGMA ET LA VALEUR INI-
TIALE DE a(k)
*****

for i=1 :N
a(i)=valeur
t(i)=-(pi/(2*N))*(i-1/2)
end
Nombre d'itération m
for m=1 :k
*****

CALCULS SUM1, SUM2, SUM3
*****

for i=1 :N
sum1(i)=0
sum2(i)=0
sum3(i)=0
end
for i=1 :N
for k=1 :N
sum1(i)=sum1(i)+a(k)*cos(2*(k-1)*t(i))
sum2(i)=sum2(i)+a(k)*sin(2*(k-1)*t(i))
sum3(i)=sum3(i)+2*(k-1)*a(k)*cos(2*(k-1)*t(i))
end
end
*****

ÉVALUATION DE LA FONCTION f
*****

for i=1 :N
f(i)=(1+r4-2*r2*cos(2*t(i)))(1/2)*(1-r2)(-1)*exp(2*sum1(i))-(pi*sin(t(i)))/alpha*

```

```
(1 + r^4 - 2 * r^2 * cos(2 * t(i)))^(1/4) * (1 - r^2)^( - 1/2) * exp(sum1(i)) * abs(-sum3(i) -
1/2 + (r^4 - 1)/(2 * (1 + r^4 - 2 * r^2 * cos(2 * t(i)))))) - 1
```

```
end
```

```
*****
```

RESOLUTION DE LA N*N SYSTEME LINEAIRE

```
*****
```

```
for i=1 :N
```

```
for j=1 :N
```

```
diff(i,j)=(1+r^4 - 2 * r^2 * cos(2 * t(i)))^(1/2) * (1 - r^2)^( - 1) * exp(2 * sum1(i)) * 2 * cos(2 *
(j - 1) * t(i)) - (pi * sin(t(i)))/alpha * (1 + r^4 - 2 * r^2 * cos(2 * t(i)))^(1/4) * (1 - r^2)^( -
1/2) * (cos(2 * (j - 1) * t(i)) * exp(sum1(i)) * abs(-sum3(i) - 1/2 + (r^4 - 1)/(2 * (1 + r^4 -
2 * r^2 * cos(2 * t(i)))))) - exp(sum1(i)) * sign(-sum3(i) - 1/2 + (r^4 - 1)/(2 * (1 + r^4 - 2 *
r^2 * cos(2 * t(i)))))) * (2) * (j - 1) * cos(2 * (j - 1) * t(i)))
```

```
end
```

```
end
```

```
u=inv(diff)
```

```
b=u*f'
```

```
a=a-b'
```

```
end
```

```
*****
```

Méthode d'Euler pour la résolution approchée d'une équation différentielle

```
*****
```

```
for i=1 :N
```

```
xd(i)=-2/(pi*sin(t(i))) * (1+r^4-2*r^2*cos(2*t(i)))^( - 1/4) * (1-r^2)^(1/2) * exp(-sum1(i)) *
cos(1/2 * atan((sin(2 * sum2(i)) + r^2 * sin(-2 * sum2(i) + 2 * t(i)))/(-cos(2 * sum2(i)) +
r^2 * cos(-2 * sum2(i) + 2 * t(i)))))) - t(i))
```

```
yd(i)=-2/(pi*sin(t(i))) * (1+r^4-2*r^2*cos(2*t(i)))^( - 1/4) * (1-r^2)^(1/2) * exp(-sum1(i)) *
sin(1/2 * atan((sin(2 * sum2(i)) + r^2 * sin(-2 * sum2(i) + 2 * t(i)))/(-cos(2 * sum2(i)) +
r^2 * cos(-2 * sum2(i) + 2 * t(i)))))) - t(i))
```

```
end
```

```
for i=1 :N-1
```

```
x(i+1)=x(i)+(pi/2*N)*xd(i+1)
```

```
y(i+1)=y(i)+(pi/2*N)*yd(i+1)
```

```
end
```

```
plot(x,y)
```

Code numérique pour le problème du chapitre 4

PROGRAMME DE NEWTON

delta=valeur , alpha= valeur, N= valeur, k=valeur, x0=valeur, y0=valeur

LA VALEUR INITIALE DE THETA

for i=1 :N

a(i)=valeur

end

LES POINTS SONT CRÉÉS DANS LE F-PLAN

for i=1 :N

phi(i)=(-N+(i-1)).*delta

end

for i=1 :N-1

t(i)=(phi(i+1)+phi(i))./2

end

for m=1 :valeur

CALCULS SUM1

for i=1 :N-1

sum1(i)=0

end

for i=1 :N-1

for k=1 :N

sum1(i)=sum1(i)+a(k)*exp(-pi*phi(k))*delta*w(k)./(exp(-pi*phi(k))-exp(-pi*t(i)))

end

end

for i=1 :N-1

to(i)=-1./2*log(abs((exp(-pi)+exp(-pi*t(i)))./(exp(-pi*t(i))+exp(pi))))-log(abs((-exp(-pi*t(i)))./(-exp(-pi*t(i))-exp(-pi)))))-sum1(i)

end

ÉVALUATION DE LA FONCTION f

```
*****
for i=1 :N-1
ff(i)=exp(2*to(i))-2./alpha*exp(to(i))*abs((a(i+1)-a(i))/delta)-1
end
ff(N)=a(N)-pi/2
*****
```

RESOLUTION DE LA N*N SYSTEME LINEAIRE

```
*****
for i=2 :N-1
w(i)=1
end
w(N)=1/2
w(1)=1/2
for i=1 :N
for j=1 :N
if i+1==j
dd(i,j)=1
else
dd(i,j)=0
end
end
end
for i=1 :N
for j=1 :N
if i==j
d(i,j)=1
else
d(i,j)=0
end
end
end
for i=1 :N-1
for j=1 :N
diff(i,j)=-2*((exp(-pi*phi(j)).*delta.*w(j))./(exp(-pi.*phi(j))-exp(-pi*t(i)))).*exp(2.*to(i))-
2./alpha.*(-(exp(-pi.*phi(j)).*delta.*w(j))./(exp(-pi.*phi(j))-exp(-pi*t(i)))).*exp(to(i)).*abs((a(i+1)-
```

```

a(i)./delta)+ sign(a(i+1)-a(i))*exp(to(i)).*(dd(i,j)-d(i,j))/delta )
end
end
for j=1 :N
diff(N,j)=d(N,j)
end
u=inv(diff)
b=u*ff'
a=a-b'
end

```

```

*****

```

TROUVER THETA AUX MIDPOINTS

```

*****

```

```

for i=1 :N-1
aa(i)=(a(i+1)+a(i))/2
end

```

```

*****

```

CALCUL DES COORDONNÉES CARTÉSIENNES

```

*****

```

```

x(1)=valeur
y(1)=valeur
for i=1 :N-1
x(i+1)=x(i)+delta*exp(-to(i))*cos(aa(i))
end
for i=1 :N-1
y(i+1)=y(i)+delta*exp(-to(i))*sin(aa(i))
end
plot(x,y)

```

Bibliographie

- [1] A. Amara, A. Gasmi ; *The effet of surface tension on the jet flow in U-shaped channel*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 118, No. 3 (2018), 625-635.
- [2] S. Amiroudine, J.L Battaglia ; *Mécanique des fluides*, Dunod, Paris, 2011
- [3] G. K. Batchelor ; *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1967.
- [4] D. Bernoulli and J. Bernoulli. *Hydrodynamics and Hydraulics*. Dover Publications Inc, (2009). Trans. by T. Carmody and H. Kobus, Preface by H. Rouse
- [5] B. Bouderah B, A. Gasmi A, H. Serguine ; *Zero Gravity of Free-Surface Jet Flow*, International Mathematical Forum,2, 66, (2007), 3273-3277.
- [6] B. Bouderah, H. Serguine, A. Gasmi ; *The Free-surface flow due to a jet against an infinite vertical plate in presence of surface tension*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 1 (2007), No. 43, 2119 - 2128.
- [7] B. Bouderah, H. Mekias ; *A cybernetic approach to the problem of cusp free-surface flow caused by a line sink on a sloping bottom*, Kybernetes 31, No. 2 (2002), 305-316.
- [8] G. Birkhoff, E. H. Zarantonello ; *Jets Wakes and Cavities*, New-York, Academic Press INC, 1957.
- [9] S. J. Chapman, J. M. Vanden Broeck ; *Exponential asymptotics and capillary waves*, Siam J. Appl. Math, Vol. 62, No.6 (2002), 1872–1898.
- [10] G. D. Crapper ; *Introduction to Water Waves*, Ellis Horwood Limited, 1984.
- [11] F. Dias, J. M. Vanden Broeck ; *Open Channel flows with submerged obstructions*, J. Fluid Mech, Vol. 206 (1989), 155-170.
- [12] L.K. Forbes, L.W. Schwartz ; *Free-surface flow over a semicircular obstruction*, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 114 (1982), 299-314.
- [13] L. Euler ; *Principes généraux du mouvement des fluides*. Mémoires de l'Academie des Sciences de Berlin, 11 :274-315, 1757.

- [14] H. Helmholtz; *Monatsber.* Berlin Akad, , (1868) 215-228.
- [15] A. Gasmi, A. Amara; *Free-surface profile of a jet flow in U-shaped channel without gravity effects*, Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang) Vol. 28 (2018), No. 3, 393-400
- [16] A Gasmi; *Two-dimensional cavitating flow past an oblique plate in a channel.* J. Comput. Appl. Math. Vol. 259 (2014), 828-834
- [17] A Gasmi; *Numerical study of two-dimensional jet flow issuing from a funnel*, Advances in Applied Mathematics, Edition : 87, Chapter : 11, Publisher : Springer International Publishing, Editors : Ali R. Ansari, pp.161-169, 2014.
- [18] A. Gasmi, H Mekias; *The effect of surface tension on the contraction coefficient of a jet*, *J. Phys. A : Math. Gen.* 36 (2003) 851-862.
- [19] M. I. Gurevich; *Theory of Jets in Ideal Fluids.* Academic Press, New York and London, 1965.
- [20] G. Kirchhoff. *J. reine u. angew. Math*, 70, 289-298, 1869.
- [21] H. Lamb; *Sir. Hydrodynamics.* academic press New York, 1945.
- [22] M. Lambert, R. Gélinas; *Éléments D'Analyse Complexe.* Presses de l'Université du Québec, 1994.
- [23] H. Mekias, J. M. Vanden-Broeck; *Subcritical flow with a stagnation point due to a source beneath a free surface*, *Phys. Fluids A*, vol 3 (1991), 2652.
- [24] H. Mekias, J. M. Vanden-Broeck; *Supercritical free surface flow with a stagnation point due to a submerged source*, *Physics of Fluids* 1, 1694 (1989),
- [25] C.L.M.H. Navier. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides.* Mem. Acad. R. Sci. Paris, 6 :389416, (1823).
- [26] J. R. Ockendon, S. D. Howison, A. A. Lacey and A. B. Movichan; *Applied Partial Differential Equations*, Revised Edition Oxford University Press, 2003.
- [27] A. Recking, D. Richard, G. Degoutte; *Torrents et rivières de montagne : Dynamique et aménagement*, France, Editions Quae, 2013.
- [28] J. M. Vanden Broeck; *Gravity-Capillary free surface flows*, Cambridge University Press, Cambridge 2010.
- [29] J. M. Vanden Broeck; *Bubbles rising in a tube and jets falling from a nozzle*, *Phys. Fluids*, Vol. 27 (1984), 1090.
- [30] J. M. Vanden Broeck; *Numerical calculations of the free surface flow under sluice gate*, *J. Fluid Mech*, 330 (1997), 339-347.

- [31] J. M. Vanden Broeck; *Free surface flow over a semi-circular obstruction in a channel*, Phys. Fluids, 30 (1987), 2315-2317.
- [32] J. M. Vanden-Broeck, J. B. Keeller; *Free surface ow due to a sink*, J. Fluid. Mech. vol. 175 (1987), 109-117.
- [33] J. M. Vanden Broeck, F. Dias; *Nonlinear free surface flow past a submerged inclined flat plate*, Phys. Fluids, A3 (1991), 2995-3000.

ملخص

في هذه الرسالة نهتم بإيجاد الحل الدقيق والعددي لمسألة ثنائية الأبعاد لجريان سائل أمام جدار ذو شكل كروي، نعتبر أن السائل غير قابل للانضغاط وغير لزج كما أن تأثيرات الجاذبية مهملة. تتميز هذه المسألة بالشرط غير الخطي المعطى بمعادلة برنولي على السطح الحر وكذلك الشكل المجهول لهذا الجريان، عند إهمال تأثير التوتر السطحي، يمكن الحصول على الحل الدقيق باستخدام نظرية خطوط الكمون الحرة. ولكن إذا اعتبرنا تأثير التوتر السطحي فإنه من الصعب إيجاد حل دقيق للمسألة، لذلك نلجأ إلى استخدام تقنية السلاسل وطريقة المعادلة التكاملية التفاضلية لإيجاد الحل التقريبي، وتعتمد كلتا الطريقتين على نظرية التحويلات المتطابقة، كما أن هاتين الطريقتين لهما ميزة تحويل المسألة ثنائية الأبعاد إلى مسألة أحادية البعد. وفي الأخير تمت مقارنة الطريقتين المستعملتين.

الكلمات المفتاحية: جريان ذو سطح حر – سائل غير قابل للانضغاط – توتر سطحي – التحويلات المتطابقة – طريقة التكامل التفاضلي – السلاسل.

Résumé

Dans cette thèse on s'intéresse à la résolution analytique et numérique d'un problème d'un jet bidimensionnel devant un mur de forme quelconque, le fluide est considéré comme incompressible, non visqueux et les effets de la gravité sont négligés. Ce problème est caractérisé par la condition non linéaire donnée par l'équation de Bernoulli sur la frontière libre et de la forme inconnue de ce jet. Dans le cas où l'effet de la tension de surface est négligé, la solution exacte est obtenue en utilisant la théorie des lignes de courant libre. Mais si on considère la tension superficielle le problème devient très difficile à résoudre analytiquement, on utilise la technique de troncature de la série et la méthode intégral-différentielle pour le résoudre. Ces deux méthodes sont basées sur les transformations conformes, et elles ont un avantage de transformer le problème bidimensionnel à un problème unidimensionnel. Une comparaison entre ces deux méthodes a été illustrée.

Mots-clés : Ecoulements à surface libre - Incompressible - Surface tension - Transformations conformes – Méthode intégral-différentielle – Troncature de la Série

Abstract

In this thesis we are interested in the analytical and numerical solutions of the two-dimensional jet flow problem past a wall of any shape, the fluid is considered to be incompressible, inviscid and the gravity effects are neglected. This problem is characterized by the non-linear condition given by the Bernoulli equation on the free surface and the unknown shape of the jet. In the case where the surface tension effect is neglected, the exact solution can be obtained using the free streamlines theory. But if we consider the surface tension effect the problem becomes very difficult to solve analytically, we use the technique of the series truncation and the integro-differential method to solve it. These two methods are based on conformal mapping, and they have an advantage to transform the two-dimensional problem into one-dimensional problem. A comparison between these two methods has been illustrated.

Keywords: Free surface flow - Incompressible – Surface tension - Conformal mapping - Integro-differential method - Series truncation.