

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



جامعة محمد بوضياف - المسيلة

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

كلية التكنولوجيا

FACULTE DE TECHNOLOGIE

قسم الإلكترونيك

DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

MEMOIRE DE MASTER

DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIE

FILIERE : ELECTRONIQUE

OPTION : SYSTEMES DES TELECOMMUNICATION NUMERIQUES

THEME

ETUDE DES METHODES DE CONCEPTION DES FILTRES

ELLIPTIQUES

Proposé et dirigé par :

Pr. Djamel Chikouche

Réalisé par :

Hamrit Abderaouf

N° D'ordre :

PROMOTION : JUIN 2016



Remerciements



Nous remercions tout d'abord le grand Allah pour l'achèvement de ce mémoire.

Nous exprimons nos gratitudees à Monsieur le président de jury d'avoir accepté

examiné ce mémoire.

Nous remercions Messieurs les membres de jury, d'avoir accepté de prendre part à ce

jury ainsi que pour l'intérêt qu'ils l'ont porté à ce travail.

Nous remercions Monsieur Djamel Chikouche, notre encadreur, pour ses conseils et

suggestions avisés qui nous aidés à mener à bien ce travail, et d'avoir rapporté à ce

mémoire ces remarques et conseils.

Table des matières

Remerciements	i
Table de matières.....	ii
Liste des figures.....	vi
Liste de tableau.....	viii
INTRODUCTION GÉNÉRALE.....	1
CHAPITRE 1 : LES FILTRES ANALOGIQUES	
1-1 INTRODUCTION.....	3
1-2 LES FILTRES ANALOGIQUES	3
1-3 LE FILTRE ACTIF.....	4
1-3-1 LES AVANTAGES DES FILTRES ACTIFS	4
1-3-2 LES APPLICATIONS DES FILTRES ACTIFS	4
1-3-3 LES TYPES DE FILTRE ACTIF	5
a) filtre passe bas.....	5
b) filtre passe haut.....	5
c) filtre passe bande	6
d) filtre coupe bande	7
1-4 SPÉCIFICATION DU FILTRE ANALOGIQUE (GABARIT)	8
1-5 FONCTION TRANSFERT D'UN FILTRE	9
1-6 FONCTION D'APPROXIMATION D'UN FILTRE ANALOGIQUE	10
1-6-1 Filtre de Butterworth	11
1-6-2 Filtre Chebyshev	12
1-6-3 Filtre elliptique	14
1-7 TRANSFORMATION DES SPÉCIFICATIONS.....	15
1-8 CONCLUSION :	16

CHAPITRE 2 : CONCEPTION DES FILTRES ELLIPTIQUES

2-1 INTRODUCTION.....	18
2-2 FONCTION ELLIPTIQUE DE JACOBI	18
2-3 FONCTION ROTIONNELLE ELLIPTIQUE ET ÉQUATION DE CALCUL DE L'ORDRE	26
2-4 TRANSFORMATIONS LANDEN	30
2-5 CONCEPTION DES FILTRES ELLIPTIQUES ANALOGIQUES	32
2-6 CONCLUSION	34

CHAPITRE 3 : SIMULATION ET TEST DES FILTRES ELLIPTIQUES

3-1 INTRODUCTION.....	36
3-2 PROGRAMATION DE CONCEPTION DES FILTRES ELLIPTIQUES	36
3-3 TEST DU PROGRAMMATION DE CONCEPTION	38
3-3-1 FILTRE PASSE BAS.....	38
3-3-2 LE FILTRE PASSE HAUT	42
3-3-3 FILTRE PASSE BANDE.....	45
3.3.4 FILTRE COUPE BANDE	50
3.4 ÉTUDE DU AUGMENTATION DE L'ORDRE	53
3.4.1 FILTRE PASSE BAS	53
3-4-2 FILTRE PASSE BANDE.....	58
3-5 CONCLUSION	62
CONCLUSION GÉNÉRALE	63
REFERENCES	64
Résumé	

Liste des figures

Figure (1.1) (a) filtre actif , (b) filtre passif.....	4
Figure (1.2) Circuit d'un filtre actif passe bas	5
Figure (1.3) Réponse en fréquence d'un filtre passe bas	5
Figure (1.4) Circuit d'un filtre actif passe haut.....	6
Figure (1.5) Réponse en fréquence d'un filtre passe haut.....	6
Figure (1.6) Circuit d'un filtre actif passe bande	7
Figure (1.7) Réponse en fréquence d'un filtre passe bande	7
Figure (1.8) Circuit d'un filtre actif coupe bande.	8
Figure (1.9) Réponse en fréquence d'un filtre coupe bande.	8
Figure (1.10) Gabarit d'un filtre passe bas.....	9
Figure (1.11) Fonction de transfert d'un filtre analogique	9
Figure (1.12) Réponse fréquentielle en amplitude d'un filtre Butterworth passe bas.....	12
Figure (1.13) Réponse fréquentielle en amplitude d'un filtre chebyshev de type 1 passe bas	13
Figure (1.14) Réponse fréquentielle en amplitude d'un filtre Chebyshev de type 2 passe bas	14
Figure (1.15) Réponse fréquentielle en amplitude d'un filtre elliptique passe bas.....	15
Figure (2.1) Intégrales elliptiques complètes $K(k)$ et $K'(k)$ Où $K(0) = K'(1) = \pi / 2$	20
Figure (2.2) Fonctions elliptiques sn et cd	21
Figure (2.3) La fonction dn avec le module complémentaire $k = 0,8$ et $k' = 0,6$	22
Figure (2.4) Le rectangle fondamental.	23
Figure (2.5) Pôles / zéros et les modèles de la fonction $f(z, k)$	23
Figure (2.6) Région fondamentale, les correspondances quadrant, et le rectangle période de la fonction $w = cd(z, k)$	24
Figure (3.1) Organigramme de conception d'un filtre elliptique.....	37
Figure (3.2) Schéma de simulation d'un fonction transfert.	38
Figure(3.3) La réponse fréquentielle en amplitude et en phase exemple 1.....	39

Figure(3.4) Simulation du filtre passe bas conçu	39
Figure(3.5) Les réponses fréquentielles en amplitude et en phase du filtre passe bas elliptique conçu.	41
Figure(3.6) Simulation du filtre passe bas elliptique conçu.....	41
Figure(3.7) réponses fréquentielles en amplitude et en phase du filtre passe haut elliptique conçu	43
Figure(3.8) Simulation du filtre passe haut conçu	43
Figure(3.9) Les réponses fréquentielles en amplitude et en phase du filtre passe haut elliptique conçu	44
Figure(3.10) Simulation du filtre passe haut elliptique conçu.	45
Figure(3.11) La réponse fréquentielle en amplitude et en phase du filtre passe bande elliptique conçu	46
Figure(3.12) Simulation du filtre passe bande elliptique conçu.....	47
Figure(3.13) La réponse fréquentielle en amplitude et en phase du filtre passe bande elliptique conçu.	48
Figure(3.14) Simulation du filtre passe bande elliptique conçu.....	49
Figure(3.15) La réponse fréquentielle en amplitude et en phase du filtre coupe bande elliptique conçu	50
Figure(3.16) Simulation du filtre coupe elliptique conçu	51
Figure(3.17) La réponse fréquentielle en amplitude et en phase du filtre coupe bande elliptique conçu	52
Figure(3.18) Simulation du filtre coupe bande conçu.....	52
Figure (3.19) la réponse en amplitude du filtre passe bas.....	53
Figure (3.20) la réponse en amplitude du filtre passe bas.....	54
Figure (3.21) la réponse en amplitude du filtre passe bas.....	54
Figure (3.22) la réponse en amplitude du filtre passe bas.....	55
Figure (3.23) la réponse en amplitude du filtre passe bas.....	55
Figure (3.24) la réponse en amplitude du filtre passe bas.....	56

Figure (3.25) la réponse en amplitude du filtre passe bas.....	56
Figure (3.26) la réponse en amplitude du filtre passe bas.....	57
Figure (3.27) La réponse en amplitude du filtre passe bande	58
Figure (3.28) La réponse en amplitude du filtre passe bande	58
Figure (3.29) La réponse en amplitude du filtre passe bande	59
Figure (3.30) La réponse en amplitude du filtre passe bande	59
Figure (3.31) La réponse en amplitude du filtre passe bande.....	60
Figure (3.32) La réponse en amplitude du filtre passe bande	60
Figure (3.33) La réponse en amplitude du filtre passe bande	61
Figure (3.34) La réponse en amplitude du filtre passe bande	62

Liste des tableaux

Tableau (1.1) Transformation des spécifications (passe bas vers un autre type de filtre)	14
--	----

Introduction Générale

On appelle signal une représentation physique qui transporte une information depuis une source vers un destinataire. Le terme signal vient surtout du génie électrique : c'est une grandeur physiquement mesurable par un capteur, pouvant varier avec le temps. Ce terme désigne aujourd'hui une grande variété de signaux physiques rencontrés, comme les signaux de parole ou de musique, les signaux radars ou bien les images et les vidéos. Un signal aura donc souvent la dimension d'un temps (par exemple, un signal de parole est la mesure de la variation de la pression d'air au cours du temps), mais aura de façon générale une dimension vectorielle (1D pour le temps, 2D pour les images chaque dimension étant les coordonnées d'un point lumineux, 3D pour la vidéos etc).

Un des traitements de signal le plus principal est le filtrage. Le filtrage consiste à sélectionner ou supprimer certaines composantes fréquentielle du signal. Il est utilisé pour supprimer la partie du signal non désirée qu'on appelle bruit pour ne préserver que le signal pertinent. On suppose dans cette étude que le spectre de fréquence du signal est différent de celui du bruit. D'où la notion de déterminisme dans l'approche de conception. La linéarité prévoit que le théorème de superposition est applicable et l'invariance des coefficients du filtre suppose que les signaux en question soient de nature stationnaire. On distingue quatre catégories de filtres : (Passe bas. Passe haut. Passe-bande. Coupe bande).

Notre travail consiste à faire une étude descriptive de ce domaine important du filtrage elliptique analogique. Pour ce faire, nous avons opté pour le plan qui suit :

Le premier chapitre représente une étude générale sur les filtres analogiques actif et explique la fonction d'approximation d'un filtre analogique (butterworth, chebyshev type 1, chebyshev type 2 et elliptique) , la fonction de transfert et la transformation de spécifications du passe bas vers autre type.

Le deuxième chapitre consiste à présenter les méthodes des conception des filtres elliptiques par utilisation de fonctions elliptique de Jacobi.

Dans le dernier chapitre nous avons présenté une étude des autres type de filtre elliptique (passe bas, passe haut, passe bande et coupe bande).

A la fin, le manuscrit est clôturé par une conclusion générale résumant le travail effectué.

CHAPITRE 1

LES FILTRES ANALOGIQUES

CHAPITRE 1

LES FILTRES ANALOGIQUES

1-1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, on donne un bref survol sur les filtres analogiques actifs ,on définit le filtrage comme une forme de traitement de signal, obtenu en envoyant le signal à travers un ensemble de circuits électroniques, qui modifient son spectre de fréquence et sa phase et donc sa forme temporelle.

Ce filtrage agit sur le signal d'entre de deux manières :

- soit éliminer ou affaiblir des fréquences parasites indésirables.
- soit isoler dans un signal complexe la ou les bandes de fréquences utiles.

1-2 LES FILTRES ANALOGIQUES

On distingue deux catégories :

1- les filtres passifs qui font appels essentiellement à des inductances de haute qualité et des condensateurs. Jusque dans les années 70, c'était les seuls filtres conçus. Ils sont actuellement utilisés pour les hautes fréquences (Utilisation de quartz).

2- les filtres actifs sont constitués de condensateurs, de résistances et d'éléments actifs qui sont essentiellement des AIL. Ils sont moins encombrants, faciles à concevoir et moins coûteux que les filtres passifs mais restent limités en fréquence ($< 1\text{MHz}$ à cause de l'AIL). Ils consomment plus et nécessitent une source alimentation.

Remarque :

Depuis le début des années 80, on avec la naissance des filtres actifs à capacité commutée. Ils permettent de programmer la fréquence de coupure et ils sont facilement intégrables en technologie MOS.

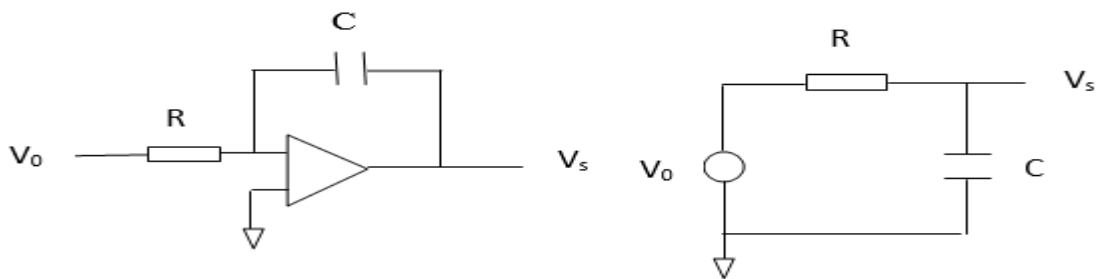


Figure (1.1) (a) Filtre actif, RC À base d'un amplificateur opérationnel. (b) Filtre passif RC (Passe bas).

1-3 LE FILTRE ACTIF

Un filtre actif utilise des amplificateurs opérationnels avec des résistances et des condensateurs pour réaliser la fonction. Les inductances, qui peuvent être grandes et volumineuses, ne sont pas nécessaires.

1-3-1 LES AVANTAGES DES FILTRES ACTIFS

Les filtres actifs présentent de nombreux avantages par rapport aux filtres passifs [5] :

- Les filtres actifs sont plus économiques que les filtres passifs.
- Les composants utilisés dans les filtres actifs sont de plus petite taille que les filtres passifs.

1-3-2 LES APPLICATIONS DES FILTRES ACTIFS

- Dans les systèmes de communication, les filtres actifs sont utilisés pour supprimer le bruit, et isoler une seule communication des nombreux canaux afin d'éviter les retombées des bandes adjacentes et pour récupérer le signal message d'origine à partir du signal modulé.
- Dans les systèmes d'instrumentation, les ingénieurs utilisent des filtres pour sélectionner une composante de fréquence souhaitée et supprimer les composantes indésirables. Nous pouvons utiliser ces filtres pour limiter la bande passante des signaux analogiques avant de les convertir en signaux numériques.
- Dans les systèmes audio, les ingénieurs utilisent ces filtres dans les réseaux de croisement pour envoyer des fréquences différentes à différents haut-parleurs.
- Dans les systèmes biomédicaux, ces filtres sont utilisés pour l'interface des capteurs psychologiques avec l'enregistrement des données et des équipements de diagnostic. [5]

1-3-3 LES TYPES DE FILTRE ACTIF

a- Le filtre actif passe bas

Un filtre passe-bas est un filtre qui laisse passer des signaux avec une fréquence inférieure à une fréquence de coupure particulière, et atténue les signaux avec des fréquences supérieures à la fréquence de coupure. La grandeur d'atténuation pour chaque composante fréquentielle dépend de la conception du filtre. Le circuit d'un filtre actif passe bas a été représenté sur sa figure (1.2) et la réponse en fréquence à la figure (1.3) [5].

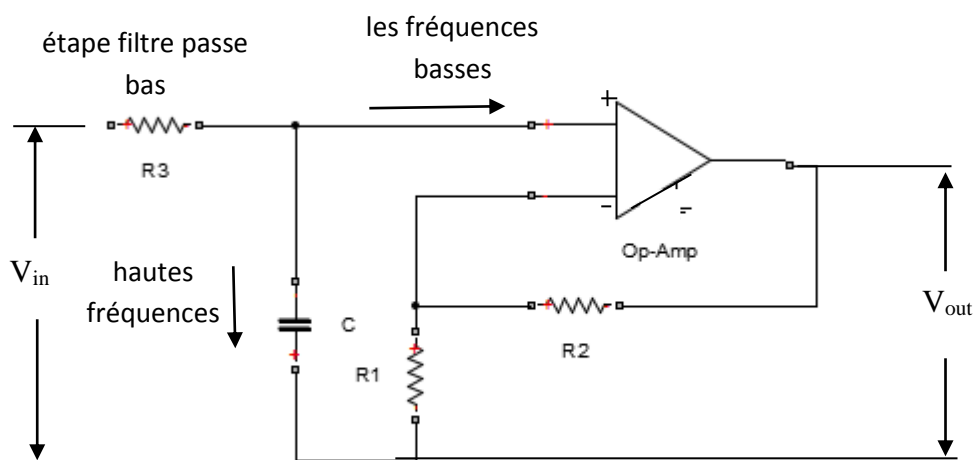


Figure (1.2) Circuit d'un filtre actif passe bas.

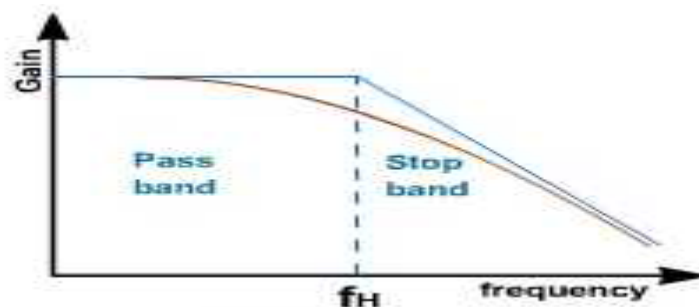


Figure (1.3) Réponse en fréquence d'un filtre passe bas.

b- Le filtre actif passe haut

Un filtre passe-haut est un filtre électronique qui laisse passer des signaux de haute fréquence mais atténue les signaux ayant des fréquences inférieures à la fréquence de coupure. Un filtre passe-haut est généralement modélisé comme un système linéaire invariant dans le

temps. La figure 4 représente le circuit d'un filtre actif passe haut et la figure (1.4) montre sa réponse en fréquence (1.5), [5] :

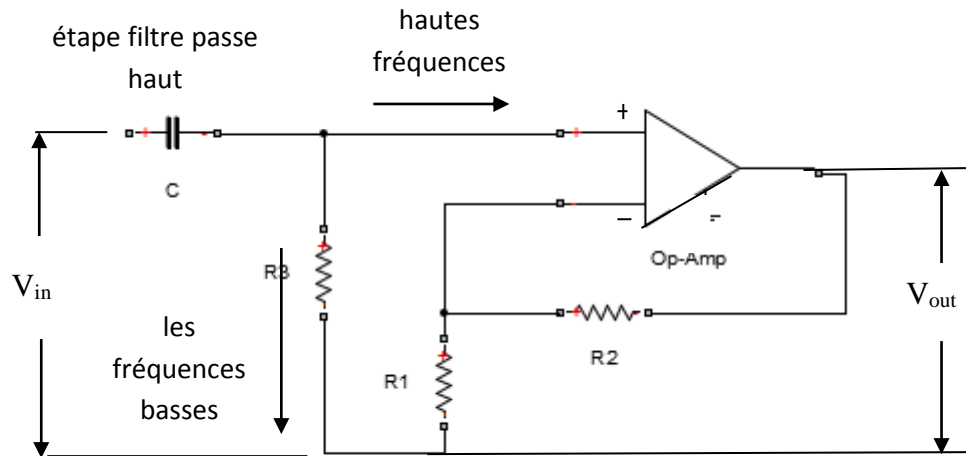


Figure (1.4) Circuit d'un filtre actif passe haut.

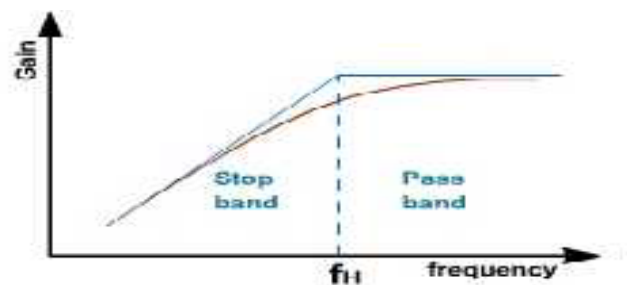


Figure (1.5) Réponse en fréquence d'un filtre passe haut.

c- Le filtre actif passe bande

Comme le nom l'indique, un filtre passe-bande est une où seule circuit qui laisse passer les signaux de fréquences appartenant à la bande autorisée. Toutes les fréquences en dehors de la bande requise sont atténuées. Il existe deux principaux domaines d'intérêt dans la réponse du filtre. Ce sont la bande passante où le filtre laisse passer les signaux et de la bande d'arrêt où les signaux sont atténués. La figure (1.6) représente le circuit d'un filtre actif passe bande et la figure (1.7) illustre la réponse en fréquence. [5] :

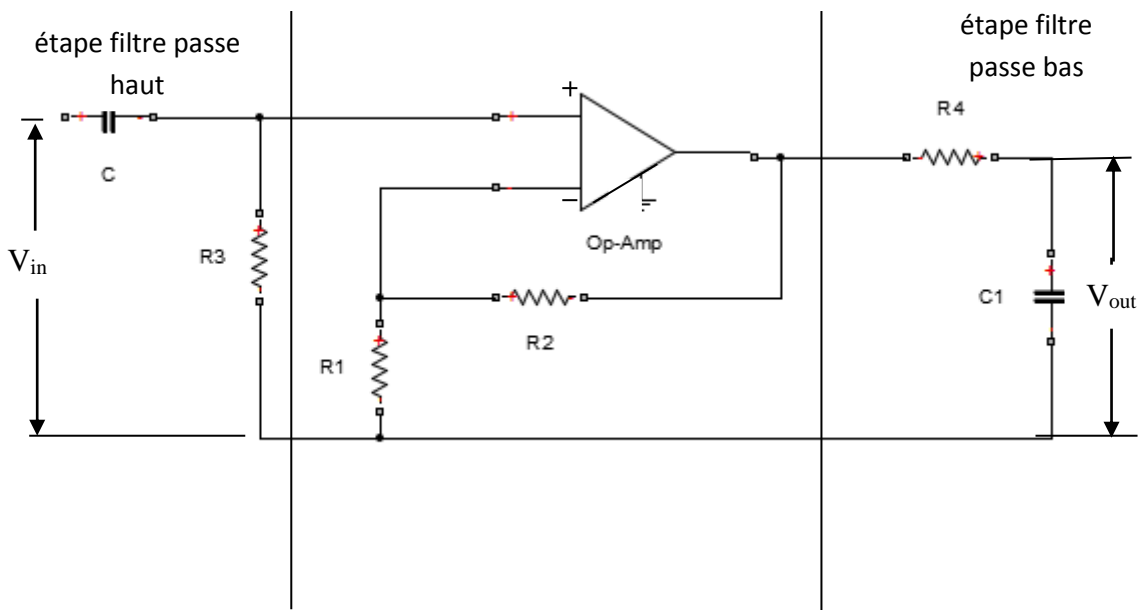


Figure (1.6) Circuit d'un filtre actif passe bande.

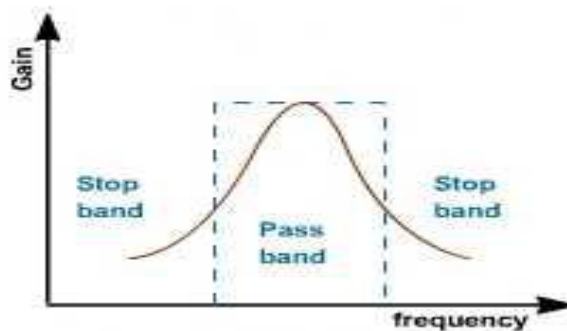


Figure (1.7) Réponse en fréquence d'un filtre passe bande.

d- Le filtre actif coupe bande

Le filtre actif coupe bande est un circuit qui laisse passer les signaux dont les fréquences sont au-dessus et au-dessous d'une gamme particulière fixée par les valeurs des composants. La figure (1.8) montre le circuit d'un filtre actif coupe bande et la figure (1.9) illustre sa réponse en fréquence [5].

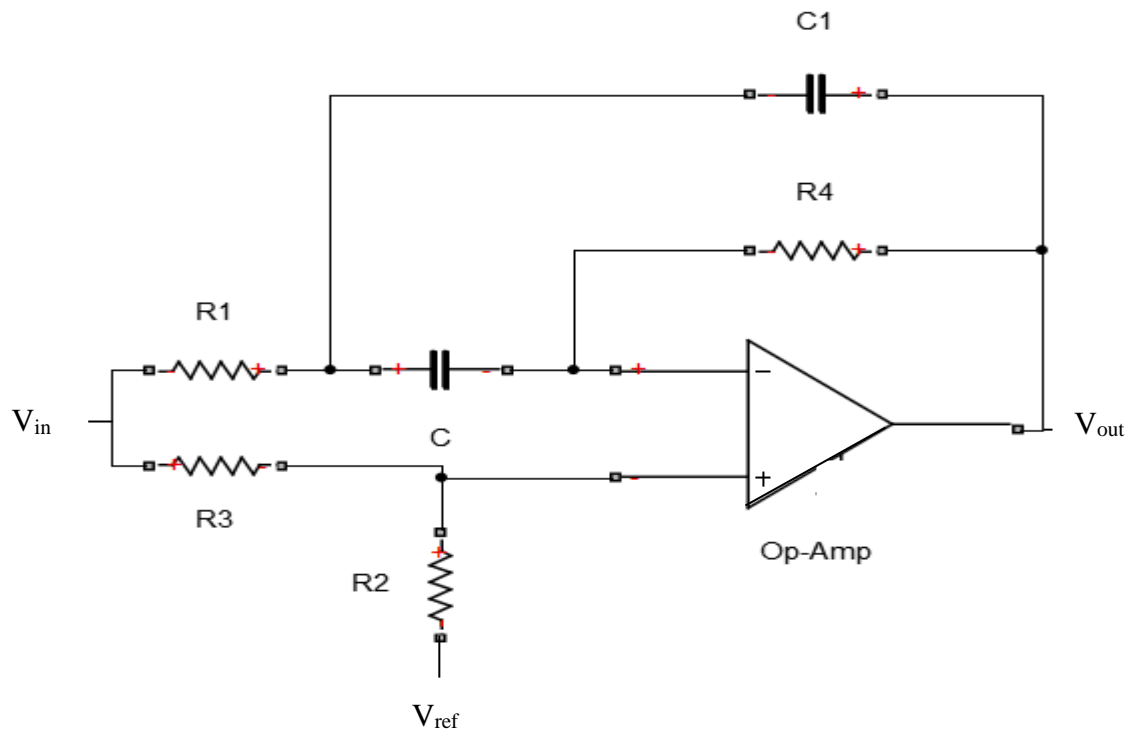


Figure (1.8) Circuit d'un filtre actif coupe bande.

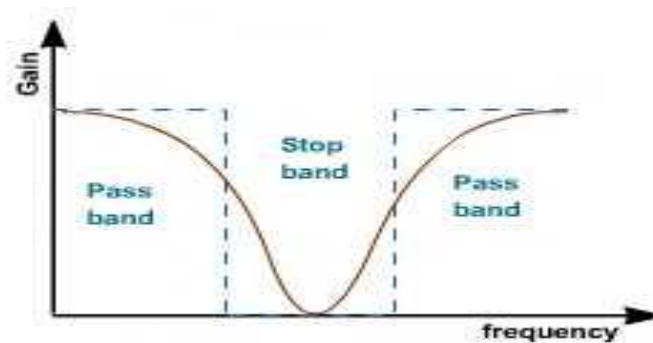


Figure (1.9) Réponse en fréquence d'un filtre coupe bande.

1-4 SPÉCIFICATION DU FILTRE ANALOGIQUE (GABARIT)

Pour la conception d'un filtre, les paramètres suivants ω_p , ω_s , A_p , A_s doivent être bien définis.

Un filtre idéal présent :

- un affaiblissement nul dans la bande de fréquence que l'on désire conserver (Bande passante).
- un affaiblissement infini dans la bande que l'on désire éliminer (Bande atténuée).

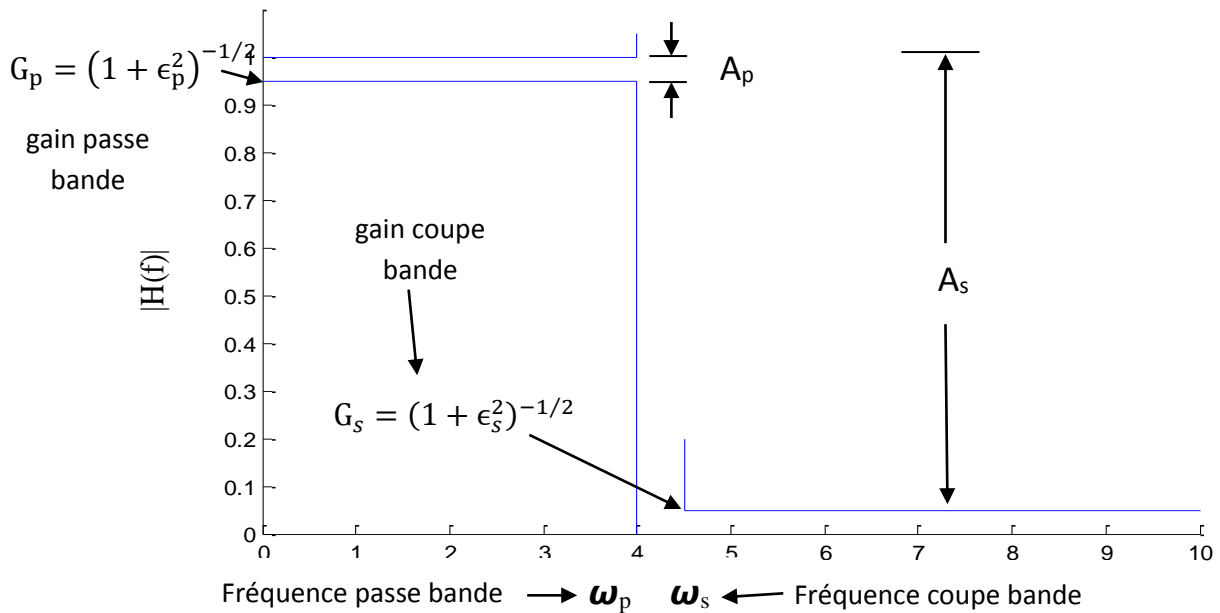


Figure (1.10) Gabarit d'un filtre passe bas.

Les critères de performance primaires d'un filtre sont généralement évalués en termes de réponse fréquentielle en amplitude.

Un critère supplémentaire pouvant être utilisé est la réponse en phase linéaire dans le domaine fréquentielle [6].

1-5 FONCTION TRANSFERT D'UN FILTRE

Le comportement d'un filtre est défini par l'étude fréquentielle de la fonction de transfert entre la tension de sortie et la tension d'entrée du filtre.

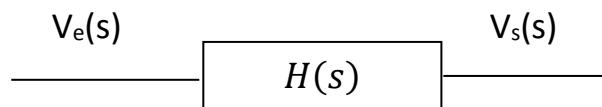


Figure (1.11) Fonction de transfert d'un filtre analogique .

La fonction de transfert d'un filtre analogique dans le domaine de Laplace est exprimée par l'équation suivante :

$$H(s) = \frac{V_s(s)}{V_e(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0}{s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_0} = \frac{A(s)}{B(s)} \tag{1.4}$$

On

$$H(s) = \frac{a_m (s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \tag{1.5}$$

Les symboles a_k et b_k sont respectivement les coefficients du polynôme $A(s)$ du numérateur et $B(s)$ du dénominateur, on exige qu'ils soient réels pour synthétiser un filtre réalisable. z_k et p_n sont appelés les zéros et les pôles de la fonction de transfert. Les zéros et les pôles peuvent être imaginaires, mais ils doivent exister sans forme de paires complexes conjuguées. Le domaine de Laplace a une correspondance une à une vers le domaine des fréquences et on obtient les caractéristiques fréquentielle en remplaçant s par $j\omega$. La puissance maximale à laquelle le terme s est soulevée dans le numérateur ou le dénominateur est l'ordre de la fonction de transfert. Une fonction de transfert du filtre est complètement spécifiée par son ordre et la valeur de ses coefficients pour tous les termes (s ou la valeur équivalente de toutes les paires de pôles -Zeros). La complexité d'un filtre est directement corrélée à son ordre [6].

$H(s)$ peut être écrite sous la forme factorisée:

$$H_a(s) = H_0 \left[\frac{1}{1 - s/p_{a0}} \right]^r \prod_{i=1}^L \left[\frac{(1 - s/z_{ai})(1 - s/z_{ai}^*)}{(1 - s/p_{ai})(1 - s/p_{ai}^*)} \right] \quad (1.6)$$

où L est le nombre de sections analogiques du deuxième ordre, lié à l'ordre du filtre analogique [4] : $N = 2L + r$ $\begin{cases} r = 0 & N \text{ est pair} \\ r = 1 & N \text{ est impair} \end{cases}$,

$$H_0 = \begin{cases} 1 & , \text{ Butterworth, Chebyshev, type 2} \\ G_p^{1-r} & , \text{ Chebyshev, type 1, Elliptique} \end{cases}$$

1-6 FONCTION D'APPROXIMATION D'UN FILTRE ANALOGIQUE

Les réponses en amplitude des filtres prototype passe bas analogiques d'ordre élevé de Butterworth, Chebyshev et elliptiques que nous considérons dans cette section sont exprimées par l'équation [4] :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_p^2 F_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)} \quad (1.8)$$

où N est l'ordre du filtre analogique, ϵ est une constante, et $F_N(\omega)$ est une fonction de la fréquence normalisée $\omega = \frac{\Omega}{\Omega_p}$ donnée par:

$$F_N(\omega) = \begin{cases} \omega^N & \text{Butterworth} \\ C_N(\omega) & \text{Chebyshev, type 1} \\ 1/C_N(\omega^{-1}) & \text{Chebyshev, type 2} \\ \text{cd}(NuK_1, k_1), & \omega = \text{cd}(uK, k), \text{ Elliptique} \end{cases} \quad (1.9)$$

1-6-1 Filtre de Butterworth

Ces filtres de Butterworth ont les caractéristiques suivantes[1] :

- La réponse d'amplitude est presque constante (égale à 1) à des fréquences plus basses. Cela signifie que la bande passante est plus plate.
- La réponse est monotone décroissante à partir des fréquences coupées spécifiées.
- Le gain maximal se produit à $\Omega = 0$, et il est $|H(0)| = 1$.

La réponse en fréquentielle en amplitude de filtres passe-bas Butterworth est caractérisée par la relation :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega/\Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + \epsilon_p^2 (\Omega/\Omega_p)^{2N}} \quad (1.10)$$

Où N est l'ordre du filtre. Nous pouvons déterminer l'ordre de ce filtre passe-bas Butterworth par la formule donnée par l'équation (1.5), [7] :

$$N = \frac{\log(10^{A_s/10} - 1)}{2 \log \frac{\Omega_s}{\Omega_c}} \quad (1.11)$$

pour le filtre Butterworth ,la réponse en amplitude diminue de façon monotone lorsque la fréquence augmente. Lorsque le nombre du filtre augmente, la réponse en amplitude du filtre Butterworth se rapproche plus étroitement de la réponse idéale. Le filtre Butterworth une reponse en amplitude plus plate, La réponse en phase d'un filtre de Butterworth devient non-linéaire lorsque N augmente , [2].

Nous obtenons l'expression suivante pour la fonction de transfert analogique dans le cas se l'approximation de Butterworth,[4] :

$$H_a(s) = \left[\frac{g\beta + g_0s}{\beta + s} \right]^r \prod_{i=1}^L \left[\frac{(g^2\beta^2 + 2gg_0s_i\beta s + g_0^2s^2)}{(\beta^2 + 2s_i\beta s + s^2)} \right] \quad (1.12)$$

où nous définissons les paramètres:

$$\begin{aligned}
 g &= G^{1/N} & g_0 &= G_0^{1/N} & \beta &= \epsilon^{-1/N} \Omega_p & s_i &= \sin \theta_i \\
 \theta_i &= \frac{(2i-1)\pi}{2\pi}, & & & & & & i = 1, 2, \dots, L
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

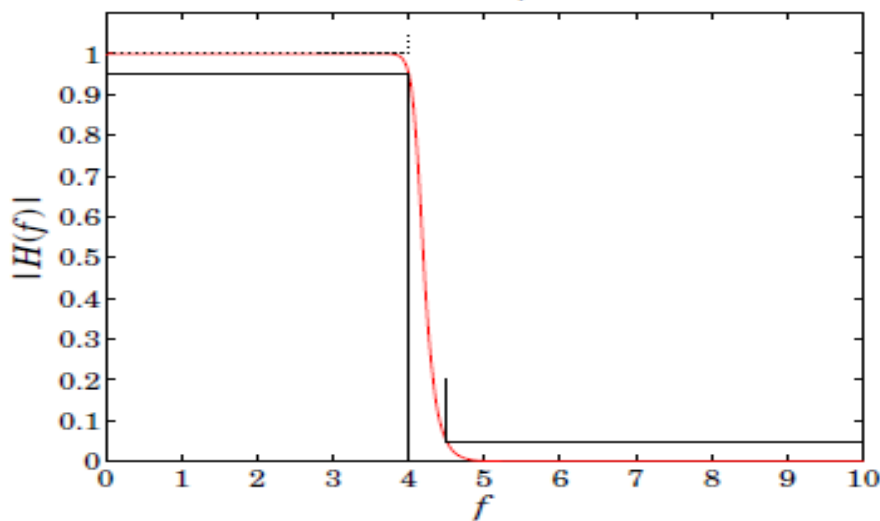


Figure (1.12) Réponse fréquentielle en amplitude d'un filtre Butterworth passe bas.

1-6-2 Filtre Chebyshev

Il existe deux types de filtres Chebyshev:

les filtres de Chebyshev de type 1 sont tous les filtres tout pôle et présentent un comportement equi-ondulation dans la bande passante et une caractéristique monotone dans la bande d'arrêt.

Les filtres de Chebyshev de type 2 contiennent les pôles et les zéros et présentent un comportement monotone en bande passante et un comportement equi-ondulation dans la bande d'arrêt. Les zéros de ce type de filtre se trouvent sur l'axe imaginaire du plan s . L'amplitude au carré des caractéristiques d'un filtre de Chebyshev type 1, [2] est donnée par :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_p^2 C_N^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p} \right)}
 \tag{1.14}$$

Où ϵ est un paramètre de filtre lié à l'ondulation dans la bande passante et $C_n(x)$ est le polynôme de Chebyshev type 2 d'ordre N définie comme :

$$\begin{cases} C_N(x) = \cos(N \cos^{-1} x) & |x| \leq 1 \\ C_N(x) = \cosh(N \operatorname{csch}^{-1} x) & |x| > 1 \end{cases} \quad (1.15)$$

La fonction de transfert prend la forme suit:

$$H_a(s) = \left[\frac{b\Omega_p + g_0 s}{a\Omega_p + s} \right]^r \prod_{i=1}^L \left[\frac{(b^2 + g_0^2 C_i^2)\Omega_p^2 + 2g_0 b s_i \Omega_p s + g_0^2 s^2}{(a^2 + C_i^2)\Omega_p^2 + 2a s_i \Omega_p s + s^2} \right] \quad (1.16)$$

Où

$$\begin{aligned} b &= g_0 \sinh u = \frac{1}{2}(\beta - g_0^2 \beta^{-1}), & a &= \sinh v = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^{-1}) \\ e^u &= g_0^{-1} \beta, & \beta &= (G\epsilon^{-1} + G_p \sqrt{1 + \epsilon^{-2}})^{1/N} \\ e^v &= \alpha = (\epsilon^{-1} + \sqrt{1 + \epsilon^{-2}})^{1/N}, & C_i &= \cos \theta_i \end{aligned} \quad (1.17)$$

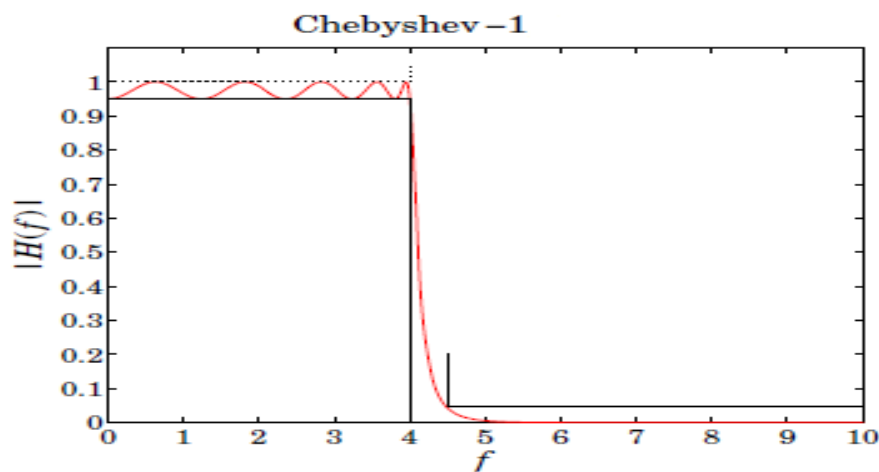


Figure (1.13) Réponse fréquentielle en amplitude d'un filtre chebyshev de type 1 passe bas.

La réponse fréquentielle en amplitude au carré du filtre de chebshev de type 2 est donnée par :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_p^2 \left(\frac{1}{C_N^2 \left(\frac{\Omega_p}{\Omega} \right)} \right)} \quad (1.18)$$

la fonction transfert s'exprime par:

$$H_a(s) = \left[\frac{g\Omega_p + bs}{\Omega_p + as} \right]^r \prod_{i=1}^L \left[\frac{(g^2\Omega_p^2 + 2gbs_i\Omega_p s + (b^2 + g_0^2 C_i^2)s^2)}{\Omega_p^2 + 2as_i\Omega_p s + (a^2 + C_i^2)s^2} \right] \quad (1.19)$$

avec s_i, C_i, θ_i donnée par l'équation (1.14), et les quantités u, v définies par:

$$\begin{aligned} b &= g \sinh u = \frac{1}{2}(\beta - g_0^2\beta^{-1}), & a &= \sinh v = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^{-1}) \\ e^u &= g^{-1}\beta, & \beta &= (G_0\epsilon^{-1} + G_p\sqrt{1 + \epsilon^2})^{1/N} \\ e^v &= \alpha = (\epsilon + \sqrt{1 + \epsilon^2})^{1/N} \end{aligned} \quad (1.20)$$

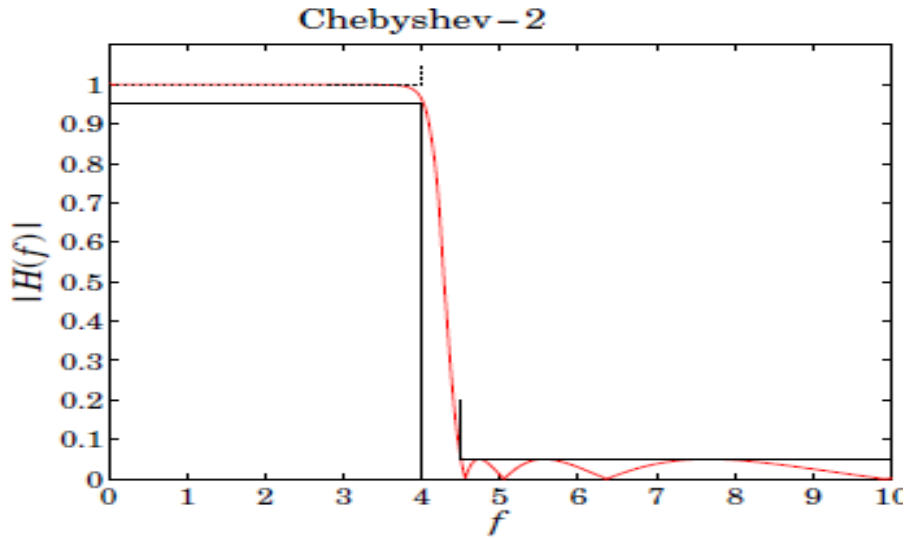


Figure (1.14) Réponse fréquentielle en amplitude d'un filtre Chebyshev de type 2 passe bas.

Où $C_N(x)$ est le $N^{\text{ième}}$ ordre du polynôme de Chebyshev [4].

1-6-3 Filtre elliptique

La réponse en amplitude d'un filtre elliptique passe-bas en fonction de la fréquence angulaire $\omega = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$ est donnée par [4] :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon_p^2 \text{cd}^2(\text{Nu}K_1, k_1)}, \quad \frac{\Omega_s}{\Omega_p} = \text{cd}(uK, k) \quad (1.21)$$

avec

$$F_N(\omega) = [\omega]^r \prod_{i=1}^L \left[\left(\frac{\omega^2 - \zeta_i^2}{1 - \omega^2 k^2 \zeta_i^2} \right) \left(\frac{1 - k^2 \zeta_i^2}{1 - \zeta_i^2} \right) \right] \quad (1.22)$$

Et $F_N(1) = 1$

ζ_i et $(k\zeta_i)^{-1}$ sont les zéros et les pôles de $F_N(\omega)$, où:

$$\zeta_i = \text{cd}(u_i K, k) \quad , \quad u_i = \frac{2i - 1}{N} \quad (1.23)$$

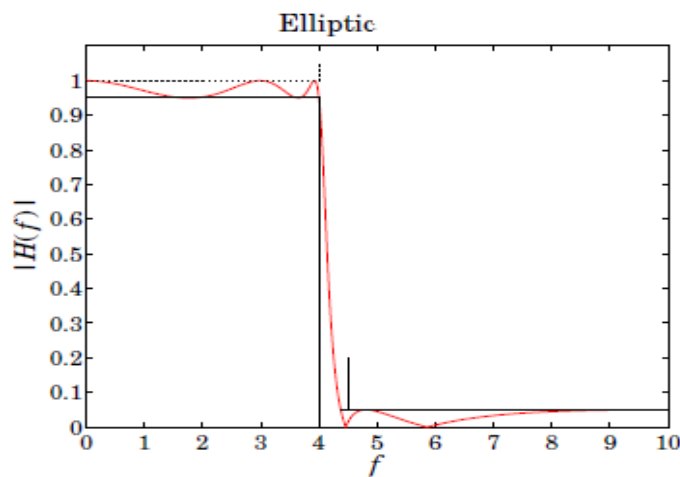


Figure (1.15) Réponse fréquentielle en amplitude d'un filtre elliptique passe bas.

1-7 TRANSFORMATION DES SPÉCIFICATIONS

passe-bas	Passe-haut	passe-bande	coupe-bande
S	$\frac{1}{s}$	$s + \frac{\Omega_0^2}{s}$	$\frac{1}{s + \frac{\Omega_0^2}{s}}$
Ω_p	$\frac{1}{\Omega_p}$	$\Delta\Omega$	$\max(\Omega_{p1} , \Omega_{p2})$
Ω_s	$\frac{1}{\Omega_s}$	$\min(\Omega_{s1} , \Omega_{s2})$	$\frac{1}{\Delta\Omega}$

Tableux (1.1) Transformation des spécifications (passe bas vers un autre type de filtre).

Pour les modèles passe-bandes, la largeur de bande et la fréquence centrale de la bande passante sont :

$$\Delta\Omega = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} \quad , \quad \Omega_0 = \sqrt{\Omega_{p1}\Omega_{p2}} \quad (1.24)$$

Ensuite, les paramètres correspondants au filtre passe-bas prototype sont :

$$\Omega'_p = \Delta\Omega \quad , \quad \Omega'_s = \min(|\Omega_{s1}|, |\Omega_{s2}|) \quad (1.25)$$

$$\text{Où} \quad \Omega'_{s1} = \Omega_{s1} - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{s1}} \quad , \quad \Omega'_{s2} = \Omega_{s2} - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{s2}} \quad (1.26)$$

en généralement que l'intervalle de bande passante $[\Omega_{p1}, \Omega_{p2}]$ se protège sur $[-\Omega'_p, \Omega_p]$,
on a [9] : $-\Omega_p = \Omega_{p1} - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{p1}} \quad , \quad \Omega_p = \Omega_{p2} - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{p2}}$ (1.24)

Ce qui donne :

$$\Omega'_p = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} \quad , \quad \Omega_0^2 = \Omega_{p1}\Omega_{p2} \quad (1.27)$$

Pour les filtres coupe-bande, la largeur de bande est $\Delta\Omega$ et la fréquence centrale Ω_0 sont sélectionnés sur la base de l'intervalle de bande d'arrêt:

$$\Delta\Omega = \Omega_{s2} - \Omega_{s1} \quad , \quad \Omega_0 = \sqrt{\Omega_{s1}\Omega_{s2}} \quad (1.28)$$

Ensuite, les paramètres correspondants au filtre Passe-bas prototype sont [9]:

$$\Omega'_p = \max(|\Omega_{p1}|, |\Omega_{p2}|) \quad , \quad \Omega'_s = \frac{1}{\Delta\Omega} \quad (1.29)$$

Où

$$\Omega'_{p1} = \frac{1}{\Omega_{p1} - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{p1}}} \quad , \quad \Omega'_{p2} = \frac{1}{\Omega_{p2} - \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{p2}}} \quad (1.30)$$

1-8 CONCLUSION :

Dans ce chapitre ,nous avons discuté les approximation Butterworth, de Chebyshev, et elliptique, et a donné la conception de filtres sur la base d'une norme qui est basée sur la conception de filtres.Nous concluons que le filtre actif est la base de la technologie moderne .Le prochain chapitre est réservé à l'approximation des filtres elliptiques.

CHAPITRE 2
CONCEPTION DES FILTRES
ELLIPTIQUES

CHAPITRE 2

CONCEPTION DES FILTRES ELLIPTIQUES

2-1 INTRODUCTION

Les filtres elliptiques, permettent de réaliser l'ordre de filtre le plus bas aux mêmes spécifications ou la largeur de transition la plus étroite pour le même ordre de filtre, par comparaison à d'autres types de filtres. Toutefois, ils ont la réponse de phase la plus non-linéaire sur leur bande passante.

Ce chapitre présente la méthode de conception des filtres elliptiques à base des fonction de Jacobi. Nous présenterons également les principaux algorithmes développés pour l'implantation de l'algorithme principal de synthèse des filtres elliptiques qui s'appuie sur la théorie mathématique des filtres elliptiques.

Pour la synthèse des filtres elliptiques ,les spécifications du gabarit reposent sur les paramètres k, k_1 qui sont définis comme suit :

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \quad , \quad k_1 = \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_s} \quad (2.1)$$

2-2 FONCTION ELLIPTIQUE DE JACOBI

Les fonctions elliptiques jacobienne ont des nombreux utilisations. Ici, nous donnons quelques définitions et nous discutons certaines propriétés liées à la conception de filtre. La fonction elliptique $w = \text{sn}(z, k)$ est défini indirectement par l'intégrale elliptique[20-22-25]:

$$z = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^w \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - K^2 t^2)}} \quad , w = \sin \phi \quad (2.2)$$

où la deuxième intégrale est obtenue à partir de la premier par le changement de variables $t = \sin \theta$ et $w = \sin \phi$. Le paramètre k , appelé module elliptique, est supposé être un nombre réel dans l'intervalle $0 \leq k \leq 1$. Ainsi, de l'écriture $\phi = \phi(z, k)$, la fonction sn est définie comme :

$$w = \text{sn}(z, k) = \sin \theta(z, k) \quad (2.3)$$

Les trois fonctions elliptiques connexes, cn , dn , cd , sont définies par :

$$\begin{aligned} w &= \text{cn}(z, k) = \cos \theta(z, k) \\ w &= \text{dn}(z, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(z, k)} \\ w &= \text{cd}(z, k) = \frac{\text{cn}(z, k)}{\text{dn}(z, k)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Pour la conception des filtres, seules les fonctions sn et cd sont nécessaires. Dans les limites $k = 0$ et $k = 1$, nous obtenons les fonctions trigonométriques et hyperboliques, respectivement :

$$\begin{aligned} \text{sn}(z, 0) &= \sin z, & \text{sn}(z, 1) &= \tanh z \\ \text{cn}(z, 0) &= \cos z, & \text{cn}(z, 1) &= \text{sech } z \\ \text{dn}(z, 0) &= 1, & \text{dn}(z, 1) &= \text{sech } z \\ \text{cd}(z, 0) &= \cos z, & \text{cd}(z, 1) &= 1 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Les fonctions sn , cn , dn , cd satisfont les propriétés, où $k' = (1 - k^2)^{1/2}$:

$$\begin{aligned} \text{sn}^2(z, k) + \text{cn}^2(z, k) &= 1 \\ k^2 \text{sn}^2(z, k) + \text{dn}^2(z, k) &= 1 \\ \text{dn}^2(z, k) - k^2 \text{cn}^2(z, k) &= k'^2 \\ k'^2 \text{sn}^2(z, k) + \text{cn}^2(z, k) &= \text{dn}^2(z, k) \\ \text{sn}^2(z, k) &= \frac{1 - \text{cd}^2(z, k)}{1 - k^2 \text{cd}^2(z, k)} \end{aligned} \quad (2.6)$$

La valeur de z à $\varphi = \pi / 2$ dans l'équation (2.2) définit l'intégrale elliptique complète du premier type, qui est désignée par $K(k)$ ou tout simplement K :

$$\boxed{K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}} \quad (\text{intégrale elliptique Complète}) \quad (2.7)$$

Il résulte de la définition (2.2) et (2.3) , $\text{sn}(K, k) = 1$ et $\text{cd}(K, k) = 0$. Avec un module elliptique k , nous pouvons définir le module complémentaire $k' = (1 - k^2)^{1/2}$ et sa moitié associée à l'intégrale elliptique complète $K(k')$ notée $K(k)$ ou simplement K' :

$$K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 \theta}} \quad , k' = \sqrt{1 - k^2} \quad (2.8)$$

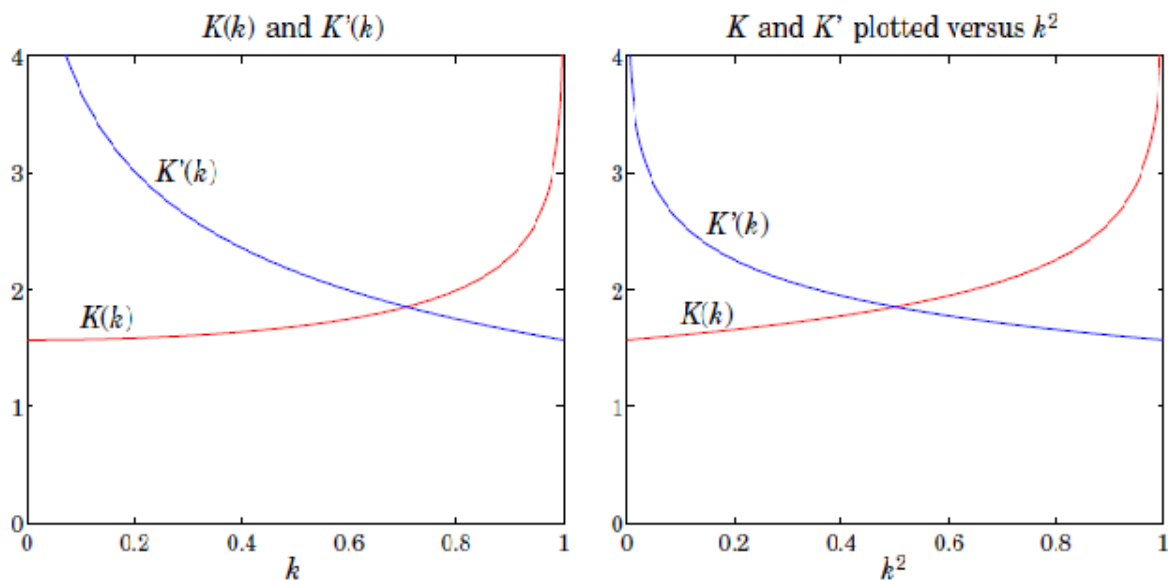


Figure (2.1) Intégrales elliptiques complètes $K(k)$ et $K'(k)$ Où $K(0) = K'(1) = \pi/2$.

Les quantités k, k' sont désignées comme des quarter de Périodes. À la fin du point $k = 0$, nous avons $k' = \pi/2, K = \infty$. A l'autre extrémité $k=1$, nous avons $K = \infty, K' = \pi/2$. La figure (2.1) représente le tracé de K, K' par rapport à k . Les courbes se coupent en $k = 1/\sqrt{2}$ et sont symétriques si elles sont tracées par rapport à k^2 .

La signification du quart de périodes K, K' est que sn et cd sont des fonctions doublement périodiques dans le plan z avec une période réelle $4K$ et une période complexe $2jK'$. La figure (2.2) représente les graphiques de $w = \text{sn}(uK, k)$ et $w = \text{cn}(uK, k)$ tracés sur deux périodes réelles. L'argument des fonctions est $z = uK$ où u est exprimé en unités de la quart des Périodes K , de sorte que la plage $-4 \leq u \leq 4$ est équivalente à deux périodes réelles : $-4K \leq z \leq 4K$. Pour $k \leq 0.5$, $w = \text{sn}(uK, k)$ et $w = \text{cn}(uK, k)$ sont presque identiques aux

fonctions trigonométriques $\sin(u\pi/2)$ et $\cos(u\pi/2)$ (Qui sont obtenues pour le cas limite $k = 0$).

Nous notons que $\text{sn}(z, k)$ est une fonction impaire de z , et $\text{cd}(z, k)$ une fonction paire. En outre, par analogie avec la propriété que les fonctions cosinus et sinus sont décalées d'un quart de période par rapport à l'autre par un quart de période $2\pi/4 = \pi/2$, c'est, $\cos z = \sin(z + \pi/2) = \sin(\pi/2 - z)$ les fonctions cd et sn sont décalées d'un quart de période K , répondant à l'identité suivante qui est valable pour toutes les valeurs complexes de z et peuvent être utilisées comme une autre définition de la fonction cd :

$$\text{cd}(z; k) = \text{sn}(z + K, k) = \text{sn}(K - z, k) \tag{2.9}$$

Cette propriété est illustrée sur la figure (2.2). Les fonctions $\text{dn}(uK, k)$ et $\text{dn}(uK', k')$ sont représentées sur la figure (2.3) pour les valeurs $k=0.8$ et $k' = \sqrt{1 - k^2} = 0.6$. Parce que $\text{dn}(uK, k) = \sqrt{1 - k^2 \text{sn}^2(uK, k)}$, nous avons la plage de variation $k' \leq \text{dn}(uK, k) \leq 1$, pour des valeurs réelles de u , et de même : $k \leq \text{dn}(uK', k') \leq 1$.

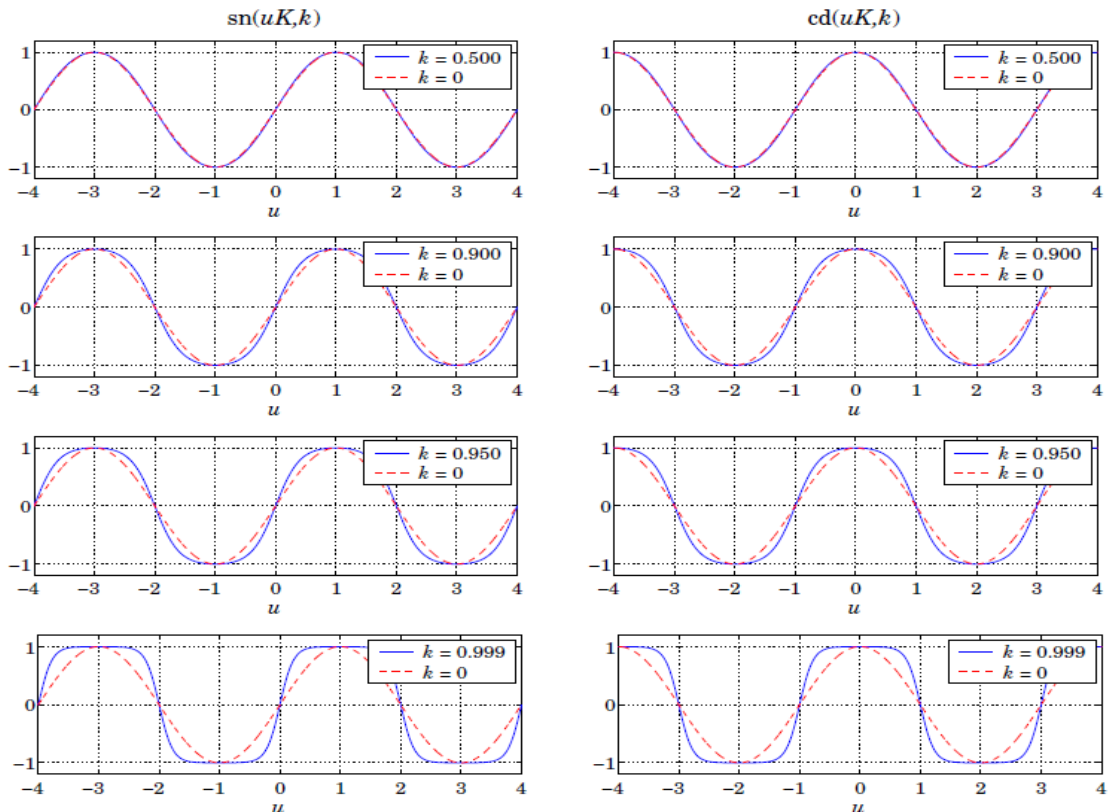


Figure (2.2) Fonctions elliptiques sn et cd.

Les quatre autres propriétés, utiles pour la conception de filtres, sont :

$$\text{cd}(z + (2i - 1)K, k) = (-1)^i \text{sn}(z, k) \quad , \text{ pour tout entier } i \quad (2.10)$$

$$\text{cd}(z + 2iK, k) = (-1)^i \text{cd}(z, k) \quad , \text{ pour tout entier } i \quad (2.11)$$

$$\text{cd}(z + jK', k) = \frac{1}{k \text{cd}(z, k)} \quad (2.12)$$

$$\text{cd}(jz, k) = \frac{1}{\text{dn}(z, k')} \quad , \text{ pour réel } z \quad (2.13)$$

En particulier, en prenant $z = 0$ dans (2.11) , ou $z=K'$ dans (2.12), on obtient:

$$\text{cd}(jK'; k) = \frac{1}{k} \quad (2.14)$$

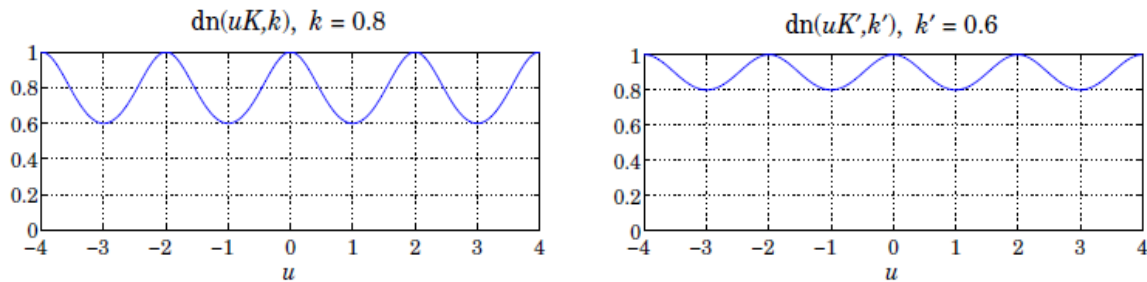


Figure (2.3) La fonction dn avec le module complémentaire $k = 0,8$ et $k' = 0,6$.

La convention d'appellation des fonctions elliptiques jacobiennes peut être comprise en référence au rectangle fondamental sur le plan z complexe avec des coins à $\{0, K, j K, K + j K\}$, comme représenté sur la figure (2.4) lorsque ces coins sont désignés par les lettres S, C, N, D.

Une fonction elliptique $pq(z, k)$ est nommé de telle sorte que la première lettre p peut être l'un quelconque des quatre lettres $\{s, c, d, n\}$, et la deuxième lettre q , l'une des trois lettres restantes. Ainsi, il y a $4 \times 3 = 12$ fonctions elliptiques jacobéennes, à savoir, sn, sd, sc, cn, cd, cs, dn, dc, ds, ns, nd, nc. Chaque fonction $pq(z, k)$ a un zéro simple dans le coin p et un pôle simple au coin q du rectangle fondamental. Par exemple, $\text{sn}(z, k)$ a un zéro au point S, $z = 0$, et un pôle au point N, $z = K + j K'$. De même, $\text{cd}(z, k)$ a un zéro au point C, $z = K$, et un pôle au point D, $z = K + j K'$. En outre, les relations suivantes sont satisfaites :

$$pq(z, k) = \frac{1}{qp(z, k)} \quad , \quad pq(z, k) = \frac{pr(z, k)}{qr(z, k)} \quad (2.15)$$

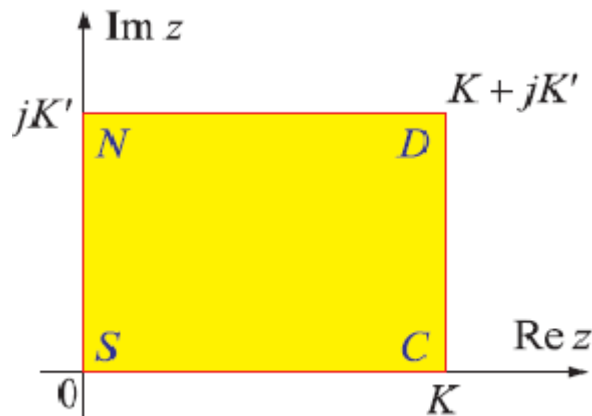


Figure (2.4) Le rectangle fondamental.

où r est l'une des lettres $\{s, c, d, n\}$ distinctes de p et q , par exemple, comme nous l'avons vu dans l'équation (2.4), $cd(z, k) = cn(z, k) / dn(z, k)$.

Les zéros et les pôles de la fonction pq sont issus d'une division modulo congruent $2K$ et $2jK'$ avec ceux dans les coins p et q du rectangle de base. En particulier, les zéros et les pôles de $cd(z, k)$, représentée sur la figure (2.5), sont donnés comme suit, où n, m sont des nombres entiers arbitraires (positif, négatif ou nul):

$$\text{zéros: } z = K + 2mK + 2NjK' = (2m + 1)K + 2NjK' \tag{2.16}$$

$$\text{pôles: } z = K + jK' + 2mK + 2njK' = (2m + 1)K + (2n + 1)jK'$$

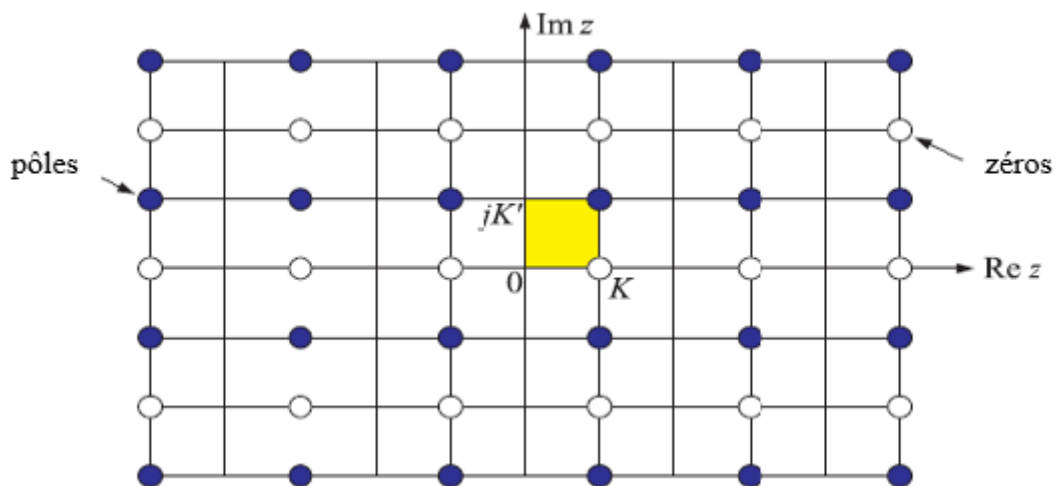


Figure (2.5) Pôles / zéros et les modèles de la fonction $f(z, k)$.

Les fonctions $w = \text{cd}(z, k)$ et $w = \text{sn}(z, k)$ sont données sans forme de diagramme conforme au plan z . La plus petite région du plan- z qui peut balayer l'ensemble du plan w est appelé une région fondamentale. Pour chaque fonction $pq(z, k)$, une telle région est centrée au point zéro p et entouré de quatre rectangles fondamentaux, chaque rectangle étant associée au quadrant particulier du plan- w [8]. Par exemple, les régions fondamentales des fonctions $\text{cd}(z, k)$ et $\text{Sn}(z, k)$ sont centrées sur les points C et S , respectivement, et sont définies par:

$$\begin{aligned} \text{cd}(z, k) &: 0 \leq \text{Re } z \leq 2K, -K' \leq \text{Im } z \leq K' \\ \text{sn}(z, k) &: -K \leq \text{Re } z \leq K, -K' \leq \text{Im } z \leq K' \end{aligned} \quad (\text{Régions fondamentales}) \quad (2.18)$$

ces régions sont représentées sur les figures (2.6) et (2.7). Les quadrants w -correspondants aux quadrants du plan z ont été marqués par les numéros du quadrant {1, 2, 3, 4}. En particulier, nous notons sur la figure (2.6) que les deux quart de cercle de fond plan z sont mis en correspondance avec les premier et deuxième quarts de cercle du plan w , qui est, $z = z_1 - jz_2$ avec $0 \leq z_1 \leq 2K$ et $0 < z_2 < K'$ balayant $w = w_1 + jw_2$ avec $w_2 > 0$. Puisque le plan s est lié au plan de fréquence par $s = jw$, il en résulte que le premier et le second quarts de cercle du plane w balayant le plan de la gauche, effectivement,

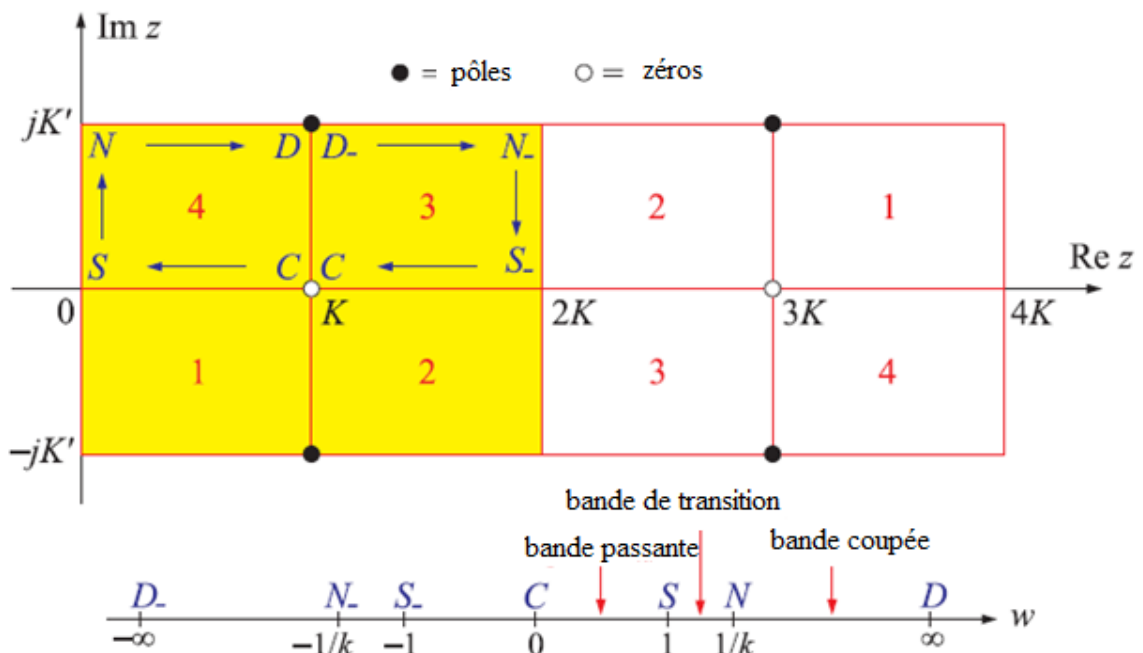


Figure (2.6) Région fondamentale, les correspondances quadrant, et le rectangle période de la fonction $w = \text{cd}(z, k)$.

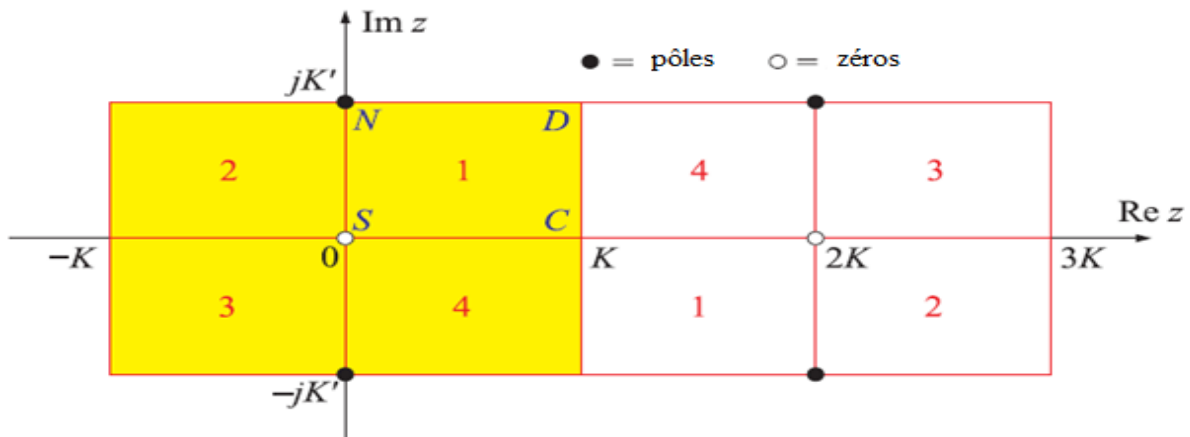


Figure (2.7) Région fondamentale, correspondance entre quadrants, et la période rectangle de la fonction $w = \text{sn}(z, k)$.

$s = j(w_1 + jw_2) = -w_2 + jw_1$ Cette propriété sera utilisée dans la construction des pôles des filtres analogiques dans plan S de gauche.

Rappelant que les périodes de cd et sn sont $4K$ et $2jK'$, nous avons doublé-en haut les régions fondamentales dans les figures (2.6) et (2.7) pour couvrir une période complète rectangle, c'est :

$$\begin{aligned} \text{cd}(z, k) : & \quad 0 \leq \text{Re } z \leq 4K, -K' \leq \text{Im } z \leq K' \\ \text{sn}(z, k) : & \quad -K \leq \text{Re } z \leq 3K, -K' \leq \text{Im } z \leq K' \end{aligned} \quad \text{(Période rectangles)} \quad (2.18)$$

Un intérêt particulier pour filtrer la conception d'un filtre est donné à la propriété que pour la fonction $w = \text{cd}(z, k)$, le chemin autour du rectangle fondamental $C \rightarrow S \rightarrow N \rightarrow D$ représenté sur la Figure (2.6), du zéro C à la perche D, balayant l'axe w réel positif, de sorte que les segments des trajectoires individuels, paramétrées avec le paramètre réel $0 \leq u \leq 1$, sont balayés comme suit :

$$\text{trajet } C \rightarrow S, 0 \leq u \leq 1, z = K - Ku \Rightarrow 0 \leq w \leq 1, \text{ bande passante}$$

$$\text{trajet } S \rightarrow N, 0 \leq u \leq 1, z = jK' u \Rightarrow 1 \leq w \leq 1/k, \text{ région de transition} \quad (2.19)$$

$$\text{trajet } N \rightarrow D, 0 \leq u \leq 1, z = K + K' u \Rightarrow 1/k \leq w \leq \infty, \text{ bande coupée.}$$

À cause de la définition du filtre, l'équation (1.6), les intervalles au-dessus de l'axe $w = \Omega / \Omega_p$ correspondent à la bande passante, la région de transition et la bande coupée. De même, la poursuite du trajet de $D \rightarrow N^- \rightarrow S^- \rightarrow C$ couvre le w -axe négatif. Pour vérifier ces propriétés, nous notons que pour le première le segment $C \rightarrow S$, l'argument $z = K - Ku$ est réel et les valeurs de $w = \text{cd}(K - Ku, k) = \text{sn}(Ku, k)$ varient sur l' intervalle $0 \leq w \leq 1$, comme on le voit sur la figure(2.2). Pour le segment $S \rightarrow N$, en utilisant la propriété (2.13), nous avons $w = \text{cd}(jK', k) = 1 / \text{dn}(uK', k')$, Qui augmente de $w = 1$ à $u = 0$ à la valeur $w = \text{cd}(jK', k) = 1 / \text{dn}(K', k') = 1 / k$ à $u = 1$. Enfin, pour le segment $N \rightarrow D$, nous utilisons la propriété (2.12) pour obtenir:

$$w = \text{cd}(Ku + jK', k) = \frac{1}{k \text{cd}(Ku, k)} \tag{2.20}$$

avec une valeur de départ $k \text{cd}(0, k) = k$ au dénominateur ou $w = 1 / k$, et une valeur finale de $k \text{cd}(K, k) = 0$ ou $p = \infty$.

2-3 FONCTION ROTIONNELLE ELLIPTIQUE ET ÉQUATION DE CALCUL DE L'ORDRE

La fonction caractéristique du filtre analogique $F_N(w)$ a été définie dans le cas elliptique par l'équation (1.6) en termes de la fonction de cd , où $w = \text{cd}(uk, k)$ peut être inversé pour donner u en fonction du poids, qui est, $uK = \text{cd}^{-1}(w, k)$. Cette façon indirecte d'écrire la fonction $F_N(w)$ est analogue au cas Chebyshev de type 1, qui peut être considéré comme la limite $k = k_1 = 0$ du cas elliptique:

$$C_N(w) = \cos\left(\frac{Nu\pi}{2}\right), w = \cos(u\pi/2) \tag{2.21}$$

où, dans cette limite $K = K_1 = \pi / 2$. Pour que la fonction $F_N(w)$ réponde à l'identité de l'équation (2), les trois paramètres N, k, K_1 doivent satisfaire la contrainte suivante, qui est connu comme l'équation de calcul de l'ordre pour les filtres elliptiques[21]:

$N \frac{K'}{K} = \frac{K'_1}{K_1}$	(Équation de calcul de l'ordre du filtre)	(2.22)
-------------------------------------	--	--------

où K, K_1 sont les intégrales elliptiques complètes (2.7) correspondant aux modules k, k_1 et K', K'_1 sont les intégrales elliptiques complètes correspondant aux modules complémentaires $k' = (1 - k^2)^{1/2}$ et $k'_1 = (1 - k_1^2)^{1/2}$.

Pour vérifier cette contrainte, nous utilisons la définition (1.6) et l'équation (2.12) pour obtenir:

$$k^{-1}k^{-1} = \frac{1}{\text{cd}(uK, k)} = \text{cd}(uK + jK', k) = \text{cd}\left(\left(u + \frac{jK'}{K}\right)K, k\right) \quad (2.23)$$

$$F_N(k^{-1}w^{-1}) = \text{cd}\left(N\left(u + \frac{jK'}{K}\right)K_1, k_1\right) = \text{cd}\left(NuK_1 + \frac{jNK'K_1}{K}, k_1\right)$$

et en utilisant l'équation (2.12) encore une fois, appliquée par rapport au module k_1 , nous avons:

$$\frac{1}{k_1 F_N(w)} = \frac{1}{k_1 \text{cd}(NuK_1 + jK_1, k_1)} = \text{cd}(NuK_1 + jK_1, k_1) \quad (2.24)$$

En comparant les équations (2.23) et (2.24), nous concluons que, pour satisfaire $F_N(k^{-1}w^{-1}) = [k_1 F_N(w)]^{-1}$, l'identité suivante doit être satisfaite pour tout u :

$$\text{cd}\left(NuK_1 + \frac{jNK'K_1}{K}, k_1\right) = \text{cd}(uK + jK', k) \Rightarrow \frac{NK'K_1}{K} = K'_1 \quad (2.25)$$

A partir de laquelle l'équation (2.22) nous verrons plus loin que la condition (8) qui a été obtenue plus tôt,

$$F_N(k^{-1}) = k_1^{-1} \quad (2.26)$$

Elle fournit en fait la solution de l'équation (2.21) pour le paramètre k_1 en termes de n, k , ou pour le paramètre k en fonction de N, k_1 . En utilisant l'équation (2.22), nous pouvons également déterminer les valeurs des $F_N(w)$ le long du chemin dans plan $z \in C \rightarrow S \rightarrow N \rightarrow D$.

Il résulte des équations (2.18) et (2.19) :

$$\begin{aligned} C \rightarrow S, \quad w &= \text{cd}(K - Ku, k), & F_N(w) &= \text{cd}(NK_1 - NK_1 u, k_1) \\ S \rightarrow N, \quad w &= \text{cd}(juK', k), & F_N(w) &= \text{cd}(juK'_1, k_1) = 1/\text{dn}(uK'_1, k'_1) \\ N \rightarrow D, \quad w &= \text{cd}(Ku + jK', k), & F_N(w) &= \text{cd}(NK_1 u + jK'_1, k_1) = [k_1 \text{cd}(NK_1 u, k_1)]^{-1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Examinons brièvement la construction de $C_N(w)$ en termes de ses zéros. Ensuite, nous allons utiliser la même technique pour construire $F_N(w)$. On fixe $N = 2L + r$, où $r = 0$ si N est pair, et $r = 1$ si N est impair, avec L représentant le nombre de sections du second ordre. Nous notons que le $C_N(w)$ est pair dans w si N est pair, et impair si N est impair. Ainsi, le $C_N(w)$ peut être pris sous forme $C_N(w) = [w]^r G(w)$, où $[w]^r$ signifie que le facteur w est présent si $r = 1$ et absent si $r = 0$, et $G(w^2)$ sera un polynôme de degré L -ième de w^2 . Pour le construire, nous résolvons l'équation $C_N(w) = 0$, ou

$$\begin{aligned} \cos(Nu_i\pi/2) = 0 & \Rightarrow Nu_i \frac{\pi}{2} = (2i - 1) \frac{\pi}{2} \\ u_i = \frac{2i - 1}{N} & , \quad i = 1, 2, \dots, L \end{aligned} \tag{2.28}$$

avec les zéros de $C_N(w)$ construits par :

$$\zeta_i = \cos(u_i\pi/2) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, L \tag{2.29}$$

résultant dans le polynôme de degré N ième $C_N(w)$:

$$C_N(w) = [w]^r \prod_{i=1}^L \frac{w^2 - \zeta_i^2}{1 - \zeta_i^2} \tag{2.30}$$

normalisée de telle sorte que $C_N(1) = 1$. Ainsi, l'équation (2.30) est la représentation du polynôme $C_N(w)$ en termes de ses N zéros.

Ensuite, nous construisons la fonction $F_N(w)$. Il résulte de la définition (1.6) que $F_N(w)$ sera une fonction paire (impair) de w si N est pair (impair). En effet, l'application de l'équation (2.11) avec $i = 1$ et $i = N$ donne:

$$\begin{aligned} -w = \text{cd}(uK, k) & = \text{cd}(uK + 2K, k) = \text{cd}((u + 2)2K, k) \\ F_N(-w) & = \text{cd}(N(u + 2)K_1, k_1) = \text{cd}(NuK_1 + 2NK_1, k_1) \\ & = (-1)^N \text{cd}(NuK_1, k_1) = (-1)^N F_N(w). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Les zéros de $F_N(w)$ sont obtenus en résolvant $\text{cd}(NuK_1, k_1) = 0$. Il résulte de l'équation (2.16):

$$\text{cd}(\text{Nu}K_1, k_1) = 0 \Rightarrow \text{Nu}_i K_1 = (2i - 1)K_1 \quad (2.32)$$

De sorte que les u_i sont les mêmes que ceux de l'équation (2.28). Ainsi, les zéros correspondants de $F_N(w)$ seront à la fréquence $w_i = \text{cd}(u_i K, k)$, et nous les désignons par :

$$\zeta_i = \text{cd}(u_i K, k) \quad (2.33)$$

En raison de la relation $F_N(k^{-1}w^{-1}) = [k_1 F_N(w)]^{-1}$, les fréquences $w_i = (k\zeta_i)^{-1}$ seront les pôles de $F_N(w)$. Ainsi, nous pouvons construire $F_N(w)$ comme une fonction rationnelle de ses pôles et ses zéros. Elle est aussi normalisée $F_N(1) = 1$:

$$F_N(w) = [w]^r \prod_{i=1}^L \left[\left(\frac{w^2 - \zeta_i^2}{1 - w^2 k^2 \zeta_i^2} \right) \left(\frac{1 - k^2 \zeta_i^2}{1 - \zeta_i^2} \right) \right] \quad (2.34)$$

L'équation (2.33) est connu comme une fonction rationnelle elliptique, ou une fonction rationnelle de Chebyshev. Nous notons que dans la limite $k = 0$, Éq. (2.33) se réduit à (2.29), et l'équation (2.34) se réduit à (2.30). Ensuite, on obtient la solution de l'équation de calcul de l'ordre (2.22). En utilisant la condition (2.26) et en réglant $w = 1/k$ et $F_N(w) = 1/k_1$ nous obtenons la formule suivante pour k_1 en termes de Net k :

$$k_1^{-1} = [k^{-1}]^r \prod_{i=1}^L \left[\left(\frac{k^{-2} - \zeta_i^2}{1 - k^{-2} k^2 \zeta_i^2} \right) \left(\frac{1 - k^2 \zeta_i^2}{1 - \zeta_i^2} \right) \right] = [k^{-1}]^{2L+r} \prod_{i=1}^L \left(\frac{1 - k^2 \zeta_i^2}{1 - \zeta_i^2} \right)^2 \quad (2.35)$$

Notant que $N = 2L + r$, ce qui peut être réarrangé en:

$$k_1 = k^N \prod_{i=1}^L \text{sn}^4(u_i K, k) \quad (\text{Équation de degré}) \quad (2.36)$$

où nous avons utilisé la propriété $(1 - \zeta_i^2)/(1 - k^2 \zeta_i^2) = \text{sn}^2(u_i K, k)$ qu'elle résulte de la dernière des équations (2.6). En notant l'invariance [21] de l'équation de calcul de l'ordre (2.22) avec les substitutions $k \rightarrow k'_1$ et $k_1 \rightarrow k'$, on obtient aussi la solution exacte pour k en termes de N et k_1 , exprimée par le complément modulo (k', k'_1) :

$$k' = (k'_1)^N \prod_{i=1}^L \text{sn}^4(u_i K'_1, k'_1) \quad (\text{Équation de calcul de l'ordre}) \quad (2.37)$$

Les équations (2.36) et (2.37) connues sous le nom d'équations modulaires ont été dérivées d'abord par Jacobi dans son ouvrage d'origine sur les fonctions elliptiques [22] et ont été utilisées depuis dans le cadre de la conception des filtres elliptiques [25,26,21].

L'équation de calcul de l'ordre peut aussi être résolue approximativement, et avec précision, en travaillant avec les noms (q, q_1) correspondant au module (k, k_1) . L'équation (2.21), donne:

$$q_1 = q^N \Leftrightarrow q = q_1^{1/N} \quad (2.38)$$

où les noms sont définis par $q = e^{-\pi K'/K}$ et $q_1 = e^{-\pi K'_1/K_1}$. Une fois que q a été calculée à partir de N et q_1 , le module k peut être déterminé à partir de l'expansion de la série [28]:

$$k = 4\sqrt{q} \left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} q^{m(m+1)}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2}} \right)^2 \quad (2.39)$$

qui converge très vite. Par exemple, en ne conservant que les termes jusqu'à $m = 7$, elle donne une approximation très précise.

2-4 TRANSFORMATIONS LANDEN

L'outil clé pour l'évaluation des fonctions elliptiques $w = \text{cd}(z, k)$ et $w = \text{sn}(z, k)$ à tout valeur complexe de l'argument de z est exprimé par la transformation Landen [27,29], qui commence par un module elliptique donné k et génère une séquence de modules décroissants k_n par la récursion suivante, initialisé à $k_0 = k$:

$$k_n = \left(\frac{k_{n-1}}{1 + k'_{n-1}} \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (2.40)$$

Où $k'_{n-1} = (1 - k_{n-1}^2)^{1/2}$. Les modules k_n diminuent rapidement à zéro. La récursion est arrêtée à $n = M$ lorsque k_M est devenue inférieure à un seuil de tolérance spécifiée, par exemple, inférieure à l'erreur tolérée par de la machine. Pour toutes les valeurs de k pratiques, telles que celles de la plage $0 \leq k \leq 0,999$, la récursivité peut être arrêtée à $M = 5$, avec tout k_n ultérieure étant inférieure à 10^{-15} , tandis que pour $k \leq 0,99$, les k_n ultérieures restent plus petite que 10^{-20} . La récursion (2.40) peut également être écrite sous la forme équivalente:

$$k_n = \frac{1 - k'_{n-1}}{1 + k'_{n-1}} \quad (2.41)$$

L'inverse de la récursivité (2.40) est :

$$k_{n-1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1 + k_n}, \quad n = M, M - 1, \dots, 1 \quad (2.42)$$

Les récurrences Landen (2.40) impliquent les récurrences suivantes [29] pour la l'intégrale elliptique complète $K_n = K(k_n)$ correspondant au module k_n :

$$K_{n-1} = (1 + k_n)K_n \quad (2.43)$$

La récursion (2.43) peut être répétée pour calculer l'intégrale elliptique $K = K(k)$ au module initial k , soit, $K = K_0 = (1 + k_1)K_1 = (1 + k_1)(1 + k_2)K_2$, et ainsi de suite, ce qui donne:

$$K = (1 + k_1)(1 + k_2) \dots (1 + k_M)K_M, \quad K_M = \frac{\pi}{2} \quad (2.44)$$

Parce que K_M est presque nulle, son intégrale elliptique sera sensiblement égale à $K_M = \pi / 2$. L'intégrale elliptique K' peut être calculée de la même manière en appliquant la récursion Landen K' . La précision en virgule flottante limite l'applicabilité de l'équation (2.44) à peu près entre $0 \leq k \leq k_{\max}$, où $k_{\max} = (1 - k_{\min}^2)^{1/2}$, avec $k_{\min} = 10^{-6}$. Pour k dans la gamme $k_{\max} \leq k \leq 1 - \epsilon$, où ϵ est l'erreur de la machine, on peut utiliser l'expansion:

$$K = L + (L - 1)\frac{k'^2}{2}, \quad L = -\ln\left(\frac{k'}{4}\right), \quad K' = (1 + k^2)^{1/2} \quad (2.45)$$

Les transformations Landen permettent également l'évaluation efficace des fonctions elliptique cd et sn par la récursion arrière suivante, connue comme la transformation de Gauss [29], et exprimée par [27]:

$$\frac{1}{cd(uK_{n-1}, k_{n-1})} = \frac{1}{1 + k_n} \left[\frac{1}{cd(uK_n, k_n)} + k_n cd(uK_n, k_n) \right] \quad (2.46)$$

Pour $n = M, M - 1, \dots, 1$, la récursion est initialisée à $n = M$ où k_M est si faible que la fonction de cd est indiscernable d'un cosinus, qui est, $cd(uK_n, k_n) \cong \cos(u\pi/2)$. Ainsi, le calcul de $w = cd(uK, k)$, à toute valeur complexe de u , le produit en calculant les quantités $w_n = cd(uK_n, k_n)$, initialisée à $w_n = \cos(u\pi/2)$, et se terminant par $w_0 = w = cd(uK, k)$:

$$w_{n-1}^{-1} = \frac{1}{1 + k_n} [w_n^{-1} + k_n w_n] \quad (2.47)$$

La fonction $w = \text{sn}(uK, k)$ peut être évaluée par la même récursion, initialisée à $w_n = \sin(u\pi/2)$. La récursion (2.47) peut également être utilisé pour calculer le cd inverse et convertie aux fonctions sn :

$$w_n = \frac{2w_{n-1}}{(1 + k_n) \left(1 + \sqrt{1 + k_{n-1}^2 w_{n-1}^2}\right)}, \quad n = 1, 2, \dots, M \quad (2.48)$$

2-5 CONCEPTION DES FILTRES ELLIPTIQUES ANALOGIQUES

La fonction de transfert d'un filtre elliptique passe bas analogique est construite à partir de ses zéros et pôles $\{z_{ai}, p_{ai}\}$ sous la forme factorisée de sections second ordre , donnée par l'équation (1.3).

Les variables s doivent être remplacées par $s = j\Omega = j2\pi f$ pour obtenir la réponse en fréquence des filtres. On peut écrire la fonction de transfert sous la forme:

$$H_a(s) = H_0 \left[\frac{1}{1 - A_{01}s} \right]^r \prod_{i=1}^L \left[\frac{(1 + B_{i1}s + B_{i2}s^2)}{(1 + A_{i1}s + A_{i2}s^2)} \right] \quad (2.49)$$

où les coefficients du numérateur et le dénominateur sont donnés par

$$[1, B_{i1}, B_{i2}] = \left[1, -2\text{Re}\left(\frac{1}{z_{ai}}\right), \frac{1}{|z_{ai}|^2} \right]$$

$$[1, A_{i1}, A_{i2}] = \left[1, -2\text{Re}\left(\frac{1}{p_{ai}}\right), \frac{1}{|p_{ai}|^2} \right] \quad (2.50)$$

$$[1, A_{01}] = \left[1, -\frac{1}{p_{a0}} \right]$$

La réponse en amplitude correspondant à (1.3) est définie par (1.18). Il en résulte que les zéros z_{ai} résulteront des pôles de $F_N(w)$, et les pôles p_{ai} résulteront des zéros du dénominateur. Nous avons vu dans la section précédente que les pôles de $F_N(w)$ se produisent

à des fréquences normalisées $w_i = (k\zeta_i)^{-1}$. Par conséquent, en tenant compte du facteur de normalisation Ω_p , les zéros dénormalisées du plan s $z_{ai} = \Omega_p j w_i$ seront :

$$\boxed{z_{ai} = \Omega_p j (k\zeta_i)^{-1}} \quad (\text{les zéros du plane } s) \quad (2.51)$$

Les pôles p_{ai} sont trouvés en résolvant l'équation: $1 + \varepsilon_p^2 F_N^2(w) = 0$, ou ,

$$F_N(w) = \pm j \frac{1}{\varepsilon_p} \quad (2.52)$$

Les solutions fréquence complexes w_i de (2.52) déterminer les pôles dénormalisées par la mise en $p_{ai} = \Omega_p j w_i$. Les pôles plane- s résultants se sont trouvés être:

$$\boxed{p_{ai} = \Omega_p j \text{cd}((u_i - jv_0)K, k)} \quad (\text{Les pôles plane-}s) \quad (2.53)$$

où les u_i sont les mêmes que dans l'équation (2.32), et v_0 est la solution à valeur réelle de l'équation:

$$\boxed{\text{sn}(jv_0NK_1, k_1) = j \frac{1}{\varepsilon_p}} \quad \Rightarrow v_0 = \frac{j}{NK_1} \text{sn}^{-1}\left(\frac{j}{\varepsilon_p}, k_1\right) \quad (2.54)$$

Si N est impair, il existe un pôle du plane s des valeurs réelles supplémentaires obtenues à partir de l'équation (2.53) en réglant $u_i = 1$ (ce qui correspond à l'indice $i = L + 1$):

$$p_{a0} = \Omega_p j \text{cd}((1 - jv_0)K, k) = \Omega_p j \text{sn}(jv_0K, k) \quad (2.55)$$

Pour vérifier $w_i = \text{cd}((u_i - jv_0)K, k)$ qui est une solution de l'équation (2.52), nous utilisons la définition (1.6), la propriété (2.10), et l'état (2.54) pour obtenir:

$$\begin{aligned} F_N(w_i) &= \text{cd}((u_i - jv_0)NK_1, k_1) = \text{cd}(u_iNK_1 - jv_0NK_1, k_1) \\ &= \text{cd}((2i - 1)K_1 - jv_0NK_1, k_1) = (-1)^i \text{sn}(-jv_0NK_1, k_1) \quad (2.56) \\ &= -(-1)^i \text{sn}(jv_0NK_1, k_1) = \pm j \frac{1}{\varepsilon_p} \end{aligned}$$

2-6 CONCLUSION

Nous avons présenté la technique de conception des filtres elliptiques basée sur les fonctions elliptiques jacobiniennes . Nous avons rappelé la fonction rationnelle elliptique et l'équation d'évaluation de l'ordre du filtre à partir des spécifications de son gabarit . Nous avons décrit la répartition des pôles et des zéros de la fonction de transfert dans le plan s de Laplace , la fonction de transfert du filtre elliptique analogique conçu par cette technique est exprimée sous la forme factorisée de section du second ordre .

Le prochain chapitre est réservé à l'implémentation de cette technique de conception et l'étude de performances des filtres elliptiques résultants.

CHAPITRE 3
SIMULATION ET TEST DES
FILTRES ELLIPTIQUES

CHAPITRE 3

SIMULATION ET TEST DES FILTRES ELLIPTIQUES

3-1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre , nous allons présenté notre programme de conception des filtres elliptiques de type quelconque (passe bas, passe haut, passe bande et coupe bande). Notre programme permet d'extraire les zéros et les pôles de fonction de transfert, la réponse fréquentielle et la simulation de la fonction de filtrage, cet outil servie pour l'étude des performances des filtres elliptiques.

3-2 PROGRAMATION DE LA CONCEPTION DES FILTRES ELLIPTIQUES

Nous avons réalisé un programme de conception des filtres elliptiques sous environnement Matlab, selon l'organigramme de la figure (3.1). Matlab est un excellent choix car il permet tous les calculs des fonctions elliptiques, qui sont effectués par les fonctions suivantes [30]:

landen : Transformation Landen, équation (2.40)

cde, acde : Fonction cd elliptique et son inverse, équations (2.45) et (2.46)

sne, asne : Fonction sn elliptique et son inverse, équations (2.45) et (2.46)

cne, dne : Fonctions cn et dn elliptiques (pour les arguments réels)

ellipk : L'intégrale elliptique Complète $K(k)$, équation (2.43)

ellipdeg : Solution exacte de l'équation de calcul de l'ordre $(k$ à partir de $N, k_1)$, équation (2.37)

ellipdeg1 : Solution exacte de l'équation de calcul de l'ordre $(k_1$ à partir $N, k)$, équation (2.36)

ellipdeg2 : Solution de l'équation de calcul de l'ordre en utilisant nomes, équation (2.39)

elliprf : Fonction rationnelle elliptique, équation (2.35)

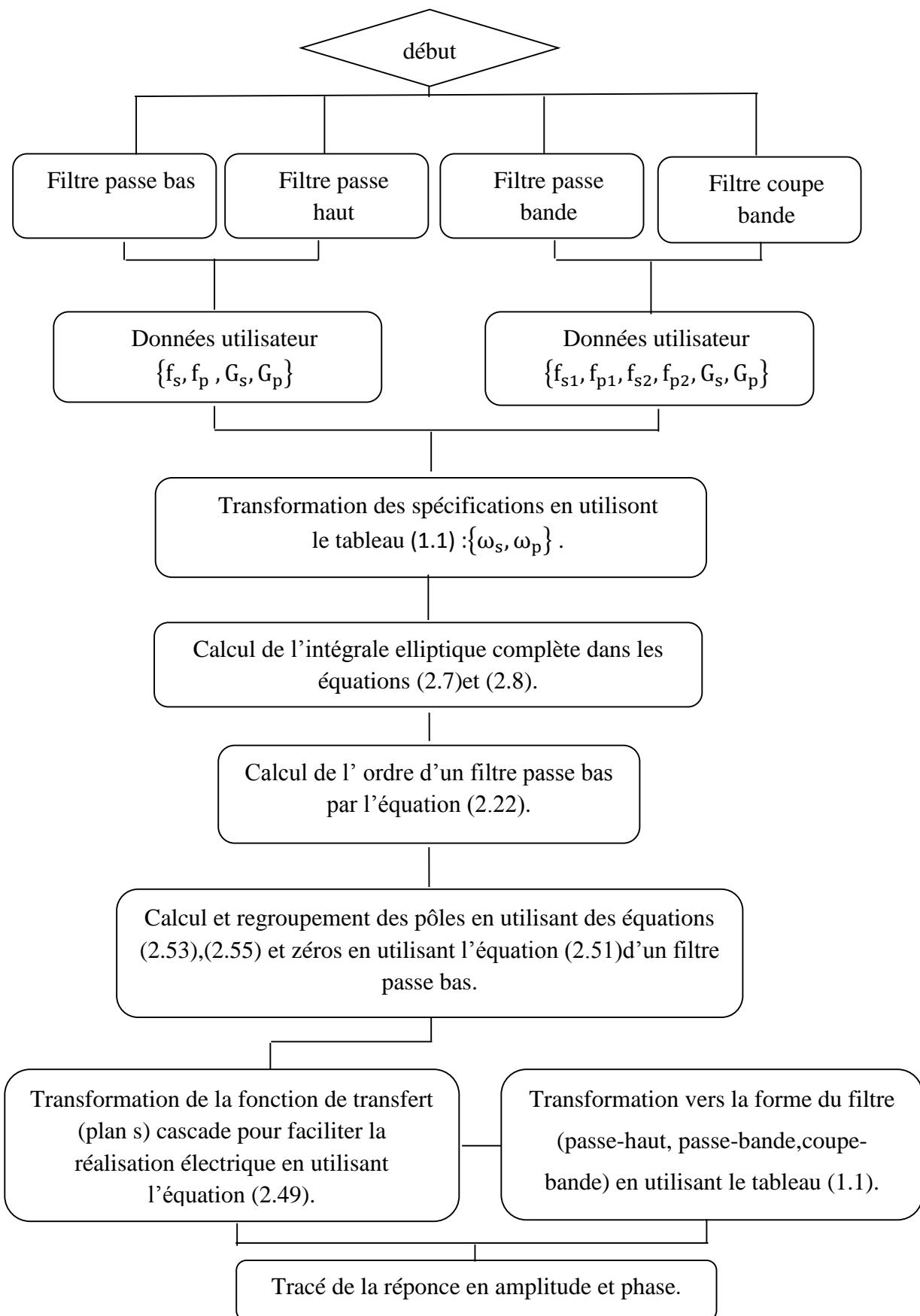


Figure (3.1) Organigramme de conception d'un filtre elliptique .

notre programme permet également de simuler la fonction de transfert en cascade du filtre elliptique obtenu à l'aide de Simulink. Cette simulation la vérification de la validité des résultats obtenus, tel que $f_t = G_1 * G_2 * \dots * G_m$:

- $X(t)$ signal d'entrée sinusoïdal, on fixe l'amplitude et on fait varier la fréquence $X(t) = 50 \sin(2\pi Ft)$.
- $Y(t)$ signal filtré.

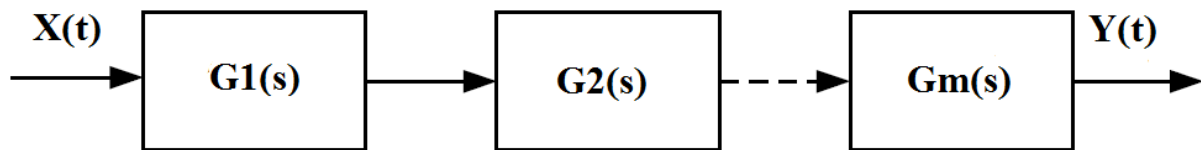


Figure (3.2) Schéma de simulation d'une fonction de transfert.

3-3 TEST DU PROGRAMME DE CONCEPTION

3-3-1 Filtre passe bas

Considérons la synthèse d'un filtre passe bas avec les spécifications f_p , f_s , G_p , G_s par les deux exemples suivants, en fixant $f_p = 4$ et $f_s = 4.5$ et en faisant varier G_p , G_s :

On pose dans exemple 1, $G_p = 0.95$, $G_s = 0.05$. On trouve:

1. L'ordre $N=5$.
2. Les zéros :

$$z_1 = 28.0265j$$

$$z_2 = 36.7945 j$$
3. Les pôles :

$$p_1 = -15.1717$$

$$p_2 = -1.00115 + 21.4113j$$

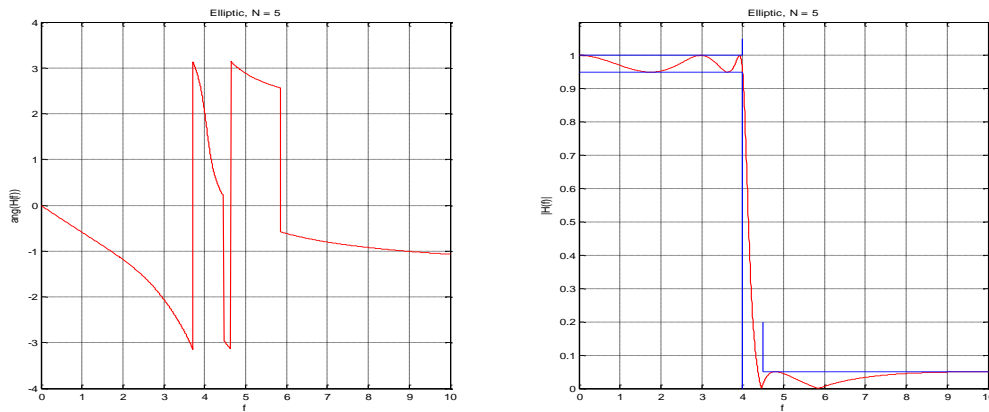
$$p_3 = -6.2951 + 21.4113 j$$

Puisque la partie réelle des pôles est négative, le système est donc stable.

4. La fonction de transfert en cascade:

$$H(s) = \frac{1}{1 + 0.0659 s} \frac{1 + 0.013s^2}{1 + 0.0031 s + 0.015s^2} \frac{1 + 0.0007s^2}{1 + 0.0253 s + 0.002s^2}$$

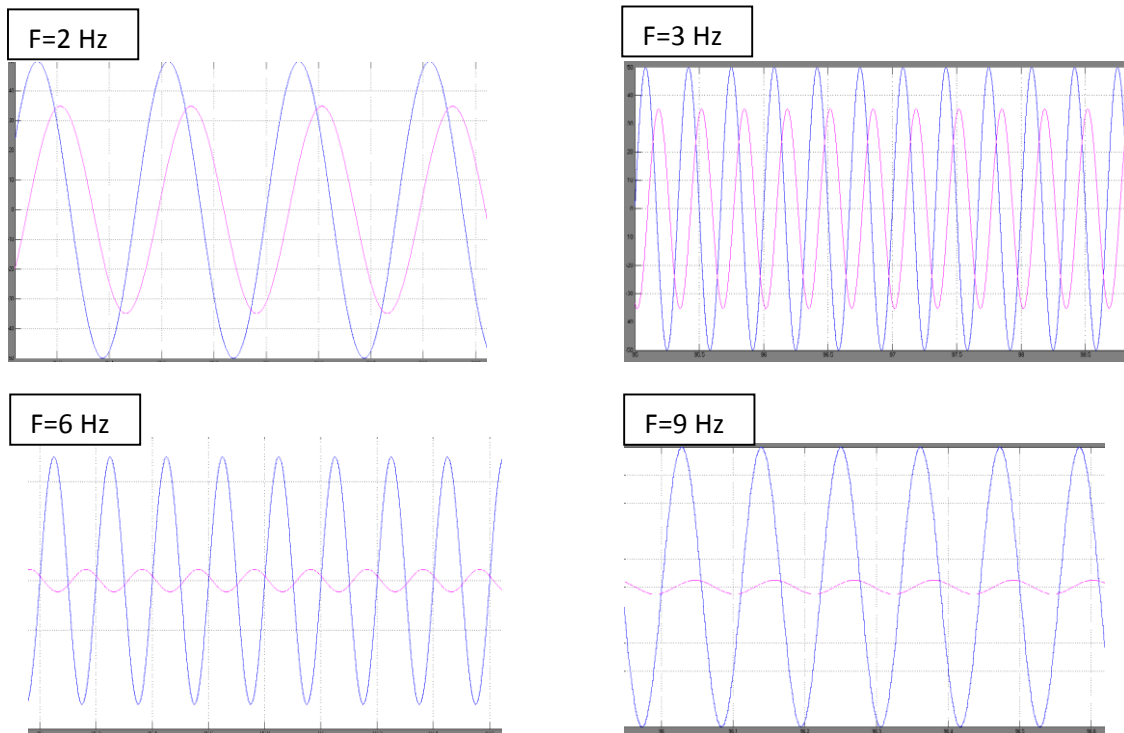
5. Les tracés des réponses fréquentielles en amplitude et en phase sont donnés sur la figure (3.3).



Figure(3.3) La réponse fréquentielle en amplitude et en phase exemple 1.

Les nombres des ondulations dans G_p est égale au nombre des pôles et le nombre des ondulations dans G_s vont le nombre des zéros.

6. Test de fonctionnement (simulation) de la fonction filtrage passe bas.



Figure(3.4) Simulation du filtre passe bas conçu.

Le test de simulation a mis en évidence les bannes performances du filtre elliptique passe bas conçu qui respecte bien les spécifications du gabarit.

On pose dans exemple 2, $G_p = 0.95$, $G_s = 0.01$. Dans ce cas, on obtient les résultats de conception suivants :

1. L'ordre $N=7$.

2. Les zéros : $z_1 = 26.9449j$

$$z_2 = 29.4132 j$$

$$z_3 = 43.1568 j$$

3. les pôles : $p_1 = -11.1117$

$$p_2 = -0.4251 + 25.2362j$$

$$p_3 = -2.1056 + 23.6717 j$$

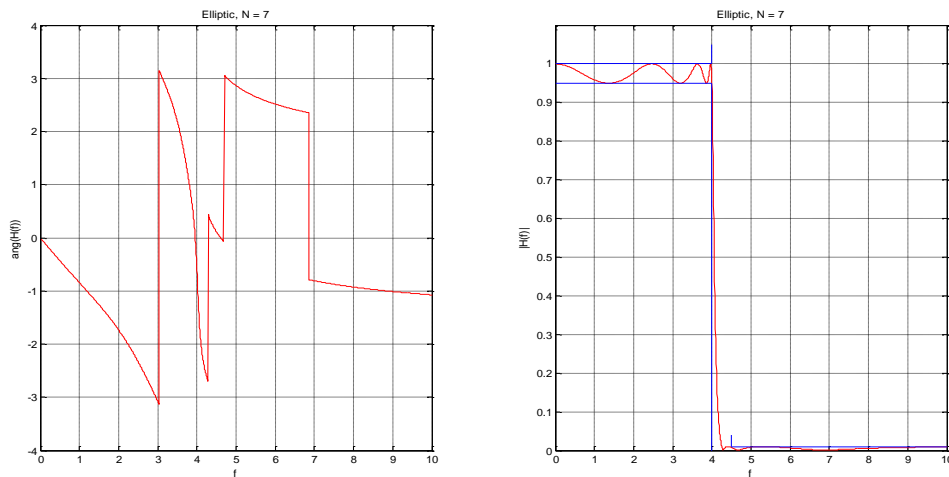
$$p_4 = -6.6499 + 17.2896 j$$

La stabilité du système de filtrage est évidente à travers la partie réelle des pôles qui est négative.

4. La fonction de transfert en cascade:

$$H(s) = \frac{1}{1 + 0.0900 s} \frac{1 + 0.0014s^2}{1 + 0.0013 s + 0.0016s^2} \frac{1 + 0.0012s^2}{1 + 0.0075 s + 0.0018s^2} \frac{1 + 0.0005s^2}{1 + 0.0388 s + 0.0029s^2}$$

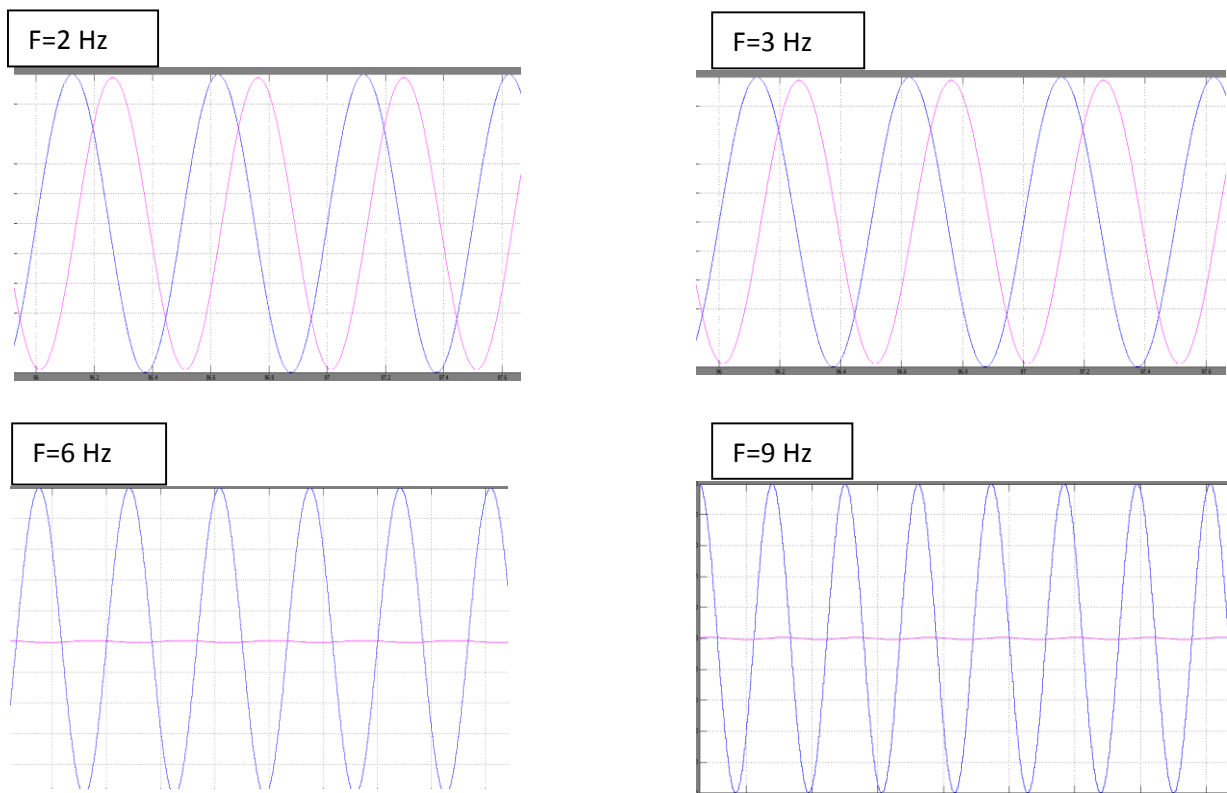
5. Les tracés des réponses fréquentielles en amplitude et en phase sont donnés sur la figure (3.5).



Figure(3.5) Les réponses fréquentielles en amplitude et en phase du filtre passe bas elliptique conçu.

Le nombre des ondulations dans G_p est égale au nombre des pôles et le nombre des ondulations dans G_s vont le nombre des zéros.

6. Test de fonctionnement (simulation) du filtre elliptique passe bas conçu.



Figure(3.6) Simulation du filtre passe bas elliptique conçu.

Dans le filtre passe bas , après avoir examiné les résultats et simulé le système, nous avons noté plusieurs observations :

- Chaque fois qu'il y a un changement dans les valeurs de G_p et G_s ,il y a une augmentation de N .
- Le nombre des zéros est inferieur au nombres des pôles.
- La fonction de transfert exprimée en cascade pour faciliter la réalisation du filtre en pratique.
- La réponse fréquentielle en amplitude et en phase est en accord avec la théorie.

3-3-2 LE FILTRE PASSE HAUT

Nous concevons maintenant un filtre passe haut avec les spécifications f_p , f_s , G_p , G_s pour les deux exemples suivants, en fixant $f_p = 4$, $f_s = 4.5$ et en faisant varier les variables G_p , G_s :

On pose dans exemple 1, $G_p = 0.95$, $G_s = 0.05$. On obtient les résultats suivants :

1. L'ordre $N=5$.
2. Les zéros :

$$z_1 = 0.0394j$$

$$z_2 = 0.0518 j$$
3. Les pôles :

$$p_1 = -0.0214$$

$$p_2 = -0.0014 + 0.0358j$$

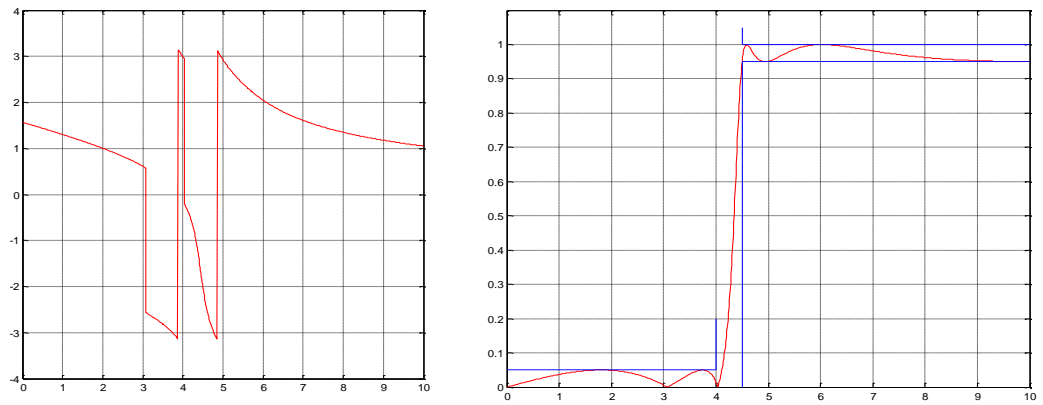
$$p_3 = -0.0089 + 0.0301 j$$

le système est stable.

4. La fonction de transfert en cascade:

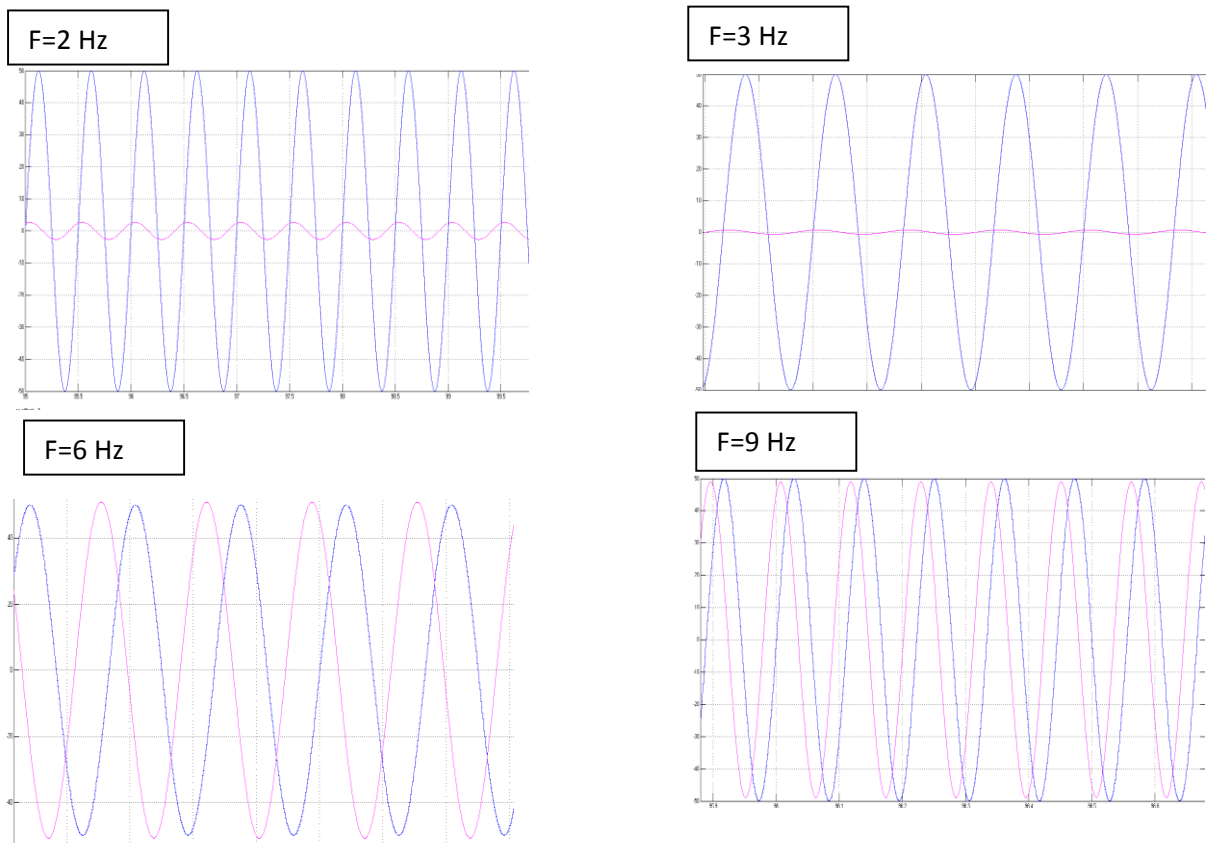
$$H(s) = \frac{s}{s + 46.84} \frac{s^2 + 642.9}{s^2 + 2.219 s + 779.3} \frac{s^2 + 373}{s^2 + 17.96 s + 1014}$$

5. Les tracés des réponses fréquentielles en amplitude et en phase sont donnés sur la figure (3.7):



Figure(3.7) Les réponses fréquentielles en amplitude et en phase du filtre passe haut elliptique conçu.

6. Test de fonctionnement (simulation) :



Figure(3.8) Simulation du filtre passe haut conçu.

On pose dans exemple 2, $G_p = 0.95$, $G_s = 0.01$. On obtient les résultats suivants :

1. L'ordre $N=7$.

2. Les zéros : $z_1 = 0.0379j$

$$z_2 = 0.0414 j$$

$$z_3 = 0.0607 j$$

3. Les pôles : $p_1 = -0.0156$

$$p_2 = -0.0006 + 0.0355j$$

$$p_3 = -0.003 + 0.0333 j$$

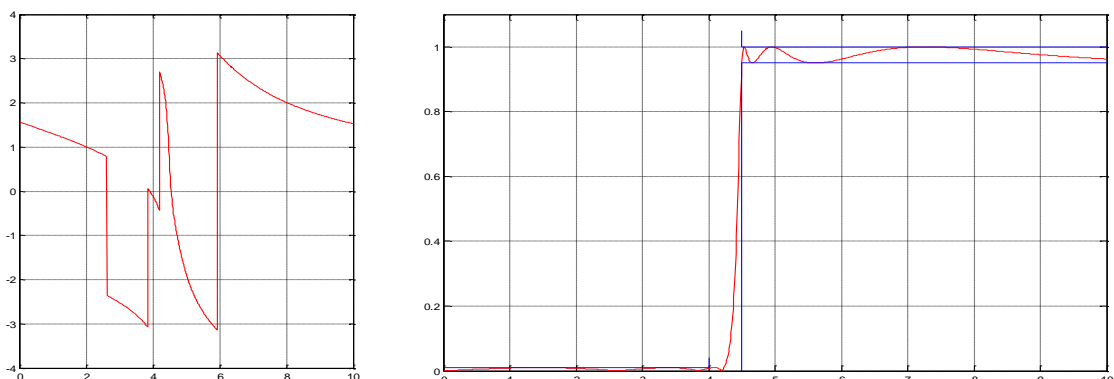
$$p_4 = -0.0094 + 0.0243 j$$

le système est stable.

4. La fonction de transfert en cascade:

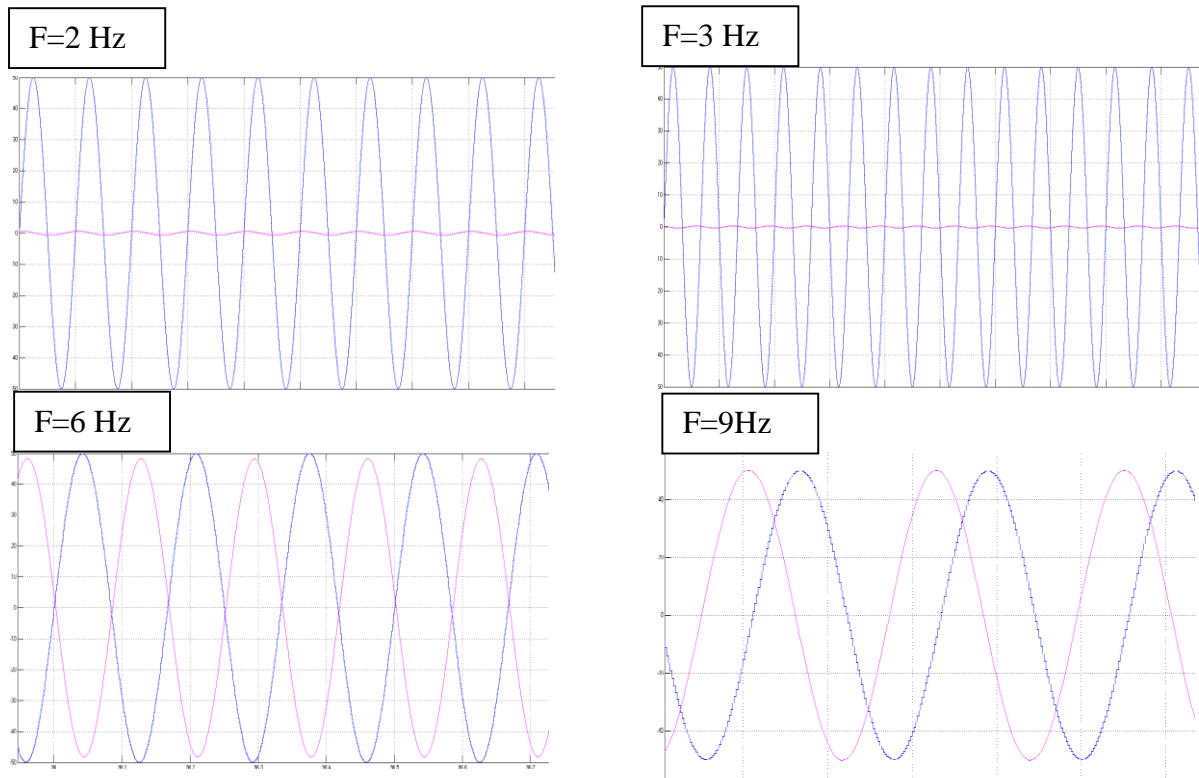
$$H(s) = \frac{s}{s + 63.95} \frac{s^2 + 695.5}{s^2 + 0.9484 s + 792.7} \frac{s^2 + 583.7}{s^2 + 5.298 s + 894.1} \frac{s^2 + 271.1}{s^2 + 27.54 s + 1472}$$

5. Les tracés des réponses fréquentielle en amplitude et en phase sont donnés sur la figure (3.9):



Figure(3.9) Les réponses fréquentielles en amplitude et en phase du filtre passe haut elliptique conçu.

6. Test de fonctionnement (simulation) :



Figure(3.10) Simulation du filtre passe haut elliptique conçu.

Dans le filtre passe haut , après avoir examiné les résultats et simulé le système, nous avons noté plusieurs observations :

- Chaque fois qu'il y a un changement dans les G_p, G_s , il y a une augmentation de N .
- Le nombre des zéros est inférieur au nombre des pôles .
- La fonction de transfert est exprimée en cascade pour faciliter la réalisation du filtre en pratique.
- La réponse fréquentielle en amplitude et en phase est accord avec la théorie.

3-3-3 FILTRE PASSE BANDE

Nous concevons un filtre passe bande avec les spécifications $f_{p1}, f_{p2}, f_{s1}, f_{s2}, G_p, G_s$ pour les deux exemples suivants, en fixant les variables $f_{p1} = 3, f_{p2} = 6, f_{s1} = 2.5, f_{s2} = 6.5$ et en faisant varier les variables G_p, G_s :

On pose, dans exemple 1, $G_p = 0.95, G_s = 0.05$. On obtient les résultats suivants :

1. L'ordre $N=10$.

2. Les zéros : $z_1 = 21.0199j$

$$z_2 = 27.5959j$$

3. Les pôles : $p_1 = -11.3788$

$$p_2 = -0.7587 + 19.0765j$$

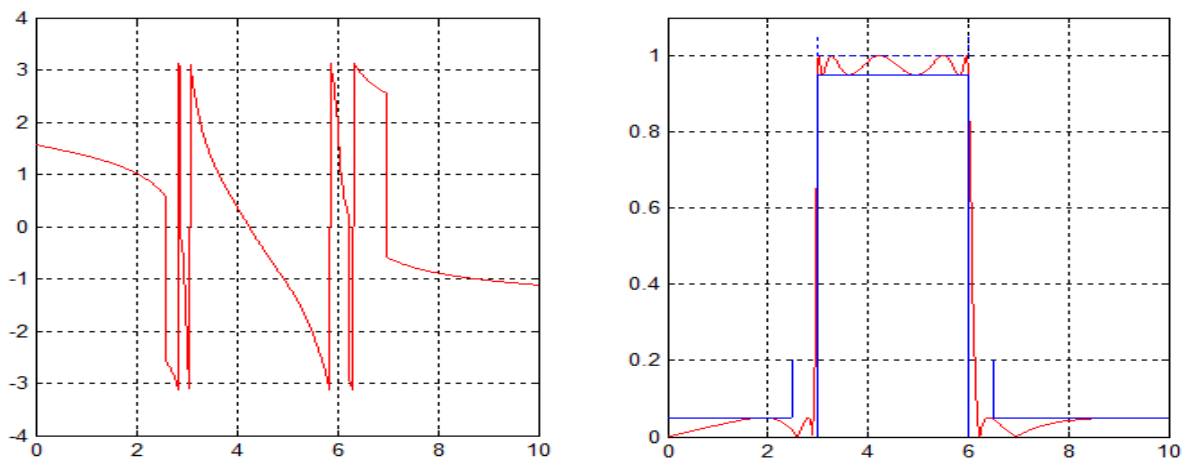
$$p_3 = -4.7213 + 16.0585j$$

le système est stable.

4. La fonction de transfert en cascade:

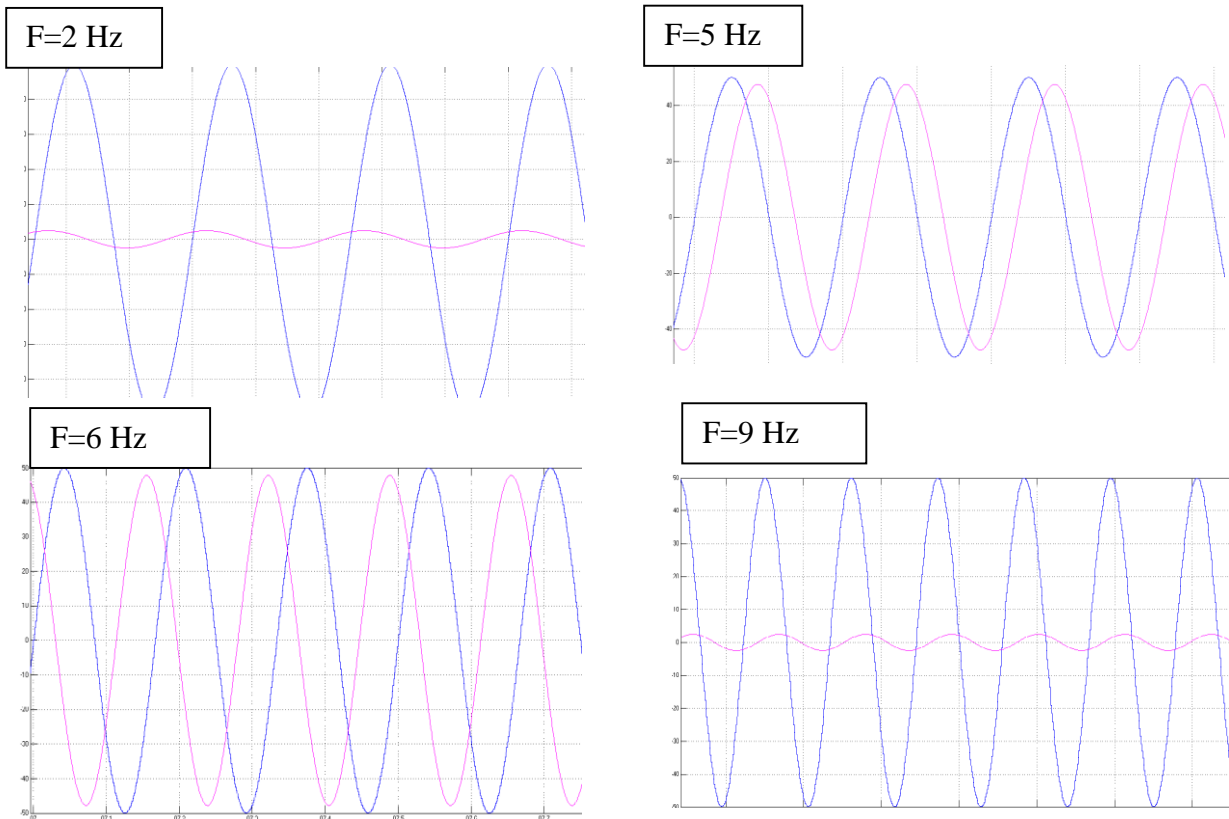
$$H(s) = 0.3035 \frac{s}{0.08788 s^2 + s + 62.45} \frac{s^2 + 1534}{s^2 + 1.014 s + 1433} \frac{s^2 + 329.2}{s^2 + 0.503 s + 352.4} \\ \frac{s^2 + 1920}{s^2 + 6.088 s + 1289} \frac{s^2 + 263}{s^2 + 3.355 s + 391.7}$$

5. Les tracés des réponses fréquentielles en amplitude et en phase sont donnés sur la figure (3.11):



Figure(3.11) La réponse fréquentielle en amplitude et en phase du filtre passe bande elliptique conçu.

6. Test de fonctionnement (simulation) :



Figure(3.12) Simulation du filtre passe bande elliptique conçu .

On pose, dans exemple 2, $G_p = 0.95$, $G_s = 0.01$. On obtient les résultats suivants

1. L'ordre $N=12$.

2. Les zéros : $z_1 = 21.6712j$

$$z_2 = 25.8560 j$$

$$z_3 = 60.1156 j$$

3. Les pôles : $p_1 = -8.5922$

$$p_2 = -0.6416 + 19.0003j$$

$$p_3 = -2.9916 + 16.5958 j$$

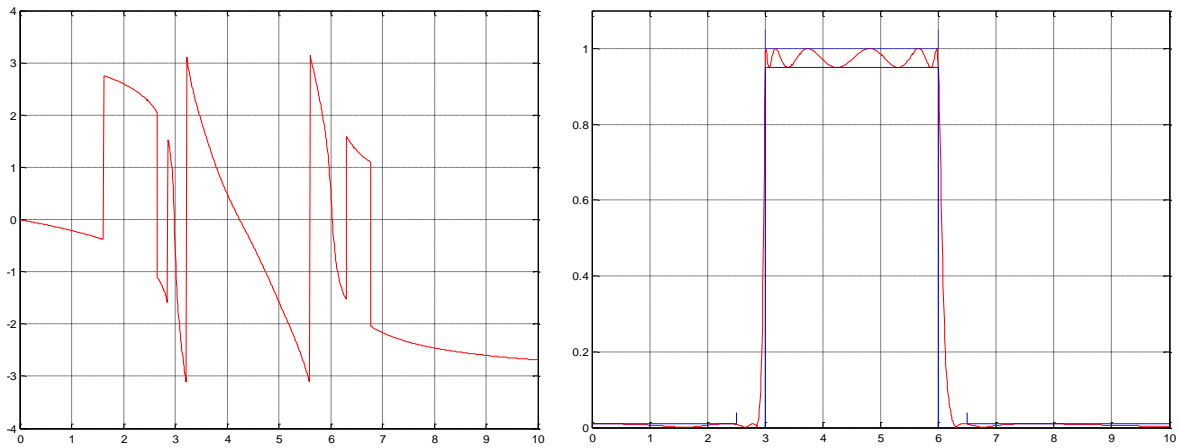
$$p_4 = -7.4750 + 7.7675 j$$

le système est stable.

4. La fonction de transfert en cascade:

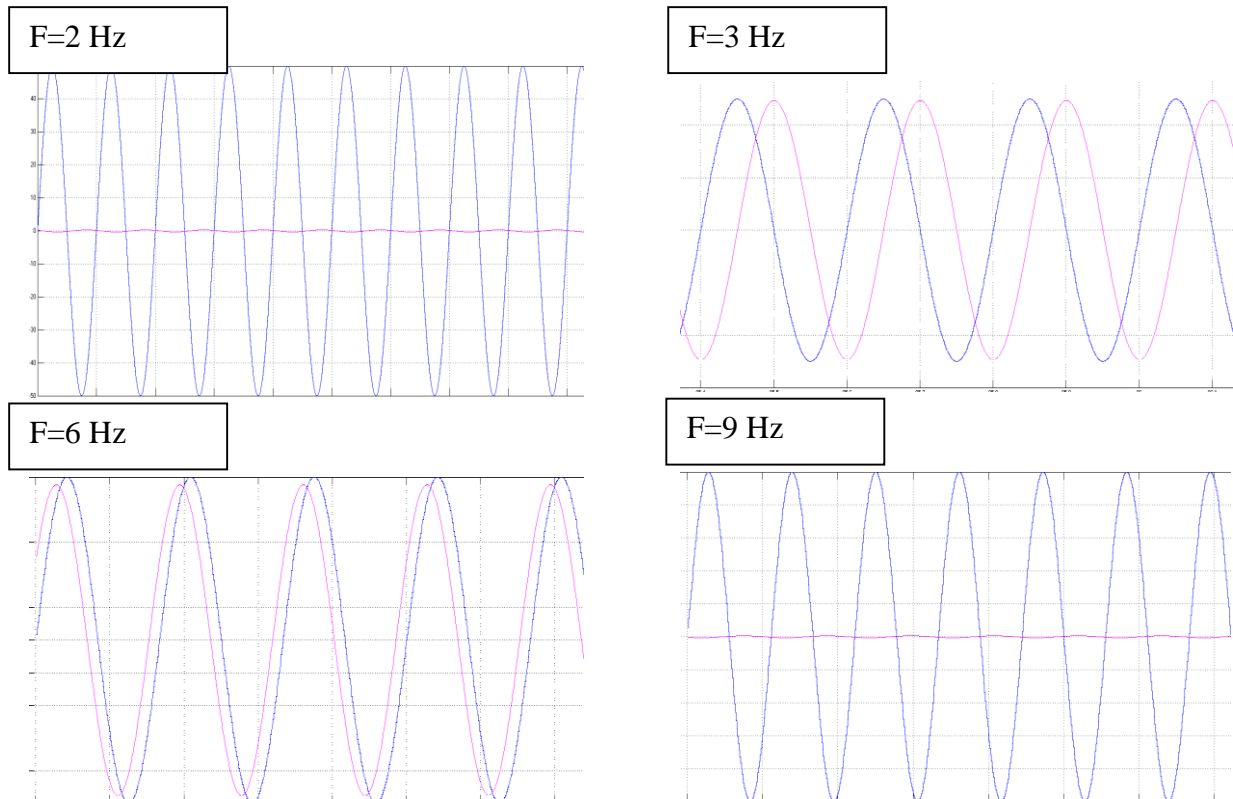
$$H(s) = 0.01 \frac{s^2 + 1569}{s^2 + 0.857s + 1429} \frac{s^2 + 321.8}{s^2 + 0.4262s + 353.4} \frac{s^2 + 1811}{s^2 + 3.882s + 1313} \\ \frac{s^2 + 278.8}{s^2 + 2.101s + 384.7} \frac{s^2 + 4933}{s^2 + 8.563s + 952.7} \frac{s^2 + 102.4}{s^2 + 6.387s + 530}$$

5. Les tracés des réponse fréquentielle en amplitude et en phase sont donnés à la figure (3.13) :



Figure(3.13) La réponse fréquentielle en amplitude et en phase du filtre passe bande elliptique conçu.

6. Test de fonctionnement (simulation) :



Figure(3.14) Simulation du filtre passe bande elliptique conçu .

Dans le filtre passe bande, après avoir examiné les résultats et simulé le système, nous avons noté plusieurs observations :

- Chaque fois qu'il y a un changement dans les G_p, G_s , il y a une augmentation de N .
- Le nombre des zéros est inférieur au nombre des pôles .
- La fonction de transfert est exprimée en cascade pour faciliter la réalisation du filtre en pratique.
- La réponse fréquentielle en amplitude et en phase, du filtre conçu est en accord avec la théorie.

3.3.4 FILTRE COUPE BANDE

Nous concevons un filtre coupe bande avec les spécifications $f_{p1}, f_{p2}, f_{s1}, f_{s2}, G_p, G_s$ pour les deux exemples suivants, mais en fixant les variables $f_{p1} = 2.5, f_{p2} = 3.5, f_{s1} = 3, f_{s2} = 6$ et en faisant varier les variables G_p, G_s :

On pose, dans exemple 1, $G_p = 0.95, G_s = 0.05$. on obtient :

1. L'ordre $N=10$.
2. Les zéros :

$$z_1 = 0.0476j$$

$$z_2 = 0.0625j$$
3. Les pôles :

$$p_1 = -0.0258$$

$$p_2 = -0.0017 + 0.0432j$$

$$p_3 = -0.0107 + 0.0363j$$

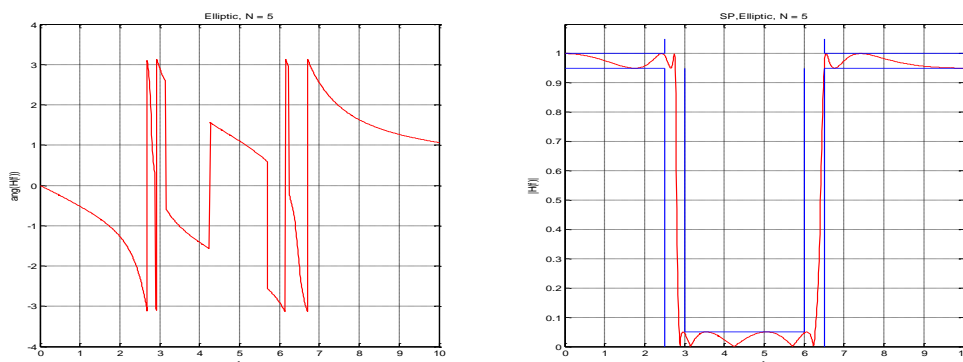
le système est stable.

4. La fonction de transfert en cascade:

$$H(s) = \frac{s^2 + 710.6}{s^2 + 38.83s + 710.6} \frac{s^2 + 1284}{s^2 + 10.66s + 1791} \frac{s^2 + 393.1}{s^2 + 4.23s + 281.9}$$

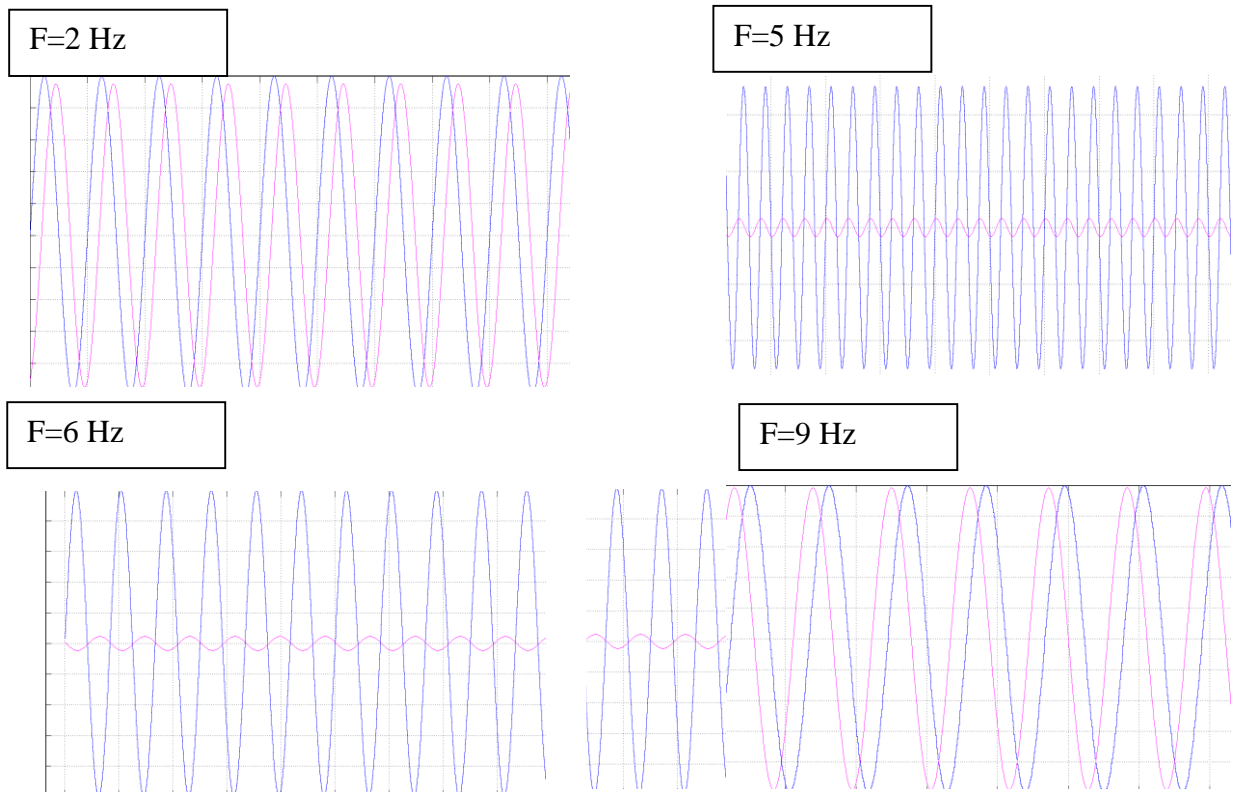
$$\frac{s^2 + 1534}{s^2 + 1.286s + 1650} \frac{s^2 + 329.2}{s^2 + 0.5536s + 306}$$

5. Les tracés des réponses fréquentielles en amplitude et en phase sont donnés à la figure (3.15) :



Figure(3.15) La réponse fréquentielle en amplitude et en phase du filtre coupe bande elliptique conçu.

6. Test de fonctionnement (simulation) :



Figure(3.16) Simulation du filtre coupe bande elliptique conçu.

On pose, dans exemple 2, $G_p = 0.95$, $G_s = 0.01$. On obtient :

1. L'ordre $N=12$.

2. Les zéros : $z_1 = 0.0490j$

$$z_2 = 0.0585j$$

$$z_3 = 0.1361j$$

3. Les pôles : $p_1 = -0.0194$

$$p_2 = -0.0015 + 0.0430j$$

$$p_3 = -0.0068 + 0.0376j$$

$$p_4 = -0.0161 + 0.0176j$$

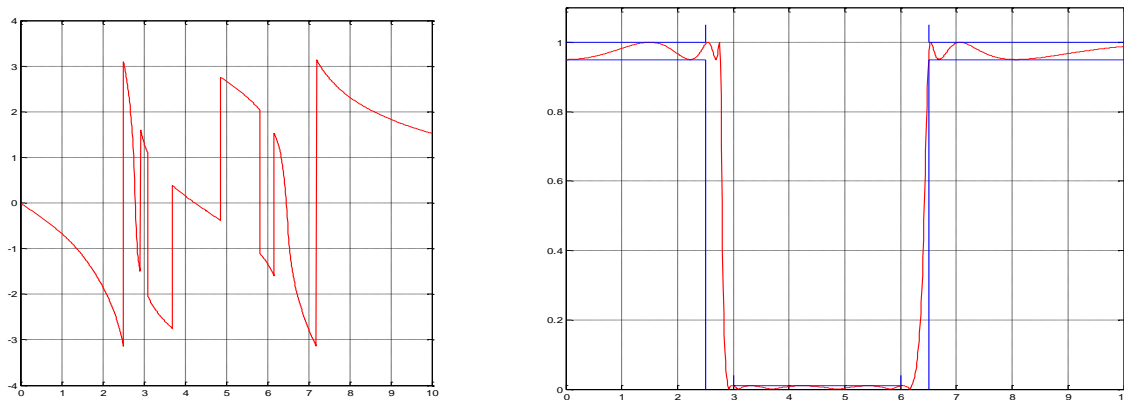
le système est stable.

4. La fonction de transfert en cascade:

$$H(s) = \frac{0.95 s^2 + 675.1}{s^2 + 710.6} \frac{s^2 + 1500}{s^2 + 10.66 s + 1791} \frac{s^2 + 336.6}{s^2 + 0.471 s + 304.9}$$

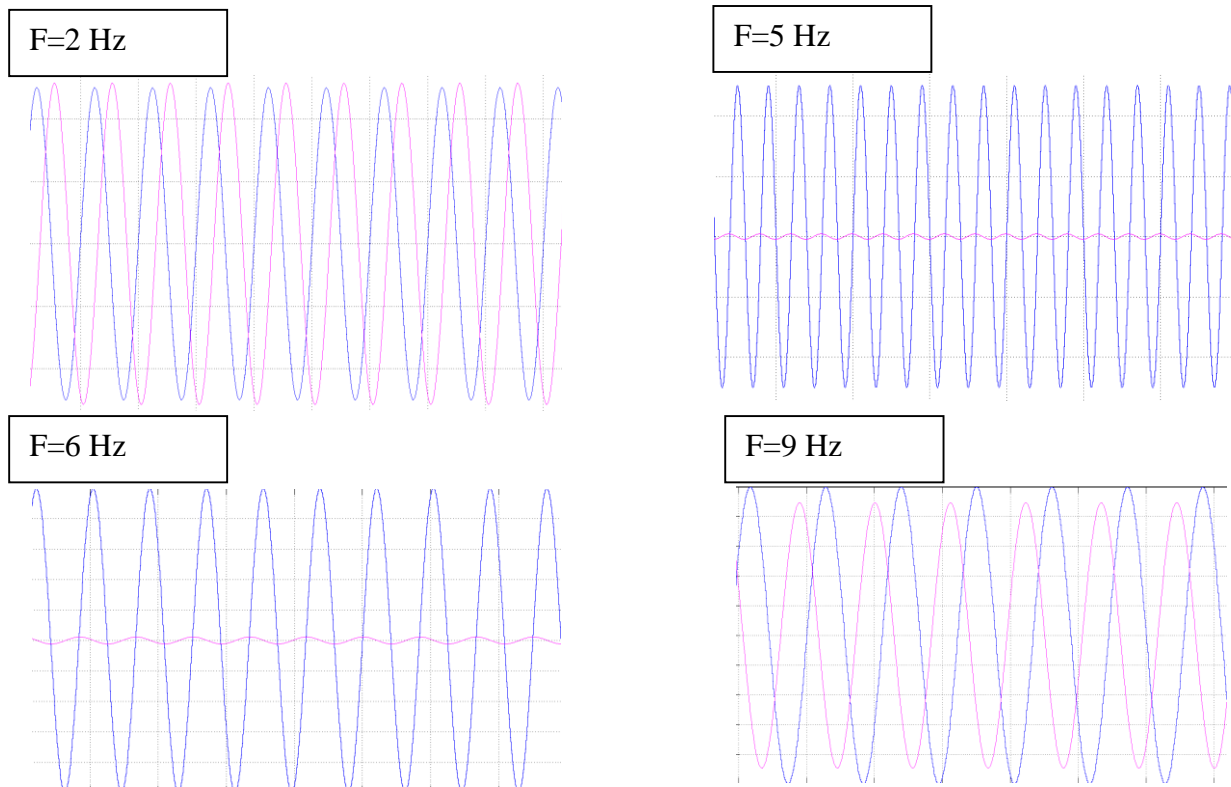
$$\frac{s^2 + 1335}{s^2 + 6.677 s + 1812} \frac{s^2 + 378.3}{s^2 + 2.619 s + 278.8} \frac{s^2 + 935.4}{s^2 + 43.42 s + 2299} \frac{s^2 + 539.8}{s^2 + 13.42 s + 219.7}$$

5. Les tracés des réponse fréquentielle en amplitude et en phase sont donnés à la figure (3.17) :



Figure(3.16) La réponse fréquentielle en amplitude et en phase du filtre coupe bande elliptique conçu.

6. Test de fonctionnement (simulation) :



Figure(3.18) Simulation du filtre coupe bande conçu.

Dans le filtre coupe bande , après avoir examiné les résultats et simulé le système, nous avons noté plusieurs observations :

- Chaque fois qu'il y a un changement dans les G_p, G_s , il y a une augmentation de N .
- Le nombre des zéros est inférieur au nombre des pôles .
- La fonction de transfert écrit en cascade pour facilité de réalisation dans domain pratique.
- La réponse fréquentielle en amplitude et en phase, du filtre conçu est en accord avec la théorie.

3.4 ÉTUDE DU AUGMENTATION DE L'ORDRE

Dans l'équation (2.22) ,faisons une augmentation de l'ordre pour se rapprocher de filtre idéal.

3.4.1 FILTRE PASSE BAS

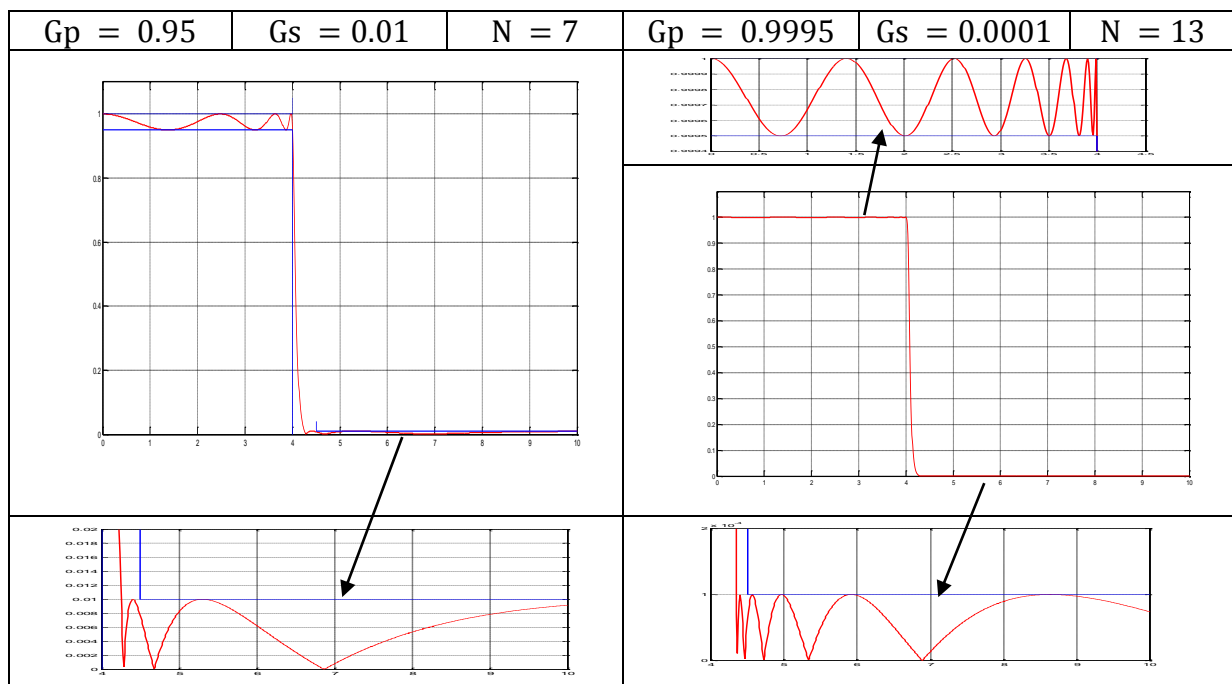


Figure (3.19) la réponse en amplitude du filtre passe bas.

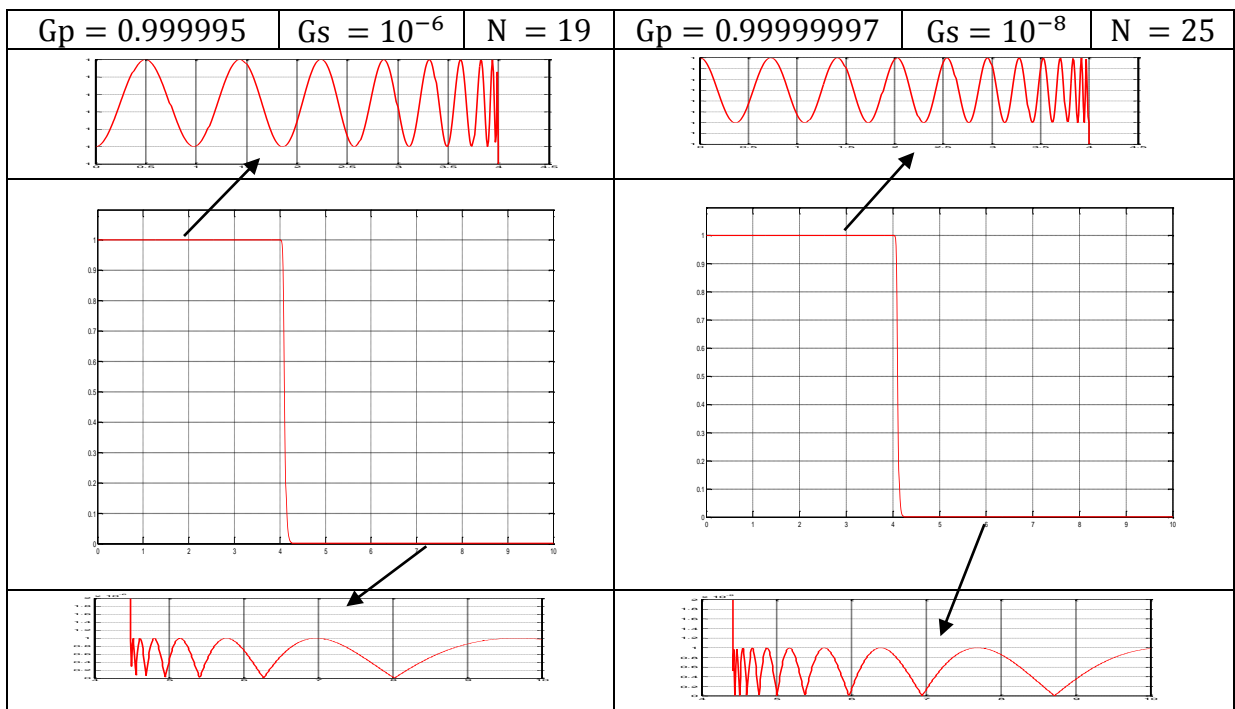


Figure (3.20) La réponse en amplitude du filtre passe bas.

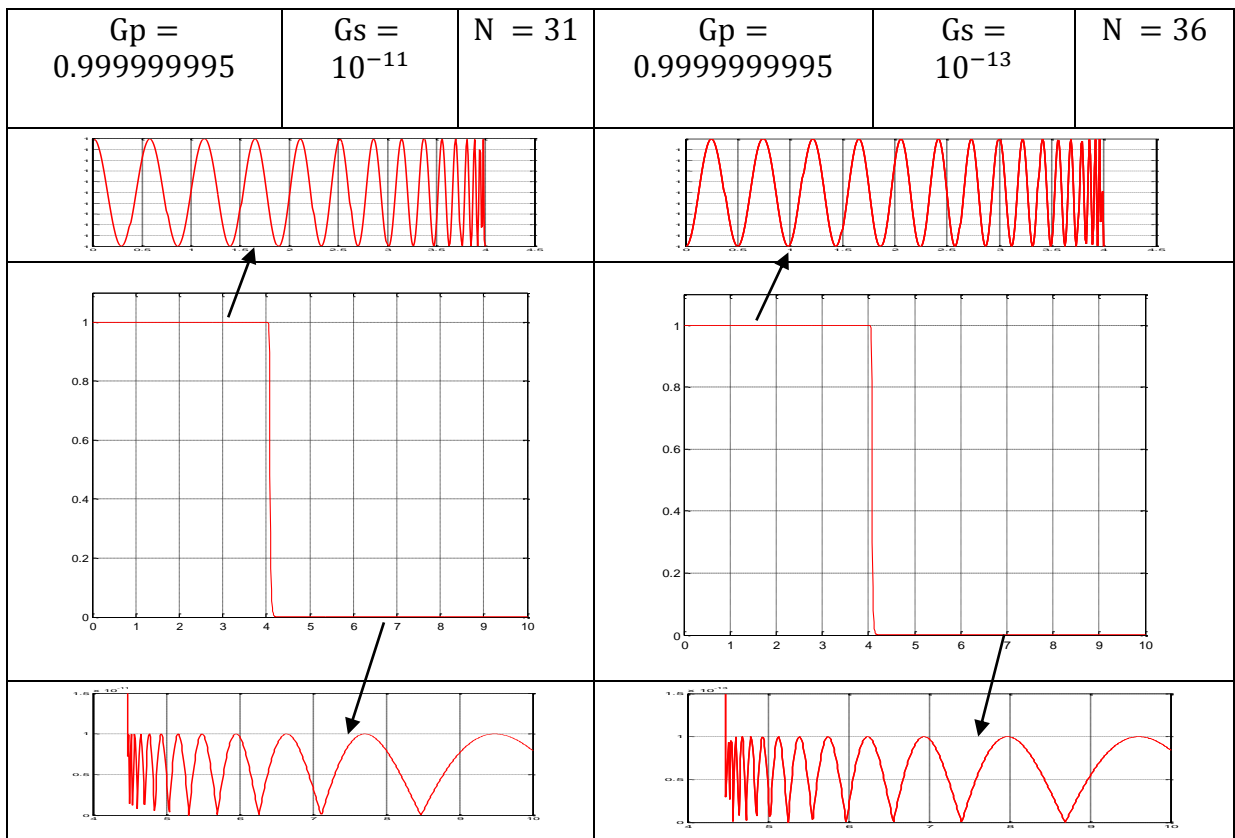


Figure (3.21) La réponse en amplitude du filtre passe bas.

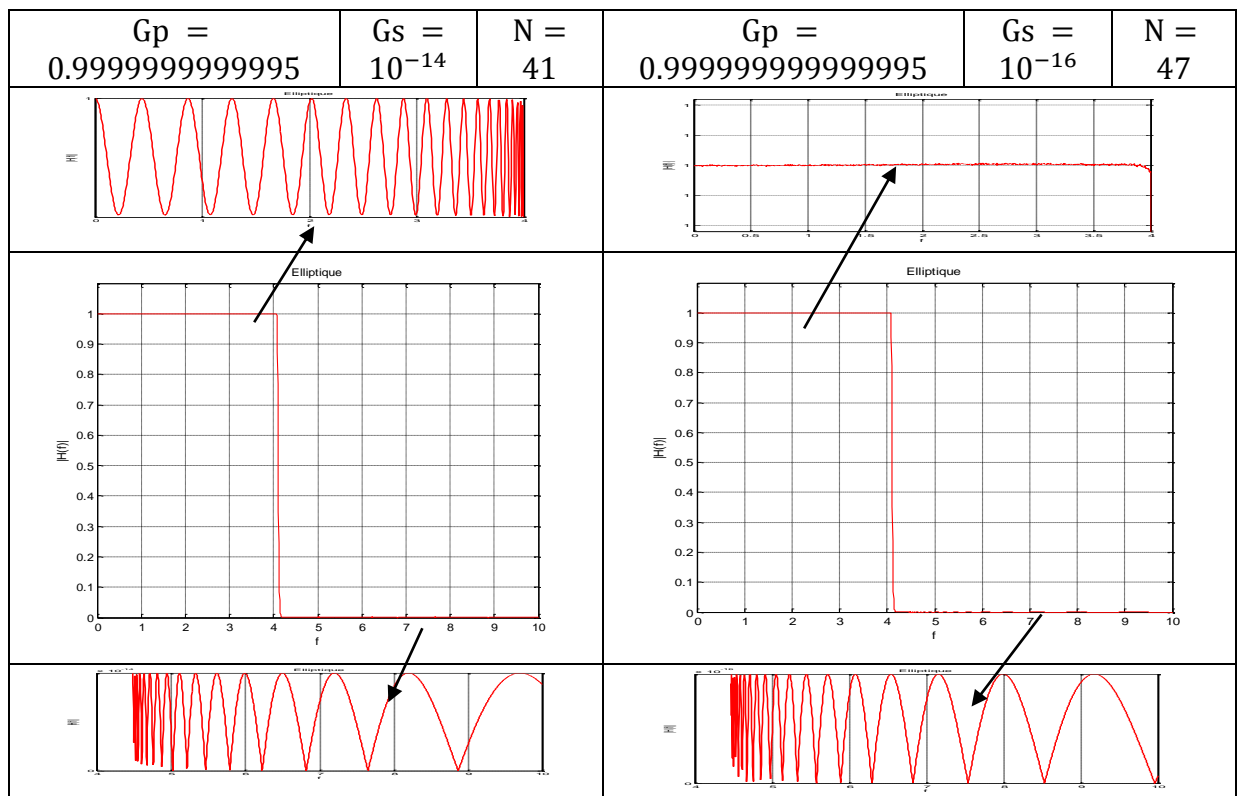


Figure (3.22) La réponse en amplitude du filtre passe bas.

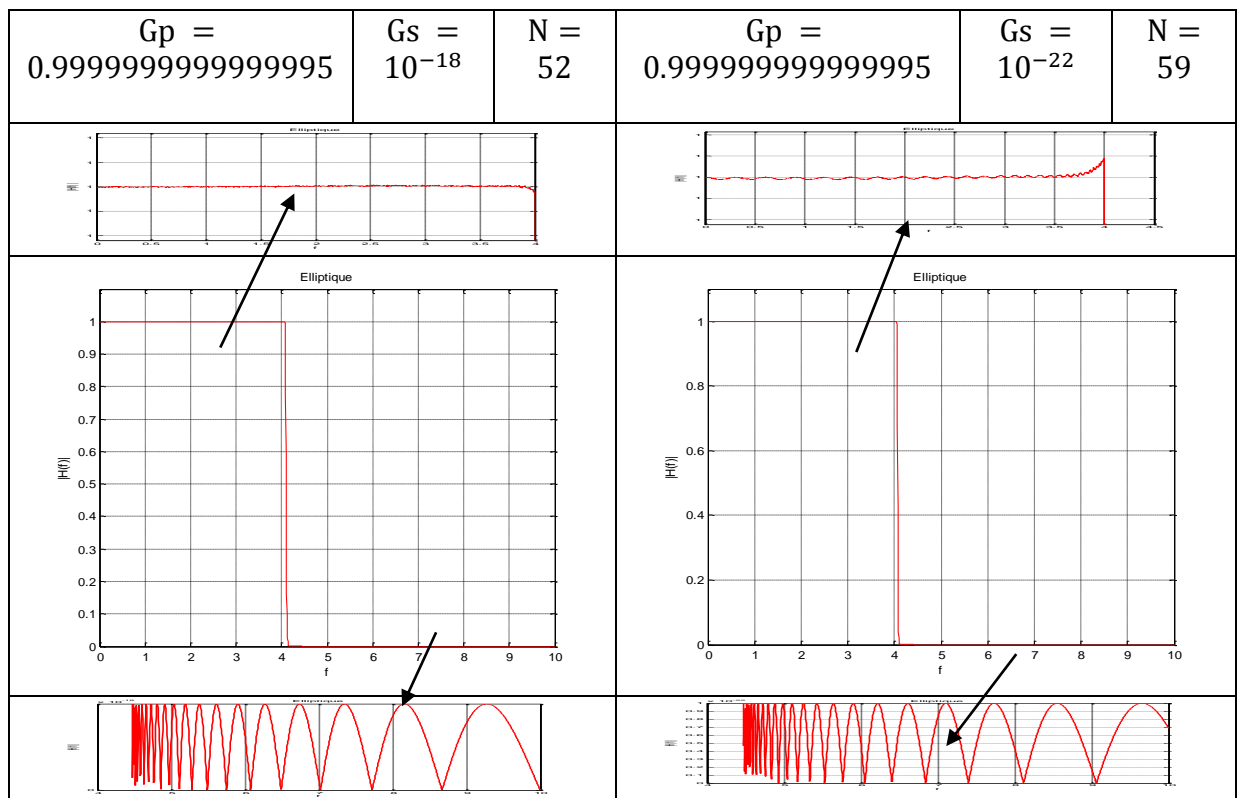


Figure (3.23) La réponse en amplitude du filtre passe bas.

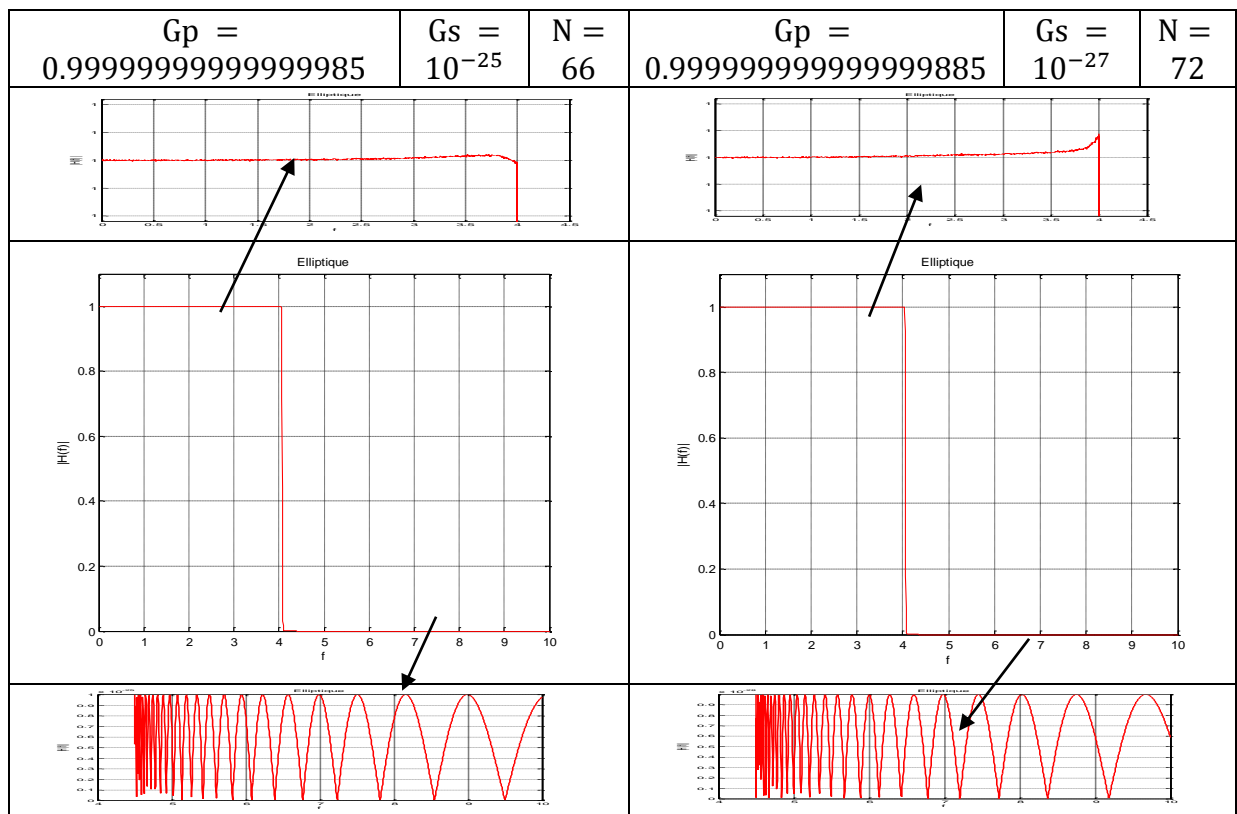


Figure (3.24) La réponse en amplitude du filtre passe bas.

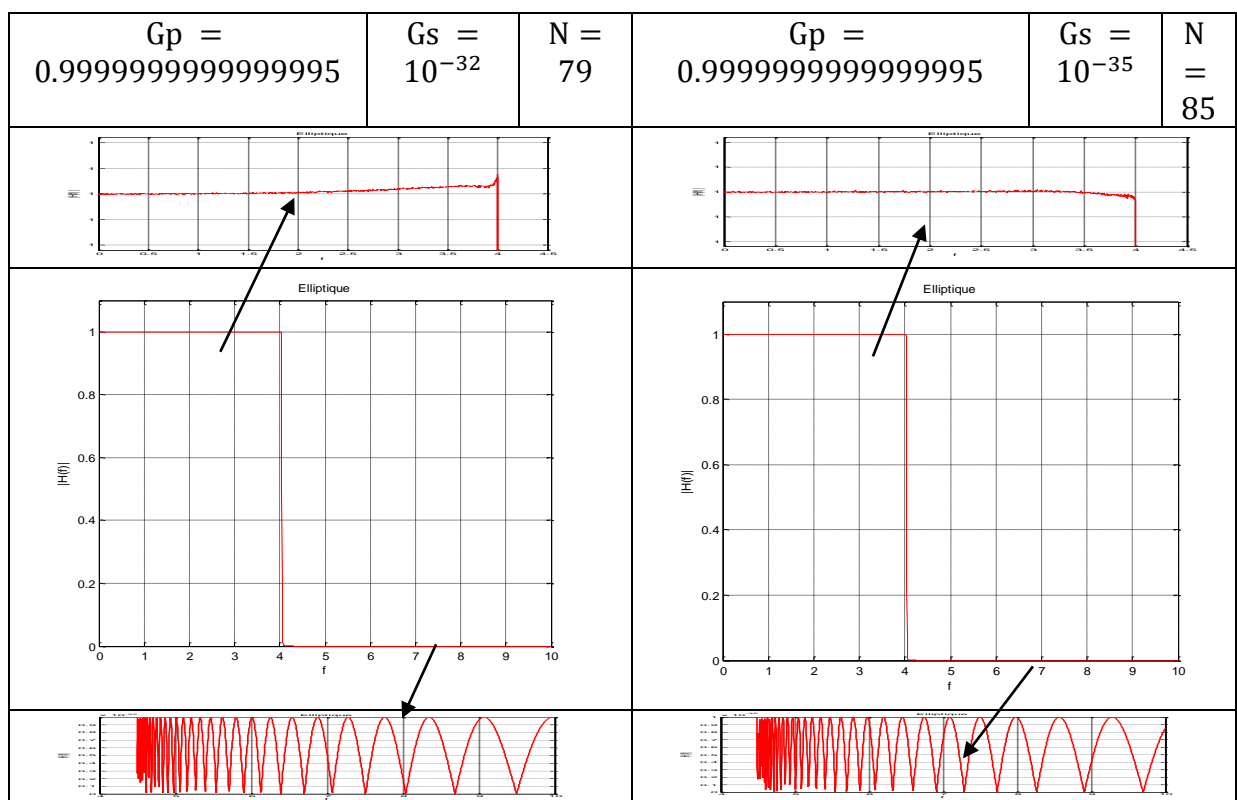


Figure (3.25) La réponse en amplitude du filtre passe bas.

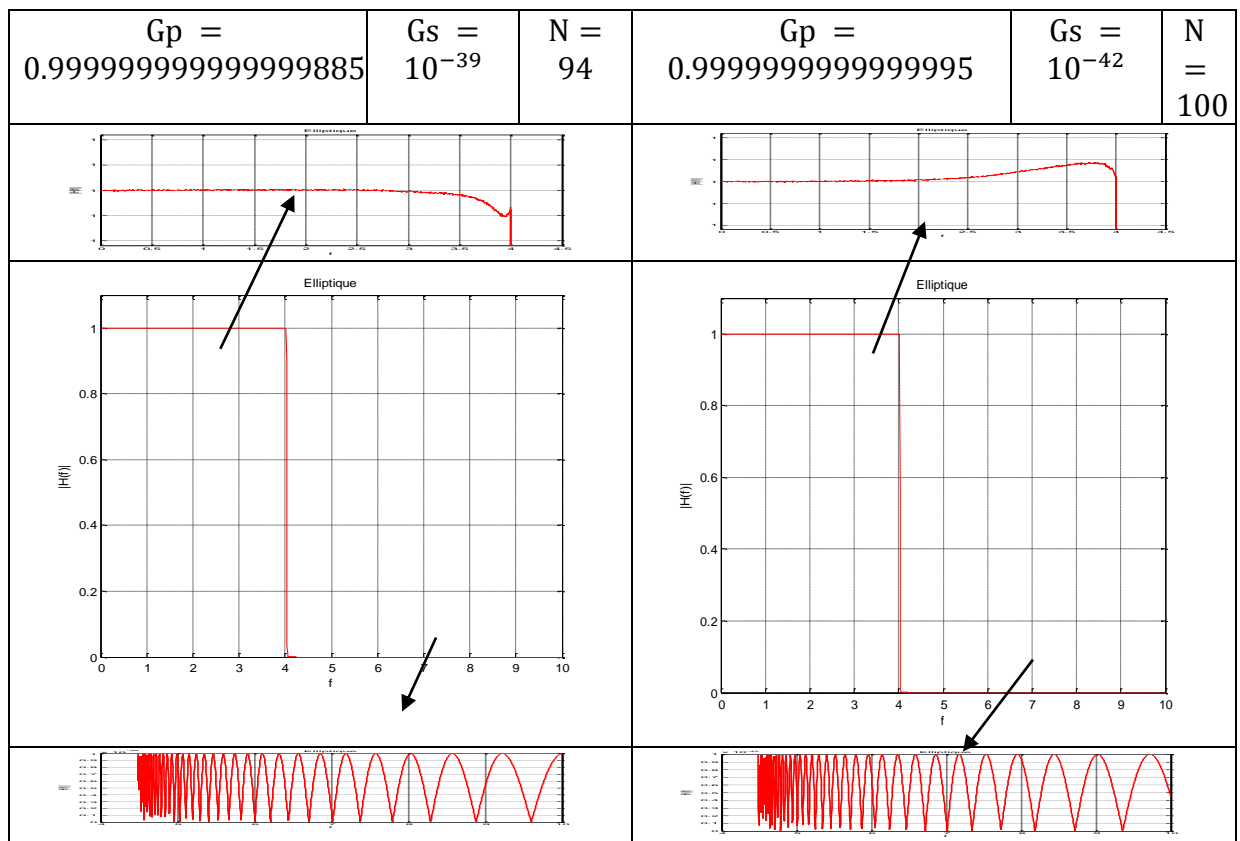


Figure (3.26) La réponse en amplitude du filtre passe bas.

Lorsque l'ordre du filtre augmente, la réponse en amplitude du filtre elliptique se rapproche plus étroitement de la réponse idéale.

Si l'ordre est grand, alors le nombre d'ondulations est grand.

3-4-2 FILTRE PASSE BANDE

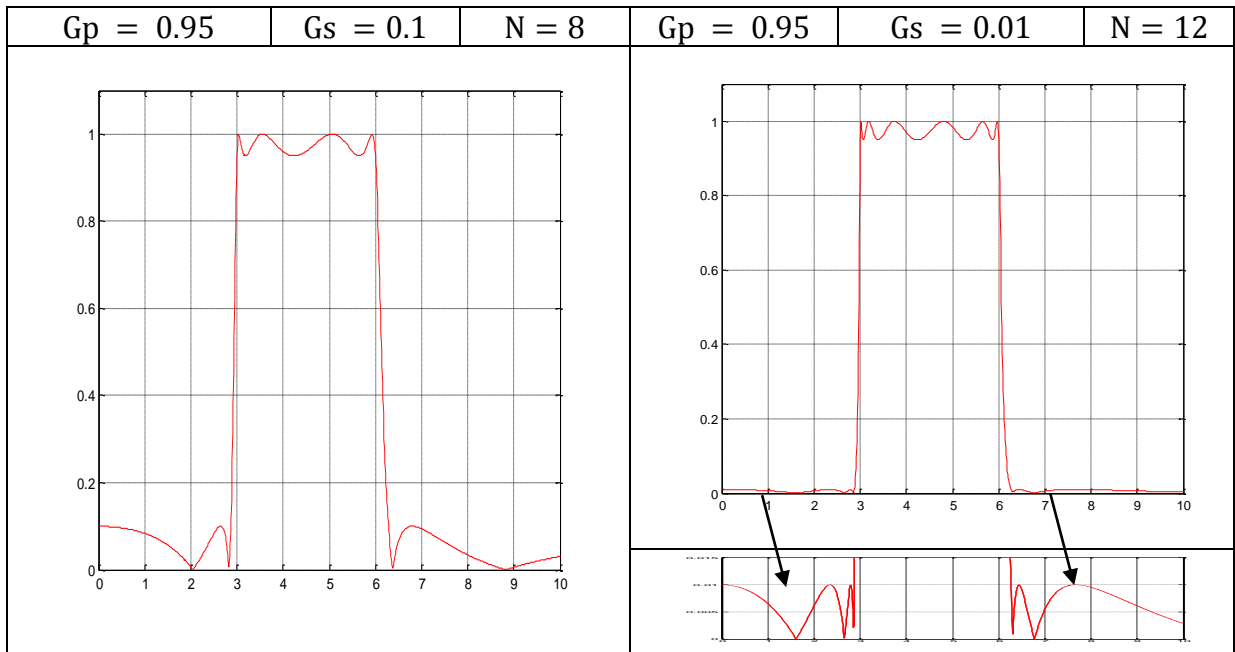


Figure (3.27) La réponse en amplitude du filtre passe bande.

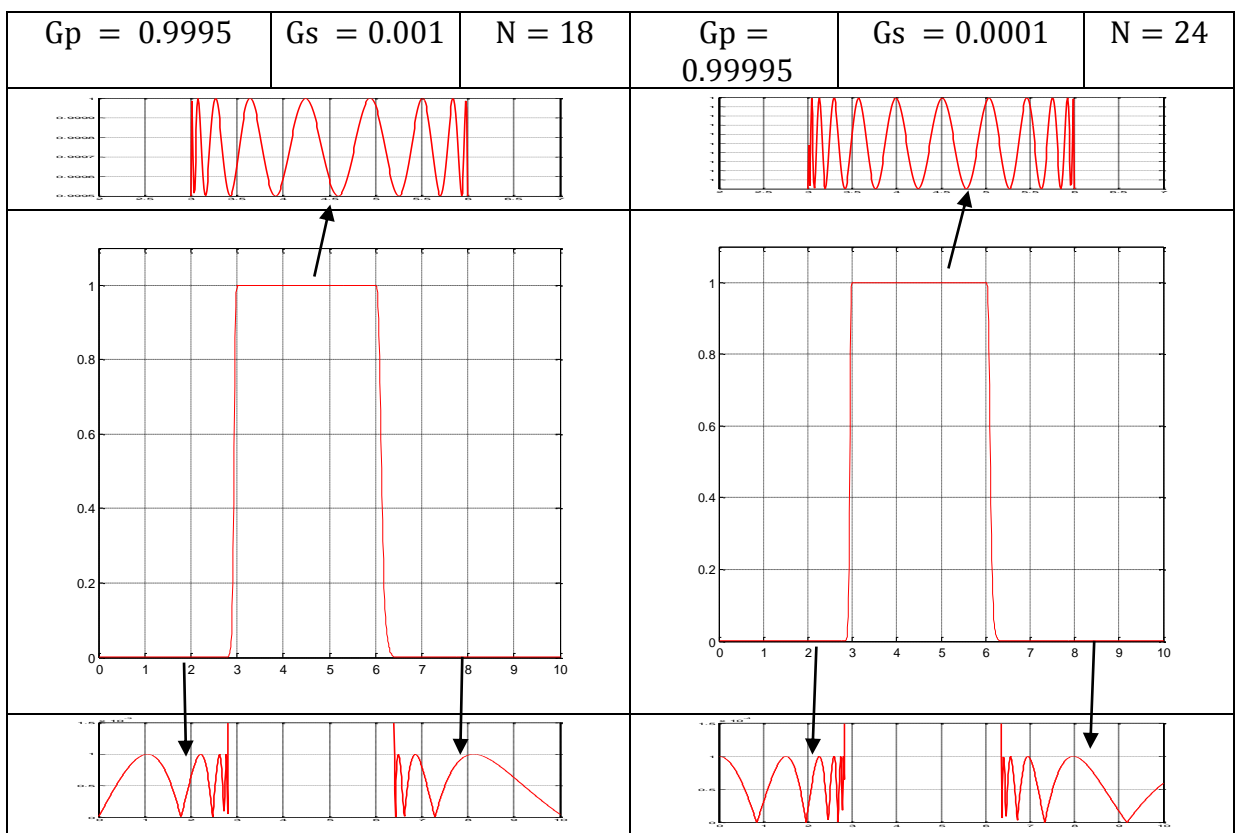


Figure (3.28) La réponse en amplitude du filtre passe bande.

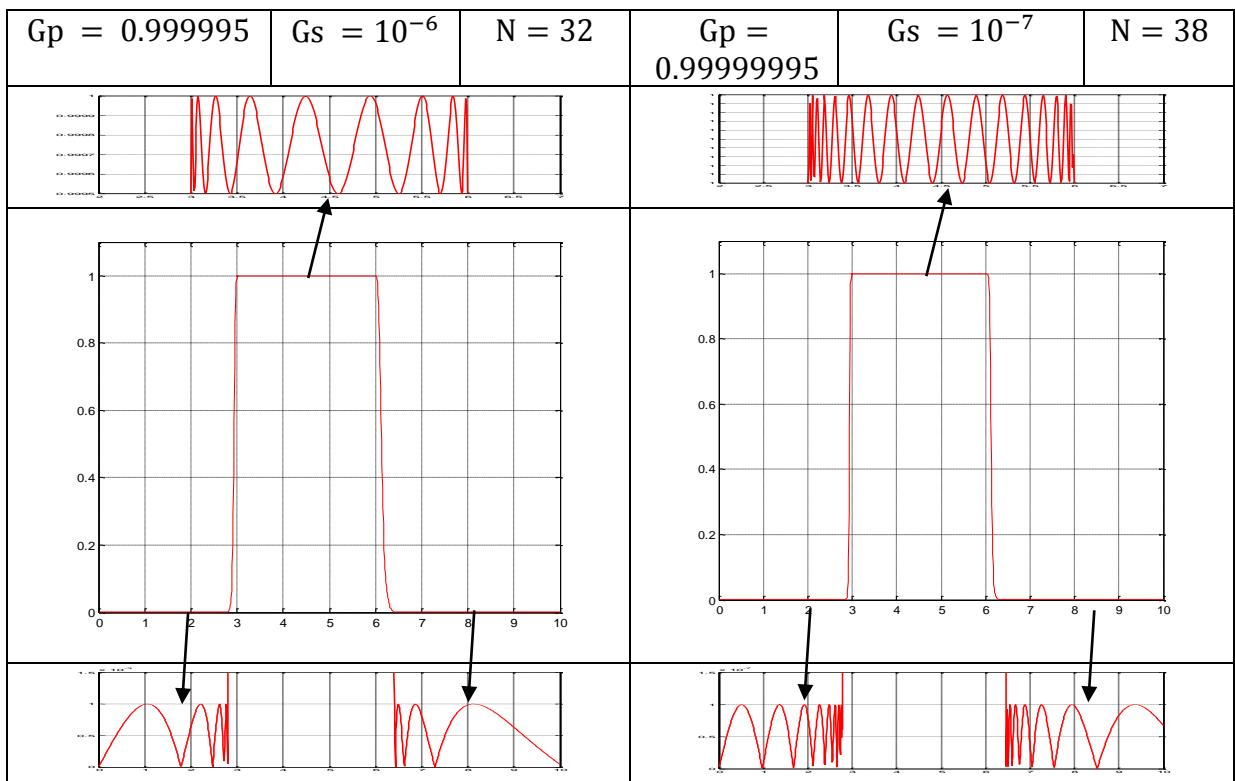


Figure (3.29) La réponse en amplitude du filtre passe bande.

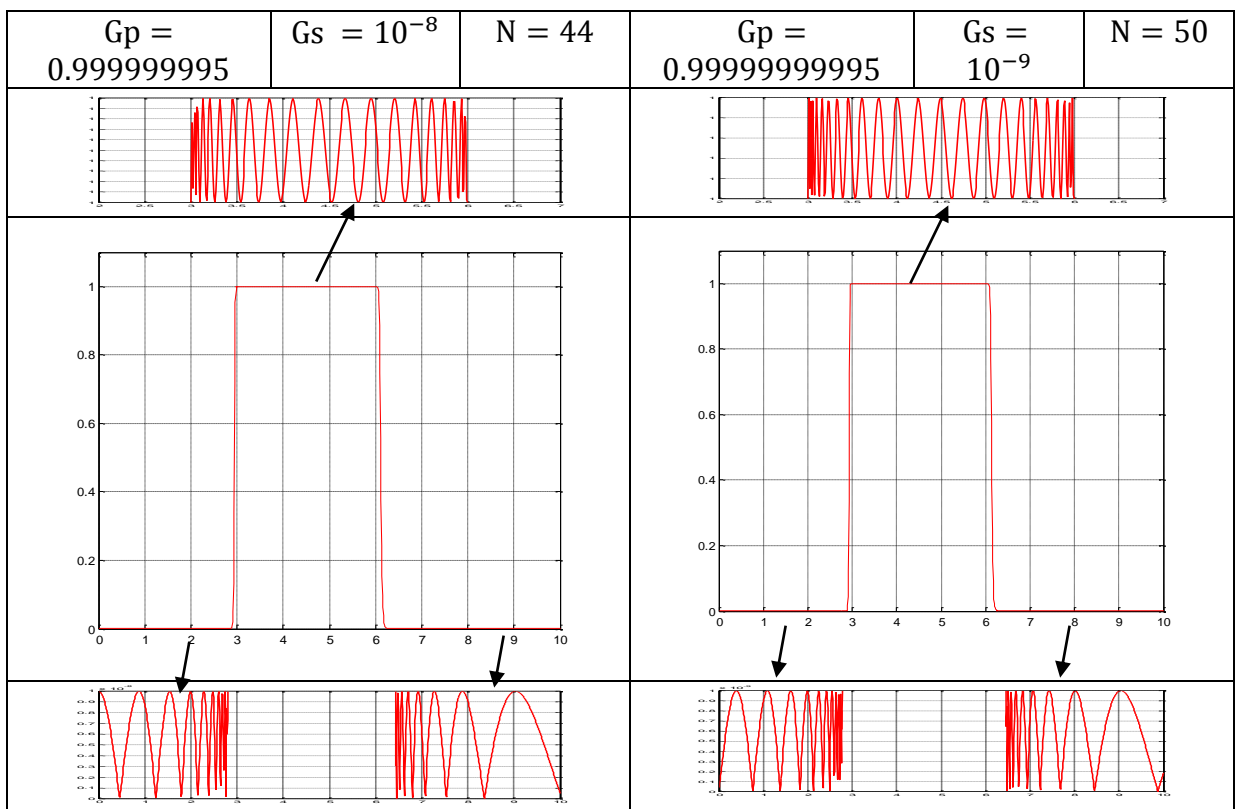


Figure (3.30) La réponse en amplitude du filtre passe bande.

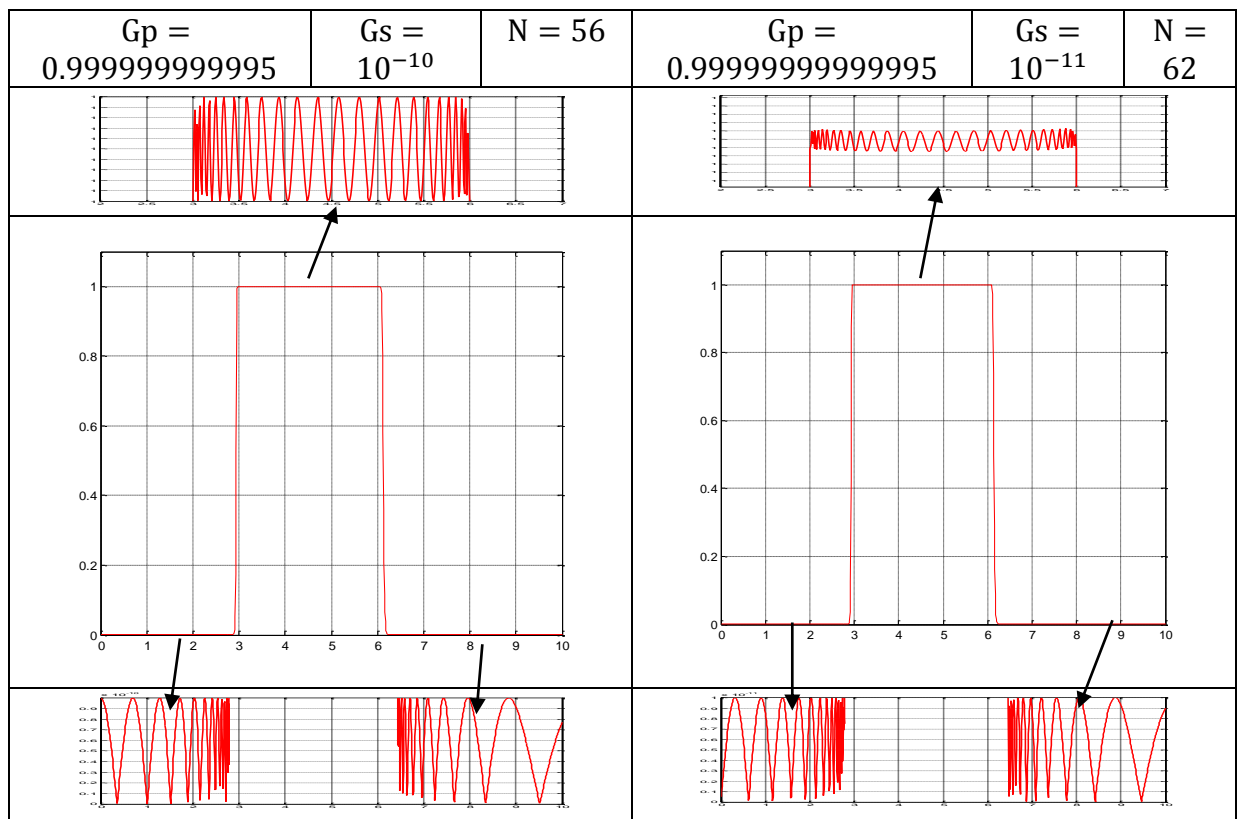


Figure (3.31) La réponse en amplitude du filtre passe bande.

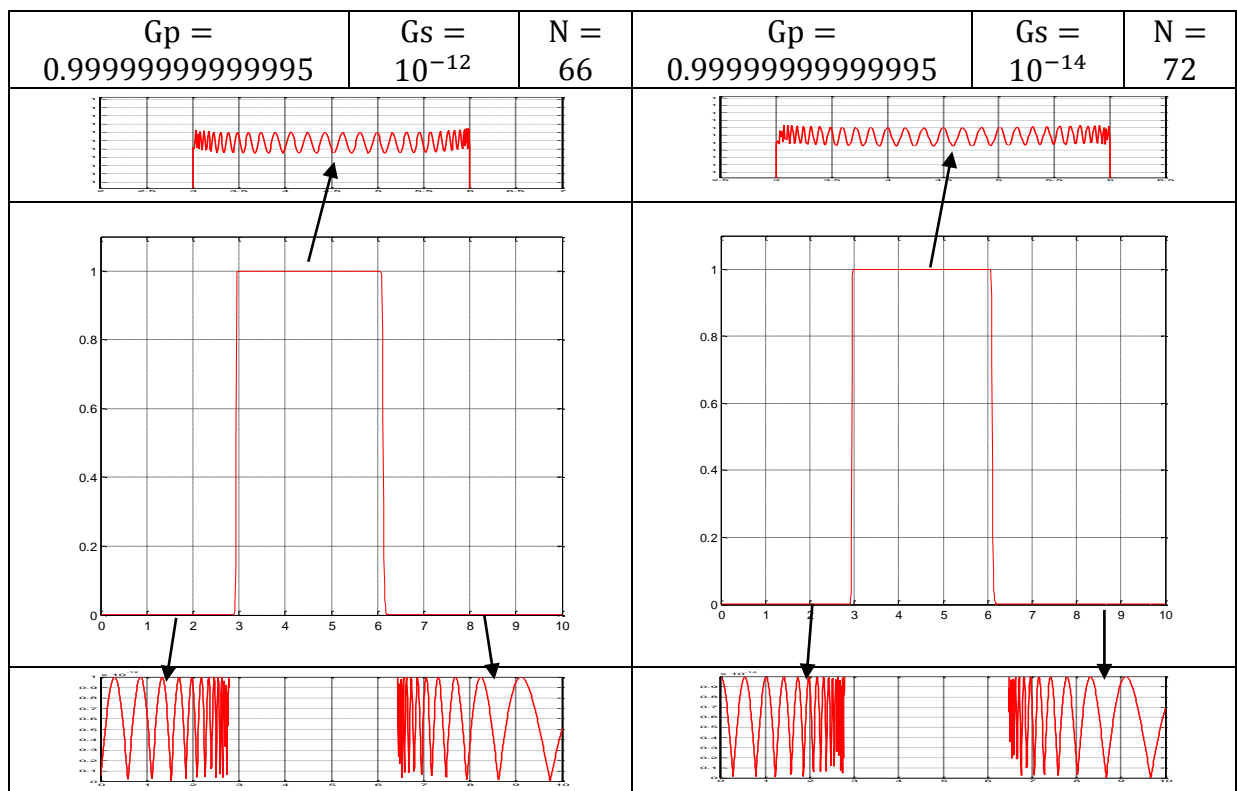


Figure (3.32) La réponse en amplitude du filtre passe bande.

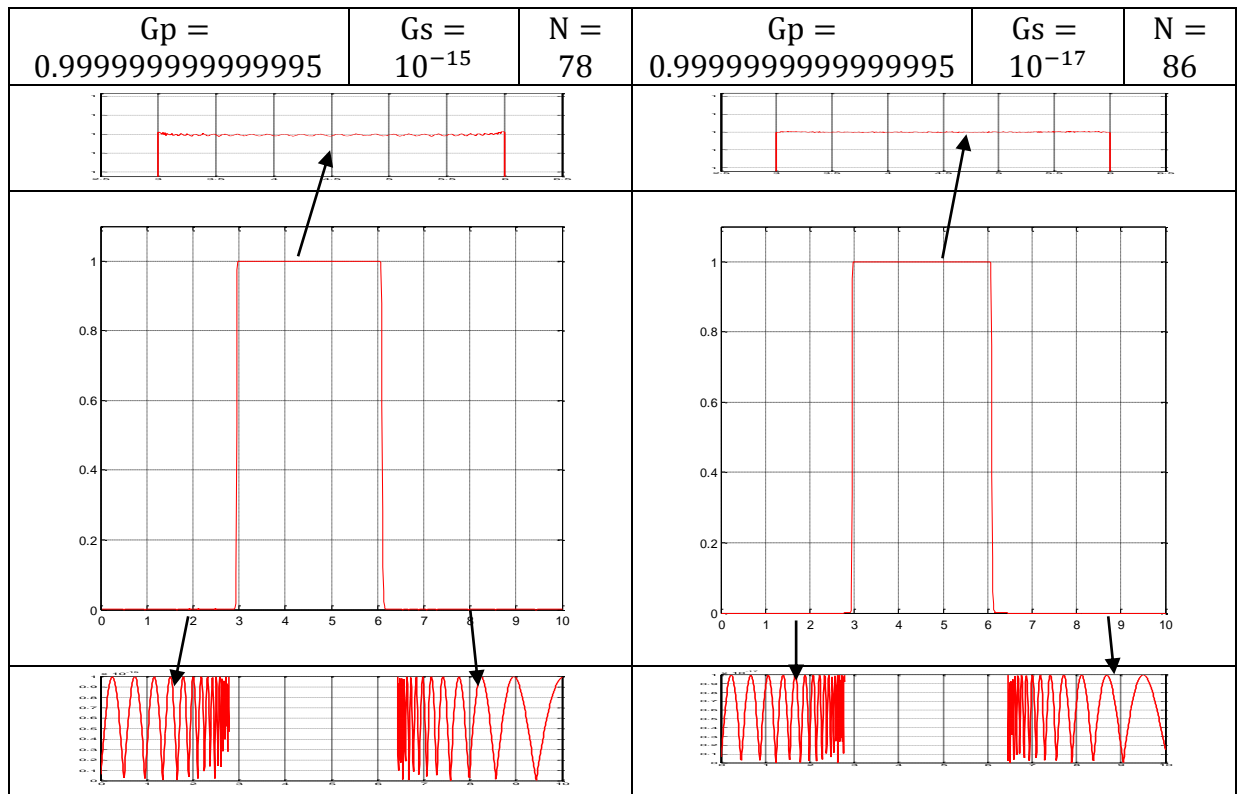


Figure (3.33) La réponse en amplitude du filtre passe bande.

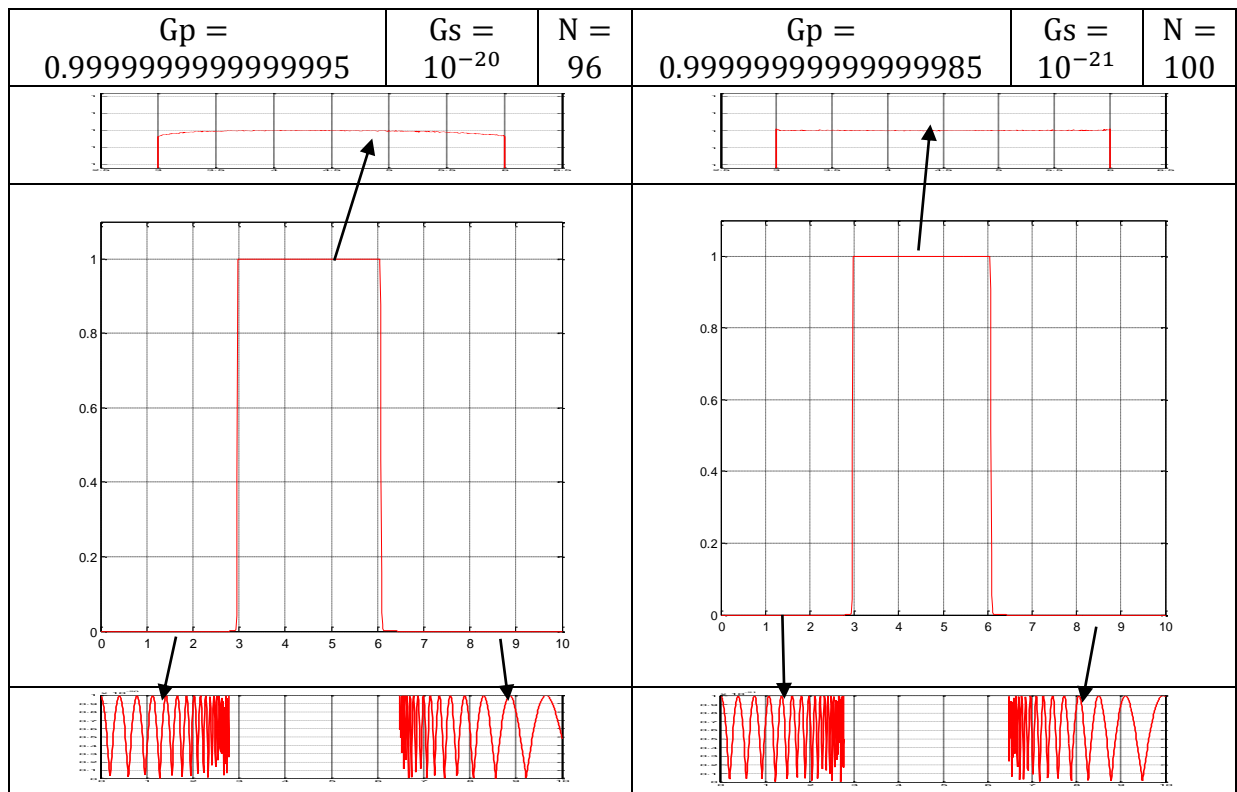


Figure (3.34) La réponse en amplitude du filtre passe bande.

Lorsque l'ordre du filtre augmente, la réponse en amplitude du filtre elliptique se rapproche plus étroitement de la réponse idéale.

Si l'ordre est grand, alors le nombre d'ondulation est grand.

3-5 CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté le programme de conception des filtres elliptiques sous environnement Matlab. Ce programme a été testé avec plusieurs exemples de filtres (passe bas, passe haut, passe bande et coupe bande). Il a servi à étudier les performances des filtres elliptiques et à simuler les systèmes conçus, les résultats de test ont mis en évidence la bonne concordance avec la théorie.

conclusion générale

Le filtre analogique actif est un sujet de recherche en plein développement à l'heure actuelle. Par conséquent, le problème de conception de filtres analogiques a reçu beaucoup d'attention. Ce sujet est le but du 1^{er} chapitre où nous avons présenté une définition. Nous avons discuté les fonctions d'approximation de filtre (butterworth, chebyshev type 1, chebyshev type 2 et elliptique), et défini le gabarit d'un filtre.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la technique de conception des filtres elliptiques basée sur les fonctions elliptiques jacobiniennes.

Dans le troisième chapitre, premièrement nous avons réalisé sous Matlab les fonctions elliptiques jacobiniennes et donné un organigramme de conception d'un filtre, puis nous avons expliqué la simulation de la fonction de transfert.

Dans la deuxième partie de ce chapitre nous avons conçu des filtres elliptiques, à partir des spécifications de leurs gabarits, tracé la réponse fréquentielle en amplitude et en phase pour des autres types de filtre (passe bas, passe haut, passe bande et coupe bande). Les tests en simulation ont confirmé un bon accord avec les spécifications du gabarit et avec la théorie.

RÉFÈRENCES

- [1] Anju, Mamta Katiyar “ Design of Butterworth and Chebyshev1 Lowpass Filter for Equalized Group Delay’“, International Journal of Advanced Research in Computer Science and Software Engineering, Volume 2, May 2012.
- [2] Anirudh Singhal, “ Filter Design: Analysis and Review ’“, Journal of Engineering Research and Applications, Vol. 4, January 2014.
- [3] A. J. Grossman, “Synthesis of Tchebycheff Parameter Symmetrical Filters,” Proc. IRE, 45,454 (1957).
- [4] S. J. Orfanidis, “High-Order Digital Parametric Equalizer Design,” J. Audio Eng. Soc., 53,1026 (2005).
- [5] Himanshu Lamba, Kunal Wason, Anmol Goyal“ACTIVE FILTERS: USAGE IN MODERN TECHNOLOGY”, *ECE*, INTERNATONAL JOURNAL OF INNOVATIVE RESEARCH IN TECHNOLOGY, 2014 IJIRT , Volume 1 Issue 6 , ISSN: 2349-6002.
- [6] Varun Aggarwal, Wesley O Jin, Una-May O’Reilly“Filter Approximation Using Explicit Time and Frequency Domain Specifications”, Institute of Technology Cambridge.
- [7] D.-S. Huang, L. Heutte, and M. Loog”Optimal Components Selection for Analog Active Filters Using Clonal Selection Algorithms “, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, pp. 950–959, 2007.
- [8] João L. Afonso, H. J. Ribeiro da Silva and Júlio. S. Martins,” Active Filters for Power Quality Improvement”, IEEE Porto PowerTech, 10-13 Set. 2001.
- [9] M. N. S. Swami and K. S. Thyagarajan, “Digital Bandpass and Bandstop Filters with Variable Center Frequency and Bandwidth,” Proc. IEEE, 64, 1632 (1976).
- [10] Kerry Lacanette” A Basic Introduction to Filters—Active, Passive, and Switched-Capacitor”, texas instrument, April 21, 2010.
- [11] Hercules G. Dimopoulos” Optimal Use of Some Classical Approximations in Filter Design”, IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS—II: EXPRESS BRIEFS, VOL. 54, NO. 9, SEPTEMBER 2007.
- [12] Rabin Raut and M. N. S. Swamy” Modern Analog Filter Analysis and Design”,
- [13] Modern Analog Filter Analysis and Design"High-Order Inductorless Elliptic Filter with Reduced Number of Capacitors Using Signal- Flow Graphs", University of Zagreb/Faculty of Electrical Engineering and Computing, vol76-81, 2013.

- [14] EEE305”, “EEE801 Part a”: Digital Signal Processing” Chapter 5 Design of IIR Filters”, University of Newcastle upon Tyne
- [15] H. Matzner, S. Levy, H. Moalem and D. Ackerman.” RF Laboratory Manual - Passive Filter Design.” December 2008.
- [16] Artech House,” Practical Analog and Digital Filter Design”, Les Thede 2004.
- [17] Mark Kleehammer” Mathematical Development of the Elliptic Filter”, Queen’s University, August 26, 2013.
- [18]” Approximation Polynomials”, 4/24/2004
- [19] Prajoy Podder , Mehedi Hasan, Md.Rafiqul Islam, Mursalin Sayeed “Design and Implementation of Butterworth, Chebyshev-I and Elliptic Filter for Speech Signal Analysis”, International Journal of Computer Applications (0975 – 8887) Volume 98– No.7, July 2014.
- [20] H. J. Orchard and Alan N. Willson” Elliptic Functions for Filter Design”, IEEE TRANSACTIONS ON CIRCUITS AND SYSTEMS—I: FUNDAMENTAL THEORY AND APPLICATIONS, VOL. 44, NO. 4, APRIL 1997.
- [21] M. Vlcek and R. Unbehauen, “Degree, Ripple, and Transition Width of Elliptic Filters,” IEEE Trans. Circ. Syst., CAS-36, 469 (1989).
- [22] C. G. J. Jacobi, “Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum,” reprinted in C. G. J. Jacobi’s Gesammelte Werke, vol.1, C. W. Borchardt, ed., Verlag von G. Reimer, Berlin, 1881.
- [23] Marie Frénéa” Filtrage analogique : généralités”, ENS Cachan – Antenne de Bretagne Notes de cours 2002 (version 1).
- [25] R. Hoppe, “Elliptische Integrale und Funktionen nach Jacobi,” available online at the web page: <http://home.arcor.de/dfcgen/wpapers/elliptic/>.
- [26]: R. W. Daniels, Approximation Methods for Electronic Filter Design, McGraw-Hill, New York, 1974.
- [26] M. D. Lutovac, D. V. Tomic, and B. L. Evans,” Filter Design for Signal Processing”, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [27] H. J. Orchard and A. N. Willson, “Elliptic Functions for Filter Design,” IEEE Trans. Circuits Syst., I, **44**, 273 (1997).
- [28] D. F. Lawden, Elliptic Functions and Applications, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [29] P. F. Byrd and M. D. Friedman, Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Scientists, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [30] Available from from the author’s web page: www.ece.rutger.edu/~orfanidi/hpeq.

Résumé

L'objectif de notre travail est l'étude des filtres elliptiques analogiques. Un filtre analogique est un système électronique qui effectue un filtrage à l'aide d'une succession d'opérations mathématiques sur un signal continue. Les approximations de Butterworth, Chebyshev et Elliptique (Cauer) peuvent être utilisés dans la conception d'un filtre analogique de manière à satisfaire les spécifications de la bande passante, la transition bande, et la bande d'arrêt des filtres. Notre travail est limité à l'étude des filtres elliptiques et leurs performances. Un programme a été réalisé pour la conception des filtres elliptiques à partir d'un gabarit spécifié et la simulation de la fonction filtrage.

Mots clés : filtres elliptiques, ondulation, gabarit, simulation.

المخلص

والهدف من عملنا هو دراسة المرشحات بيضاوي الشكل التناظرية. عامل تصفية التناظرية هو نظام الكتروني ينفذ تصفية باستخدام سلسلة من العمليات الحسابية في إشارة مستمرة. تقريبية من بترورث، تشيبشيف والإهليجية (كاور) يمكن استخدامها في تصميم فلتر التناظرية لتلبية المواصفات من عرض النطاق الترددي، والفرقة الانتقالية والمرشحات توقف الفرقة. يقتصر عملنا على دراسة المرشحات بيضاوي الشكل والأداء. ونظم برنامج لتصميم مرشحات بيضاوي الشكل من قالب معين ومحاكاة وظيفة التصفية. كلمات مفتاحية: مرشحات بيضاوية، تموج، القالب، محاكاة.

Abstract

The objective of our work is the study of analog elliptic filters. An analog filter is an electronic system that performs filtering using a series of mathematical operations on a continuous signal. The approximations of Butterworth, Chebyshev and Elliptic (Cauer) can be used in the design of an analog filter to meet the specifications of bandwidth, the transition band and the stop band filters. Our work is limited to the study of elliptical filters and performance. A program was conducted for the design of elliptic filters from a specified template and simulation of the filter function.

Keywords : elliptical filters, ripple, template, simulation.