REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et applications

Thème

Problème de Cauchy pour d'équations différentielles d'ordre fractionnaire

---

Présentée par :
ELGUERI Khadidja et *ABDELLI* Hadjer

Soutenu publiquement le : 00/00/2017.

Devant le jury composé de :

Président :	M^r *ARIOUA* Yacine	M.C.B,	Université de M'sila
Encadreur :	M^r *NOUIRI* Brahim	M.C.B,	Université de M'sila
Examinateur :	M^r *FRAHTIA* Nassim	M.A.A,	Université de M'sila

Année universitaire 2016/2017

Remerciements

Nous aimerons en premier lieu remercier notre dieu **Allah** qui nous donné la volonté et le courage pour la réalisation de ce travail.

Nous tiennons á remercier vivement notre encadreur du mémoire M^r *NOUIRI* Brahim professeur. Nous remercions également le membre de jury M^r *ARIOUA* Yacine et M^r *FRAHTIA* Nassim.

Nous a'dressons aussi des remerciements spéciaux á M^r *MERZOUGUI* Abdelkrim et M^r *MIHOUBI* Farid.

Enfin nous adressons nos sincéres remerciements á tous enseignants de faculté mathématique et informatique .

Merci á tout ceux qui on contribué,de pré ou de loin, á l'aboutissement de ce travail.

Dédicaces

Ce travail est dédié à :

A mes parents ma mère et mon père.

A mes soeurs sur tout"Amina,Roaa" et mon frère .

A mon oncle "Khaled".

A toute la famille .

H.Abdelli

A mes parents ma mère et mon père.

A mes soeurs sur tout "Aicha" et mes frères .

A mon marie "Brahim".

A toute la famille.

A mon nièce "Soulaima"et mon neveu"Bahaa" .

K.Elgueri

A toute les amis "Aicha,Imane,Nabila,Dalal,Farida.".

Résumé

ملخص: في هذه المذكرة، قمنا بدراسة مسألة كوشي لمعادلة تفاضلية غير خطية ذات مشتقة كسرية لكبيتو. برهنا نظرية التكافؤ بين مسألة كوشي ومعادلة تكاملية غير خطية لفولتيرا في فضاء الدوال القابلة للاشتقاق بالاستمرار. اعتمدنا على هذه التوطئة للبرهان على أن مسألة كوشي تملك حلا وحيدا وأن هذا الحل مستمرا بالنسبة للشروط الابتدائية. أما بالنسبة للجانب العددي، استعملنا طريقتي VIM و HPM لحل معادلة ريكاتي ذات مشتقة كبيتو.

كلمات مفتاحية: مشتقات كسرية، معادلة التكامل لفولتيرا، طريقتي HPM و VIM ، مسألة كوشي، نظرية النقطة الثابتة في فضاء بناخ.

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème de Cauchy pour une équation différentielle non linéaire avec dérivée fractionnaire de Caputo. Nous avons démontré un théorème d'équivalence entre ce problème et une équation intégrale non linéaire de Volterra dans l'espace de fonctions continuellement différentiables. Sur la base de ce résultat, l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales sont prouvées. Pour l'aspect numérique, nous avons utilisé les deux méthodes de VIM et HPM pour calculer la solution numérique de l'équation de Riccati avec dérivée fractionnaire de Caputo.

Mots-Clés : Dérivée fractionnaire, Équation intégrale de Volterra, Méthode HPM, Méthode de VIM, Problème de Cauchy, Théorème du point fixe de Banach.

In this memoir, we studied a Cauchy problem for a nonlinear differential equation with a fractional Caputo derivative. We have demonstrated an equivalence theorem between this problem and a nonlinear integral equation of Volterra in the space of continuously differentiable functions. On the basis of this result, the existence, the uniqueness and the continuous dependence of the solution with respect to the initial conditions are proved. For the numerical aspect, we used the two methods of VIM and HPM to calculate the numerical solution of the Riccati equation with fractional derivative of Caputo.

Keywords : Banach fixed point theorem, Cauchy problem, Fractional derivative, HPM method, Integral equation of Volterra, VIM method.

Table des matières

Table des figures

Introduction générale

La théorie de dérivation fractionnaire est un sujet presque ancien que le calcul classique tel que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du 17^{me} siècle, l'époque où Newton et Leibniz ont développé les fondements de calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a présenté le symbole $\frac{d^n f}{dt^n}$ pour désigne la n^{me} dérivée d'une fonction f. Quand il a annoncé dans une lettre à l'Hôpital (apparemment avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$), l'Hôpital a répondu : Que signifie $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = 1/2$?

Cette lettre de l'Hôpital, écrite en 1695, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé pour $n = 1/2$, c'est à dire une fraction (nombre rationnel) a en fait donné lieu au nom de cette partie des mathématiques.

Une autre théorie se développe en parallèle de la dérivation fractionnaire telle est la théorie des équations différentielles fractionnaires qui a de nombreuses applications dans la description de nombreux évènements en visco-élasticité [5], électromagnétique [19], biologie [3] et économie [2, 16].

Durant ces dernières années, les équations différentielles fractionnaires (FDE) ont trouvé des applications dans beaucoup des problèmes en physique. Comme dans la plupart du temps, ces équations ne peuvent être résolues exactement et les méthodes approximatives et quelques méthodes analytiques doivent être utilisées pour résoudre des problèmes non linéaires incluent, la méthode des itérations du variationelles (VIM) [13, 9, 8, 12] et la méthode des perturbations homotopique (HPM) [6, 7, 11, 10].

Notre objective dans ce mémoire est l'étude du problème de Cauchy pour l'équation différentielle d'ordre fractionnaire de type Caputo.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivant : dans le premier chapitre, nous présentons certaines théories de base qui concernent des fonctions utiles qui sont utilisées dans les autres chapitres . Nous donnons ici les définitions des fonctions Gamma et Bêta . Ces fonctions jouent un rôle très importent dans la théorie des équations différentielles d'ordre fractionnaire et ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires pour les intégrales et les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo. Dans le deuxième chapitre, nous avons étudié un problème de Cauchy pour une équation différentielle non linéaire avec dérivée fractionnaire de Caputo. Nous avons démontré un résultat d'équivalence entre ce problème et une équation intégrale de Volterra non linéaire dans l'espace de fonctions continuellement différentiables. Sur la base de ce résultat, l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy considéré sont prouvées. On termine ce chapitre, par un résultat de la dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales.

Dans le dernier chapitre, nous avons présenté brièvement la méthode d'itération variationnelle(VIM) et la méthode de perturbation d'homotopie(HPM), puis nous avons appliqué ces méthode sur l'équation de Riccati avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

En termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires sur le calcul fractionnaire.

Dans ce chapitre, nous présentons certaines théories de base qui concernent des fonctions utiles qui sont utilisées dans les autres chapitres . Nous donnons ici les définitions des fonctions Gamma et Bêta . Ces fonctions jouent un rôle très importent dans la théorie des équations différentielles d'ordre fractionnaire et ce chapitre sera consacré aux définitions élémentaires pour les intégrales et les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville et de Caputo.

1.1 Fonctions utiles

1.1.1 Fonction Gamma

Définition 1.1. (voir [17, page 1]). L'une des fonctions de Base de calcul fractionnaire est la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{où } z \in \mathbb{C} \text{ et } \; Re(z) > 0.$$

Propriétés 1.1. Nous avons les propriétés suivantes :

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
2. $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(-m) = \mp\infty$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.
3. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ et $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$.
4. Si $n \in \mathbb{N}$, on a : $\Gamma(n+1) = n!$.

Démonstration. 1. D'après l'intégrale par partie, nous avons :

$$\begin{aligned}
\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^z dt \\
&= \left[-t^z \, e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= z \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \\
&= z\Gamma(z).
\end{aligned}$$

2. Nous avons :

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1 \; \text{ et } \; \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} \; \text{ donc } \Gamma\left(0^+\right) = +\infty.$$

3. Avec le changement de variable $s = \sqrt{t}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \\
&= 2 \int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds \\
&= 2\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) \text{ (d'après l'intégrale de Gauss)} \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

D'autre part, en peut facilement démontrer par récurrence la propriété suivante :

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

4. Nous avons $\Gamma(1) = 0! = 1$ et avec la propriété $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, on obtient :

$$\Gamma(2) = 1 \times \Gamma(1) = 1!,$$
$$\Gamma(3) = 2 \times \Gamma(2) = 2!.$$

Pour n^{ime} itération, on a :

$$\Gamma(n+1) \;=\; n!.$$

□

1.1.2 Fonction Bêta

Définition 1.2. (voir [17, page 6]). La fonction Bêta est définie par :

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,dt \;\; Re(z) > 0, \;\; Re(w) > 0.$$

Proposition 1.1. *La relation entre la fonction Gamma et Bêta donnée par :*

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\cdot\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}, \quad z, w \in \mathbb{C} \text{ avec } Re(z) > 0 \text{ et } Re(w) > 0.$$

Démonstration. Soit $D = \,]\,0, +\infty\,[\, \times \,]\,0, +\infty\,[$, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(z)\Gamma(w) &= \left(\int_0^{+\infty} e^{-t_1} t_1^{z-1} dt_1\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-t_2} t_2^{w-1} dt_2\right)\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(t_1+t_2)} t_1^{z-1} t_2^{w-1} dt_1 dt_2.\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u = t_1 + t_2 \\ v = \frac{t_1}{t_1+t_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = uv \\ t_2 = u(1-v) \end{cases}$$

et

$$\frac{\partial(t_1,t_2)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ (1-v) & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u$$

De même que le domaine D' correspondante à D dans les cordonnées u, v est

$$D' = \{(u,v)\,/u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int\int_D t_1^{z-1} t_2^{w-1}\, e^{-(t_1+t_2)} dt_1 dt_2 &= \int\int_{D'} (u\cdot v)^{z-1}(u(1-v))^{w-1}\, e^{-u}\,|-u|\, dudv\\ &= \int\int_{D'} u^{z+w-1} v^{z-1}(1-v)^{w-1}\, e^{-u} dudv\\ &= \int_0^{+\infty}\int_0^1 u^{z+w-1} v^{z-1}(1-v)^{w-1}\, e^{-u} dudv\\ &= \left(\int_0^{+\infty} u^{z+w-1}\, e^{-u} du\right)\int_0^1 v^{z-1}(1-v)^{w-1}\, dv\\ &= \Gamma(z+w)\, B(z,w).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\cdot\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$$

□

Propriétés 1.2. 1. $B(z,w)=B(w,z)$, (symétrique).

2. $B(z,1)=\frac{1}{z}$.

Démonstration. 1. Nous avons :

$$B(z,w)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}=\frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)}=B(z,w).$$

2. Nous avons :

$$B(z,1)=\frac{\Gamma(z)\Gamma(1)}{\Gamma(z+1)}=\frac{\Gamma(z)}{z\Gamma(z)}=\frac{1}{z}.$$

□

1.2 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Soient $\Omega=[a,b]$ avec $(-\infty<a<b<+\infty)$ un intervalle fini sur $\mathbb{R}$ et $f\in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur Ω. Nous avons :

$$\begin{aligned}
I^1_{a^+}f(x) &= \int_a^x f(t)\,dt.\\
I^2_{a^+}f(x) &= = I^1_{a^+}\left(I^1_{a^+}f(x)\right)=\int_a^x I^1_{a^+}f(t)\,dt=\int_a^x\int_a^t f(s)\,dsdt.
\end{aligned}$$

On pose $g(t)=\int_a^t f(s)\,ds$, d'après l'intégrale par partie, nous avons :

$$\begin{aligned}
I^2_{a^+}f(x) &= \left[t\int_a^t f(s)\,ds\right]_a^x-\int_a^x tf(t)\,dt\\
&= x\int_a^x f(s)\,ds-\int_a^x tf(t)\,dt\\
&= x\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^x tf(t)\,dt\\
&= \int_a^x (x-t)\,f(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Donc, pour n^{ime} itération, on obtient :

$$I^n_{a^+}f(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}}dt.$$

Cette formule est appelée formule de Cauchy, et d'après la propriété de Gamma $\Gamma(n)=(n-1)!$, nous avons :

$$I^n_{a^+}f(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1-n}}dt.$$

Définition 1.3. (voir [14, 18]). Soient $\Omega = [a, b]$ avec $(-\infty < a < b < +\infty)$ un intervalle fini sur $\mathbb{R}$ et $f \in L^1([a, b])$ une fonction intégrable sur Ω. Les intégrales

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \quad x > a, \; Re(\alpha) > 0 \tag{1.1}$$

$$I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}} dt, \quad x < b, \; Re(\alpha) > 0. \tag{1.2}$$

sont appelés les intégrales fractionnaires à gauche (à droite) de **Riemann-Liouville** d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}$ ($Re(\alpha) > 0$) respectivement.

Propriétés 1.3. (voir [14, page 71]). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons :

1. $I_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}$.
2. $I_{b^-}^{\alpha} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}$.

Démonstration. Nous avons :

1. On pose $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$. Nous avons :

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} (t-a)^{\beta-1} dt.$$

Avec le changement de variable $t = a + s(x-a)$, nous avons :

$$\begin{cases} t = a \Leftrightarrow s = 0, \\ t = x \Leftrightarrow s = 1, \\ dt = (x-a)\, ds. \end{cases}$$

Donc, avec la définition de la fonction Bêta, on obtient :

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{(x-a)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1} (1-s)^{\alpha-1} ds = \frac{B(\beta, \alpha)}{\Gamma(\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}.$$

En utilisant Proposition 1.1, on obtient :

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (x-a)^{\beta+\alpha-1}.$$

2. On pose $g(x) = (b-x)^{\beta-1}$. Nous avons :

$$I_{b^-}^{\alpha} g(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} (b-t)^{\beta-1} dt.$$

Avec le changement de variable $t = b - s(b-x)$, nous avons :

$$\begin{cases} t = b \Leftrightarrow s = 0, \\ t = x \Leftrightarrow s = 1, \\ dt = -(b-x)\, ds. \end{cases}$$

Donc, avec la définition de la fonction Bêta, on obtient :

$$I_{b^-}^{\alpha} g(x) = \frac{(b-x)^{\beta+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1} ds = \frac{B(\beta,\alpha)}{\Gamma(\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

En utilisant Proposition 1.1, on obtient :

$$I_{b^-}^{\alpha} g(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+\alpha)} (b-x)^{\beta+\alpha-1}.$$

□

Remarque 1.1. L'intégrale d'une fonction constante au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ est donnée par :

$$I_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} (x-a)^{\alpha} \ \text{ et } \ I_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{C}{\Gamma(1+\alpha)} (b-x)^{\alpha}, \quad f(x) = C \in \mathbb{R}.$$

Théorème 1.1. *Soient $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et $\alpha > 0 et \beta > 0$. Les intégrales fractionnaires de **Riemann-Liouville** (1.1) et (1.2) possède les propriétés suivantes :*

1. $I_{a^+}^{\alpha}\left[I_{a^+}^{\beta} f(x)\right] = I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x)$.
2. $I_{b^-}^{\alpha}\left[I_{b^-}^{\beta} f(x)\right] = I_{b^-}^{\alpha+\beta} f(x)$.

Démonstration. 1. Nous avons :

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}\left[I_{a^+}^{\beta} f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{I_{a^+}^{\beta} f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_a^t \frac{f(\tau)}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau\right] dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t \left[\int_a^x \frac{f(\tau)}{(x-t)^{1-\alpha}(t-\tau)^{1-\beta}} dt\right] d\tau \text{ (d'après théorème de Fubini).}
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $t = \tau + s(x-\tau)$, on obtient $dt = (x-\tau) ds$ et

$$\begin{aligned}
&t = x \Leftrightarrow s = 1, \\
&t = a \Leftrightarrow \tau = a \Leftrightarrow s = 0.
\end{aligned}$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned}
I_{a^+}^{\alpha}\left[I_{a^+}^{\beta} f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \left[\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1} ds\right] \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x \frac{f(\tau) d\tau}{(x-\tau)^{1-\alpha-\beta}} \\
&= I_{a^+}^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned}$$

2. Nous avons :

$$\begin{aligned}
I_{b^-}^{\alpha}\left[I_{b^-}^{\beta} f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{I_{b^-}^{\beta} f(t)}{(t-x)^{1-\alpha}}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_x^b \left[\int_t^b \frac{f(\tau)}{(t-x)^{1-\alpha}(\tau-t)^{1-\beta}}d\tau\right]dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_t^b \left[\int_x^b \frac{f(\tau)}{(t-x)^{1-\alpha}(\tau-t)^{1-\beta}}dt\right]d\tau \text{ (d'après théorème de Fubini).}
\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $t=\tau-s(\tau-x)$, on obtient $dt=-(\tau-x)\,ds$ et

$$\begin{aligned}
t = x &\Leftrightarrow s = 1, \\
t = b &\Leftrightarrow \tau = b \Leftrightarrow s = 0.
\end{aligned}$$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned}
I_{b^-}^{\alpha}\left[I_{b^-}^{\beta} f(x)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_x^b \left[\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}ds\right]\frac{f(\tau)\,d\tau}{(\tau-x)^{1-\alpha-\beta}} \\
&= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_x^b \frac{f(\tau)\,d\tau}{(\tau-x)^{1-\alpha-\beta}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_x^b \frac{f(\tau)\,d\tau}{(\tau-x)^{1-\alpha-\beta}} \\
&= I_{b^-}^{\alpha+\beta} f(x).
\end{aligned}$$

□

1.3 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.4. (voir [14, page 70]). Soit $f \in L^1([a,b])$ une fonction intégrable sur $[a,b]$. Les dérivées fractionnaires au sens Riemann-Liouville $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f$ et $\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f$ d'ordre $\alpha \in \mathbb{C}\,(Re(\alpha) > 0)$ sont définies par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f(x) &:= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{a^+}^{n-\alpha} f(x)\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}},\ n=[Re(\alpha)]+1;\ x>a.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} f(x) &:= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{b^-}^{n-\alpha} f(x)\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}},\ n=[Re(\alpha)]+1;\ x<b.
\end{aligned} \tag{1.4}$$

respectivement, où $[Re(\alpha)]$ est la partie entière de $Re(\alpha)$.

Remarque 1.2. 1. Si $\alpha = m \in \mathbb{N}$, alors $n = m + 1$. Donc, en utilisant (1.3) et (1.4), on obtient les propriétés suivantes :

(a) $\mathcal{D}^{0}_{a^+} f(x) = \mathcal{D}^{0}_{b^-} f(x) = f(x)$.

(b) $\mathcal{D}^{m}_{a^+} f(x) = f^{(m)}(x)$.

(c) $\mathcal{D}^{m}_{b^-} f(x) = (-1)^m f^{(m)}(x)$.

Où $f^{(m)}(x)$ est la dérivée usuelle de f d'ordre m.

2. Si $0 < Re(\alpha) < 1$, alors $n = 1$. Donc, (1.3) et (1.4) devient :

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}},\ x > a.$$
$$\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}},\ x < b.$$

3. Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors $n = [\alpha] + 1$. Donc, (1.3) et (1.4) devient :

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}},\ n = [\alpha]+1;\ x > a. \tag{1.5}$$
$$\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}},\ n = [\alpha]+1;\ x < b. \tag{1.6}$$

4. Si $0 < \alpha < 1$, alors $n = 1$. Donc, (1.5) et (1.6) devient :

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha}},\ x > a.$$
$$\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha}},\ x < b.$$

Propriétés 1.4. (voir [14, page 71]). Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ avec $Re(\alpha), Re(\beta) > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Nous avons :

1. $\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} (x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}$.
2. $\mathcal{D}^{\alpha}_{b^-} (b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}$.

Démonstration. 1. On pose $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$. En utilisant (1.3), on obtient :

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left(I^{n-\alpha}_{a^+} f(x)\right),\ \ n = [Re(\alpha)] + 1.$$

D'après Propriétés 1.3, on obtient :

$$\mathcal{D}^{\alpha}_{a^+} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\beta+n-\alpha-1}. \tag{1.7}$$

D'après Propriétés 1.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} (x-a)^{\beta+n-\alpha-1} &= (\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2)\ldots(\beta-\alpha)(x-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Nous substituons (1.8) dans (1.7), nous obtenons :

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (x-a)^{\beta-\alpha-1}.$$

2. On pose $g(x) = (b-x)^{\beta-1}$. En utilisant (1.4), on obtient :

$$\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} g(x) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(I_{b^-}^{n-\alpha} g(x)\right), \quad n = [Re(\alpha)] + 1.$$

D'après Propriétés 1.3, on obtient :

$$\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} g(x) = (-1)^n \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta+n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} (b-x)^{\beta+n-\alpha-1} \tag{1.9}$$

D'après Propriétés 1.1, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n} (b-x)^{\beta+n-\alpha-1} &= (-1)^n (\beta+n-\alpha-1)(\beta+n-\alpha-2)\dots(\beta-\alpha)(b-x)^{\beta-\alpha-1} \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(\beta+n-\alpha)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Nous substituons (1.10) dans (1.9), nous obtenons :

$$\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} g(x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-x)^{\beta-\alpha-1}.$$

□

Remarque 1.3. 1. Si $\beta = 1$ et $0 < Re(\alpha) < 1$, alors la dérivée au sens de Riemann-Liouville d'une fonction constante en général n'est pas nulle :

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} 1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \text{ et } \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} 1 = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

2. Pour tout $j = 1, 2, \dots, [Re(\alpha)] + 1$ avec $Re(\alpha) \geq 0$, nous avons :

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} (x-a)^{\alpha-j} = \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} (b-x)^{\alpha-j} = 0.$$

1.4 Dérivées fractionnaires au sens de Caputo

Définition 1.5. (voir [14]). Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $n = [Re(\alpha)] + 1$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1[a,b]$. Les dérivées fractionnaires d'ordre α de f au sens de Caputo sont définies par :

$${}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(x) := I_{a^+}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(t)\,dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}} \tag{1.11}$$

et

$${}^C\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(x) := (-1)^n I_{b^-}^{n-\alpha} f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b \frac{f^{(n)}(t)\,dt}{(t-x)^{\alpha-n+1}} \tag{1.12}$$

Propriétés 1.5. 1. Les dérivées fractionnaires au sens de Caputo sont linéaires c'est à dire

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left(\lambda f+\mu g\right)(x)=\lambda\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(x)+\mu\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}g\right)(x)\,,\quad \text{pour tout } \lambda,\mu\in\mathbb{C} $$

et

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\left(\lambda f+\mu g\right)(x)=\lambda\left({}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f\right)(x)+\mu\left({}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}g\right)(x)\,,\quad \text{pour tout } \lambda,\mu\in\mathbb{C}. $$

2. Les relations entre les dérivées au sens de Caputo (1.11),(1.12) et les dérivées au sens de Riemann-Liouville (1.3), (1.4) sont données par :

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f(x)=\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \tag{1.13} $$

et

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f(x)=\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\left[f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{k!}(b-x)^k\right], \tag{1.14} $$

Remarque 1.4. 1. Si $0<Re(\alpha)<1$, alors avec Remarque 1.3, les relations (1.13) et (1.14) prennent les formes suivantes :

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f(x)=\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f(x)-f(a)\right]=\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f(x)-\frac{f(a)}{\Gamma(1-\alpha)}(x-a)^{-\alpha} $$

et

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f(x)=\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\left[f(x)-f(b)\right]=\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f(x)-\frac{f(b)}{\Gamma(1-\alpha)}(b-x)^{-\alpha}. $$

2. Si $\alpha\notin\mathbb{N}^*$, alors avec Propriétés 1.4 et Propriétés 1.1, les relations (1.13) et (1.14) prennent les formes suivantes :

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f(x)=\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(x-a)^{k-\alpha} $$

et

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f(x)=\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)}(b-x)^{k-\alpha}. $$

3. Si $f\in\mathcal{C}([a,b])$, nous avons :

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left(I_{a^+}^{\alpha}f(x)\right)=f(x) $$

et

$$ I_{a^+}^{\alpha}\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f(x)\right)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. $$

Donc, l'opérateur de dérivation de Caputo est un inverse à gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire mais il n'est pas un inverse à droit.

Exemple 1.1. 1. Soient $\beta\in\mathbb{C}$ avec $Re(\beta)>0$ et $n=[Re(\beta)]+1$. La dérivée de la fonction $f(x)=(x-a)^{\beta-1}$ au sens de Caputo est donnée par :

$$ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f(x)=\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-n)}(x-a)^{\beta-\alpha-1}. \tag{1.15} $$

2. En remplaçant dans (1.15) $\beta=1$, nous obtenons que la dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est nulle :

1.5 Théorème de point fixe

Définition 1.6. Soit X un espace de Banach ,et $T : X \longrightarrow X$ une application continu , on dit que T est contractante si T est lipschitzienne de rapport $K < 1$

C'est-à-dir :

$$\exists K < 1 : \forall x, y \in X : \|T(x) - T(y)\| \leq \|x - y\| .$$

Pour les applications ultérieures, nous avons besoin de théorèmes de point fixe suivants :

Théorème 1.2. *(Banach) Soit X un espace de Banach ,et $T : X \longrightarrow X$ un opérateur contractante alors T admet un point fixe unique, i.e $\exists! u \in X$ telle que*

$$Tu = u$$

Autrement dit : *Si $T^{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$ est une suite d'opérateur définie par $T^1 = T$ et $T^k = TT^{k-1}$ $k \in (\mathbb{N} \backslash \{1\})$ alors pour tout $x_0 \in E$ la suite $\left\{T^{(k)}x_0\right\}_{k=1}^{\infty}$ converge vers le point x^*.*

$$\lim_{k\to\infty} \left\|T^{(k)}x_0 - x^*\right\| = 0 \tag{1.16}$$

Chapitre 2

Problème de Cauchy pour d'équation différentielle non linéaire avec dérivée fractionnaire de Caputo

Dans ce chapitre, nous avons étudié un problème de Cauchy pour une équation différentielle non linéaire avec dérivée fractionnaire de Caputo. Nous avons démontré un résultat d'équivalence entre ce problème et une équation intégrale de Volterra non linéaire dans l'espace de fonctions continuellement différentiables. Sur la base de ce résultat, l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy considéré sont prouvées. On termine ce chapitre, par un résultat de la dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales.

Soient $[a, b]$ un intervalle fini de $\mathbb{R}$ et $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$. On considère le problème de Cauchy pour l'équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire de Caputo suivant :

$$ {}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} y\left(x\right) = f\left(x, y\left(x\right)\right) \quad , x \in [a, b] \tag{2.1}$$

avec les conditions initiales

$$y^{(k)}\left(a\right) = b_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, \ldots, n-1,\ n = [\alpha] + 1. \tag{2.2}$$

Où ${}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}$ est la dérivée fractionnaire de Caputo, $f\left(\cdot, y\right) : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à $x \in [a, b]$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et $[\alpha]$ est la partie entière de α.

Nous étudions le problème de Cauchy (2.1)-(2.2) sur l'espace de Banach suivant :

$$\mathcal{C}^{n-1}\left[a, b\right] = \left\{ g : [a, b] \to \mathbb{R} : \|g\|_{\mathcal{C}^{n-1}[a,b]} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\|g^{(k)}\right\|_{\mathcal{C}[a,b]},\ n = [\alpha] + 1 \right\} \text{ et } \mathcal{C}^0\left[a, b\right] = \mathcal{C}\left[a, b\right].$$

2.1 Résultat d'équivalence

Théorème 2.1. *Soient $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et $f\left(\cdot, y\right) : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue par rapport à $x \in [a, b]$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Nous avons, $y \in \mathcal{C}^{n-1}\left[a, b\right]$ une solution du problème de Cauchy* (2.1)-(2.2) *si et seulement si y est une solution de l'équation d'intégrale de Volterra suivante :*

$$y\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k!} \left(x-a\right)^k + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_a^x \frac{f\left(t, y\left(t\right)\right) dt}{\left(x-t\right)^{1-\alpha}}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Soient $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$.

1. On suppose que $y \in \mathcal{C}^{n-1}\left[a, b\right]$ est une solution du problème (2.1)-(2.2). Comme $f\left(\cdot, y\right) \in \mathcal{C}\left[a, b\right]$ pour tout $y \in \mathbb{R}$, donc d'après (2.1) nous avons : ${}^{c}D_{a^+}^{\alpha} y\left(x\right) \in \mathcal{C}\left[a, b\right]$. En utilisant Remarque 1.4, on obtient :

$$I_{a^+}^{\alpha}\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} y\left(x\right)\right) = y\left(x\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}\left(a\right)}{k!} \left(x-a\right)^k.$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned} y\left(x\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}\left(a\right)}{k!} \left(x-a\right)^k + I_{a^+}^{\alpha}\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} y\left(x\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y^{(k)}\left(a\right)}{k!} \left(x-a\right)^k + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha\right)} \int_a^x \frac{f\left(t, y\left(t\right)\right) dt}{\left(x-t\right)^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

2. On suppose que $y \in \mathcal{C}^{n-1}\left[a, b\right]$ est une solution d'équation de Volterra (2.3). En dérivant (2.3) et en utilisant [14, Property 2.2], on obtient pour tout $k = 1, \ldots, n-1$:

$$y^{(k)}\left(x\right) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{\left(j-k\right)!} \left(x-a\right)^{j-k} + \frac{1}{\Gamma\left(\alpha-k\right)} \int_a^x \frac{f\left(t, y\left(t\right)\right) dt}{\left(x-t\right)^{1-\alpha+k}}$$

Avec le changement de variable $t = a + s(x-a)$, on obtient :

$$y^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!}(x-a)^{j-k} + \frac{(x-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k)} \int_0^1 \frac{f[a+s(x-a), y(a+s(x-a))]\,ds}{(1-s)^{1-\alpha+k}}$$

Par passage à la limite $x \to a^+$, et en utilisant la continuité de f, nous obtenons les relations (2.2). D'autre part, en appliquant l'opérateur de dérivée de Riemann-Liouville $\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}$ sur l'équation de Volterra (2.3) et avec (2.2), nous obtenons :

$$\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left(y(x) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) = \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} I_{a^+}^{\alpha} f(x, y(x)).$$

D'après [14, Lemma 2.4] et (1.13), on obtient l'équation (2.1).

□

Corollaire 2.1. *Soient* $0 < \alpha < 1$ *et* $f(\cdot, y) : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue par rapport à* $x \in [a,b]$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}$. *Alors,* $y \in \mathcal{C}[a,b]$ *est une solution du problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} {}^{c}D_{a^+}^{\alpha} y(x) & = f(x, y(x)), \\ y(a) = b, \end{cases}$$

si et seulement si y *est une solution d'équation intégrale de Volterra suivante :*

$$y(x) = b + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t, y(t))\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

2.2 Résultat d'existence et d'unicité

Dans cette section, nous montrons l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.1)-(2.2) dans l'espace des fonctions $\mathcal{C}^{n-1,\alpha}[a,b]$ défini par :

$$\mathcal{C}^{n-1,\alpha}[a,b] = \left\{ y \in \mathcal{C}^{n-1}[a,b],\ {}^{c}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} y \in \mathcal{C}[a,b],\ n = [\alpha]+1 \right\}.$$

Pour étudier l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy (2.1)-(2.2), nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Si* $\alpha > 0$ *avec* $\alpha \notin \mathbb{N}$ *et* $n = [\alpha]+1$, *alors l'opérateur d'intégration fractionnaire* $I_{a^+}^{\alpha} : \mathcal{C}[a,b] \to \mathcal{C}^{n-1}[a,b]$ *au sens de Riemann-Liouville est borné c'est à dire*

$$\left\| I_{a^+}^{\alpha} g \right\|_{\mathcal{C}^{n-1}[a,b]} \leq M \left\| g \right\|_{\mathcal{C}[a,b]}, \quad M = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Démonstration. Soit $g \in \mathcal{C}[a,b]$. En utilisant [14, Property 2.2], on obtient :

$$\frac{d^j}{dx^j} I_{a^+}^{\alpha} g(x) = I_{a^+}^{\alpha-j} g(x), \quad \text{pour tout } j = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Pour tout $x \in [a,b]$, nous avons :

$$\left\| I_{a^+}^{\alpha} g \right\|_{\mathcal{C}^{n-1}[a,b]} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{d^k}{dx^k} I_{a^+}^{\alpha} g \right\|_{\mathcal{C}[a,b]} = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| I_{a^+}^{\alpha-k} g \right\|_{\mathcal{C}[a,b]} \leq \left\| g \right\|_{\mathcal{C}[a,b]} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

ce qui démontré le lemme. □

Théorème 2.2. *Soient $\alpha > 0$ avec $\alpha \notin \mathbb{N}$, $n = [\alpha] + 1$ et G un ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que $f : [a,b] \times G \to \mathbb{R}$ une fonction telles que*

1. *Pour tout $y \in G$ fixé, $f(\cdot, y) \in \mathcal{C}[a,b]$.*
2. *La fonction $f : [a,b] \times G \to \mathbb{R}$ est vérifiée la condition de Lipschitz par rapport y, c'est à dire il existe $L > 0$ tel que*

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad \text{pour tout } x \in [a,b] \text{ et pour tout } y_1, y_2 \in G. \tag{2.4}$$

Si

$$L \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} < 1, \tag{2.5}$$

alors, le problème de Cauchy (2.1)-(2.2) *admet une unique solution $y \in \mathcal{C}^{n-1,\alpha}[a,b]$.*

Démonstration. Tout d'abord, nous montrons qu'il existe une solution unique $y \in \mathcal{C}^{n-1}[a,b]$ du problème (2.1)-(2.2). D'après Théorème 2.1, il est suffisant de prouver l'existence d'une solution unique $y \in \mathcal{C}^{n-1}[a,b]$ de l'équation intégrale de Volterra non linéaire (2.3). Nous utilisons Théorème 1.2 du point fixe de Banach pour l'espace $\mathcal{C}^{n-1}[a,b]$ avec la norme suivante :

$$\|y_1 - y_2\|_{\mathcal{C}^{n-1}[a,b]} := \sum_{k=0}^{n-1} \left\| y_1^{(k)} - y_2^{(k)} \right\|_{\mathcal{C}[a,b]}. \tag{2.6}$$

Nous réécrivons l'équation intégrale (2.3) sous la forme $y(x) = (Ty)(x)$, où

$$\begin{cases} y_0(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{j!} (x-a)^j, \\ (Ty)(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{f(t,y(t))dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \end{cases} \tag{2.7}$$

☞ Soit $y \in \mathcal{C}^{n-1}[a,b]$. En dérivant (2.7) k fois ($k = 1, \ldots, n-1$) et en utilisant [14, Property 2.2], nous obtenons pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$(Ty)^{(k)}(x) = y_0^{(k)}(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \int_a^x \frac{f(t,y(t))\,dt}{(x-t)^{1-\alpha+k}}, \tag{2.8}$$

avec $y_0^{(k)}(x) = \sum_{j=k}^{n-1} \frac{b_j}{(j-k)!} (x-a)^{j-k}$. Pour tout $k = 0, 1, \ldots\ldots, n-1$, le premier terme dans le côté droit de (2.8) est une fonction continue sur $[a,b]$, et par Lemme 2.1, le deuxième terme est continu sur $[a,b]$. Donc, nous avons :

$$\left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \int_a^x \frac{f(t,y(t))\,dt}{(x-t)^{1-\alpha+k}} \right\|_{\mathcal{C}[a,b]} \leq \frac{(b-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \|f(t,y(t))\|_{\mathcal{C}[a,b]}, \tag{2.9}$$

pour tout $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Par conséquent $Ty \in \mathcal{C}^{n-1}[a,b]$.

☞ En utilisant (2.6), (2.8),(2.9) et la condition de Lipschitz (2.4), nous avons :

$$\begin{aligned}
\|Ty_1 - Ty_2\|_{\mathcal{C}^{n-1}[a,b]} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\| (Ty_1)^{(k)} - (Ty_2)^{(k)} \right\|_{\mathcal{C}[a,b]} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha-k)} \int_a^x \frac{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))}{(x-t)^{1-\alpha+k}} dt \right\|_{\mathcal{C}[a,b]} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\|_{\mathcal{C}[a,b]} \\
&\leq L \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \|y_1 - y_2\|_{\mathcal{C}[a,b]} .
\end{aligned}$$

D'où, T est contractante. D'après Théorème 1.2, il existe $y^* \in \mathcal{C}^{n-1}[a,b]$ un point fixe unique de l'application T c'est à dire $y^*(x) = (Ty^*)(x)$ est l'unique solution de l'équation de Volterra (2.3) sur l'intervalle $[a,b]$.

Grâce Théorème 1.2, cette solution $y^*(x)$ est une limite de la suite convergente $y_m(x) = (T^m y^*)(x) \in \mathcal{C}^{n-1}[a,b]$:

$$\lim_{m\to+\infty} \|y_m - y^*\|_{\mathcal{C}^{n-1}[a,b]} = 0. \tag{2.10}$$

De (2.1), nous avons :

$$\begin{aligned}
\|{}^c\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} y_m(x) - {}^c\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} y^*(x)\|_{\mathcal{C}[a,b]} &= \|f(x, y_m(x)) - f(x, y(x))\|_{\mathcal{C}[a,b]} \\
&\leq L \|y_m - y^*\|_{\mathcal{C}[a,b]} \\
&\leq L \|y_m - y^*\|_{\mathcal{C}^{n-1}[a,b]} .
\end{aligned}$$

D'après (2.10), nous obtenons :

$$\lim_{m\to+\infty} \|{}^cD_{a^+}^{\alpha} y_m(x) - {}^cD_{a^+}^{\alpha} y^*(x)\|_{\mathcal{C}[a,b]} = 0.$$

D'où, $y^* \in \mathcal{C}^{n-1,\alpha}[a,b]$. Ceci complète la preuve du Théorème 2.2. □

2.3 Dépendance continue par rapport aux données

Proposition 2.1. *Soient $y \in \mathcal{C}^{n-1,\alpha}[a,b]$ une solution du problème* (2.1)-(2.2) *et $z \in \mathcal{C}^{n-1,\alpha}[a,b]$ une autre solution du même problème avec la condition initiale $z^{(k)}(a) = c_k$, où $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Alors, sous les hypothèses du Théorème 2.2, il existe $K > 0$ tel que :*

$$\|y - z\|_{\mathcal{C}^{n-1}[a,b]} \leq K \|b - c\| , \tag{2.11}$$

où $\|b - c\| = \left(\sum_{j=0}^{n-1} |b_j - c_j|^2 \right)^{1/2}$.

Démonstration. D'après l'équation intégrale de Volterra (2.3), nous avons :

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{b_k}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t,y(t))\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

et

$$z(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{c_k}{k!}(x-a)^k+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\frac{f(t,z(t))\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Pour tout $k=0,1,\ldots,n-1$, nous avons :

$$y^{(k)}(x)=\sum_{j=k}^{n-1}\frac{b_j}{(j-k)!}(x-a)^{j-k}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-k)}\int_a^x\frac{f(t,y(t))\,dt}{(x-t)^{1-\alpha+k}} \tag{2.12}$$

et

$$z^{(k)}(x)=\sum_{j=k}^{n-1}\frac{c_j}{(j-k)!}(x-a)^{j-k}+\frac{1}{\Gamma(\alpha-k)}\int_a^x\frac{f(t,z(t))\,dt}{(x-t)^{1-\alpha+k}} \tag{2.13}$$

De (2.12) et (2.13), nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|y^{(k)}-z^{(k)}\right\|_{\mathcal{C}[a,b]} &\leq \sum_{j=k}^{n-1}\frac{|b_j-c_j|}{(j-k)!}(b-a)^{j-k}\\
&\quad+\left\|\frac{1}{\Gamma(\alpha-k)}\int_a^x\frac{f(t,y(t))-f(t,z(t))}{(x-t)^{1-\alpha+k}}dt\right\|_{\mathcal{C}[a,b]}\\
&\leq\left(\sum_{j=k}^{n-1}|b_j-c_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=k}^{n-1}(b-a)^{2(j-k)}\right)^{1/2}\\
&\quad+\frac{(b-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\|f(t,y(t))-f(t,z(t))\|_{\mathcal{C}[a,b]}\\
&\leq\left(\sum_{j=0}^{n-1}|b_j-c_j|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=0}^{n-1}(b-a)^{2j}\right)^{1/2}\\
&\quad+L\frac{(b-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\|y-z\|_{\mathcal{C}[a,b]}\end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\left[1-L\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}\right]\sum_{k=0}^{n-1}\left\|y^{(k)}-z^{(k)}\right\|_{\mathcal{C}[a,b]}\leq K_1\|b-c\|,$$

où $K_1=\left(\sum_{j=0}^{n-1}(b-a)^{2j}\right)^{1/2}$. D'après la condition (2.5), nous obtenons (2.11) avec

$$K=\frac{K_1}{1-L\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)}}.$$

□

Chapitre 3

Méthodes de VIM et HPM

Dans ce chapitre, nous avons présenté brièvement la méthode d'itération variationnelle(VIM) et la méthode de perturbation d'homotopie(HPM), puis nous avons appliqué ces méthode sur l'équation de Riccati avec dérivée fractionnaire au sens de Caputo.

3.1 Méthode d'itération variationnelle (VIM)

Pour illustrer les idées de cette méthode, on considère l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$Ly + Ny = g(x) \tag{3.1}$$

Où L est un opérateur linéaire, $g(x)$ une fonction réelle.

On peut construire une formule de correction fonctionnelle comme suit, voir [13] :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda \left(Ly_n(t) + N\tilde{y}_n(t) - g(t) \right) dt \tag{3.2}$$

Où λ est un multiplicateur générale du Lagrange, l'indice n représente la n^{me} approximation $\tilde{y}_n(x)$ est considéré comme une variation restreinte c'est-a-dire $\delta\tilde{y}_n(x) = 0$.

Pour résoudre l'équation par la méthode VIM, on doit d'abord déterminer la multiplicateur de Lagrange λ qui va être identifier par une intégrale par partie alors les approximation successives y_n de la solution $y(x)$ vont être obtenues en utilisant le multiplicateur de Lagrange et y_0 une fonction bien choisie (qui doit être au moins satisfaire les conditions initiales) par conséquent, la solution exacte sera la limite

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x) \tag{3.3}$$

3.1.1 Analyse de convergence

En considère le problème suivant :

$$\begin{cases} {}^cD^\alpha_{0^+}(x) = f(x, y(x)) & n-1 < \alpha \leq n \\ y^{(k)}(0) = y_0^k & k = 0, 1, 2, ..., n-1 \ \text{ oú } \ x \in [0, T] \end{cases} \tag{3.4}$$

D'où $y^{(k)}(x)$ désigne la dérivée d'ordre k de $y(x)$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, satisfait la condition de Lipschitz

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq A\,|y_1 - y_2| \quad x \geq 0\ , y_1, y_2 \in \mathbb{R} \tag{3.5}$$

On définit la norme $\|y\|_\infty = max\,|y(x)|$, et $({}^cD^\alpha y)$ est la dérivée fractionnaire de Caputo (1.11).

l'équation (3.4) peut être équivalente à l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$y(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y_0^k \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t, y(t))\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{3.6}$$

On pose

$$g(x) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} y_0^k \frac{x^k}{k!}$$

L'équation (3.6) peut être transformée sous forme :

$$y(x) = g(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t, y(t))\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{3.7}$$

Selon l'idée de [2] et [9], itération pour l'équation (3.7) peut être construite comme suit :

$$y_{n+1}(x) = g(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t, y_n(t))\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \qquad n = 1, 2, ... \tag{3.8}$$

On utilise la valeur initiale $y_0(x) = y_0^{(0)} + xy_1^{(1)} + x^2 y_2^{(2)} + \cdots + x^{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}$, et on commence l'itération .

la valeur y_n de la n^{iem} d'itération se rapproche vers la solution exacte du problème (3.4) par :

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Théorème 3.1. *Soit $y(x), y_i(x) \in \mathbb{C}[0,T], i = 1, 2, \cdots$.Alors, la suit $\{y_n(x)\}_{n-1}^{\infty}$, définit par* (3.8) *avec $y_0(x) = y_0^{(0)} + xy_1^{(1)} + x^2 y_2^{(2)} + \cdots x^{n-1} y_{n-1}^{(n-1)}$, converge vers la solution du problème* (3.4).

Démonstration. Soit $E_i(x) = y_i(x) - y(x), i = 1, 2, \cdots$, d'après (3.7) et (3.8) on a :

$$E_{n+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{[f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))]\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \tag{3.9}$$

☞ Pour le cas $\alpha \geq 1, \forall x \in [0,T]$ et $t \in [0,x], (x-t)^{\alpha-1}$ est bornée.

Soit $M = \max_{0\leq t\leq x, 0\leq x\leq T} \left|(x-t)^{\alpha-1}\right|$, d'après la condition de Lipschitz (3.5), on a :

$$\begin{aligned}
|E_{n+1}(x)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{|f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))|\,dt}{|x-t|^{1-\alpha}} \\
&\leq \frac{MA}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x |y_n(t) - y(t)|\,dt \\
&\leq \frac{MA}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x |E_n(t)|\,dt
\end{aligned}$$

Par récurrence :

$$|E_{n+1}(x)| \leq \frac{M^{n+1}A^{n+1}}{[\Gamma(\alpha)]^{n+1}} \int_0^x \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_n} |E_0(t)|\,dt_{n+1} \cdots dt_3 dt_2 dt_1$$

De plus

$$\begin{aligned}
\|E_{n+1}\|_\infty &\leq \left[\frac{MA}{\Gamma(\alpha)}\right]^{n+1} \max_{0\leq t\leq x, 0\leq x\leq T} \int_0^x \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_n} |E_0(t)|\,dt_{n+1} .... dt_3 dt_2 dt_1 \\
&\leq \left[\frac{MA}{\Gamma(\alpha)}\right]^{n+1} \frac{T^{n+1}}{(n+1)!} \|E_0\|_\infty
\end{aligned}$$

D'où M, A, T et $\Gamma(\alpha), \|E_0\|_\infty$, sont des constante nous avons :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|E_{n+1}\|_\infty &\leq \lim_{n\to\infty} \left[\frac{MAT}{\Gamma(\alpha)}\right]^{n+1} \frac{\|E_0\|_\infty}{(n+1)!} \\
&= 0
\end{aligned}$$

☞ Pour le cas $0 < \alpha < 1$, on a :

$$|E_{n+1}(x)| \leq \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{|y_n(t) - y(t)|\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \qquad = \frac{A}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{|E_n(t)|\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

$$|E_{n+1}(x)| \leq A I^{\alpha} |E_n(x)|$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}
|E_{n+1}(x)| &\leq A^2 I^{2\alpha} |E_{n-1}(x)| \\
&\leq A^{n+1} I^{(n+1)\alpha} |E_0(x)| \\
&= \frac{A^{n+1}}{\Gamma(n\alpha+\alpha)} \int_0^x \frac{|E_0(t)|\, dt}{(x-t)^{1-n\alpha-\alpha}} \\
&\leq \frac{A^{n+1} \|E_0\|_\infty}{\Gamma(n\alpha+\alpha)} \int_0^x \frac{dt}{(x-t)^{1-n\alpha-\alpha}} \\
&= \frac{A^{n+1} \|E_0\|_\infty T^{n\alpha+\alpha}}{\Gamma(n\alpha+\alpha)(n\alpha+\alpha)}
\end{aligned}$$

D'après [1], on a :

$$\Gamma(n\alpha+\alpha) \approx \sqrt{2\pi}\, e^{-n\alpha} (n\alpha)^{n\alpha+\alpha-\frac{1}{2}}$$

Puis

$$\frac{A^{n+1} T^{n\alpha+\alpha}}{\Gamma(n\alpha+\alpha)(n\alpha+\alpha)} \approx \frac{A^{n+1} T^{n\alpha+\alpha}}{\sqrt{2\pi}\, e^{-n\alpha} (n\alpha)^{n\alpha+\alpha-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(n\alpha+\alpha)}$$

On peut trouver un nombre réel délimitée A_1, qui satisfait :

$$A_1^{\alpha} = A$$

Telle que

$$\frac{A^{n+1} T^{n\alpha+\alpha}}{\sqrt{2\pi}\, e^{-n\alpha} (n\alpha)^{n\alpha+\alpha-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(n\alpha+\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, e^{\alpha}} \cdot \left(\frac{A_1 T e}{n\alpha}\right)^{n\alpha+\alpha} \cdot \frac{(n\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(n\alpha+\alpha)}$$

Donc on a :

$$\|E_{n+1}\|_\infty \leq \frac{\|E_0\|_\infty}{\sqrt{2\pi}\, e^{\alpha}} \cdot \left(\frac{A_1 T e}{n\alpha}\right)^{n\alpha+\alpha} \cdot \frac{(n\alpha)^{\frac{1}{2}}}{(n\alpha+\alpha)}$$

Oú A_1, $\|E_0\|_\infty$ et T, sont des constantes. Ainsi

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|E_{n+1}\|_\infty &\leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\|E_0\|_\infty (A_1 T e)^{n\alpha+\alpha} (n\alpha)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, e^{\alpha} (n\alpha)^{n\alpha+\alpha} (n\alpha+\alpha)} \right) \\
&\leq \frac{\|E_0\|_\infty}{\sqrt{2\pi}\, e^{\alpha}} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(A_1 T e)^{n\alpha+\alpha}}{(n\alpha)^{n\alpha+\alpha}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

3.1.2 Résolution de l'équation fractionnaire de Riccati

On considère l'équation fractionnaire de Riccati suivante :

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\alpha}y = A(x) + B(x)\,y + C(x)\,y^{2} \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Nous pouvons construire une correction fractionnelle selon la méthode d'itération variationnelle suivant :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + I^{\alpha}\lambda(x)\left[\frac{d^{\alpha}y_n}{dx^{\alpha}} - A(x) - B(x)\,y_n - C(x)\,y_n^2\right] \tag{3.11}$$

$$Ly + Ry + Ny = g(x)$$

Par identification du multiplicateur, l'approximation s'écrit sous la forme :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(t)\left(\frac{d^{\alpha}y_n}{dt^{\alpha}} - A(t) - B(t)\,y_n - C(t)\,y_n^2\right)dt$$

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(t)\left[Ly_n + R\tilde{y}_n(x) + N\tilde{y}_n(x) - g(x)\right] \tag{3.12}$$

avec λ est le multiplicateur générale de Lagrange .

L'indice n'est représente la n^{iem} approximation $\tilde{y}_n(x)$ est considère comme étant une variation réduite c'est-a-dire $\delta\tilde{y}_n(x) = 0$

$$\delta\tilde{y}_{n+1} = \delta\tilde{y}_n + \delta\left(\int_0^x \lambda(t)\,\frac{d^{\alpha}y_n}{dt^{\alpha}}dt\right) = 0 \tag{3.13}$$

d'après l'intégrale par partie cela conduit aux conditions stationnaires $1 + \lambda|_{t=0}$ et $\lambda|_{t=0} = 0$ qui donne $\lambda = -1$.

En substituant cette valeur du multiplicateur de Lagrange dans (3.11) on obtient la formule itérative suivant :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - I^{\alpha}(x)\left[\frac{d^{\alpha}y_n}{dx^{\alpha}} - A(x) - B(x)\,y_n - C(x)\,y_n^2\right] \tag{3.14}$$

Et la solution exacte donne par :

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y(x)$$

Exemple 3.1. On considère l'équation fractionnaire de Riccati suivant :

$$\begin{cases} \frac{d^{\alpha}y}{dx^{\alpha}} = y^2(x) + 1 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad \text{avec } 0 < \alpha \leq 1 \tag{3.15}$$

Si $\alpha = 1$, la solution exacte est $y(x) = \tan(x)$.

D'après l'équation (3.15), la correction fractionnaire est donnée par :

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) - I^{\alpha}\left[\frac{d^{\alpha}y_n}{dx^{\alpha}} + y_n^2 - 1\right] \tag{3.16}$$

Par la formule d'itération

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= 0 \\
y_1(x) &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\
y_2(x) &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)\, x^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\,\Gamma(3\alpha+1)} \\
y_3(x) &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)\, x^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\,\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{2\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma(4\alpha+1)\, x^{5\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3\,\Gamma(3\alpha+1)\,\Gamma(5\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{\Gamma(2\alpha+1)^2\,\Gamma(6\alpha+1)\, x^{7\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3\,\Gamma(3\alpha+1)^2\,\Gamma(7\alpha+1)} \\
&\ \vdots \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Comme

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n$$

On obtenons

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{x^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(2\alpha+1)\, x^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\,\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{2\Gamma(2\alpha+1)\,\Gamma(4\alpha+1)\, x^{5\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3\,\Gamma(3\alpha+1)\,\Gamma(5\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{\Gamma(2\alpha+1)^2\,\Gamma(6\alpha+1)\, x^{7\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3\,\Gamma(3\alpha+1)^2\,\Gamma(7\alpha+1)} + \ldots.. \qquad (3.17)
\end{aligned}
$$

En substituant $\alpha = 1$, dans(3.17) nous Obtenons la série suivante :

$$y(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7.$$

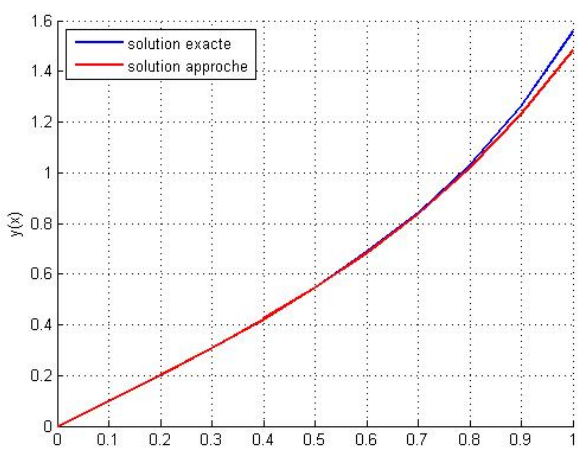

FIGURE 3.1 – Solution exacte et solution numérique par VIM.

Remarque 3.1. Pour les solutions approchées on prend quatre termes.

3.2 Méthode de perturbation d'homotopie(HPM)

Pour illustrer les idées de base de cette méthode, nous considérons l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$A(y) - f(x) = 0 \quad , x \in \Omega \tag{3.18}$$

Avec les conditions aux limites

$$B\left(y, \frac{\partial y}{\partial n}\right) = 0 \quad , x \in \Gamma \tag{3.19}$$

Où A est un opérateur différentielle général, B est un opérateur de la limite, $f(x)$ est une fonction continu connue, et Γ la frontière du domaine Ω et y est la fonction inconnue.

L'opérateur A est décomposé en L et N oú L est un linéaire et N est un opérateur non linéaire, peut être récrit comme suit :

$$L(y) + N(y) - f(x) = 0 \tag{3.20}$$

On construit une homotopie :

$$v(x,p) : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R} \tag{3.21}$$

qui satisfait :

$$H(v,p) = (1-p)\left[L(v) - L(y_0)\right] + p\left[A(v) - f(x)\right] = 0 \quad p \in [0,1], x \in \Omega \tag{3.22}$$

$$H(v,p) = L(v) - L(y_0) + pL(y_0) + p\left[N(v) - f(x)\right] = 0 \tag{3.23}$$

Où $p \in [0,1]$ est un paramètre d'homotopie et y_0 est une approximation initiale de l'équation (3.18) qui satisfait les condition aux limites (3.19).

D'après les deux équations précédentes (3.22) et (3.23) nous aurons :

$$H(v,0) = L(v) - L(y_0) = 0 \tag{3.24}$$

$$H(v,1) = A(v) - f(x) = 0 \tag{3.25}$$

Le changement de p de zéro à l'unité transforme $y_0(x)$ en $y(x)$, en topologie avec cette dernière propriété,la fonction $v(x,p)$ est appelée homotopie.

Selon la méthode HPM, nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petite paramètre , et supposons que les solution des équations (3.22) et (3.23) peut être écrit comme une série de puissance p :

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots \tag{3.26}$$

Pour $p = 1$, la solution approchée de l'équation (3.18) s'écrit :

$$y = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots \tag{3.27}$$

3.2.1 Analyse de convergence

On considère le problème suivant, voir [5, 19, 3] :

$$^{c}D^{\alpha} y(t) = f\left(t, y(t), D^{n1} y(t), D^{n2} y(t), \cdots, D^{nq} y(t)\right), \quad x \in [0,T], n_i \in \mathbb{N} \tag{3.28}$$

$$y^k(0) = b^k, \quad y(x,t) = g(x,t), \quad , k = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.29}$$

Considérons que $f : [0,T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue, on suppose que$f(t, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ admet des dérivée $\frac{\partial f}{\partial y_i}$continues et bornées qui satisfont la condition de Lipschitz

$$\begin{aligned} &\left| f\left(t, y_1(t), D^{n1}y_1(t), D^{n2}y_1(t), \cdots, D^{nq}y_1(t)\right) - f\left(t, y_2(t), D^{n1}y_2(t), D^{n2}y_2(t), \cdots, D^{nq}y_2(t)\right)\right| \\ &\leq A\left| f\left(y_1, D^{n1}y_1, D^{n2}y_1, \cdots, D^{nq}y_1\right) - f\left(y_2, D^{n1}y_2, D^{n2}y_2, \cdots, D^{nq}y_2\right)\right| \ , t \geq 0 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Pour illustrer les concepts de base de la HPM pour l'équation aux dérivée partielle fractionnaire (3.28) avec les conditions initiales (3.29), nous construisons l'homotopie de (3.28) comme suit

$$(1-p)\left({}^cD^\alpha y\right)(x,t) + p\left({}^cD^\alpha y\right)(x,t) - f\left(t, y(t), D^{n1}y_1(t), D^{n2}y_1(t), \cdots, D^{nq}y_1(t)\right) = 0 \tag{3.31}$$

Ou bien

$$\left({}^cD^\alpha y\right)(x,t) = p\left(f\left(t, y(t), D^{n1}y_1(t), D^{n2}y_1(t), \cdots, D^{nq}y_1(t)\right)\right) \tag{3.32}$$

En remplaçant (3.26) dans (3.32) et par identification avec les termes des différents monômes en p, on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned} &p^0 : \left({}^cD^\alpha y_0\right)(x,t) = f(x,t), \\ &p^1 : \left({}^cD^\alpha y_1\right)(x,t) = f\left(t, y_0(t), D^{n1}y_0(t), D^{n2}y_0(t), \cdots, D^{nq}y_0(t)\right), \\ &p^2 : \left({}^cD^\alpha y_2\right)(x,t) = f\left(t, y_1(t), D^{n1}y_1(t), D^{n2}y_1(t), \cdots, D^{nq}y_1(t)\right), \\ &p^n : \left({}^cD^\alpha y_n\right)(x,t) = f\left(t, y_{n-1}(t), D^{n1}y_{n-1}(t), D^{n2}y_{n-1}(t), \cdots, D^{nq}y_{n-1}(t)\right), \end{aligned} \tag{3.33}$$

Utilisons l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville I^α, qui est l'opérateur l'inverse de la dérivée de Caputo ${}^cD^\alpha$ sur les deux membres de (3.33), les premiers termes de la solution sont donnée par

$$\begin{aligned} &y_0(x,t) = y_0 + I^\alpha\left(f(x,t)\right), \\ &y_1(x,t) = +I^\alpha\left(f\left(x, y_0(x), D^{n1}y_0(x), D^{n2}y_0(x), \cdots, D^{nq}y_0(x)\right)\right), \\ &y_2(x,t) = +I^\alpha\left(f\left(x, y_1(x), D^{n1}y_1(x), D^{n2}y_1(x), \cdots, D^{nq}y_1(x)\right)\right), \\ &\qquad\vdots \\ &y_n(x,t) = +I^\alpha\left(f\left(x, y_{n-1}(x), D^{n1}y_{n-1}(x), D^{n2}y_{n-1}(x), \cdots, D^{nq}y_{n-1}(x)\right)\right), \end{aligned} \tag{3.34}$$

La solution de (3.28) sous forme de série est donnée par :

$$y(x,t) = y_0(x,t) + y_1(x,t) + y_2(x,t) + y_3(x,t) + \cdots \tag{3.35}$$

Soit$(C[0,T], \|\cdot\|)$l'espace de Banach des fonction continues sur $[0,T]$ avec la norme

$$\|f(x)\| = \max_{\forall x \in [0,T]} |f(x)| \tag{3.36}$$

Théorème 3.2. *(Existence et l'unicité des solutions) Si f satisfait la condition de Lipschitz* (3.30)*, alors le problème* (3.28) *admet une solution unique $y(x,t)$, pour tout $0 < \gamma < 1$, avec $\gamma = \left[\frac{MAT}{\Gamma(\alpha)}\right]^n \cdot \frac{1}{n!}$.*

Théorème 3.3. *(Convergence) Soient $y_n(x,t)$ et $y(x,t)$ définies dans l'espace de Banach $(C[0,T], \|\cdot\|)$. Alors, la solution sous forme de série $\{y_n(x,t)\}_{n=1}^{\infty}$ définie dans* (3.35) *converge vers la solution de*(3.28)*, $0 < \gamma < 1$.*

Théorème 3.4. *(Estimation d'erreur) L'estimation de l'erreur de la solution en série* (3.35) *du problème* (3.28) *est donnée par :*

$$\left| y(x,t) - \sum_{i=0}^{m} y_i(x,t) \right| \leq \frac{\gamma^{m+1}}{(1-\gamma)} \|y_0(t)\| \tag{3.37}$$

Pour les preuves des théorèmes précédents, voir [4, p. 37-41].

3.2.2 Résolution de l'équation fractionnaire

On considère l'équation différentielle non linéaire d'ordre fractionnaire suivante :

$$^{c}D^{\alpha}y\left(x\right)=N\left(y\right)+g\left(x\right)\quad x>0 \tag{3.38}$$

D'oú $m-1<\alpha<m$, N est un opérateur non linéaire, $g\left(x\right)$ est une fonction analytique connue et $^{c}D^{\alpha}y$ est la dérivé fractionnaire au sens du Caputo d'ordre α.

Par la technique de l'homotopie, nous construisons un homotopie suivant :

$$\left(1-p\right)L\left[v\left(x,p\right)-y_{0}\left(x\right)\right]=-p\left(^{c}D^{\alpha}v\left(x,p\right)-N\left(v\left(x,p\right)\right)-g\left(x\right)\right]. \tag{3.39}$$

Où $p\in\left[0,1\right]$ est un paramètre d'homotopie, y_{0} est une estimation initiale de $v\left(x\right)$ et L est un opérateur linéaire qui peut être définie comme $L=\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}$.

Lorsque $p=0$, l'équation (3.39) devient :

$$L\left[v\left(x,0\right)-y_{0}\left(x\right)\right]=0 \tag{3.40}$$

Lorsque $p=1$, l'équation (3.39) devient :

$$^{c}D^{\alpha}v\left(x\right)=N\left(v\right)+g\left(x\right)$$

D'après HPM, nous pouvons utiliser le paramètre p comme un petite paramètre, et supposons que la solution d'équation (3.38) peut être récrit comme une série suivante :

$$v=v_{0}+pv_{1}+p^{2}v_{2}+\cdots \tag{3.41}$$

On remplace (3.41) dans (3.39), et par identification des terme avec des puissance identique de p, nous obtenons les équations :

$$\begin{aligned}
L\left[v_{1}\right]&=-\left(^{c}D^{\alpha}v_{0}-N_{0}\left(v_{0}\right)-g\left(x\right)\right);\\
L\left[v_{2}\right]&=L\left[v_{1}\right]-\left(^{c}D^{\alpha}v_{1}-N_{1}\left(v_{0},v_{1}\right)\right);\\
L\left[v_{3}\right]&=L\left[v_{2}\right]-\left(^{c}D^{\alpha}v_{2}-N_{2}\left(v_{0},v_{1},v_{2}\right)\right);\\
L\left[v_{4}\right]&=L\left[v_{3}\right]-\left(^{c}D^{\alpha}v_{3}-N_{1}\left(v_{0},v_{1},v_{2},v_{3}\right)\right);
\end{aligned}$$

Oú

$$N\left(v_{0}+pv_{1}+p^{2}v_{2}+\cdots\right)=N_{0}\left(v_{0}\right)+pN_{1}\left(v_{0},v_{1}\right)+p^{2}N_{2}\left(v_{0},v_{1},v_{2}\right)+\cdots$$

La solution approchée d'équation (3.28) par conséquent, s'écrit

$$y=\lim_{p\to1}v=v_{0}+v_{1}+v_{2}+\cdots \tag{3.42}$$

En appliquant l'opérateur I^{α} aux les deux membres de l'équation (3.28), on trouve

$$y\left(x\right)=y_{0}+I^{\alpha}N\left(y\right)+I^{\alpha}g\left(x\right). \tag{3.43}$$

Négligeant le terme non linéaire $I^{\alpha}N\left(y\right)$, nous pouvons utiliser la partie restante comme l'estimation initiale de la solution c'est -a-dire

$$v_{0}\left(x\right)=y_{0}+I^{\alpha}g\left(x\right)\quad x>0. \tag{3.44}$$

Exemple 3.2. On considère l'équation suivante

$$\begin{cases} u' = -u^2 \quad , t \geq 0, t \in \Omega \\ u(0) = 1 \end{cases} \tag{3.45}$$

D'où, la solution exacte de cette équation est

$$u(t) = \frac{1}{1+t} \tag{3.46}$$

Selon la méthode HPM, on peut construire l'homotopie suivante : $u : \Omega \times [0,1] \to \mathbb{R}$

$$(1-p)(v' - u_0') + p\left(v' + v^2\right) = 0 \quad , p \in [0,1], t \in \Omega, \tag{3.47}$$

Avec $u_0 = 1$.

les solutions des équations (3.45), peuvent être écrites sous forme de série

$$v = v_0 + pv_1 + p^2 v_2 + \cdots \tag{3.48}$$

En remplaçant (3.48) dans (3.47) et identifiant les termes avec ceux de mêmes puissances de p, on obtient

$$\begin{aligned} &p^0 : v_0' = u_0', \\ &p^1 : v_1' = -u_0 - v_0^2, \quad v_1(0) = 0, \\ &p^2 : v_2' = -2v_0 v_1, \quad v_2(0) = 0, \\ &\qquad \vdots \end{aligned} \tag{3.49}$$

Par conséquent, les premiers composants de la solution sont données par :

$$\begin{aligned} &p^0 : v_0 = 1, \\ &p^1 : v_1 = -t, \\ &p^2 : v_2 = t^2, \\ &\qquad \vdots \end{aligned} \tag{3.50}$$

Donc la solution de l'équation (3.45) est

$$u = \lim_{p \to 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots = 1 - t + t^2 + \cdots \tag{3.51}$$

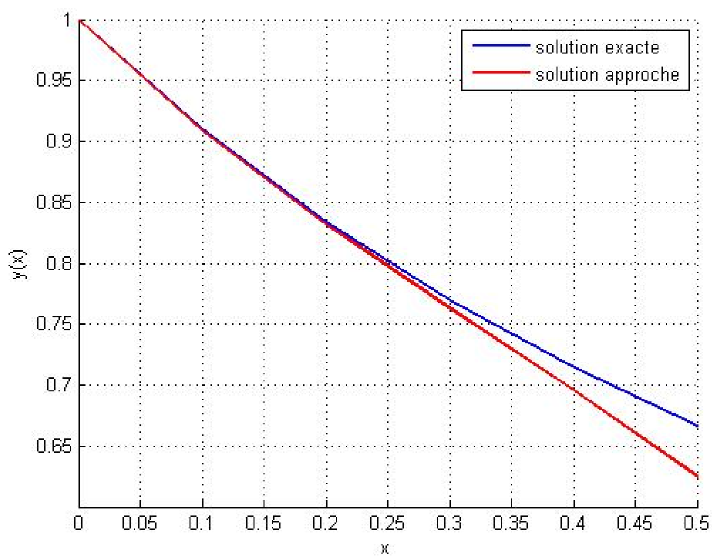

FIGURE 3.2 – Solution exacte et solution numérique par HPM.

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons analysé mathématiquement et numériquement un problème de Cauchy pour une équation différentielle non linéaire avec dérivée fractionnaire de Caputo.

Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Analyse variationnelle** : nous avons démontré un théorème d'équivalence entre un problème de Cauchy avec dérivée fractionnaire de Caputo et une équation intégrale non linéaire de Volterra dans l'espace de fonctions continuellement différentiables. Sur la base de ce résultat, l'existence, l'unicité et la dépendance continue de la solution par rapport aux conditions initiales sont prouvées.
- ✓ **Aspect numérique :** nous avons utilisé les deux méthodes de VIM et HPM pour calculer la solution numérique de l'équation de Riccati avec dérivée fractionnaire de Caputo.

Comme perspectives, nous avons prévu les projets de recherches suivants :

- ☞ Analyse mathématique et numérique d'un problème de Cauchy avec dérivée de Caputo dans un intervalle non borné comme $[\,0,+\infty\,[$:

$$\begin{cases} {}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}y\,(x) = f\,(x, y\,(x)) \quad , x \in [\,0,+\infty\,[\\ y^{(k)}\,(a) = b_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, \ldots, n-1,\ n = [\alpha] + 1. \end{cases}$$

- ☞ Étude d'un problème parabolique-hyperbolique avec dérivée fractionnaire de Caputo :

$$\begin{cases} {}^{c}\mathcal{D}^{\alpha}_{0+}u\,(t) = u_{xx} + f\,(x,t)\,,\ \alpha > 0 \\ + \text{ Condition initiale+Conditions aux limites }. \end{cases}$$

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Hanndlbook of Mathmatical Functions*. Nauka, Mos-cow, 1979.

[2] T. J. Anastasio. The frectional-order dynamics of brainstem vestibule oculumotorneurons. *Biol. Cybern*, 72 :69–79, 1994.

[3] G. Chen and G. Friedman. An rlc interconnect model based on fourier analysis comput. *Aided Des. Integr. Ciruits Syst.*, 24(2) :170–183, 2005.

[4] Z. Djelloul. *Methode combinee des perturbation HPM et VIM pour la resolution des equations differentielles ordinaires et EDP d'ordre farctionnaire*. PhD thesis, Universite Ahmed Ben Bella, Oran, 2016.

[5] A. Hanyga. Fractional-order relaxation laws in non-linear viscoelasticity. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 19(1) :25–36, 2007.

[6] J.H. He. Homotopy perturbation technique. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 178(3) :257–262, 1999.

[7] J.H. He. A coupling method of homotopy technique and perturbation technique for non-linear problems. *Int. J. Nonlinear Mech.*, 35(1) :37–43, 2000.

[8] J.H. He. Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems. *Appl. Math. Comput*, 114 :115–123, 2000.

[9] J.H. He. Variational principles for some nonlinear partial differential equations with variable coefficients. *Chaos, Solitons and Fractals*, 19 :847–851, 2004.

[10] J.H. He. Homotopy perturbation method for bifurcation of nonlinear problems. *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 6(2) :207–208, 2005.

[11] J.H. He. Limit cycle and bifurcation of nonlinear problems. *Chaos Soliton. Fract.*, 26 :827–833, 2005.

[12] J.H. He. Some asymptotic methods for strongly nonlinear equations. *Int. J. Mod. Phys. B*, 20(10) :1141–1199, 2006.

[13] J.H. He. Variational iteration method -some recent results and new interpretations. *J. Comput. Intern. J. Math.*, 207(1) :3–17, 2007.

[14] A. A. Kilbas, H.M. Srivastava, and J.J. Trujllo. *THEORY AND APPLICATIONS OF FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS*. ELSEVIER, 2006.

[15] A. N. K o l m o g o r o v and S.V. F o m i n. *Theory and applications of fractional differential equations*. Elsevier, 2006.

[16] A. Oustaloup. From fractality to non integer derivation through recurcivity. *in Proceedings of 12th IMACS World Conference*, 3 :203–208, 1988.

[17] I. Podlubny. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1999.

[18] S.G. Samko, A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional Integrals and Derivatives : Theory and Applications*. Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

[19] V. E. Tarasov. Fractional integr-differential equations for electromagnetic waves in dielectric media. *Theoretical and Mathematical Physics*, 158(3) :355–359, 2009.

[20] F. ZAIDOUR. La résolution numérique des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Master's thesis, Université de Djilali BOUNAÂMA, Khemis Miliana, Algérie, 2015.