UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUES

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Licence

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques Appliquées et Fondamentales

Par

BELAGRAA SALIHA

Etude sur les opérateurs non expansive

Dirigé par :

Promotion: 2012/2013


بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Grace à dieu qui m'offre un trésor qui est la conscience, Ce dernier qui me permet d'avoir des gouttes de savoir qui est remplié plus d'une mer.

Je tiens à remercier vivement mon promoteur **Mr.M.NADIR**, pour avoir accepté de diriger ce travail, ainsi pour sa guidance et son soutient indéfectible et ses conseils.

Je remercie aussi tous les membres du Jury pour l'honneur qu'ils m'ont fait, en acceptant de juger ce modeste travail.

Je tiens à exprimer tous mes respects à mes parents, mes frères qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie également ceux qui m'ont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

Résumé

Il est connu qu'un opérateur non expansif entre deux espaces normés est une application lipschitzienne de module $k = 1$. Contrairement aux applications contractantes, les applications non expansives n'ont pas nécessairement de point fixe. Dans ce travail on essaye de donner des nouvelles conditions d'obtenir un point fixe

Mots clés :

Opérateurs contractants, Opérateurs non expansifs, Point fixe.

Abstract

It is known that an non expansive operator between two normed spaces is a lipschitzian application with a number equal the unit. Contrarily to contraction application, the non expansive applications have not necessarily a fixed point. In this work we try to give a new conditions to obtain a fixed point.

Key-word :

Contracted operators, Non expansive operators, Fixed point.

Notations générale

k	Constant de Lipschitz
H	Espace de Hilbert.
E	Espace vectoriel normé.
φ	fonction inconnue
$[a, b]$	Intervalle réel.
B_n	la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{L}(E; F)$	L'ensemble des applications linéaires de E dans F.
$C(G)$	l'espace des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes
$L^2([a, b])$	L'espace des fonctions de carré intégrable sur $[a, b]$
$k(x; y)$	Noyau de l'intégrale
$k_n(x; y)$	Noyau itéré d'ordre n donné par $k_n(x; y) = \int_a^x k(x; z)k_{n-1}(z; y)dy$
T	Opérateur linéaire
$\langle x, y\rangle$	Produit scalaire de x et y.

Table des matières

Introduction

En mathématiques, particulièrement dans l'analyse fonctionnelle, Il existe un genre d'opérateur dit l'opérateur non expansif qui est une application Lipschitzienne, et elle est aussi le titre de ce modeste travail.

Notre mémoire est composée de trois chapitres:

Dans le premier chapitre, nous rappelons **quelques notions de base**; les espaces normés, l'espace de Hilbert, les espaces complets, et on représente les application linéaires et les opérateurs (linéaires continus et compacts), et aussi le théorème d'Arzela-Ascoli.

Le deuxième chapitre, présente **quelques théorèmes du point fixe** de Banach, Brouwer, Schauder et Schaefer. Etant donnés un ensemble E et une application $T : E \to E$, on s'intéresse à donner des conditions suffisantes sur T et E pour que T ait un point fixe.

En 1922, Banach prouve le théorème de l'application contractante dit qu'une contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

Le théorème du point fixe de Brouwer exige uniquement la continuité de l'application d'un intervalle fermé borné dans lui-même. Et généralement, l'application continue doit être définie dans un convexe compact d'un espace euclidien dans lui-même.

En 1930, Le théorème du point fixe de Schauder était établi, est une généralisation du théorème du point fixe de Brouwer et affirme qu'une application continue sur un convexe compact admet un point fixe, qui n'est pas nécessairement unique.

Dans le troisième chapitre, on commence par **les opérateurs contractants** et **les applications non expansives**, et puis une introduction sur **les équations intégrales** qui sont découvertes en $(1768 - 1830)$, dans les espaces des fonctions continues et quelques propriétés, ainsi que l'existence et l'unicité des solutions pour les équations intégrales linéaire ou non linéaire.

Chapitre 1

Notions de base

Dans cette partie on présente quelques espaces fonctionnels qu'on a besoin de celles dans notre travail, et aussi rappel sur les applications et les opérateurs.

1.1 Espace de Banach

1.1.1 Espaces normés

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une norme sur E est une application $N\colon E \to \mathbb{R}$ qui possède les propriétés suivantes :

N1. $\forall\ u \in E \;\; N(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$. (Séparation).

N2.$\forall \lambda \in \mathbb{k}$, $\forall u \in E$, $N(\lambda u) = \lambda N(u)$. (Homogénéité).

N3.$\forall u, v \in E$, $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$. (Inégalité triangulaire).

Notation

La norme N est notée $\|.\|$ ou $\|.\|_E$.

Un espace vectoriel E muni d'une norme $\|.\|$ est dit un **espace vectoriel normé.** On le note par $(E, \|.\|)$.

Equivalence de normes:

Soit $\|.\|_{E.1}$ et $\|.\|_{E.2}$ deux normes sur E . On dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe α et β strictement positives telles que:

$$\forall x \in E,\ \alpha \|.\|_{E.2} \;\leq \|.\|_{E.1} \leq \beta \|.\|_{E.2}\,.$$

1.1.2 Espaces Euclidiens:

Les espaces Euclidiens sont en général les espaces vectoriels munis d'un produit scalaire; rappelons qu'il permet de pratiquer le raisonnement de la géométrie euclidienne pour des espaces fonctionnels de dimension infinie.

Produit Scalaire

On appelle produit scalaire sur un espace vectoriel E (réel ou complexe) une fonction $\langle x, y\rangle$ définie sur $E \times E$ dans $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ possèdant les propriétés suivantes:

1.$\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.

2.$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$.

3.$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.

4.$\langle x, x\rangle \geq 0$.

5.$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Où les éléments x, y et z appartiennent à E et le scalaire appartient à K.

Système Complet (total)

Un système $\{e_i\}$ est dit complet (ou total) si le plus petit sous espace fermé qui le contient coïncide avec l'espace E tout entier; autrement dit l'espace E est engendré par le système $\{e_i\}$, ou encore, l'espace des combinaisons linéaires finies des éléments de $\{e_i\}$ est dense dans E.

Base hilbertienne

Un système orthogonale $\{e_i\}$ est dit une base orthogonale s'il est complet, de plus si la norme de chaque élément est égale à l'unité; le système $\{e_i\}$ est dit base orthonormée ou base hilbertienne.

Espaces de Hilbert:

On appelle espace de Hilbert et que l'on note par H, tout espace euclidien complet au sens de la métrique $\rho(f, g) = \|f - g\|$.

Généralement l'espace H est séparable est de dimension infinie; en d'autres termes, il existe un ensemble dénombrable partout dense dans H et pour tout entier $n \in N$; il existe n vecteurs dans H linéairement indépendants.

Convexité

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un sous ensemble $C \subset E$ est convexe si et seulement si

$$\forall x,\ y \in C,\ \forall \lambda \in [0,1],\ \lambda x + (1-\lambda)y \in C.$$

1.1.3 Espaces complets

Définition 1.1.1 ***(espace complet)***

Un $\mathbb{R}$-ev E est dit complet pour la norme $\|.\|_E$ si toute suite de Cauchy est convergente (pour cette norme).

Un tel espace est aussi appelé espace de **Banach.**

1.2 Les applications linéaires

Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\Bbbk$.

On note $\mathcal{L}(E;F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Soit $f \in \mathcal{L}(E;F)$. Les cinq propriétés suivantes sont équivalentes.

(i) $\exists\ M \geq 0$, $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq M\,\|x\|_E$.

(ii) f est continue sur E.

(iii) f est continue en 0.

(iv) f est bornée sur la boule unité fermée.

(v) f est bornée sur la sphère unité.

1.3 Opérateurs linéaires continus

Définition 1.3.1

Soit E et F deux espaces vectoriels sur le corps $\Bbbk$, et $T : E \to F$.

On dit que l'opérateur T est linéaire si

1)$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \Bbbk\ T(x+y) = T(x) + T(y)$.

2)$T(\lambda x) = \lambda T(x)$.

1.3.1 Opérateurs continus

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur T défini sur un sous ensemble $A \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de A si, on a la propriété suivante:

Pour toute suite x_n de A converge vers x_0, la suite $T(x_n)$ converge vers $T(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \to +\infty} T(x_n) = T(\lim_{n \to +\infty} x_n) = T(x_0).$$

Théorème

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire T défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F, est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G.

Remarque

L'opérateur T est dit continu sur G, s'il est continu en chaque point de l'ensemble G.

1.3.2 Opérateurs bornés:

Définition 1.3.2

Un opérateur linéaire T défini sur l'espace normé E dans l'espace normé F est dit borné s'il existe une constante positive $c > 0$, telle que

$$\|T(x)\|_F \leq c \|x\|_E .$$

Théorème 1.3.1

Un opérateur linéaire T est continu, si et seulement si, il est borné.

Théorème 1.3.2 ***(Arzela-Ascoli)***

Un ensemble $U \subset C(G)$ est relativement compact si et seulement si il est borné et équicontinu i.e.

S'il existe une constante M tel que:

$$|\varphi(x)| \leq M \text{ pour tout } x \in G \text{ et } \varphi \in U$$

Autrement dit, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < \epsilon \text{ pour tout } x, y \in G \text{ et pour tout } \varphi \in U.$$

L'ensemble $C(G)$ signifie l'espace des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes définie dans l'ensemble compact $G \subset \mathbb{R}^n$ muni de la norme maximum:

$$\|\varphi\|_\infty = \max_{x \in G} |\varphi(x)| \,.$$

1.3.3 Opérateurs compacts

Définition 1.3.3

Soit T un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F, on dit que T est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné un ensemble relativement compact dans F.

Théorème 1.3.3

Un opérateur T de E dans F est compact si et seulement si pour toute suite bornée $\{\varphi_n\}$ de E, la suite $\{T\varphi_n\}$ contient une sous suite convergente dans F.

Théorème 1.3.4

Un opérateur compact est un opérateur borné, la réciproque est fausse.

Définition 1.3.4

L'opérateur T est dite complètement continu, si elle est continue et compact.

Chapitre 2

Théorie sur le point fixe

Dans cette partie, nous proposons quelques théorèmes du point fixe. D'abord le théorème du point fixe du type Banach, ensuite le théorème du point fixe de Brouwer, enfin cela de Schauder et Schaefer.

2.1 Théorème du point fixe du type Banach

Ce théorème est noté par le principe de l'application contractante, Ce principe garantit l'existence d'un unique point fixe pour toute application contractante d'un espace métrique complet dans lui-même.

Définition

Soient (E, d) un espace métrique complet et l'application $T : E \to E$.

On dit que T est une application lipschitzienne s'il existe une constante positive $k \geq 0$ telle que l'on ait, pour tout couple d'éléments x, y de E, l'inégalité

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y). \tag{2.1.1}$$

Pour $k = 1$, T est appelée non expansive.

Pour $k < 1$, T est appelée contraction.

Théorème 2.1.1 ***(Théorème du point fixe de Banach(1922))***

Soit (E, d) un espace métrique complet et soit $T : E \rightarrow E$ une application contractante avec la constante de contraction k alors T un unique point fixe $x \in E$.

De plus nous avons la propriété suivante qui est importante:

$$\text{Si } x_0 \in E \quad \text{et } x_n = Tx_{n-1},\ \underset{n\to\infty}{lim} x_n = x$$
$$\text{et } d(x_n, x) \leq k^n(1-k)^{-1}d(x_1, x_0),\ n \geq 1$$

x étant le point fixe de T.

Preuve

L'existence:

Soit $z \in E$ un point quelconque dans E. On considère la suite $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ définie par:

$$\begin{cases} x_0 = z \\ x_n = Tx_{n-1}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Il faut démontrer que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans E.

Pour $m < n$, on utilise l'inégalité triangulaire:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$$

Puisque T est une contraction, on a :

$$d(x_P, x_{P+1}) = d(Tx_{P-1}, Tx_P) \leq kd(x_{p-1}, x_p),\ \text{pour } p \geq 1.$$

En répétant cette inégalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq (k^m + k^{m+1} + \cdots + k^{n-1})d(x_1, x_0) \\ &\leq k^m(1 + k + \cdots + k^{n-m-1})d(x_1, x_0) \\ &\leq k^m(1-k)^{-1}d(x_1, x_0). \end{aligned}$$

On déduit que $(x_n)_n$est de Cauchy dans E qui est complet, donc $(x_n)_n$ converge vers x dans E.

Par ailleurs puisque T est continue, on a:

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} T(x_{n-1}) = T(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}) = Tx$$

Donc x est un point fixe de T (i.e.$Tx = x$).

L'unicité:

Supposons $x = Tx$ et $y = Ty$ alors:

$$d(x,y) = d(Tx,Ty) \leq kd(x,y)$$

Ce qui implique que $d(x,y) = 0$ i. e. $x = y$ (Puisque $k < 1$).

Exemple 2.1.1

Soient $E = \left(\left[\frac{5}{6}, +\infty\right[, |.|\right)$ et f une fonction définie de E dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{5x+9}{6x+5}$$

- $\left[\frac{5}{6}, +\infty\right[$ est un intervalle fermé dans l'espace métrique$(\mathbb{R}, |.|)$ .celui-ci étant complet.

- Pour tout x et y de E, on a:

$$f(x) - f(y) = \frac{5x+9}{6x+5} - \frac{5y+9}{6y+5} = \frac{29(y-x)}{(6x+5)(6y+5)}$$

  Donc:

$$|f(x) - f(y)| = \frac{29|y-x|}{(6x+5)(6y+5)} \leq \frac{29}{100}|y-x|$$

  Ce qui montre que f est contractante.

  Dans ces conditions, f admet un unique point fixe.

  On a:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{5x+9}{6x+5} = x \Leftrightarrow \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

  Donc $\sqrt{\frac{3}{2}}$ est le seul point fixe, car $-\sqrt{\frac{3}{2}} \notin E$

Remarques

∘ Si T est une application Lipschitzienne (pas nécessairement une contraction) mais l'une de ces itérées T^P est une contraction, alors T a encore un et un seul point fixe.

∘ Des fois T ne soit pas une contraction sur tout l'espace E mais juste dans le voisinage d'un point donné.

Maintenant, On présente quelques extensions de ce principe.

2.1.1 Extension du principe de l'application contractante

1.Extension de Boyd et Wong

Elle consiste à remplacer la contraction par la φ -contraction.

Définition 2.1.1

Soit E un espace métrique et T une application de E dans E.

On dit que T est une φ-contraction, s'il existe une application φ semi-continue supérieurement de $[0, \infty)$ dans $[0, \infty)$ avec $\varphi(r) < r$ pour $r > 0$ telle que:

$$\forall x, y \in E, d(T(x), T(y)) < \varphi(d(x, y)) \tag{2.1.2}$$

Le résultat suivant va assurer l'existence d'un unique point fixe pour une application quelconque.

Théorème 2.1.2 [3]

Toute φ–contraction d'un espace métrique complet dans lui-même admet un point fixe unique.

Remarque 2.1.1

La contraction est un cas particulier de la φ-contraction (il suffit de prendre $\varphi(r) = kr$ pour tout $r \geq 0$, $(0 \leq k < 1)$.

2.Extension d'Edelstein

Théorème 2.1.3 [5]

Soit (E, d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ une application telle que

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in E, x \neq y \tag{2.1.3}$$

Supposons qu'il existe $y \in E$ tel que les itérations de $\{x_n\}$ données par

$$\begin{cases} x_0 = y \\ x_n = T(x_{n-1}) \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Possèdent une sous suite $\{x_{nj}\}$

Avec

$$\lim_{j\to\infty} x_{nj} = x \in E.$$

Donc x est un point fixe unique de T.

Théorème 2.1.4 [5]

Soit (E, d) un espace métrique complet et $T : E \to E$ telle que :

$$d(T(x), T(y)) < d(x, y) \qquad \forall x, y \in E, x \neq y.$$

En plus, on suppose que: $T : E \to K$ où K est un sous ensemble compact de E alors T possède un unique point fixe dans E.

Définition 2.1.2

Soit T une application d'un espace métrique E dans lui-même. On dit que T est une contraction uniformément faiblement stricte si:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \epsilon < d(x, y) < \epsilon + \delta, d\left(T(x), T(y)\right) < \varepsilon \tag{2.1.4}$$

Remarque 2.1.2

Si T est une φ-contraction alors T est une contraction uniformément faiblement stricte mais la réciproque n'est pas vraie.

D'après ces résultats on définit une autre extension.

3.Extension de Meir Keeler

Théorème 2.1.5 [7]

Soit E un espace métrique complet, et T une application de E dans E possèdant la propriété (2.1.4) alors T admet un point fixe unique x. De plus

$$x = \lim_{n\to\infty} T^n(y) \quad \forall y \in E.$$

·Si T est une contraction stricte et E un espace compact alors T vérifie (2.1.4).

2.1.2 La signification du théorème de point fixe de Banach

Nous donnons des résultats très importants pendant l'application de ce théorème par exemple:

-Existence de la solution.

-Unicité de la solution.

-Stabilité de la solution dans le cas de petite perturbation de l'équation.

-Existence de la convergence des méthodes d'approximations.

2.2 Théorème du point fixe du type Brouwer

Il existe plusieurs formes du théorème selon le domaine d'utilisation. est donnée sous la forme suivante:

Dans le plan: Toute application T continue du disque fermé dans lui-même admet au moins un point fixe.

Dans un espace euclidien: Toute application continue d'une boule fermée d'un espace euclidien dans elle-même admet un point fixe.

Convexe compact: Toute application continue T d'un convexe compact K d'un espace euclidien à valeur dans K admet un point fixe.

2.2.1 Théorème de Brouwer en dimension une

Théorème 2.2.1 ***(théorème de Brouwer)***[10]

Soit $[a, b]$ le domaine de définition de T. L'application T est continue et à valeurs dans le même segment. On dit que cette application admet un point fixe, lorsque son graphe croise celui de l'application définie sur $[a, b]$.

Démonstration. ■

Pour la démonstration. On considère l'application continue suivante:

$$fx = Tx - x$$

Elle est positive en a, négative en b.

Le théorème des valeurs intermédiaires assure que l'application f possède un zéro dans $[a, b]$. Ce zéro de f est un point fixe de T.

Définition 2.2.1

On dit qu'un espace topologique E à la propriété du point fixe si toute application continue $T : E \to E$ possède un point fixe.

On note par B_n la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$. On a le résultat suivant:

Proposition 2.2.1

La boule B^n a la propriété du point fixe pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Le théorème de Schauder est une généralisation du résultat de Brouwer en dimension infinie.

2.3 Théorème du point fixe de type Schauder

Ce théorème prolonge le résultat du théorème de Brouwer, pour montrer l'existence d'un point fixe pour une fonction continue sur un convexe compact dans un espace de Banach.

Théorème 2.3.1

Soit K un sous ensemble non vide, compact et convexe d'un espace de Banach E et supposons $T : K \to K$ une application continue. Alors T admet un point fixe.

Démonstration

Soit $T : K \to K$ une application continue. Comme K est compact, T est uniformément continue.

Donc, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in K$.

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \epsilon \text{ quand } \|x - y\| \leq \delta.$$

De plus, il existe un ensemble fini des points $\{x_1, x_2, ..., x_p\} \subset K$ tel que les boules ouvertes de rayon δ centrées aux x_i représentent un recouvrement de K .

$$\text{i.e} : K \subset \bigcup_{1 \leq j \leq p} B(x_j, \delta).$$

Si on définit L par:

$$L = Vect\{T(x_j)_{1 \leq j \leq p}\}$$

Alors L est de dimension finie, et $K^* = K \cap L$ est compact convexe de dimension finie.

Pour $1 \leq j \leq p$, on définit la fonction continue: $\varphi_j : E \to E$ par:

$$\varphi_j = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x - x_j\| \geq \delta \\ 1 - \frac{\|x-x_j\|}{\delta} & \text{sinon} \end{cases}$$

Et on voit que φ_j est strictement positive sur $B(x_j, \delta)$ et nulle dehors.

On a donc, $\forall\ x \in K$, $\sum_{j=1}^{P} \varphi_j > 0$, et alors on peut définir sur K les fonctions continues positives ψ_j par:

$$\psi_j(x) = \frac{\varphi_j(x)}{\sum_{k=1}^{P} \psi_k(x)}$$

Où $\sum_{j=1}^{P} \psi_j(x) = 1$, $\forall\ x \in K$.

Alors on pose, pour $x \in K$, $h(x) = \sum_{j=1}^{P} \psi_j(x) T(x_j)$, h est continue (car elle est la somme des fonctions continues) et prend ses valeurs dans K^* (car $h(x)$ est un barycentre des $T(x_j)$)

Donc, si on prend la restriction $h_{/K^*} : K^* \to K^*$, h possède un point fixe $z \in K^*$.

Et aussi:

$$\begin{aligned} T(z) - z &= T(z) - h(z) \\ &= \sum_{j=1}^{P} \psi_j(x) T(z) - \sum_{j=1}^{P} \psi_j(x) T(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{P} \psi_j(x) (T(z) - T(x_j)) \end{aligned}$$

Or si $\psi_j(x) \neq 0$ alors $\|z - x_j\| < \delta$, et donc $\|T(z) - T(x)\| < \epsilon$. Donc, On a pour tout j:

$$\begin{aligned} \|f(z) - z\| &\leq \sum_{j=1}^{P} \left\| \psi_j(x) (T(z) - T(x_j)) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{P} \epsilon \psi_j(x) = \epsilon \end{aligned}$$

Donc, pour tout entier m, on peut trouver un point $y_m \in K$ tel que $\|T(z_m) - z_m\| < 2^{-m}$.

Comme K est compact, de la suite $(z_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ on peut extraire une sous-suite (z_{mk}) qui converge vers un point $z^* \in K$.

Alors f étant continue, et la suite $(T(z_{mk}))$ converge vers $T(z^*)$.

On conclut que

$$T(z^*) = z^*$$

I.e; z^* est un point fixe de T sur K.

- Le théorème de **Schaefer** est un cas spécial du théorème de **Leray-Schauder**

Théorème 2.3.2 ***(Théorème du point fixe de Schaefer)***[10]

Soit E un espace de Banach et $T : E \to E$ est un opérateur complètement continu. On a alors l'alternative suivante :

i) Ou bien, l'équation opérateur $x = \lambda Tx$ admet une solution pour $\lambda = 1$.

ii) Ou bien, l'ensemble $S = \{x \in E : x = \lambda Tx,\ \lambda \in]0; 1[\}$ est non borné.

Chapitre 3

Etude sur les opérateurs non expansifs

3.1 Opérateurs contractants

Définition 3.1.1

Soient H un espace de Hilbert et T un opérateur borné, l'opérateur T est dit opérateur contractant s'il existe une constante k telle que $0 < k < 1$ et

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in H, \|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\| .$$

Théorème 3.1.1 ***(principe de contraction de Banach)***

Soit T un opérateur contractant dans un espace de Hilbert H. Alors l'équation

$$T\varphi = \varphi \tag{3.1.1}$$

Admet une solution unique φ dans H, cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Démonstration

Pour démontrer l'existence de la solution de l'équation (3.1.1) on utilise la méthode des approximations successives.

Soit φ_0 une fonction arbitraire, on définit la suite (φ_n) par:

$$\varphi_{n+1} = T\varphi_n \quad n = 1, 2, ...$$

Soit de Cauchy et converge vers la solution de l'équation (3.1.1).

En effet

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_{p+1}-\varphi_p\right\| &= \left\|T\varphi_p - T\varphi_{p-1}\right\| \leq k\left\|\varphi_p-\varphi_{p-1}\right\| \\
&\leq k^2\left\|\varphi_{p-1}-\varphi_{p-2}\right\| \\
&\leq k^3\left\|\varphi_{p-2}-\varphi_{p-3}\right\| \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\quad . \\
&\leq k^p\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\|
\end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout $q > p$; on a

$$\begin{aligned}
\left\|\varphi_q-\varphi_p\right\| &= \left\|(\varphi_q-\varphi_{q-1})+(\varphi_{q-1}-\varphi_{q-2})+...+(\varphi_{p+1}-\varphi_p)\right\| \\
&\leq \left\|\varphi_q-\varphi_{q-1}\right\|+\left\|\varphi_{q-1}-\varphi_{q-2}\right\|+...+\left\|\varphi_{p+1}-\varphi_p\right\| \\
&\leq \left(k^p+k^{p+1}+...+k^{q-1}\right)\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\| \\
&\leq k^p\left(1+k+k^2+...+k^{\frac{q-1}{p}}\right)\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\| \\
&\leq \frac{k^p}{1-k}\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\|
\end{aligned}$$

Et par suite

$$\lim_{p,q\to+\infty}\left\|\varphi_q-\varphi_p\right\| = 0.$$

D'où la suite (φ_n) est de Cauchy dans un espace de Hilbert donc elle converge vers la solution unique φ.

Et par la continuité de l'opérateur T on trouve:

$$\varphi = \lim_{n\to+\infty}\varphi_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}T\varphi_n = T\lim_{n\to+\infty}\varphi_n = T\varphi$$

Pour démontrer l'unicité, supposons qu'il existe deux points fixes différents φ et ψ; tels que:

$$T\varphi = \varphi$$

$$T\psi = \psi$$

Alors on peut écrire

$$\|\varphi - \psi\| = \|T\varphi - T\psi\| \leq k \|\varphi - \psi\|$$

D'où

$$(1-k)\|\varphi - \psi\| \leq 0$$

Ce qui nous donne

$$\|\varphi - \psi\| = 0 \Rightarrow \varphi = \psi.$$

Corollaire 3.1.1

On suppose que l'opérateur T admette un point fixe dans l'espace de Hilbert H, alors l'opérateur T^n, $n \in \mathbb{N}$ admet le même point fixe.

Corollaire 3.1.2

Soit T un opérateur dans l'espace H tel que l'opérateur T^n, $n \in \mathbb{N}$ est un opérateur contractant, alors T admet un unique point fixe φ dans l'espace H.

3.2 Applications non expansives

Soit C un sous ensemble non vide de l'espace normé E et $T\colon C \to E$ une application.

Alors T est dit non expansive si

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \text{ pour tout } x, y \in C$$

Rappelons qu'une suite$\{x_n\} \subset C$ est une suite d'approximation de point fixe de T si

$$\lim_{n\to+\infty} \|x_n - Tx_n\| = 0$$

La suite d'approximation de point fixe possède un rôle fondamental dans l'étude de la théorie de point fixe pour les applications non expansives.

Proposition 3.2.1

Soit C un sous ensemble fermé non vide et convexe d'un espace de Banach E et $T\colon C \to E$ une application non expansive, alors $\forall u \in C$ et $t \in [0,1]$, il existe exactement un point $x_t \in C$.

Tel que

$$x_t = (1-t)u + Tx_t$$

Si C est borné alors $x_t - Tx_t \to 0$ quand $t \to 1$.

Preuve

Pour la preuve voir [2].

Proposition 3.2.2

Soient H un espace de Hilbert et u, v deux éléments de H; s'il existe $x \in H$ tels que $\|x-u\| \leq R, \|x-v\| \leq R, \left\|x - \frac{u+v}{2}\right\| \geq r, R \geq r$

Alors

$$\|u-v\| \leq 2\sqrt{R^2 - r^2}.$$

Preuve

Par la loi de parallélogramme:

$$\begin{aligned}
\|u-v\|^2 &= \|(x-v)-(x-u)\|^2 = 2\|u-x\|^2 + 2\|v-x\|^2 - \|(u-x)+(v-x)\|^2 \\
&= 2R^2 + 2R^2 + 4\left\|\frac{u+v}{2} - x\right\|^2 \\
&\leq 4\left(R^2 - r^2\right)
\end{aligned}$$

Lemme 3.2.1

Soient $C \subset H$ un ensemble borné et $f : C \to C$ une fonction non expansive vérifiée la condition suivante:

$\forall x,\, y \in C,\, \exists \epsilon > 0,\, \alpha = \frac{x+y}{2} \in C, \|x - f(x)\| \leq \varepsilon, \|y - f(y)\| \leq \varepsilon$, alors

$$\|\alpha - f(\alpha)\| \leq \sqrt{2\delta(C).}\sqrt{\varepsilon}$$

Où $\delta(C)$ est le diamètre de C:

Preuve

$$\begin{aligned}\|x-y\| &= \left\|x-\frac{f(\alpha)+\alpha}{2}-y+\frac{f(\alpha)+\alpha}{2}\right\| \\ &= \left\|(x-\frac{f(\alpha)+\alpha}{2})-(y-\frac{f(\alpha)+\alpha}{2})\right\| \\ &\leq \left\|x-\frac{f(\alpha)+\alpha}{2}\right\|+\left\|y-\frac{f(\alpha)+\alpha}{2}\right\|\end{aligned}$$

D'une part

$$\left\|x-\frac{f(\alpha)+\alpha}{2}\right\| \geq \frac{1}{2}\|x-y\|$$

D'autre part

$$\|x-\alpha\| = \left\|x-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$$

Et

$$\begin{aligned}\|f(\alpha)-x\| &\leq \|f(\alpha)-f(x)\|+\|f(x)-x\| \\ &\leq \|\alpha-x\|+\varepsilon = \varepsilon+\frac{1}{2}\|x-y\|\end{aligned}$$

Pour $r=\frac{1}{2}\|x-y\|$ et $R=\frac{1}{2}\|x-y\|+\epsilon$ on trouve

$$\begin{aligned}\|\alpha-f(\alpha)\| &\leq 2\sqrt{(\varepsilon+\frac{1}{2}\|x-y\|)^2-(\frac{1}{2}\|x-y\|)^2} \\ &\leq \sqrt{\epsilon^2+\epsilon\|x-y\|} \\ &\leq 2\sqrt{\epsilon}\,\sqrt{\epsilon+\|x-y\|} \\ &\leq 2\sqrt{\epsilon}\sqrt{2\delta(C)}\end{aligned}$$

Et, lorsque ϵ et$\|x-y\|$ ne dépassent pas $\delta(C)$,la preuve est terminé.

Théorème 3.2.1

Soit C un ensemble non vide fermé, borné et convexe dans un espace de Hilbert. Alors toute fonction $f : C \to C$ non expansive admet au moins un point fixe.

Démonstration

Le $0 \in C$ car on a chaque convexe contient le zéro.

On définit les fonctions f_n pour tout $n = 2, 3...$ par:

$$f_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f$$

Comme C convexe et $0 \in C$; $f_n : C \to C$ de plus f_n contractante.

Appliquons le théorème de Banach on obtient que f_n admet un point fixe x_n, et

$$\|x_n - f(x_n)\| = \frac{1}{n} \|f(x_n)\| \leq \frac{1}{n}\delta(C).$$

Pour chaque $n \geq 2$, soit $Q_n = \left\{x \in C / \|x - f(x)\| \leq \frac{1}{n}\delta(C)\right\}$, alors $Q_2 \supset Q_3 \supset ...$

Est une suite décroissante de l'ensemble fermé et, par quoi on doit choisir, Q_n n'est pas vide.

On observe que si $x, y \in Q_{8n^2}$ et $\alpha = \frac{x+y}{2}$, donc suivant à le lemme (**3.2.1**):

$$\|\alpha - f(\alpha)\| \leq 2\sqrt{2\delta(C)}\sqrt{\frac{\delta(C)}{8n^2}} \text{alors que } \frac{x+y}{2} \in Q_n$$

Soit $d_n = \inf \{\|x\| \,/\, x \in Q_n\}$:car les Q_n sont décroissants, on a $d_2 \leq d_3 \leq ...$

Est une suite non décroissants des réelles, était borné par $\delta(C)$, converge vers quelque d.

Finalement soit

$$A_n = Q_{8n^2} \cap \overline{B\left(0, d + \frac{1}{n}\right)}$$

Alors A_n est une suite décroissante de l'ensemble fermé non vide. On calcul le diamètre de A_n :

Si $x, y \in A_n$, alors

$$\|0 - x\| \leq d + \frac{1}{n}, \|0 - y\| \leq d + \frac{1}{n}$$

Et par notre observation ci-dessus, $\left\|0 - \frac{(x+y)}{2}\right\| \leq d + \frac{1}{n}$, donc par la proposition (**3.2.2**) on trouve

$$\|x - y\| \leq 2\sqrt{\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 - d_n^2} = 2\sqrt{2dn^{-1} + n^{-2} + (d^2 - d_n^2)}$$

On choisit $\delta(A_n) \to 0$ quand $n \to \infty$

Par le théorème de Cantor, il existe un $x_0 \in \bigcap\limits_n A_n$; comme $x_0 \in \bigcap\limits_n Q_{8n^2}$ on trouve

$$\|x_0 - f(x_0)\| \leq \frac{\delta(C)}{8n^2} \ \forall n$$

Donc $\|x_0 - f(x_0)\| = 0$ et x_0 est un point fixe. Ce qui termine la preuve.

Soit C une boule fermée dans l'espace de Hilbert H; Maintenant considérons le déroulement de l'application non expansive définie de C dans H.

Pour ce but, on besoin de

Lemme 3.2.2 .

Soient H est un espace de Hilbert et C la boule fermée $\{x \in H \ / \|x\| \leq m\}$

On définit la fonction $r : H \to C$ par

$$r(x) = \begin{cases} x & \|x\| \leq m \\ m\frac{x}{\|x\|} & \|x\| > m \end{cases}$$

Alors $r : H \to C$ est une fonction non-expansive.

Preuve

On remarque que, si $u, v \neq 0$, alors

$$\langle u - r(u), r(v) - r(u) \rangle \leq 0.$$

Elle est vraie pour$\|u\| \leq m$ lorsque $r(u) = u$, et si $\|u\| > m$ on a

$$\langle u - r(u), r(v) - r(u) \rangle = \begin{cases} \left(1 - \frac{m}{\|u\|}\right)[\langle u, v\rangle - m\|u\|] & \|v\| \leq m \\ \left(1 - \frac{m}{\|u\|}\right)\left[\frac{m\langle u,v\rangle}{\|v\|} - m\|u\|\right] & \|v\| \geq m \end{cases}$$

Comme $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \|v\|$

On écrit

$$\begin{aligned} x - y &= r(x) - r(y) + x - r(x) + r(y) - y \\ &\equiv r(x) - r(y) + \alpha \end{aligned}$$

Alors

$$\|x - y\|^2 = \|r(x) - r(y)\|^2 + \|\alpha\|^2 + 2\langle \alpha, r(x) - r(y)\rangle$$

Et comme

$$\langle \alpha, r(x) - r(y) \rangle = - \langle x - r(x), r(y) - r(x) \rangle - \langle y - r(y), r(x) - r(y) \rangle \geq 0$$

Alors

$$\|x - y\|^2 = \|r(x) - r(y)\|^2$$

Théorème 3.2.2

Soit H un espace de Hilbert et C la boule fermée $\{x \in H \ / \ \|x\| \leq m\}$:

Alors toute fonction $f : C \to H$ non expansive vérifiée au moins un des deux propriétés

1. f admet un point fixe.

2.$\exists x \in \partial C$ et $0 < \lambda < 1$ tel que $x = \lambda f(x)$.

Preuve

On a vu dans **le lemme 3.2.2** que la fonction $r : H \to C$ est non expansive. Ce qui implique $r \circ f : C \to C$ est une fonction non expansive, d'après **le théorème 3.2.1** on a $r(f(x)) = x \quad \forall x \in C$.

- Si $f(x) \in C$ alors $x = r(f(x)) = f(x)$ alors f admet un point fixe.
- Si $f(x) \notin C$ alors $x = r(f(x)) = c\frac{f(x)}{\|f(x)\|}$ alors $x \in \partial C$, On prend $\lambda = \frac{c}{\|f(x)\|}$ d'où le résultat.

Exemple 3.2.1

$H = \mathbb{R}^2$, $C = \{x \in \mathbb{R} / \ \|x\| \leq 1\}$ la boule unité.

L'application $f : C \to \mathbb{R}$ donné par $f(x) = x + 1$ est non expansive mais n'admet pas un point fixe alors elle doit être réalisé la deuxième condition, il existe $x = 1 \in \partial C$, et $\lambda = \frac{1}{2}$ tel que:

$$1 = \frac{1}{2}.2 = 1.$$

Corollaire 3.2.1

Soient $\{x \in H \ / \ \|x\| \leq m\}$ et $f : C \rightarrow H$ est une fonction non expansive, vérifie une des conditions suivantes pour tout $x \in \partial C$:

a)$\|f(x)\| \leq \|x\|$

b)$\|f(x)\| \leq \|x - f(x)\|$

c)$\|f(x)\|^2 \leq \|x\|^2 + \|x - f(x)\|^2$

d)$\langle x, f(x) \rangle \leq \|x\|^2$

Alors f admet un point fixe.

Preuve

Comme une illustration on prouve l'assertion de l'hypothèse (c)

Si f n'admet pas un point fixe, il doit être le $z \in \delta(C)$ avec $z = \lambda f(z)$

Pour $0 < \lambda < 1$, on particulier $f(z) \neq 0$, car de (c) on a

$$\|f(z)\|^2 \leq \|\lambda f(z)\|^2 + \|\lambda f(z) - f(z)\|^2$$

Et d'autre coté $1 \leq \lambda^2 + (\lambda - 1)^2$; mais ça est une contradiction puisque $\lambda^2 + (1 - \lambda)^2 < \lambda + (1 - \lambda) = 1$ pour chaque $0 < \lambda < 1$.

Corollaire 3.2.2

Soient H un est espace de Hilbert, $f : H \rightarrow H$ une fonction non expansive. Si la fonction f vérifie:

$$\langle x, x - f(x) \rangle \geq c \, \|x\|$$

Tel que $c(\|x\|) \rightarrow \infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$

Alors l'application non expansive suivante $x \rightarrow x - f(x)$ est surjective.

Preuve

Pour la preuve voir[1]

3.3 Applications

Le but de cette partie est d'appliquer le principe de contraction de Banach sur un opérateur intégral.

Premièrement on va étudier les opérateurs intégrals et après on démontre l'existence et l'unicité de ces opérateurs.

3.3.1 Opérateurs intégraux

Définition 3.3.1

Soit $k : C(G) \times C(G) \to R$ une fonction continue, l'opérateur intégral linéaire sur $C(G)$ est définit par:

$\varphi \in C(G) \to A\varphi \in C(G)$, tel que

$$A\varphi(x) = \int_G k(x, y)\varphi(y)\, dy \quad x, y \in G$$

Définition 3.3.2

Chaque équation fonctionnelle écrit par:

$$\lambda\varphi(x) + f(x) = \int_G k(x, y)\varphi(y)\, dy \qquad x, y \in G \text{ et } \lambda \in \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}. \tag{3.3.1}$$

Est appelée équation intégrale, tel que φ est l'inconnue, f est une fonction donnée, G est un ensemble fermé, borné et mesurable et k est le noyau de l'équation intégrale.

Remarque 3.3.1

La valeur de $f(x)$ c'est qui déterminer le genre de l'équation, i.e. homogène ou non homogène.

(i)Équation de Fredholm

1.Équation de première espèce

Définition 3.3.3 .

L'équation de Fredholm non homogène de première espèce est définie par :

$$\int_a^b k(x, y)\varphi(y)\, dy = f(x) \tag{3.3.2}$$

Sachant que φ est la fonction inconnue.

2.Équation de seconde espèce

Définition 3.3.4

L'équation de Fredholm non homogène de deuxième espèce est définie par:

$$\lambda\varphi(x) = \int_a^b k(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x)\,, \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.3.3}$$

Sachant que φ est la fonction inconnue.

(ii)Équation de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers de ceux de Fredholm dans lesquelles le noyau k vérifiant

$$k(x,y) = 0 \quad \text{Pour } y > x$$

1.Équation de première espèce

Définition 3.3.5

L'équation de Volterra non homogène de première espèce est définie par:

$$\int_a^x k(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x)\,, a \leq x \leq b \tag{3.3.4}$$

Sachant que φ est la fonction inconnue.

2.Équation de seconde espèce

Définition 3.3.6

L'équation de Volterra non homogène de deuxième espèce est définie par:

$$\lambda\varphi(x) = \int_a^x k(x,y)\varphi(y)\,dy + f(x)\,, \lambda \in \mathbb{R} \tag{3.3.5}$$

Sachant que φ est la fonction inconnue.

Théorème 3.3.1

Soit H est un espace de Hilbert et T un opérateur borné dans H vérifiant:

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

Donc l'équation

$$\varphi - \lambda A\varphi = f$$

Admet une solution unique pour toute $f \in H$ tel que $|\lambda|$ soit petit.

Théorème 3.3.2

Soit $k(x,y)$ est une fonction continue pour $x, y \in [a,b]$, alors l'équation de Volterra

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,y)\varphi(y)\,dy = f(x), a \leq x \leq b$$

Admet une solution unique φ pour toute f dans $L^2([a,b])$ et λ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

On considère l'opérateur suivant pour l'équation intégrale de Volterra

$$T\varphi(x) = f(x) + \lambda A\varphi(x) = \int_a^x k(x,y)\varphi(y)\,dy,\ \ a \leq x \leq b. \tag{3.3.6}$$

Avec

$$A\varphi(x) = \int_a^x k(x,y)\varphi(y)\,dy$$

Lorsque on montre que l'opérateur T^n est une contraction pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on conclut que $T\varphi$ admet un point fixe qui est la solution de l'équation (3.3.6).

$$\begin{aligned} T\varphi &= f + \lambda A\varphi \\ T^2\varphi &= T(f + \lambda A\varphi) = f + \lambda A(f + \lambda A\varphi) \\ &= f + \lambda Af + \lambda^2 A^2\varphi \end{aligned}$$

Et de la même manière on obtient pour n :

$$T^n\varphi = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2\varphi + ... + \lambda^{n-1}A^{n-1}\varphi + \lambda^n A^n\varphi$$

D'autre coté

$$\begin{aligned}\|T^n\varphi_2 - T^n\varphi_1\| &= \|\lambda^n A^n\varphi_2 - \lambda^n A^n\varphi_1\| \\ &= |\lambda|^n \left\| \int_a^x k_n(x,y)\left(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)\right) dy \right\|\end{aligned}$$

On sait que $k_n(x,y)$ est le noyau itéré d'ordre n défini par

$$k_n(x,y) = \int_x^y k(x,z)\, k_{n-1}(z,y)\, dz.$$

Par hypothèse on a

$$|k(x,y)| \leq M$$

Donc

$$|k_n(x,y)| \leq \frac{M^n (x-y)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad a \leq y \leq x \leq b$$

Comme ce dernière expression est évidente pour $n = 1$, alors on suppose qu'elle est vraie pour $m \in \mathbb{N}$.

$$|k_m(x,y)| \leq \frac{M^m (x-y)^{m-1}}{(m-1)!}, \quad a \leq y \leq x \leq b$$

Alors

$$\begin{aligned}|k_{n+1}(x,y)| &= \left| \int_y^x k(x,z)\, k_m(z,y)\, dz \right| \\ &\leq \int_y^x |k(x,z)\, k_m(z,y)|\, dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}}{(m-1)!} \int_y^x (x-z)^{m-1}\, dz \\ &\leq \frac{M^{m+1}(x-y)^m}{m!}\end{aligned}$$

On a

$$\|T^n\varphi_2(x) - T^n\varphi_1(x)\| \leq \frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} \|\varphi_2 - \varphi_1\|$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ assez grand on obtient:

$$\frac{|\lambda|^n M^n}{(n-1)!} < 1$$

Et T^n est contractant alors T admet un point fixe.

Finalement on réalise l'écriture suivante:

$$T\varphi = \varphi \Leftrightarrow \varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x,y)\varphi(y)\,dy$$

3.3.2 Exemple

Dans cet exemple on prend

$k(x,y)\varphi(y) = xy\varphi(y)$, et $f(x) = \cos x$, $a \leq x \leq b$

Alors l'équation intégrale de Volterra s'écrit comme suit.

$$T\varphi(x) = \varphi(x) = \cos x + \int_a^x xy\varphi(y)\,dy. \tag{*}$$

Cette dernière admet un point fixe si l'opérateur est contractant

Montrons que $\|T\varphi_1 - T\varphi_2\| \overset{?}{\leq} k\|\varphi_1 - \varphi_2\|$, sachant que f et φ sont indépendantes.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires qui assure que l'application k possède un zéro dans $[a,b]$. ce zéro de k est un point fixe de T.

Conclusion générale

Finalement, nous concluons pour la convergence d'une application non expansive vers un point fixe qu'au moins deux manières: soit en modifiant la suite des itérés, ou bien en imposant des conditions plus restrictives sur l'application (sans toutefois aller jusqu'à la contraction).

Bibliographie

[1] R.P. Agarwal, D. O'Regan, D.R. Sahu, *Fixed point theory for Lipschitzian type mappings with applications*, Springer

[2] R.P.Agarwal, M.Meehan et D.O'regan, *Fixed point theory and applications*,Cambridge tracts in mathematics, 2001.

[3] D.W. Boyd and J.S.W. Wong, *On nonlinear contractions*, Proc. Amer. Math. Soc. 20(1969) 458-464

[4] C. Corduneanu. *Functional equations with causal operators.Department of mathematics*, Taylor & Francis Groupe, London and New York, 2002.

[5] M.Edelstein, *An extension of Banach's contraction principle*, Proc. Amer. Math. Soc.12 (1961) 7-10.

[6] A.Khirani. *Résolution des équations intégrales non linéaire type Volterra*, mémoire de magister université de M'sila, 2011.

[7] A.Meir and E. Keeler, *A theorem on contractive mappings*, J. Math. Anal. Appl. 28(1969) 326-329.

[8] M.Nadir, *Cours d'analyse fonctionnelle*, université de M'sila 2004.

[9] M.Nadir. *Cours sur les équations intégrales.* Université de M'sila, Algérie, 2008.

[10] D.R. Smart, *Fixed point theory*, Combridge Uni. Press, Combridge 1974

[11] E. Zeidler, *Nonlinear functional analysis and its applications Fixed point theorem*, Springer Verlag, New York Berlin Heiderberg, Tokyo 1985.