UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière Mathématiques**:**
Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par
Karima GHARBI

Sujet

Programmation linéaire et application

Devant le jury :

DILMI Mustapha	M.C.B	Univ de Msila	Président
SELT Omar	M.C.A	Univ de Msila	Encadreur
GAGUI Bachire	M.C.A	Univ de Msila	Examinateur

Promotion : 2018 / 2019

Remerciements

Grace à Dieu le tout puissant, le termine ce modeste travail.
La réalisation de ce travail résulte de la contribution de plusieurs personnes. De ce fait, j'adresse mes remerciements à toutes ces personnes pour le soutien et les conseils qu'ils m'ont apportés.

Je remarcie mon encadreur
Je tiens à remarcie infiniment lenseignante :
≪KHIRANI Amina ≫ et
≪HEMMAK Allaoua ≫qui m'a donné l'aide et la coopération .

Je remarcie ainsi de tout mon cœur mon mari :
≪DEBBECHE Salime≫
qui m'a donné l'aide et le courage pour faire réssir ce mimoire.
Et je termine ces remerciements par une pensée pour mes proches.
Mes parents, sans lesquelles je n'aurais jamais poursuivi des études et à qui je dédiais naturellement et affectueusement ce travail.
Je pense aussi à mes sœurs, mes frères, et mes amies particulièrement :≪ BOUHALI Sarra≫, ≪AMRONE Abir ≫ .

Résumé

Les problèmes les plus importants aux quels sont confrontées les entreprises économiques sont les problèmes de l'amélioration de l'utilisation et de la répartition des ressources disponibles pour des utilisations alternatives, et nous ne pouvons pas résoudre ce problème en nous fiant à basées, sur le principe de l'outo décideur, en utilisant les méthodes mathématiques pour obtenir le meilleure décision

Le but de cette mémoire est de mettre en évidence le rôle et l'importance de l'application de la technique de la programmation linéaire pour améliorer l'utilisation des ressources disponible de l'entreprise, ce qui conduira à la amélioration de la performance des institutions économiques.

Table des matières

Introduction

Dès sa naissance –que certains l'estiment remontera la deuxième guère mondiale- la programmation linéaire ne cesse de se développer, d'aborder de nouveaux domaines d'application pour en trouver les solutions des problèmes rencontrés... et par conséquence d'occuper une place de plus en plus importante en matière de l'affectation des ressources rares et la rationalisation de la prise de décision.

Cette technique« a atteint une maturité confirmée d'une part par l'existence d'algorithmes capables de résoudre aisément des problèmes de taille considérable et d'autre part ;par une riche variété d'applications», elle occupe aujourd'hui une place importante dans la pratique des différentes entreprises ;« déjà en novembre 1978, une enquête sur 184 grandes entreprises américaines interrogées révèle que 133 soit plus de 72% utilisent la programmation linéaire dans les décisions relatives à la gestion de la production et à la gestion financière»

On a structure ce mémoire en trois chapitres comme suit :

Dans le premier chapitre, nous rappelons quelques notions de : la programmation linéaire, définitions de la programmation linéaire, les formes d'un programme linéaire, la fonction objectif, les contraintes...

Le deuxième chapitre présente quelques méthodes de résolution d'un PL (méthode graphique, méthode simplexe, méthode des deux phases...)

Le troisième chapitre, nous rappellons un application d'une méthodologie pour le traitée le problème de production de le moulin El–Houdna.

À la fin on a la résolution numérique du problème et la comparaison les resultats entre le ptant optimal(proposé) et le plant de l'entreprise.

Chapitre 1

Généralités sur la programmation linéaires

1.1 Notions et définitions de la programmation linéaire

L'importance de l'optimisation est la nécessité d'un outil simple pour modéliser des problèmes de décision dans l'entreprise, ces méthodes furent connues sous le nom de programmation linéaire, développée principalement par George B DANTZIG(né le 8 novembre 1940), mathématicien américain et créateur de la méthode du simplexe, et L.V.KANTOROVICH(1912- 1986) ; On fait de cette technique un des champs de recherches les plus actifs.

Les problèmes de programmation linéaire sont généralement liés à des problèmes d'allocations des ressources limitées, de la meilleure façon d'utiliser, afin d'optimiser, l'objectif pour suivre par l'entreprise.

1.2 Définitions de la programmation linéaire

Nous allons citer quelques définitions attribuées par des différents auteurs à la notion de la programmation linéaire, ensuite nous allons donner une synthèse de définition.

La définition donnée par Michel NEDZELA à la programmation linéaire est la suivante :« la programmation linéaire s'applique à la répartition des ressources limitées entre des activités en concurrence les unes avec les autres, de façon à atteindre au mieux un certain objectif». Donc, c'est une méthode de résolution du problème économique, soit dans le cadre d'une économie globale, soit dans celui d'une entreprise particulière ; où l'objectif est de sélectionner parmi différentes actions possibles celle qui atteindra le plus probablement l'objectif visé.

Selon Gérald BAILLARGEON :« la programmation linéaire peut se définir comme un outil mathématique qui permet d'analyser divers types de situations dans les quelles nous retrouvons une fonction linéaire d'un certain nombre de variables, appelée fonction objectif(on utilise également dans la littérature les termes fonction économique) que l'on désire optimiser, c'est-à-dire maximiser ou minimiser». Ces variables appelées variables d'activité, puis après la résolution, on les qualifie de variables de décision(dont on veut en déterminer les valeurs optimales) qui sont soumises à des contraintes imposées par des ressources limitées de la situation que l'on veut analyser ; les restrictions qui sont imposées prennent forme d'équations ou d'inéquations linéaires dans la formulation mathématique d'un modèle de programmation linéaire.

Selon Jean-Philippe JAVET :« la programmation linéaire peut se définir comme une technique mathématique permettant de résoudre des problèmes de gestion et particulièrement ceux où le gestionnaire doit déterminer, face à différentes possibilités, l'utilisation optimale des ressources de l'entreprise pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts». Dans la plupart des cas, les problèmes de l'entreprise pouvant être traités par la programmation linéaire comportent un certain nombre de ressources. On peut mentionner, par exemple, la main-d'oeuvre, les matières premières, les capitaux, etc. Qui sont disponibles en quantités limitées et qu'on veut les affecter d'une façon optimale entre un certain nombre de processus de fabrication.

1.3 Synthèse de définition de la programmation linéaire

Dans le domaine des sciences de la gestion, on pourrait dire que la programmation linéaire est un outil scientifique qui permet d'obtenir une meilleure affectation des ressources de l'entreprise (main-d'oeuvre, matières premières, capitaux, espace, etc.), pour atteindre un objectif spécifique comme la maximisation des bénéfices ou la minimisation des coûts,« l'objectif de la programmation linéaire est de minimiser(ou maximiser) une fonction objectif linéaire sous contraintes, qui sont représentées par des égalités et/ ou inégalités linéaires».

On constate dans les définitions précédentes que la programmation linéaire est la branche des mathématiques qui étudient les variables d'activités sous la forme d'un programme linéaire et la résolution de certains problèmes d'optimisation sous contraintes linéaires ; elle est utilisée, en particulier, dans la production et dans la planification et l'allocation des ressources limitées en vue d'atteindre des objectifs fixés par les décideurs.

On appelle programme linéaire, le problème mathématique qui a pour objectif d'optimiser(maximiser ou minimiser) une fonction linéaire de(n) variables réelles non négatives qui sont reliées par des(m) relations linéaires appelées contraintes sous d'égalités.

1.4 Définition d'un programme linéaire

Un programme linéaire est un modèle d'optimisation mathématique qui a pour objectif de trouver le maximum ou le minimum d'une forme linéaire dite fonction objectif en satisfaisant certaines égalités et/ ou inégalités dites contraintes. En langage mathématique, on décrira le modèle de la manière suivante :

$$Max\ ou\ Min(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_iX_j + ... + C_nX_n$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1j}X_j + ... + a_{1n}X_n(\leq,=,\geq)b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2j}X_j + ... + a_{2n}X_n(\leq,=,\geq)b_2 \\ ... \\ a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{ij}X_j + ... + a_{in}X_n(\leq,=,\geq)b_i \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mj}X_j + ... + a_{mn}X_n(\leq,=,\geq)b_m \end{pmatrix}$$

$$X_1, X_2, ..., X_j, ..., X_n \geq 0$$

Soient :

- $[X_1, X_2, \ldots X_j, \ldots, X_n]$ représentent les variables d'activités ; suivant l'hypothèse que cesvariables sont positives, impliquent que $X_1, X_2, \ldots., X_j, \ldots\ldots X_n \geq 0$.
- La fonction objectif a une forme linéaire en relation avec les variables de décision du type $Max\ ou\ Min(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots\ldots + C_jX_j + \ldots.C_nX_n$, où les coefficients $[C_1, \ldots C_2, \ldots C_{j,}, \ldots., C_n]$ doivent avoir une valeur bien déterminée (avec certitude) et peuvent être positifs, ou négatifs. Par exemple le coefficient (C_j) peut représenter un profit unitaire lié à la quantité de la production (X_j), ainsi, la valeur de la fonction (Z) est le profit total lié à la production $[X_1, X_2, \ldots.., X_j, \ldots., X_n]$.
- Supposons que ces variables d'activités doivent vérifier un système d'équations linéaires défini par (m) inégalités et (n) variables ; où les coefficients techniques sous la forme de la matrice $(m \times n)$ suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, ..., a_{1j}, ..., a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, ..., a_{2j}, ..., a_{2n} \\ ... \\ a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ij}, ..., a_{in} \\ ... \\ a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mj}, ..., a_{mn} \end{pmatrix}$$

  et le vecteur colonne $[b_1, b_2, \ldots\ldots, b_i, \ldots, b_m]$ qui doit avoir une valeur bien déterminée(avec certitude) et peut être positif ou nul. Le paramètre (b_i) représente la quantité des ressources disponibles dont le bien (X_j) utilise une quantité égale à $[a_{ij}X_j]$. «Les constants(à savoir, les coefficients et les côtés de droite) dans les contraintes et la fonction objectif sont appelés les paramètres du modèle».

1.5 Les formes d'un programme linéaire

On trouve souvent deux formes de programme linéaires. La forme canonique et la forme standard. La première représente la forme initiale, elle se caractérise par des contraintes linéaires sous forme des inéquations $(\leq, \geq)$ ou d'équations $(=)$ comportant (j) variables et (i) contraintes comme suit :

Maximiser ou minimiser selon l'objectif une fonction économique (Z) : X_j variables de décision.

$$Max\ ou\ Min\ (Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_iX_j + ... + C_nX_n.$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1j}X_j + ... + a_{1n}X_n(\leq, =, \geq)b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2j}X_j + ... + a_{2n}X_n(\leq, =, \geq)b_2 \\ ... \\ a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + ... + a_{ij}X_j + ... + a_{in}X_n(\leq, =, \geq)b_i \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mj}X_j + ... + a_{mn}X_n(\leq, =, \geq)b_m \end{pmatrix}$$

$$X_1, X_2, ..., X_j, ..., X_n \geq 0$$

X_j : variables de décision ;

b_i : seconds membres(les disponibilités) ;

C_j : coefficients de la fonction objectif ;

a_{ij} : coefficients des contraintes.

1.5.1 La forme canonique

Un programme linéaire est dit sous forme canonique si :

1. Les contraintes sont sous forme des inégalités d'infériorités et la fonction objectif est exprimée sous forme de maximisation.
2. Les contraintes sont sous forme des inégalités de supériorité et la fonction objectif est exprimée sous forme de minimisation. X_j : variables de décision.
3. Les contraintes sont sous forme des inégalités d'infériorités, des inégalités de supériorités et des égalités, et la fonction objectif est exprimée sous forme de maximisation ou de minimisation.

On peut obtenir la forme canonique pour n'importe quel programme linéaire à travers des transformations des contraintes.

1.5.2 La forme standard

Un programme linéaire est dit sous forme standard quand les inégalités représentant les contraintes sont transformées en égalités. Ceci s'effectue par l'introduction des variables d'écarts pour type de contraintes $(\geq, \leq)$ et variables artificielles pour type de contraintes $(=)$.« Un problème est sous la forme standard si seulement si les vraies contraintes sont toutes des égalités». Les vraies contraintes désignent les contraintes du programme hormis les contraintes logiques, en d'autres termes ce sont les contraintes opérationnelles.

1.5.3 Forme matricielle

On appelle forme matricielle, tout système composé de (m) équations à (n) inconnues devant être vérifiées simultanément et dont l'écriture de la forme suivante :

$$Max\ ou\ Min\ (Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_iX_j + \ldots . + C_nX_n.$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, ..., a_{1j}, ..., a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, ..., a_{2j}, ..., a_{2n} \\ ... \\ a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mj}, ..., a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ ... \\ X_n \end{pmatrix} \leq, =, \geq \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

1.6 Notions relatives à la programmation linéaire

Le traitement du sujet de la programmation linéaire, nécessite de mettre quelques notions relatives au sujet en exergue.« Les composants essentiels d'un problème d'optimisation sont un ensemble de variables de décision, une fonction objectif des variables à être agrandie ou réduite, et un ensemble de contraintes qui caractérisent les valeurs acceptables des variables».

1.6.1 La fonction économique

Une fonction objectif, fonction économique ou fonction critère, elle décrit la relation linéaire représentant l'objectif de l'entreprise. Par exemple : maximisation du profit global, minimisation du coût de transport, maximation du chiffre d'affaires, minimisation des achats ... etc.« On appelle fonction objectif d'un problème d'optimisation la fonction qui doit être optimisée et le critère de choix entre les diverses solutions possibles».

La fonction objectif est une forme linéaire en fonction des variables de décision est de type :

$$Max\ ou\ Min\ (Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_iX_j + \ldots. + C_nX_n.$$

C_j : C'est le coefficient de contribution de la variable (X_j) dans la fonction objectif, ce coefficient a une valeur connue avec certitude et peut prendre n'importe quelle valeur(positive ou négative). Par exemple, ce coefficient de contribution peut représenter : un profit unitaire ou un coût de transport unitaire, le prix de vente unitaire ou le prix d'achat, etc.

Cette fonction nous permet de traduire l'objectif poursuivi par l'entreprise en équation linéaire. Elle constitue des variables d'activité et des coefficients économiques.

Chaque variable de décision identifiée dans le modèle, correspond à un coefficient indiquant la contribution unitaire de la variable correspondante à l'objectif.

1.6.2 Les variables d'activité $[X_j : X_1, X_2, \ldots, X_j \ldots, X_n]$

Ces variables sont appelés les variables de contrôle ou variables instrumentales ou variables de commande ou plus brièvement les commandes du programme.« On représente par (X_j) les variables d'activité du programme linéaire ; les variables (X_j) ont une signification concrète(quantités produites, vendues ou transportées, durées, valeurs monétaires...etc). Ces variables sont toujours positives ou nulles(condition de non-négativité, $X_j \geq 0$». L'agent décideur a la capacité d'interpréter ces variables et son choix final sera la valeur (X_j) qui optimise la fonction objectif.

1.6.3 Les coefficient de la fonction objectif $[C_j : C_1, C_2, \ldots, C_j \ldots., C_n]$

On représente par (C_j) le coefficient de la variable $[X_j : X_1, X_2, \ldots\ldots, X_j, \ldots., X_n]$ de la fonction économique. Dans beaucoup de cas, les coefficients des variables d'activité de la fonction économique représentent les profits ou les coûts associés à une unité des différentes activités. En d'autres termes, c'est la contribution unitaire de la variable correspondante à l'objectif poursuivi par l'entreprise.

1.6.4 Les contraintes d'activité $[a_{ij}\ X_j] \leq = \geq [b_i]$

Selon Daniel DEWOLF :« On appelle contraintes du problème toutes les relations limitant le choix des valeurs possibles des variables». Dans la problématique de la situation, il faut être en mesure d'identifier toutes les contraintes imposées par la disponibilité des facteurs de production, elles présentent les éléments qui limitent le calcul économique de l'entreprise comme(capacité de production limitée, les ventes potentielles, main-d'oeuvre, espace, budget...etc). Dans tout problème formulé sous forme d'un programme linéaire il faut prendre en considération un vecteur des ressources disponibles b_i $[b_1, b_2, \ldots.., b_i, \ldots.., b_n]$.

La forme générale d'une contrainte :$[a_{ij}\ X_j] \leq = \geq [b_i]$ avec :

- (i) : c'est le nombre des contraintes ;
- (a_{ij}) : c'est le coefficient technique de la variable (X_j) dans la i^{ème} contrainte ;
- (b_i) : c'est le second membre(ressources disponibles).

1.6.5 Les coefficients techniques $[a_{ij}]$

On représente par (a_{ij}) le coefficient technique associé à la ressource (i) et l'activité numéro (j), il représente une matrice de (i) lignes et de (j) colonnes.« Les coefficients techniques (a_{ij}) représentent la quantité du facteur (i) par produit (j)». C'est les quantités unitaires nécessaires de chaque ressource pour pouvoir conduire une des activités considérées au niveau unitaire, c'est-à-dire lorsque la variable de décision associée à l'activité en question est égale à un (1).

1.6.6 Les ressources disponibles $[b_i : b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots b_m]$

On représente par (b_i) les quantités des ressources disponibles et qui limitent l'optimisation de l'objectif poursuivi par l'entreprise.

1.6.7 Variables d'écart

La méthode de résolution que nous venions d'étudier nécessite que les contraintes du modèle soient exprimées sous forme d'équation linéaire au lieu d'inéquation.

On peut facilement transformer une inéquation linéaire ayant un signe $(\leq)$, en une équation linéaire en additionnant une variable non négative dite variable d'écart,« la variable d'écart est la quantité qui, ajoutée aux membres de gauche d'une contrainte, permet de transformer la contrainte en égalité». Elle représente l'écart entre la quantité disponible de la ressource (i) et la quantité effectivement utilisée par l'ensemble des (X_j). Nous ajoutons autant de variable d'écart différents qu'il existe de contrainte du type $(\leq)$.

1.6.8 Coefficients des variables d'écart dans la fonction économique

Comme l'on peut considérer que les variables d'écart permettant de mesurer le niveau d'activité fictive alors, pour qu'elles n'influencent pas l'optimisation, on suppose nuls les bénéfices ou les coûts liés à ces activités.

1.6.9 Les conditions de formulation d'un programme linéaire.

La programmation linéaire comme étant un modèle admet des hypothèses(des conditions) que le décideur doit valider avant de pouvoir les utiliser pour modéliser son problème. Ces hypothèses sont :

1. Les variables de décision du problème sont positives ; on ne peut pas attribuer des valeurs négatives pour la quantité, la surface,... etc.
2. Le critère de sélection de la solution optimale est décrit par une fonction linéaire de ces variables, c'est-à dire que les variables ne sont pas élevées au carré, ne servent pas d'exposant, ne sont pas multipliées entre elles.
3. La fonction qui représente le critère de sélection est dite fonction objectif(ou fonction économique).
4. Les restrictions relatives à l'activité de l'entreprise(exemple : limitations des ressources) peuvent être exprimées par un ensemble d'équations linéaires. Ces équations forment l'ensemble des contraintes.
5. Les paramètres du problème en dehors des variables de décision ont une valeur connue avec certitude.

1.7 Formulation d'un programme linéaire

Un modèle est un moyen pour mieux comprendre la réalité d'un phénomène quelconque. Un modèle linéaire est un système d'équations ou d'inéquations appelées contraintes, qui sont linéaires. Et à partir de ces contraintes, on doit optimiser une fonction également linéaire appelée objectif.

La formulation du modèle mathématique est l'étape la plus délicate de la résolution d'un problème. Elle nécessite un effort de conception qui doit aboutir à la détermination des trois éléments suivants :

- Les variables de décision pour lesquelles on doit décider du niveau à atteindre, tel que le niveau d'activité dans l'entreprise. On suppose que ces variables peuvent prendre n'importe quelle valeur positive.
- La fonction d'objectif qui décrit la relation linéaire représentant l'objectif de l'entreprise, à l'aide des variables de décision.

– Les contraintes du modèle qui décrivent les relations linéaires entre les variables de décision représentant les restrictions auxquelles est sujette l'entreprise.

Donc, la formulation d'un modèle linéaire consiste à identifier les variables d'activité du problème posé, c'est-à-dire, désigner l'activité de l'entreprise par des variables X_j $[X_1, X_2, ...X_j, .., X_n]$, ces variables appelées aussi variables de décision après la résolution de programme, lorsque la valeur des inconnus est déterminée dans le modèle. Pour pouvoir traduire l'objectif pour suivi par l'entreprise sous forme d'une fonction économique, il s'agit de calculer les coefficients économiques qui indiquent la contribution à cet objectif. Ces variables d'activités sont associés à des contraintes linéaires.

Chapitre 2

Méthodes de résolution d'un PL

La résolution des problèmes de programmation linéaire vise à déterminer l'allocation optimale et la meilleure allocation possible des ressources limitées pour atteindre certains objectifs, ces allocations doivent minimiser ou maximiser une fonction dite objectif. En économie, ces fonctions sont le profit ou le coût. Pour ce faire, on fait appel aux méthodes de résolution d'un programme linéaire on cite : la méthode graphique, et la méthode de simplexe, deux phases, et grande M.

2.1 Méthode graphique

La méthode graphique permet la résolution de problèmes linéaires simples de manière intuitive et visuelle. Cette méthode de résolution n'est applicable que dans le cas où il n'y a que deux variables de décision,« appelée aussi résolution géométrique, elle est possible pour un programme linéaire sous forme canonique avec (n) égale à deux ou trois variables et impossible s'il y a plus de trois (03) variables d'activité.». Et selon George b. DANTZIG, Mukund n. THAPA :« lorsque des problèmes linéaires ont exactement deux variables soumises à des contraintes d'inégalités, il est possible de les résoudre graphiquement». Son avantage est de pouvoir comprendre ce que fait la méthode générale du simplexe, sans entrer dans la technique purement mathématique.

Les étapes du processus de la résolution la méthode des graphique sont les suivantes :

1. Créer un système de coordonnées cartésiennes, dans lequel chaque variable de

décision est représentée par un axe.

2. Etablir une échelle de mesure pour chacun des axes appropriés à sa variable associée.
3. Dessiner dans le système de coordonnées les contraintes du problème, y compris celles de non - négativité(qui seront les propres axes). Remarquer qu'une inéquation précise une région qui sera le demi-plan limité par la ligne droite qu'on obtient de considérer la contrainte comme égalité, alors que si une équation détermine une région c'est la ligne droite, elle-même.
4. L'intersection de toutes les régions détermine la région ou l'espace faisable(qui est un ensemble convexe). Si cette région est non vide, passez à l'étape suivante. Sinon, il n'y a pas de point qui satisfait toutes les contraintes simultanément, de sorte que le problème ne sera pas résolu, dit infaisable.
5. Déterminer les points extrêmes ou les sommets du polygone ou polyèdre qui forme la région faisable. Ces points seront les candidats à la solution optimale.
6. Évaluer la fonction objective à chaque sommet et ceui (ou ceux) qui maximisent (ou minimisent) la valeur résultante définiront la solution optimale.

Exemple 2.1

Trouver la solution optimale de (PL) suivant avec la méthode graphique.

$$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2$$

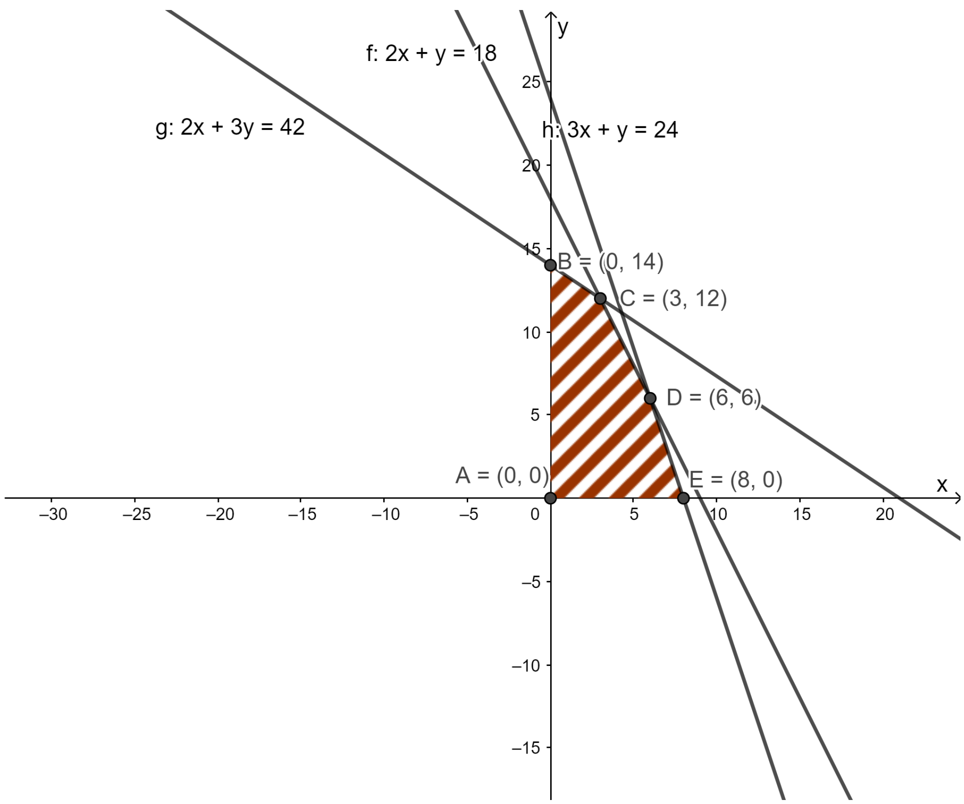
Sous contraintes :

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 &\leq 18 \\ 2X_1 + 3X_2 &\leq 42 \\ 3X_1 + X_2 &\leq 24 \\ X_1,\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution 2.1 *Sous contrainte :*

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 &= 18 \\ 2X_1 + 3X_2 &= 42 \\ 3X_1 + X_2 &= 24 \\ X_1,\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Sommet	*Coordonnées*(X_1, X_2)	*Valeur objectif*(Z)
A	$(0, 0)$	0
B	$(0, 14)$	28
C	$(3, 12)$	33
D	$(6, 6)$	30
E	$(8, 0)$	24



Remarque 2.1

Aprés l'évaluation de la fonction objectif $(3X_1 + 2X_2)$ dans chacun des points(résultat qu'on recueilli dans le tableau suivant). Comme le point G fournit la plus grande valeur à la fonction Z et l'objectif c'est de maximiser, ce point représente la solution optimale : $Z = 33$ avec $X_1 = 3$et $X_2 = 12$.

Exemple 2.2

Trouver la solution optimale de (PL) suivant avec la méthode graphique.

$$MaxZ = 10X_1 + 20X_2$$

Sous contrainte :

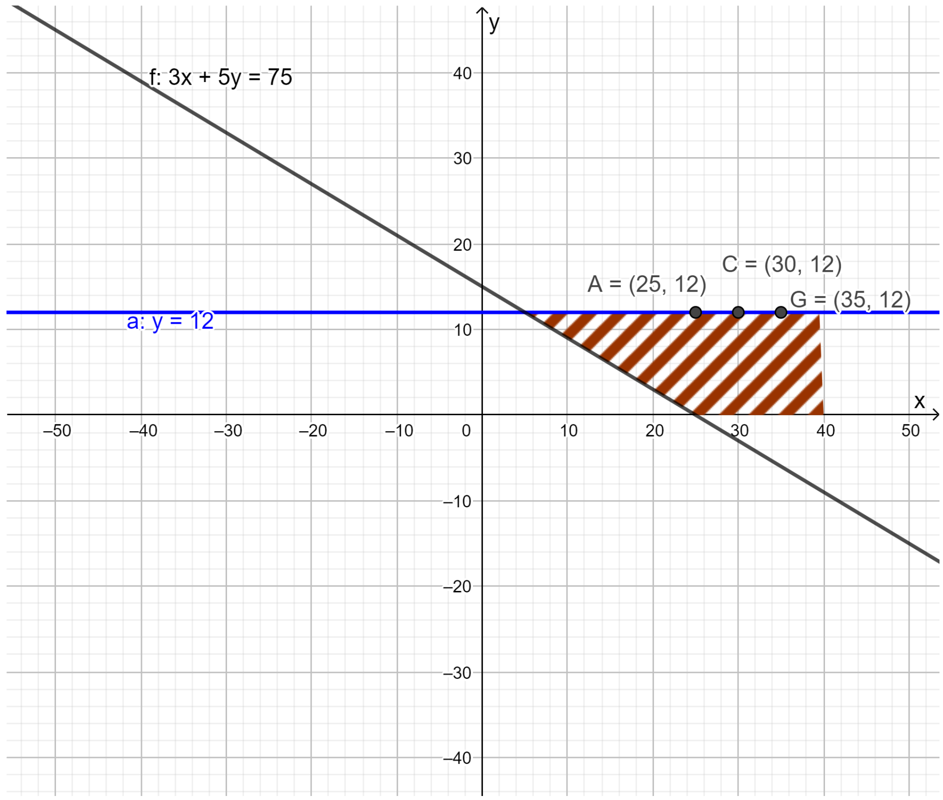
$$\begin{aligned} 3X_1 + 5X_2 &\geq 75 \\ X_1 &\leq 12 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution 2.2

Sous contrainte :

$$\begin{aligned} 3X_1 + 5X_2 &= 75 \\ X_1 &= 12 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Sommet	*Coordonnées* (X_1, X_2)	*Valeur objectif* (Z)
A	$(25, 12)$	490
C	$(30, 12)$	540
G	$(35, 12)$	590
.	.	.
.	.	.



Remarque 2.2

En remarque qu'il n'y a pas de solution limité.

Exemple 2.3

Trouver la solution optimale de (PL) suivant avec la méthode graphique.

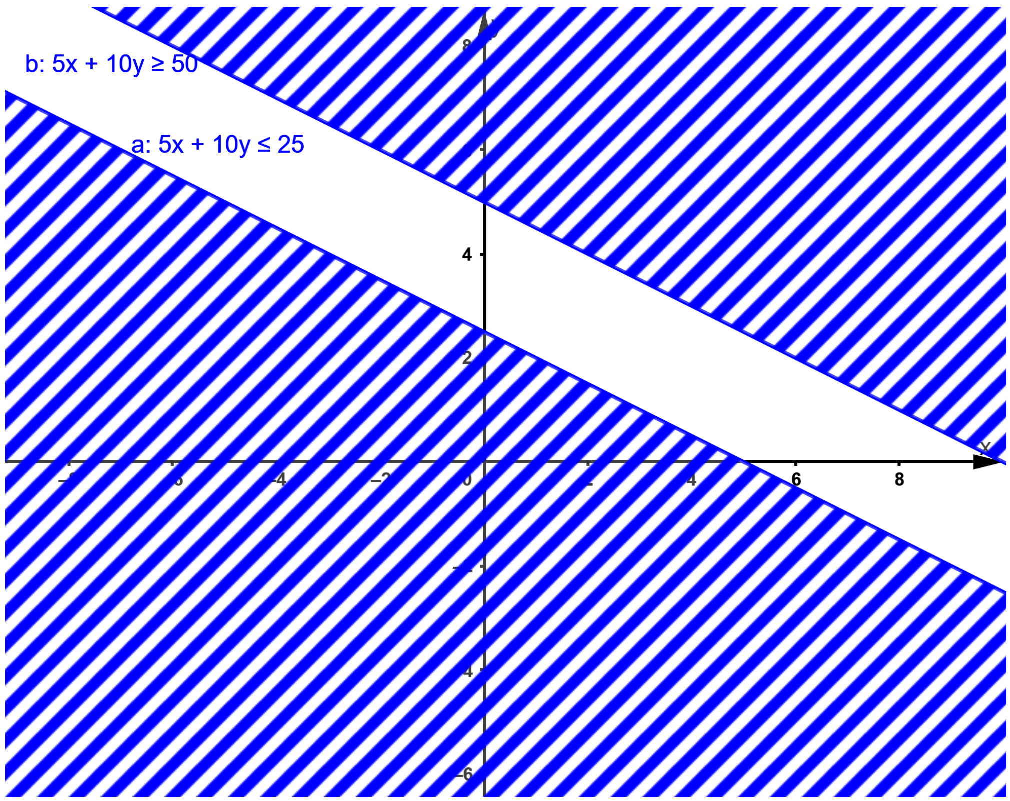
$$Max\ Z = 20X_1 + 15X_2$$

Sous contraintes :

$$\begin{aligned} 5X_1 + 10X_2 &\leq 25 \\ 5X_1 + 10X_2 &\geq 50 \\ X_1,\ X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution 2.3 *Sous contrainte :*

$$\begin{aligned} 5X_1 + 10X_2 &= 25 \\ 5X_1 + 10X_2 &= 50 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$



Remarque 2.3

Graphiguement en déduire qu'il n'y a pas de solution.

2.2 Méthode simplexe

Résoudre un programme linéaire consiste à déterminer les valeurs des variables non négatives (X_j) qui permettent d'optimiser la fonction économique. Il existe plusieurs méthodes de résolution, la méthode algébrique, la méthode graphique, qui porte chacune des limites. Il faut donc trouver une autre méthode : celle du simplexe, qui est la plus utilisée dans la résolution des programmes linéaires, puisqu'elle répond aux développements des techniques de résolution par ordinateur.

L'algorithme du simplexe constitue« une procédure répétitive permettant, de progresser rapidement vers la solution optimale». Elle examine comme première solution un des sommets (en général l'origine), qui constitue la solution de base de l'algorithme. Son principe consiste à «se déplacer de sommet en sommet adjacent de façon à améliorer la fonction objectif ; après un nombre fini d'itération, il arrive à un sommet à partir duquel tout déplacement vers un autre sommet n'améliore plus cette valeur, on est alors au sommet optimal, l'algorithme simplexe consiste à passer d'une solution de base à une autre jusqu'à ce qu'une solution réalisable de base optimal soit trouvée». En d'autres termes, la solution optimale est celle qui ne contient aucune variable positive dans la fonction objectif dans le tableau final de simplexe pour un problème demaximisation et aucune variable négative dans la fonction objectif dans le tableau final de simplexe pour un problème de minimisation. Pour calculer la solution optimale, la règle de sélection est appelée règle de pivotage.

2.2.1 Principe de l'algorithme de simplexe

La recherche systématique d'une solution optimale à l'aide de l'algorithme du simplexe peut se résumer comme suit :

1. Déterminer une première solution de base réalisable ; cette solution initiale sert de départ au cheminement vers la solution optimale(si elle existe).
2. Si la solution obtenue en (1) n'est pas optimale, déterminer une autre solution de base réalisable qui permettrait d'améliorer la fonction objectif(augmentation pour une maximisation ou diminution pour une minimisation).
3. On répète cette procédure itérative jusqu'à ce qu'il ne soit plus possible d'améliorer la fonction objectif. La dernière solution de base réalisable obtenue consti-

tue la solution optimale au programme linéaire.

Pour mieux expliquer l'algorithme de simplexe, nous allons prendre comme exemple le programme linéaire lorsque les contraintes sont de type $(\leq, =, \geq)$.

2.2.2 La résolution des programmes de maximisation et type de contraintes $(\leq)$

L'application de la méthode nécessite de transformer les inégalités des contraintes économiques en égalités par l'introduction des variables supplémentaires positives ou nulles appelées variables d'écart. Ces variables d'écart sont utilisées pour justifier le stock résiduel des ressources à la solution optimale. À la solution de base, les variables d'écart égaux aux disponibilités.

On peut déterminer les variables d'écart de programme linéaire précédent comme suit :

$$\begin{gathered} La\ variabled\prime écartE_1 = X_{n+1} = b_1 - (a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1j}X_1 + \ldots\ldots + a_{1n}X_n) \\ La\ variabled\prime écartE_2 = X_{n+2} = b_2 - (a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2j}X_2 + \ldots\ldots + a_{2n}X_n) \\ \ldots \\ La\ variabled\prime écartE_m = X_{n+m} = b_m - (a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mj}X_m + \ldots. + a_{mn}X_n) \end{gathered}$$

– **La forme standard**

Le nouveau programme linéaire après l'introduction des variables d'écart est le suivant :

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots. + C_nX_n + 0X_{n+1} + 0X_{n+2} + \ldots.. + 0X_{n+m.}$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n + X_{n+1} = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n + X_{n+2} = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n + X_{n+m} = b_m \\ X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+m} \geq 0 \end{pmatrix}$$

– **Définition d'un tableau de simplexe** :

Selon Daniel DEWOLF :«un tableau de simplexe est constitué des coefficients des équations algébriques sans le nom des variables». On aura donc :

1. Les coefficients de la fonction objectif ;
2. Les coefficients des variables dans le membre de gauche des contraintes ;
3. Les coefficients du membre de droite.

Où l'on sépare les coefficients de l'objectif des contraintes d'une barre horizontale, et les coefficients du membre de gauche des contraintes des coefficients du membre de droite par une barre verticale.

– **Tableau 01** : Le tableau de simplexe (solution de base $Z = 0$) :

H.Base/Base	X_1,	X_2,	...	X_n,	X_{n+1},	X_{n+2},	...,	X_{n+m},	b_i
X_{n+1}	a_{11},	a_{12},	...,	a_{1n},	1,	0,	...,	0,	b_1
X_{n+2}	a_{21},	a_{22},	...,	a_{2n},	0,	1,	...,	0,	b_2
.	...	...	...	...	...	...	...	...	.
X_{n+m}	a_{m1},	a_{m2},	...	a_{mn},	0,	0,	...,	1,	b_m
C_j	C_1,	C_2,	...,	C_m,	0,	0,	...,	0,	Z=0

Le tableau ci-dessus représente la forme standard et la solution de base ($Z = 0$) d'un programme linéaire de (n) variables et (m) contraintes.

Le passage de la solution de base à la solution optimale afin d'améliorer la fonction économique se fait par plusieurs itérations.

Pour pouvoir passer d'une itération à l'itération suivante, il s'agit de sélectionner une variable entrante à la base et une variable sortante de la base.

Dans un programme de maximisation (minimisation), selon les critères de «Dantzig» la variable entrante est celle qui correspond à la valeur maximale (minimale) des coefficients (C_j). La variable sortante est celle qui correspond au plus petit rapport positif des disponibilités données comme suit :

$$Min(b_1/a_1^e, b_2/a_2^e, \ldots, b_m/a_m^e) > 0$$

$a_1^e, a_2^e, ...a_m^e$: représentent le vecteur des coefficients techniques de la variable entrante. On arrête les différentes itérations dès que la ligne (C_j) ne contient que des coefficients : négatifs ou nuls pour un programme de maximisation, positifs ou nuls pour un programme de minimisation. Pour effectuer le passage de la solution de base au tableau suivant (itération suivante), nous allons considérer (C_2) comme le plus grand (petit) coefficient des coefficients $(C_{j)})$, et (b_1/a_{12}) est le plus petit rapport positif des rapports $(b_i/a_i^e) > 0$. Donc,

X_2 : variable entrante à la base et, X_{n+1} : variable sortante de la base.

Dans ce nouveau tableau nous allons diviser la ligne X_{n+1}, de tableau précédent sur le coefficient (a_{12}) pour calculer le pivot à l'intersection de la variable entrante et de la variable sortante pour obtenir le tableau, on applique les règles suivantes :

- Le pivot est égal à (1) ;
- Les coefficients de la ligne de pivot sont divisés par le pivot ;
- Les coefficients de la colonne de pivot sont nuls ;
- Les autres coefficients sont obtenus par la règle du rectangle suivante :

$\underrightarrow{A}$

A $\underrightarrow{\quad \times \quad}$ b

$\uparrow \div$ D' = d - (c/a)*b

C $\underleftarrow{\quad - \quad}$ d Nouveau ancien

- **Tableau N03 : le tableau suivant de simplexe (itération suivant).**

H.Base/Base	X_1	X_2	...	X_n,	X_{n+1}	...	X_{n+m}	b_i
X_{n+1}	(a_{11}/ a_{12})	1	...	(a_{1n}/ a_{12})	$(1/ a_{12})$	...	0	b_1/a_{12}
X_{n+2}	a_{21}-$a_{22}(a_{11}/ a_{12})$	...	...	a_{2n}-$a_{22}(a_{11}/ a_{12})$	0-$a_{22}(a_{11}/ a_{12})$	...	0-$a_{22}(a_{11}/ a_{12})$	b_2-$a_{22}(a_{11}/ a_{12})$
.	...	...	...	...	...	...	...	.
X_{n+m}	a_{m1}-$a_{m2}(a_{11}/a_{12})$	...	...	a_{mn}-$a_{m2}(a_{11} /a_{12})$	0-$a_{m2}(a_{11}/a_{12})$	...	1-$a_{m2}(a_{11}/a_{12})$	b_m-$a_{m2}(a_{11}/ a_{12})$
C_j	$C_{1-}C_2(a_{11}/ a_{12})$	...	...	Cm -$C_2(a_{11}/ a_{12})$	0-$C_2(a_{11}/ a_{12})$	...	0	Z-$c_2(a_{11}/ a_{12})$

La colonne des disponibilités représente les valeurs des variables non négatives (variable de décision).

Exemple 2.4

Trouver la solution optimale pour le modèle (LP) en utilisant la méthode simplexe ?

$$Max\ Z = 3X_1 + 5X_2$$

Sous contrainte :

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 &\leq 30 \\ 5X_1 + 4X_2 &\leq 60 \\ X_1, X_2, &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution 2.4

1 *La forme standard :*

$$Max.Z - 3X_1 - 5X_2 + 0X_3 + 0X_4 = 0$$

Sous contrainte :

$$2X_1 + 3X_2 + X_3 = 30$$
$$5X_1 + 4X_2 + X_4 = 60$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

2 *Tableau 01(initial) :*

H.Base/Base	X_1,	X_2,	X_3,	X_4,	b_i
X_3	*2,*	*3,*	*1,*	*0,*	*30*
X_4	*5,*	*4,*	*0,*	*1,*	*60*
Z	*-3,*	*-5,*	*0,*	*0,*	*0*

3 *La variable entrante est :* (X_2).

4 *La variable sortante est :* (X_3).

5 *Elément de pivot est :* (3).

6 *Équation de pivot est*

$$\begin{aligned} &= [\frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{30}{3}] \\ &= [\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10] \end{aligned}$$

7 *Nouvelle élément de Z et X_4*

$$\begin{aligned} Nouvelle(Z) &= [-3,-5,0,0,0]-(-5)\times[\frac{2}{3},1,\frac{1}{3},0,10] \\ &= [\frac{1}{3},0,\frac{5}{3},0,50] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Nouvelle(X_4) &= [5,4,0,1,60]-(-4)\times[\frac{2}{3},1,\frac{1}{3},0,10] \\ &= [\frac{7}{3},0,\frac{-4}{3},1,20] \end{aligned}$$

8 *Tableau 2 :*

H.Base/Base	X_1,	X_2,	X_3,	X_4,	b_i
X_2	$\frac{2}{3}$,	*1,*	$\frac{1}{3}$,	*0,*	*10*
X_4	$\frac{7}{3}$,	*0,*	-$\frac{4}{3}$,	*1,*	*20*
Z	$\frac{1}{3}$,	*0,*	$\frac{5}{3}$,	*0,*	*50*

Touts les Coéfficients de la fonction objectif est supérieur ou égal à $0 (C_i \geq 0)$ *alors la solution optimale est :* $X_1 = 0, X_2 = 10, Z = 50.$

On déduire que la gestion de la production a décidé produire (10) unités de produit (X_2) *et ne produire aucune du premier produit* (X_1) *pour le maximum de profits qui égal 50DA*

La solution de l'exercice avec la méthode simplexe.

```
% PROGRAMME simplexe.m
% exemple :
% max 3*x1+5*x2
% s.t 2*x1+3*x2<=4
% 5*x1+4x2<=60
% x1,x2>=0
%on a deux contraintes ,donc on ajoute deux variables d 'écrit
%x3,x4
% i.e on ajoute x3 à la 1ère contrainte ,x4 à la 2 ème contrainte
% Donc N=[ 3 4]
% qui est l'ensemble d'indice des variable d ?écart
% la matrice A est donc A=[ 2 3 1 0 30;5 4 0 1 60;3 5 0 0 0]
% dont : la 1 ère ligne cotientles coefficients de la 1 ére contrainte
% la 2 ème ligne cotientles coefficients de la 2 éme contrainte
% la dernière ligne contient les connficients de la fonction objective
% Et puis exécuter ? [ sol,val,kk] = ssimplex1(A,N)
% Note : la variable de base correspondant à la matrice de base doit etre la matrice
% unité. (cette limitation sera derrière la mise à niveau est d'améliorer)
% Résoudre le programme linéaire standard : max c*x ; st A*x =b ; pour x<=0
% Cette fonction est simplement la table initiale ,y compis : la dernière ligne est
le
% nombre de l'indice de base des variable initiales
% Sortie : variable sol est la solution optimale
% variable val est la valeur de la fonction objective
% kk est le nombre d'itérations
function [sol,val,kk] = simplexe1(A,N)
A=[ 2 3 1 0 30;5 4 0 1 60;3 5 0 0 0]
N=[3 4]
[mA,nA] = size(A);
kk=0;
```

```
stop =0;
while ~stop
kk=kk+1;
if A(mA, :)<=0
stop=1;
sol= zeros(1,nA-1);
for i=1 :mA-1
sol(N(i))=A(i,nA);
end
disp(' ');
disp('LES VARIABLES DE BASE : ');
disp('==========================');
x1= sol(1)
x2= sol(2)
disp(' ')
disp('LA FONCTION ECONOMIQUE : ');
disp('==========================');
val = -A(mA,nA)
disp(' ');
else
for i=1 :nA-1
if A(mA,i) > 0 & A(1 :mA-1,i) <= 0
disp('have infinite solution!');
stop=1;
break;
end
end
if ~stop
temp=0;
for i=1 :nA-1
if A(mA,i) > temp
temp = A(mA,i);
```

```
inb=i;
end
end
temp = inf;
for i=1 :mA-1
if A(i,inb) > 0
if A(i,nA)/A(i,inb)> 0 & A(i,nA)/A(i,inb) < temp
temp=A(i,nA)/A(i,inb);
outb=i;
end
end
end
for i=1 :mA-1
if i==outb
N(i)=inb;
end
end
for i=1 :mA
if i~= outb
A(i, :)=A(i, :)-A(outb, :)*A(i,inb)/A(outb,inb);
end
end
A(outb, :)=A(outb, :)/A(outb,inb);
end
end
end
end
% FIN DU PROGRAMME
A =
2 3 1 0 30
5 4 0 1 60
3 5 0 0 0
```

N =

3 4

LES VARIABLES DE BASE :

=========================

x1 =

0

x2 =

10

LA FONCTION ECONOMIQUE :

==========================

val =

50

2.2.3 La résolution des programmes de maximisation et type de contraintes $(=)$

Lorsque les contraintes de programme linéaire à résoudre sont sous forme d'équation, on ne peut pas introduire des variables d'écarts, puisqu'il n'existe pas d'écart entre la disponibilité et la contrainte.

La forme standard pour ce type de programme nécessite l'introduction des variables artificielles à la place des variables d'écart.

Soit à résoudre le programme linéaire suivant sous sa forme canonique :

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots. + C_nX_n$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n = b_m \\ X_1, X_2, ..., X_n \geq 0. \end{pmatrix}$$

La forme standard : Nous allons introduire «T_i» comme variable artificielle :

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots. + C_nX_n - MT - MT_2 - ... - MT_m.$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n + T_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n + T_2 = b_2 \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n + T_m = b_m \\ X_1, X_2, ..., X_n, T_1, T_2, ..., T_m \geq 0 \end{pmatrix}$$

Les variables artificielles $(T_1, T_2, ..., T_m)$ sont associées aux valeurs très élèves (coefficients $M = +\infty$).

Le tableau de simplexe (solution de base $Z = 0$) :

H.Base/Base	X_1,	...,	X_n,	T_1,	...,	T_m,	b_i
T_1	a_{11},	...,	a_{1n},	1,	...,	0,	b_1
T_2	a_{21},	...,	a_{2n},	0,	1,	0,	b_2
.	...	...	...	...	...	...	.
T_m	a_{m1},	...,	a_{mn},	0,	...,	1,	b_m
C_j	C_1,	...,	C_m,	M,	...,	M,	Z=0

Pour pouvoir appliquer la méthode de simplexe et les critères de Dantzig sur le tableau ci-dessus, il s'agit de respecter les conditions de la solution par cette méthode.

Il faut procéder à éliminer les coefficients $(-M)$ dans la ligne (C_j). La ligne (C_j) donne les coefficients de la fonction économique, mais pas les valeurs marginales des variables hors base ; de plus, les variables artificielles sont dans la base et devraient donc avoir des valeurs marginales nulles.

Pour calculer les valeurs marginales (m_j) qui sont nulles pour les variables de base : $m_j = C_j + (a_{11} + a_{12}, \ldots + a_{mj})M$. (voir l'itération suivante) :

Tableau indiquant l'itération suivante :

H.Base/Base	x_1,	...,	X_n	T_1,	...,	T_m,	b_i
T_1	a_{11},	...,	a_{1n},	1,	...,	0,	b_1
T_2	a_{21},	...,	a_{2n},	0,	...,	0,	b_2
.	...	...	...	...	...	...	.
T_m	a_{m1},	...	a_{mn},	0,	0,	1,	b_n
C_i	C_1,	...	C_m,	-M,	...,	-M,	Z=0
Δ ou m_i	$C_1 + M \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{m1} \end{pmatrix}$,	...,	$C_m + M \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{mn} \end{pmatrix}$,	0,	...,	0,	$Z + M \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$,

À partir de ce tableau on peut appliquer les critères de la variable entrante et de la variable sortante. Les modifications à l'intérieur de tableau se font par la méthode de pivotage.

2.2.4 La résolution des programmes de maximisation et type de contrainte $(\geq)$:

Dans le cas d'une contrainte de signe $(\geq)$ on doit, pour la transformer en équation, soustraire une variable d'écart, également appelée dans ce cas, variable d'excédent.

Soit le programme linéaire suivant :

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n \geq b_2 \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n \geq b_m \\ X_1, X_2, ..., X_n \geq 0. \end{pmatrix}$$

Le passage de la forme canonique à la forme standard nécessite l'introduction des variables d'écart négatives dans chaque contrainte de type $(\geq)$.

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + ... + C_nX_n - 0X_{n+1} - 0X_{n+2} - .... - 0X_{n+m.}$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n - X_{n+1} \geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n - X_{n+2} \geq b_2 \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n - X_{n+m} \geq b_m \\ X_1, X_2, ..., X_n, X_{n+1}, X_{n+m} \geq 0. \end{pmatrix}$$

Le tableau de simplexe (solution de base $\mathbf{Z = 0}$) :

$H.Base/Base$	$X_1,$	$...,$	$X_n,$	$X_{n+1},$	$...,$	$X_{n+m},$	b_i
X_{n+1}	$a_{11},$	$...,$	$a_{1n},$	$-1,$	$0,$	$0,$	b_1
X_{n+2}	$a_{21}\,,$	$...,$	$a_{2n},$	$0,$	$0,$	$0,$	b_2
.	$...,$	$...,$	$...,$	$...,$	$...,$	$...,$	.
X_{n+m}	$a_{m1},$	$...,$	$a_{mn},$	$0,$	$...,$	$-1,$	b_m
Z	$C_1,$	$...,$	$C_m,$	$0,$	$...,$	$0,$	b_j

On constante dans ce tableau que le diagonal de la matrice des variables d'écarts est négatif :

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & ... & ... & 0 \\ 0 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De ce fait, pour appliquer la méthode de simplexe, il faut ajouter à chaque contrainte une variable artificielle (t_i) comme suit :

$$Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_nX_n - 0X_{n+1} - 0X_{n+2} - \ldots 0X_{n+m} - Mt_1 - Mt_2 - ...Mt_m$$

Sous contraintes :

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n - X_{n+1} + T_1 = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n - X_{n+2} + T_2 = b_2 \\ ... \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots. + a_{mn}X_n - X_{n+m} + T_m = b_m \\ X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots, X_{n+m}, T_1, T_2, \ldots, Tm \geq 0 \end{pmatrix}$$

Le tableau précédent devient comme suit :

Le tableau de simplexe.

$H.Base/Base$	$X_1,$	...,	$X_n,$	$X_{n+1},$	...,	$.X_{n+\ m},$	$T_1,$	...,	$T_m,$	b_i
T_1	$a_{11},$	...,	$a_{1n},$	$-1,$	...,	0,	1,	0,	0,	b_1
T_2	$a_{21}\ ,$	...,	$a_{2n},$	0,	$-1,$	0,	0,	...,	0,	b_2
.	...	...	...	...	...	...	...	...	...	.
T_m	$a_{m1},$	...,	$a_{mn},$	0,	...,	$-1,$	0,	0,	1,	b_m
Z	$C_1,$	...	$C_m,$	0,	...,	0,	$-M,$	...,	$-M,$	b_i

La résolution de ce programme demande l'utilisation de la méthode des pénalités pour éliminer les coefficients (M) des variables artificielles. Donc, la dernière ligne du tableau précédent devientcomme suit :

Δoum_j	$C_1 + M \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad ..., \quad C_m + M \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{22} \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad -M, \quad ..., \quad -M, \quad 0, \quad ..., \quad 0,$	$Z + M \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_m \end{pmatrix}$

2.2.5 La résolution des programmes de minimisation à (n) variables et (m) contraintes

Le processus de résolution par la méthode de simplexe est identique pour les programmes linéaires à maximiser ou à minimiser. Le traitement de la fonction économique est indépendamment des contraintes :

1. **Quelle que soit la fonction économique (Max ou Min), les modifications à porter sur les contraintes pour réaliser la forme standard sont les suivantes :**
   - Lorsque la contrainte est de forme $(\geq)$, on ajoute une variable d'écart négative $(-E)$ et une variable artificielle positive (T_i).
   - Type de contrainte est de forme $(\leq)$, on ajoute uniquement une variable d'écart positive(E_i).
   - La contrainte sous forme d'équation $(=)$, on ajoute uniquement une variable artificielle (T_i).
   - Lorsque l'objectif est de maximiser une fonction économique, les variables d'écart sont associées aux coefficients (-0), les variables artificielles sont associées aux coefficients $(-M)$.
   - Lorsque l'objectif consiste à minimiser une fonction économique, les variables d'écart sont associées aux coefficients $(+0)$,lesvariables artificielles sont associées aux coefficients $(+M)$.
2. **Règles générales pour la résolution d'un programme linéaire par la méthode de simplexe (problème de maximisation).**

Selon Eric jacquet-LAGREZE :« pour passer d'un sommet à un sommet adjacent, Dantzig a introduit deux critères(critères de Dantzig) qui sont au coeur de la méthode du simplexe : un critère de la nouvelle variable précédemment hors base à faire entrer dans la base et un critère du choix d'une variable de la base à faire sortir».

A Choix de la colonne pivot (critère de sélection de la variable entrante dans la base) :

La colonne pivot est définie à partir des coefficients de la fonction économique. « Le critère de sélection de la variable entrante est donc le suivant : on choisit la variable avec le coefficient objectif le plus élevé». On cherche à se focaliser sur la variable qui, en augmentant, augmentera le plus possible la fonction objectif. Cette variable correspond au plus grand coefficient positif de la fonction objectif.

Considérons les coefficients $[C_1, C_2, \ldots, C_j, \ldots.., C_n]$ de la fonction économique. Parmi tous les coefficients positifs, on considère le plus grand, la colonne pivot est la colonne qui le contient. S'il existe plusieurs coefficients correspondant à cette valeur positive maximale, on peut choisir celui que l'on veut (arbitrairement). La variable correspondante sera la variable entrante car elle ne va plus s'annuler. On sélectionne la variable hors base ayant le plus grand coefficient positif dans la ligne.

Pour sélectionner la variable sortante de la base, il est nécessaire de rajouter une colonne (T) (ratios) au tableau, obtenue en faisant le rapport membre à membre de la colonne (b_i) (disponibilités) et de la colonne de la variable entrante dans la base.

B Choix de la ligne pivot (critère de sélection de la variable sortante de la base) :

La variable entrante va prendre la place d'une des variables de base, appelé variable sortante. Il faut maintenant trouver quelle valeur maximum peut prendre cette variable entrante afin de maximiser la fonction objectif. Pour un programme linéaire à plusieurs variables on fait diviser, chaque coefficient de la colonne (b_i) sur le coefficient correspondant de la colonne pivot et on calcule les rapports (b_i/a_{ij}). On sélectionne le plus petit rapport, la variable correspondante à cette ligne est la variable sortante. On sélectionne la variable dans la base ayant le plus petit coefficient positif dans la colonne (T). «Le critère de sélection de la variable sortante est donc le suivant : prendre comme variable sortante la première variable de base à s'annuler. De manière générale, on calcule le minimum du rapport du coefficient du membre de droite sur le coefficient de la variable entrante dans la même ligne, lorsque celui-ci est positif. La variable sortante est celle dont on lit la valeur dans la ligne où ce minimum se produit». Et l'élément pivot correspond à l'intersection de la colonne et la ligne pivot «on appelle élément pivot le coefficient situé à l'intersection de la colonne pivot et de la ligne pivot».

C Itération :

S'il existe un coefficient (C_j) positif dans le nouveau tableau, on retourne à la première étape (choix du pivot) puis à la deuxième (itération suivante). On réitère ce processus jusqu'à ce que tous les coefficients de la fonction économique soient négatifs.

D Critère d'arrêt des itérations :

Si tous les coefficients d.e la ligne relatifs aux variables hors base, sont négatifs ou nuls pour la maximisation, ou positifs ou nuls pour la minimisation, la solution trouvée est optimale.

La solution d'un (PL) avec la méthode simplexe cas de munimusation (min) la fonction objectif, ie : tous les contraintes ($\geq$ ou $=$), dans des cas spécial en utilisé l'une des méthode suivant :

1. La méthode des pénalités (ou du grand M).
2. Méthode des deux phases.

2.3 La méthode des pénalités (ou du grand M)

Cette méthode permet de tenir compte des variables artificielles. On les pénalise en leur affectant un coefficient de valeur très éleve dans la fonction économique $(-M)$ pour un problème du maximum, $(+M)$ pour un problème du minimum). Les pénalités ont pour objet de provoquer l'élimination des variables artificielles au fil des itérations.

Les étapes de la méthode :

1. Transformation de la forme standard à la forme canonique et ajoutée les variables (X_i) à la fonction objectif.
2. La formulation de la fonction objectif (Z) avec l'utilisation de les variables (X_i) et (X_j).
3. Construire qui un tablleau qui contient la solution en fonction des coefficient (T_i, X_i, X_j).
4. Trouvé le variable entrante et le variable sortante.
5. En suit, répéte les étapes de la méthode simplexe.
6. Finalement si tout les coefficient de fonction objectif est $(C_j \leq 0)$ alors la solution optimal est trouver.

Exemple 2.5

Trouver la solution optimale pour le modèle (LP) en utilisant la méthode (Big.M)?

$$MinZ = 2X_1 + X_2$$

Sous contrainte :

$$\begin{aligned} X_1 + 3X_2 &\geq 30 \\ 4X_1 + 2X_2 &\geq 40 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solution 2.5 *La forme standard :*

$$MinZ = 2X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4$$

Sous contrainte :

$$\begin{aligned} X_1 + 3X_2 - X_3 &= 30 \\ 4X_1 + 2X_2 - X_4 &= 40 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

on a X_3 et X_4 sont négative $X_3 = -30$,$X_4 = -40$,contradiction avec la non négative de (X_3 et X_4), alors on ajotant des variable artificielles aux contraintes et à la fonction objectif (Z).

– *On ajotant les variable artificielles comme suit :*

$$Min\ Z = 2X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4 + MT_1 + MT_2$$

Contrainte :

$$\begin{aligned} X_1+3X_2-X_3\ \ +T_1 &= 30..........(1) \\ 4X_1+2X_2-X_4+T_2 &= 40..........(2) \\ X_1,X_2,X_3,X_4,T_1,T_2, &\geq 0 \end{aligned}$$

M :est trégrand.

- *Formilation de la fonction objectif (Z) en termes des variables(X_j, X_i) :*
  De (1) et (2) on trouve (T_1) et (T_2) comme suit :

$$T_1 = 30 - X_1 - 3X_2 + X_3$$
$$T_2 = 40 - 4X_1 - 2X_2 + X_4$$

On remplace les valeurs de T_1et T_2 dans la fonction objectif (Z),on trouve :

$$\begin{aligned} Z &= 2X_1+X_2+M(30-X_1-3X_2+X_3)+M(40-4X_1-2X_2+X_4) \\ &= (2-5M)X_1+(1-5M)X_2+MX_3+70 \\ &= 2X_1+X_2+M30-MX_1-3MX_2+MX_3+M40-4MX_1-2MX_2+MX_4 \\ &= (2-5M)X_1+(1-5M)X_2+MX_4+MX_3+70M \\ 70M &= Z-(2-5M)X_1-(1-5M)X_2-MX_3-MX_4 \end{aligned}$$

- *Tableaux de solution de base :*

$Varaible\ de\ base$	$Variable\quad non\quad basic$						b_i	$Ration$
	$X_1,$	$X_2,$	$X_3,$	$X_4,$	$T_1,$	T_2		
Z	$-2+5M,$	$-1+5M,$	$-M,$	$-M,$	$0,$	$0,$	$70M$	$-$
T_1	$1,$	$(3),$	$-1,$	$0,$	$1,$	$0,$	$30,$	10
T_2	$4,$	$2,$	$0,$	$-1,$	$0,$	$1,$	$40,$	20

- *La variable entrante est (X_2) ($M = 100$).*
- *La variable sortatante est (T_1).*
- *Elément de pivot est (3).*
- *Équation de pivot* $= [\frac{1}{3}, 1, \frac{-1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0, 10]$.

– *On trouve la Nouvelle valeurs de* (Z) *et* (T_2) *comme suit :*

$$\begin{aligned}
Nouvelle(Z) &= (-2+5M,-1+5M,-M,-M,0,0)-(-1+5M)\times[\frac{1}{3},1,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},0,10] \\
&= [\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M,0,\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}M,-M,\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M,0,10+20M] \\
Nouvelle(T_2) &= [4,2,0,-1,0,1,40]-2\times[\frac{1}{3},1,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},0,10] \\
&= [\frac{10}{3},0,\frac{2}{3},-1,\frac{-2}{3},1,20]
\end{aligned}$$

– *On place les résultates dans le tableux suivant :*

$Varaible\ de\ base$	$Variable$	non	$basic$				b_i	$Ration$
	$X_1,$	$X_2,$	$X_3,$	$X_4,$	$T_1,$	$T_2,$		
Z	$\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M,$	$0,$	$\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}M,$	$-M,$	$\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M,$	$0,$	$10+20M$	$-$
X_2	$\frac{1}{3},$	$1,$	$-\frac{1}{3},$	$0,$	$\frac{1}{3},$	$0,$	$10,$	30
T_2	$(\ \frac{10}{3}\ )$,	$0,$	$\frac{2}{3}$,	$-1,$	$\frac{-2}{3},$	$1,$	$20,$	6

– *La variable entrante est* (X_1) $(M=100)$.

– *La variable sortatante est* (T_2).

– *Elément de pivot est* $(\frac{10}{3})$.

– *Équation de pivot*

$$\begin{aligned}
&= [\frac{\frac{10}{3}}{\frac{10}{3}},\frac{0}{\frac{10}{3}},\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}},\frac{-1}{\frac{10}{3}},\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{10}{3}},\frac{1}{\frac{10}{3}},\frac{20}{\frac{10}{3}}] \\
&= [1,0,\frac{1}{5},\frac{-3}{10},-\frac{1}{5},\frac{3}{10},6]
\end{aligned}$$

– *On trouve la Nouvelle valeurs de* (Z) *et* (X_2) *comme suit :*

$$\begin{aligned}
Nouvelle(Z) &= [\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M,0,\frac{-1}{3}\frac{2}{3}M,-M,\frac{1}{3}-\frac{5}{3}M,0,10+20M] \\
&\quad -[\frac{-5}{3}+\frac{10}{3}M]\times[1,0,\frac{1}{5},\frac{-3}{10},-\frac{1}{5},\frac{3}{10},6] \\
&= [0,0,0,\frac{-1}{2},-M,\frac{1}{2}-M,20] \\
Nouvelle(X_2) &= [\frac{1}{3},1,\frac{-1}{3},0,\frac{1}{3},0,10]-[\frac{1}{3}]\times[1,0,\frac{1}{5},\frac{-3}{10},-\frac{1}{5},\frac{3}{10},6] \\
&= [\ 0,1,\frac{-2}{3},\frac{1}{10},\frac{2}{5},-\frac{1}{10},8]
\end{aligned}$$

– *On place ces résultats dans la table suivante :*

$Varaible\ de\ base$	$Variable\quad non\quad basic$						b_i
	$X_1,$	$X_2,$	$X_3,$	$X_4,$	$T_1,$	T_2	
Z	0,	0,	0,	$-\frac{1}{2},$	$-M,$	$\frac{1}{2}-\ M,$	20
X_2	0,	1,	$-\frac{2}{5},$	$\frac{1}{10},$	$\frac{2}{5},$	$-\frac{1}{10}\ ,$	8
X_1	1,	0,	$\frac{1}{5},$	$-\frac{3}{10},$	$-\frac{1}{5},$	$\frac{3}{10},$	6

Touts les coefficients de la fonction objectif est supérieur ou égale à $0(C_i \geq 0)$ *alors la solution optimal est :*

$$X_1 = 6, X_2 = 8, Z = 20.$$

2.4 Méthode des deux phases

La méthode des deux phases est plus simple que la méthode de grande (M) pour pour trouvée la solution optimale sur la (PL) dans le cas de minimisation , on peut trouver la solution optimale si la valeur de la nouvelle fonction (t) est égale à zéros(0), si non on ne peut pas trouver la solution optimale, cette méthode est décomposer à deux phases :

2.4.1 La première phase

1. Transformation de la forme canonique à la forme standard et ajouté les variable artificielles (T_i) à les contraintes.
2. La Formalation de la fonction objetif (t) avec l'utilisation de les variables artificielle (T_i) ie :$r = T_1 + T_2 + ...Tn \rightarrow Min.$
3. Construit un tableau qui contient la solution primal en fonction des coefficient des variables (T_i, X_j) et la nouvelle fonction objective.
4. Suivons les étapes précédents jusque'à ce que nous obtenons la valeur $(t = 0)$ ce qui signifie qu' il y a une solution ie : $(C_j \leq 0)$ $d \leq$ de la fonction de toutes les coefficient objectif (t).

2.4.2 La deuxièmme phase

1. Utilise la solution finale de la (4) étapede la première phase aprés la suppersion des variables artifficielle (T) la fonction objectif (t)
2. Utilise la fonction objectif (Z) et améliore leur valeur pour trouver la solution optimal.
3. Si on trouve les coefficient (C_j) soient obtenus inferieure ou égale zéros (0) ie : ($C_j \leq 0$) ce la indique que la solution optimale est trouve.

Exemple 2.6

Trouver la solution optimale d'un modèle (LP) en utilisant la méthode de deux phases ?

$$Min.Z = 2X_1 + X_2$$

Sous contraintes :

$$X_1 + 3X_2 \geq 30$$
$$4X_1 + 2X_2 \geq 40$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

*** La première phase :**

Transforme le modèle (PL) de la forme canonique à la forme standard

$$MinZ = 2X_1 + X_2 - 0T_1 - 0T_2$$

Sous contrainte :

$$X_1 + 3X_2 - X_3 = 30.........(1)$$
$$4X_1 + 2X_2 - X_4 = 40.........(2)$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

on a X_3 et X_4sont négative (X_3 $-30, X_4 = -40$), contradiction avec la non négative de T_1, T_2 ($T_1, T_2 \geq 0$), alors on ajoutant des variable artificielles (T_1, T_2) aux les contraintes comme suit :

$$X_1 + 3X_2 - X_3 + T_1 = 30.........(1)$$
$$4X_1 + 2X_2 - X_4 + T_2 = 40.........(2)$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, T_1, T_2 \geq 0$$

Formulation de la nouvelle fonction objectif (t) en termes de les valeurs de T_1et T_2 avec la fonction (t) est égale un valeurs constantes ,de l'équation (1) et (2) on obtient :

$t = T_1 + T_2 \rightarrow Min$

$T_1 = 30 - X_1 - 3X_2 + X_3$

$T_2 = 40 - 4X_1 - 2X_2 + X_4$

On remplace les valeurs de T_1et T_2 dans la fonction objecctif (Z) on trouve :

$$\begin{aligned} t &= (30 - X_1 - 3X_2 + X_3) + (40 - 4X_1 - 2X_2 + X_4) \\ &= 70 - 5X_1 - 5X_2 + X_3 + X_4 \\ t + 5X_1 + 5X_2 - X_3 - X_4 &= 70 \end{aligned}$$

Tableau (1) (la solution optimale) :

$Varaible\ de\ base$	$Variable\quad non\quad basic$						b_i	$Ration$
	$X_1,$	$X_2,$	$X_3,$	$X_4,$	$T_1,$	$T_2,$		
t	5,	5,	$-1,$	$-1,$	0,	0,	70	$-$
T_1	1,	3,	0,	0,	1,	0,	30,	30
T_2	(4),	2,	0,	0,	0,	1,	40,	10

La variable entrante est (X_1) et la variable sortante est (T_2),et élement de pivot est (4)

Équation de pivot $= [1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 10]$

Nouvelle valeur de T_1et (t)

$$\begin{aligned} Nouvelle(t) &= [5, 5, 1, -1, 0, 0, 70] - 5 * [1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, 0] \\ &= [0, \frac{5}{2}, -1, \frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}, 20] \\ Nouvelle(T_1) &= [0, \frac{5}{2}, -1, \frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{4}, 30] \end{aligned}$$

On place les résultats précédente dans le tableau (2)

$Varaible\ de\ base$	$Variable\quad non\quad basic$						b_i	$Ration$
	$X_1,$	$X_2,$	$X_3,$	$X_4,$	$T_1,$	$T_2,$		
t	$0,$	$\frac{5}{2},$	$-1,$	$\frac{1}{4},$	$0,$	$-\frac{5}{4},$	20	$-$
T_1	0	$(\frac{5}{2})$	$-1,$	$\frac{1}{4},$	$1,$	$-\frac{1}{4},$	$30,$	8
T_2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	10	20

La variable entrante est : (X_2) et la variable sortante est : (T_1),et élement de pivot est : $(\frac{5}{2})$

Équation de pivot est : $= [0, 1, -\frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, 8]$

Nouvelle valeur de (X_1)et (t) :

$$\begin{aligned} Nouvelle(t) &= [0, \frac{5}{2}, -1, \frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4}, 20] - \frac{5}{2} * [0.1, -\frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, 8] \\ &= [0, 0, 0, 0, -1, -1, 0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Nouvelle(X_1) &= [1, \frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}, 0, -\frac{1}{4}, 10] - \frac{1}{2} * [0, 1, -\frac{2}{5}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{10}, 8] \\ &= [1, 0, \frac{1}{5}, -\frac{3}{10}, -\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, 6] \end{aligned}$$

On place les résultats précédente dans le tableau (3)

$Varaible\ de\ base$	$Variable\quad non\quad basic$						b_i	$Ration$
	X_1	X_2	X_3	X_4	T_1	T_2		
t	0	0	0	0	-1	-1	0	$-$
X_2	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{10}$	8	$-$
X_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{10}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	6	$-$

On a la valeur de la fonction objecif $(t = 0)$ ie : $(C_j \leq 0)$ alors la solution de le modèle est exisete.

On va passe à la deusièmme phase...

***Deusièmme phase :**

Utilisée la solution finale de la 4 ème étape de première phase apré la supperssion de (X_3) et la f onction objectif (t).

Utililisée la fonction objectif (Z)

$$Z = 2X_1 + X_2 - 0X_3 - 0X_4$$

et optimisée leur valeur pour trouvée la solution optimal final comme suit :

$Varaible\ de\ base$	$Variable\ \ non\ \ basic$				b_i
	$X_1,$	$X_2,$	$X_3,$	$X_4,$	
t	0,	0,	0,	0,	0
X_2	0,	1,	$-\frac{2}{5},$	$\frac{1}{10},$	8
X_1	1,	0,	$\frac{1}{5},$	$-\ \frac{3}{10},$	6

Aprés la suppersion de (T_1et T_2) et la fonction objectife(t) de tableau de la solution finale et ajoutée la fonction (Z) on écrire les contrainte en fonction des résultats de la table finale

$$\begin{aligned} X_2 - \frac{2}{5}X_3 + \frac{1}{10}X_4 &= 8.........(1) \\ X_1 - \frac{1}{15}X_3 - \frac{3}{10}X_4 &= 6.........(2) \end{aligned}$$

De l'équation (1) et (2) ,on obtient les valeurs (X_1, X_2) :

$$\left.\begin{aligned} X_2 = 8 + \tfrac{2}{5}X_3 - \tfrac{1}{10}X_4 \\ X_1 = 6 - \tfrac{1}{15}X_3 + \tfrac{3}{10}X_4 \end{aligned}\right\} ....(3)$$

On remplasée les valeurs de (X_1, X_2) de la relation (3) dans la fonction objectif (Z), on trouve :

$$\begin{aligned} Z &= 2X_1 + X_2 \\ &= 2 * [8 + \frac{2}{5}X_3 - \frac{1}{10}X_4] + [8 + \frac{2}{5}X_3 - \frac{1}{10}X_4] \\ &= 12 - \frac{2}{5}X_3 + \frac{6}{10}X_4 + 8 + \frac{2}{5}X_3 - \frac{1}{10}X_4 \\ &= 20 + \frac{5}{10}X_4 \end{aligned}$$

$$Z - \frac{1}{2}X_4 = 20$$

On place la résultat finale de la fonction (Z) dans le tableau de la solution optimale finale :

$Varaible\ de\ base$	$Variable \quad non \quad basic$				b_i
	$X_1,$	$X_2,$	$X_3,$	$X_4,$	
Z	$0,$	$0,$	$0,$	$-\frac{1}{2},$	20
X_2	$0,$	$1,$	$-\frac{2}{5},$	$\frac{1}{10},$	8
X_1	$1,$	$0,$	$\frac{1}{5},$	$-\ \frac{3}{10},$	6

Toutes les couifficient de la fonction objectif (Z) est inferieure ou égale zéros (0) $(C_j \leq 0)$ alors la solution finale est :

$$X_1 = 6, X_2 = 8, Z = 20$$

Remarque 2.4 Il est la même résultat par la méthode grande M

On déduire que la gestion de la production à dicidé produire 6 unités de le produit (X_1) et 8 unités de le produit (X_2) pour le moindre cout prodactivété qui égale 20DA.

Chapitre 3

Application

3.1 Introduction

La programmation linéaire est une technique que accupe une place important au sien de l'aproche quantiative compte tenu du grand succés qu'elle a réalisé en matière d'aide à price de décision et l'affectation des ressources rares.

Dans cet chapitre on tentera à proposer une méthodologie pour le traitment d'un problème corament renconttré dans les processus de production ; c'est celui connu sous le nom≪ Rationaliée l'utilisation des ressources dispoenibesl pour le moulin El Houdna de M'sila avec la programmation linéaire, oû l'objectif sera la trouvée la solution optimal pour maximisée la production.

Notre étude à été menée ou sein de l'entreprise algerienne de moulin El Houdna de M'sila, située à la route de Bordj Bouariridj M'sila.

3.2 Application des techniques de la programmation linéaire à la production pour l'année 2008

Tableau (1) : L'encodage et le prix de les produits utilisés

Divisions de produit		Les poduits	Symboles de produit	Prix de vendre unitaire
Les produits principales	Les produits de blé durs	Top semoule	X_1	3500
		Normal semoule	X_2	3250
	Les produits de blé tendre	Excellent farine	X_3	2950
		Normal farine	X_4	1910
Sous produits	Restes du processus de production	Humide semoul	X_5	1350
		Bran extrait de blé durs	X_6	1400
		Bran extrait de blé tendre	X_7	1300

Unité de mesure Da/Q

La struction de la fonction objectif est :

$Max(z) = 3500X_1 + 3250X_2 + 2950X_3 + 1910X_4 + 1350X_5 + 1400X_6 + 1300X_7$

3.2.1 Les données de les contraintes

Les cotraintes de la matière première

Pour la production dans l'usine il est définie par le critère d'extraction d'un qantar de blé durs et le blé tendre qui est annoté dans le tableau suivant :

Tableau (2) : La Ration d'extraction de les la matières première

La matière premiè	Le produit	Le symble	Ration d'extraction	La quantité obtenue à partir du produit
Le blé durs	Topsemoule	X_1	64%	0.64
	Normal semoule	X_2	72%	0.72
Le blé tendre	Excellent farine	X_3	69%	0.69
	Normal farine	X_4	74%	0.74

On observe que les critère d'extraction est moins de qantar, alors on essayé de extrait les critère de consomation d'un qantar.

Le critère d'extraction $(1Q)$ de top semoule pour le durs blé

$$S = (1 \times 1)/0.64 = 1.5625$$

Le durs blé $1.5625Q$

Alors pour produir $1Q$ de durs blé il faut utilise$1.5625Q$ de durs blè, même méthode on extrait les critère de la consomation suffissante de les autres matière pour produir une unité de chaque prduit de plus que l' entrprise bénéficie de l'augmentation d'un quantité d'eau utilisé dans les matières premières estimé par :

$$La\,ration\,de\,l\prime augmentation = ((594684.62 - 583596.30)/583596.30) \times 100 = 1.89\%$$

on résumé tout les résultats dans le tableau suivant :

Tableau 03 : La quantité nécessaire de la matière première pour produire une unité de chaque produit et la quantité disponible à patire de ces matières.

Les produit/	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	La quantité disponible
Le durs blé	$1,5625$	$1,389$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$309282,70$
Le blé tendre	$-$	$-$	$1,449$	$1,351$	$-$	$-$	$-$	$274313,60$
La quantité de matières première disponible	1	1	1	1	1	1	1	594684.62

On peut forme les contraintes de les matière première comme suite

$$\begin{aligned} 1,5625X_1 + 1,3890X_2 &\leq 309282,70 \\ 1,4490X_3 + 1,3510X_4 &\leq 274313,60 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 &\leq 594684.62 \end{aligned}$$

Les contraintes de la production

Les contraintes de la capcité maximale de la production El Houdna entreprise comme autre entreprise est limitée par un volume de prouction qui ne peut pas dépasé, le tableau suivant montré cela :

Tableau (4) : La capacité total de la production

La capacité de la production	La capacité de la production journalière disponible	La capacité de la production nnuelle disponible
Le semoule	5500	1991000
La farine	1500	543000

Pour le mouline du semoule :

La matière première utélisée dans le mouline du semoule est le durs blé alors les produits extrait sont :X_1, X_2, X_5, X_6

Pour le mouline de la farine :

La matière première utilisée dans le mouline de la farine est le tendre blé alors les produits extrait sont : X_3, X_4, X_7

Les contraintes de la capcité maximale de la poduction :

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_5 + X_6 &\leq 1991000 \\ X_3 + X_4 + X_7 &\leq 543000 \end{aligned}$$

Les contraintes de les heurs de travail Les contraintes de les heurs de travail sont la capacité de la production sous forme d'heurs de travail les machines aussi bien que le temps dans ces machines pour la finition de la fabrication, le travail dans l'entreprise El Houdna, M'sila est 24 heurs toutes les jours sauf les jours de la (fête des travailleurs, fête du rupture, fête du sacrifice), l'entreprise travaille avec un système continue (3×8), alors on peut calcule la capacité de la production annuelle comme suit :

Tableau (5) : Les heurs de travail réelles et théorique et la quantité de production réele de l'année 2008

Les étapes de production	L'atelier	Les heurs de travail théorique	Les heurs de travail réelle	La quantité de production réelle /
La phase de la réception	Le poid	17376	14897	139706, 85
La phase de nettoyage	Netoyage du blé durs	17376	11989	69302, 25
	Netoyage du blé tendre	8688	7306	2618, 33
La phase de broyage	Broyage de la semoule	17376	15360	201704, 50
	Broyage de la farine	8688	5987	15772, 00
La phase de l'enbalage	L'embalage de le semoule	17376	13205	94024, 75
	L'embalage de la farine	8688	6864	6011419
			La somme	583242, 87

On trouve les heurs de travail de la production de les produits étudiée avec la méthode suivant :

Pour l'atelier de poids :

Les heurs de travail réelle dans l'atelier est 4897 heurs annulement production totale de les produits étudée = 139706, 85 +69302, 25 +2618, 33 +201704, 50 +15772, 00 +94024, 75 +6011419 = **583242, 87 Qantar**.

Alors le temps nécessaire pour produire une unité est calculée comme suit :

Le temps nécessaire pour produire le produit X_1

$$X_1 = (139706, 85 \times 14897)/583242, 87 = 3568, 347$$

Apris de trouvée le nombre annuel de heurs pour le production totale de le produit X_1.On calculée le nombre des heurs pour produit une unité de le produit X_1 comme suit :

$$X_1 = (3568, 347 \times 1)/(139706, 85) = 0, 0255$$

Donc pour produit une unité de X_1 on a besoin de $0, 0255$ heurs de travail dans l'atelier de poid, même chouse pour les autres produits $X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7$.

On déplacé les résultat et le temps de chaque atelier dans le tableaux suivant :

Tableau (6) : Le temps utilisé pour produire une unité de chaque produit :

/Les produit	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	Les hours de travaile
Le poid	$0,0255$	$0,0255$	$0,0255$	$0,0255$	$0,0255$	$0,0255$	$0,0255$	17376
Netoyage du blé durs	$0,0376$	$0,0376$	$-$	$-$	$0,0376$	$0,0376$	$-$	17376
Netoyage du blé tendre	$-$	$-$	$0,0276$	$0,0276$	$-$	$-$	$0,0276$	8688
Broyage de la semoule	$0,0482$	$0,0482$	$-$	$-$	$0,0482$	$0,0482$	$-$	17376
Broyage de la farine	$-$	$-$	$0,0226$	$0,0226$	$-$	$-$	$0,0226$	8688
L'embalage de le semoule	$0,0414$	$0,0414$	$-$	$-$	$0,0414$	$0,0414$	$-$	17376
L'embalage de la farine	$-$	$-$	$0,0260$	$0,0260$	$-$	$-$	$0,0260$	8688

Sous contrainte :

$$\begin{aligned}
0,0255X_1+0,0255X_2+0,0255X_3+0,0255X_4+0,0255X_5+0,0255X_6+0,0255X_7 &\leq 17376\\
0,0376X_1+0,0376X_2+0,0376X_5+0,0376X_6 &\leq 17376\\
0,0276X_3+0,0276X_4+0,0276X_7 &\leq 8688\\
0,0482X_1+0,0482X_2+0,0482X_5+0,0482X_6 &\leq 17376\\
0,0226X_3+0,0226X_4+0,0226X_7 &\leq 8688\\
0,0414X_1+0,0414X_2+0,0414X_5+0,0414X_6 &\leq 17376\\
0,0260X_3+0,0260X_4+0,0260X_7 &\leq 8688
\end{aligned}$$

Les contraintes du marché

Les contraintes du marché sont ceux qui expriment la quantité produite sous forme de comandes sur les produits de l'entreprise, et sont la base qui détermine la quantité de la production, alors les contraintes de la de mande de l'année 2008 dans le tableau suivant :

Tableau (7) : La quanttité demandée de l'année 2008

le produit	la quantité demandée (réelle)
X_1	193640
X_2	69360
X_3	188201
X_4	201720
X_5	89740
X_6	99989
X_7	79850

Les contraintes de la demande :

$$\begin{aligned}
X_1 &\leq 193640 \\
X_2 &\leq 69360 \\
X_3 &\leq 188201 \\
X_4 &\leq 201720 \\
X_5 &\leq 89740 \\
X_6 &\leq 99989 \\
X_7 &\leq 79850
\end{aligned}$$

3.2.2 La forme finale de le programme linéaire

La fonction objectif

$$Max(z) = 3500X_1+3250X_2+2950X_3+1910X_4+1350X_5+1400X_6+1300X_7$$

Sous contrainte

$$\begin{aligned}
1,5625X_1 + 1,3890X_2 &\leq 309282,7 \\
1,4490X_3 + 1,3510X_4 &\leq 274313,6 \\
X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 + X_7 &\leq 594684.62 \\
X_1 + X_2 + X_5 + X_6 &\leq 1991000 \\
X_3 + X_4 + X_7 &\leq 543000 \\
0,0255X_1 + 0,0255X_2 + 0,0255X_3 + 0,0255X_4 + 0,0255X_5 + 0,0255X_6 + 0,0255X_7 &\leq 17376 \\
0,0376X_1 + 0,0376X_2 + 0,0376X_5 + 0,0376X_6 &\leq 17376 \\
0,0276X_3 + 0,0276X_4 + 0,0276X_7 &\leq 8688 \\
0,0482X_1 + 0,0482X_2 + 0,0482X_5 + 0,0482X_6 &\leq 17376 \\
0,0226X_3 + 0,0226X_4 + 0,0226X_7 &\leq 8688 \\
0,0414X_1 + 0,0414X_2 + 0,0414X_5 + 0,0414X_6 &\leq 17376 \\
0,0260X_3 + 0,0260X_4 + 0,0260X_7 &\leq 8688 \\
X_1 &\leq 193640 \\
X_2 &\leq 69360 \\
X_3 &\leq 188201 \\
X_4 &\leq 201720 \\
X_5 &\leq 89740 \\
X_6 &\leq 99989 \\
X_7 &\leq 79850
\end{aligned}$$

Les condition de non négativité :

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 0$$

La solution du programme linéaire avec la méthode simplexe.

```
% PROGRAMME simplexe.m
function [sol,val,kk] = simplexe2(A,N)
A=[1.5625 1.3890 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 309282.70 ;...
0 0 1.4490 1.3510 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 274313.60 ;...
1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 594684.62 ;...
1 1 0 0 1 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1991000 ;...
0 0 1 1 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 543000 ;...
0.0255 0.0255 0.0255 0.0255 0.0255 0.0255 0.0255 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 17376 ;...
0.0376 0.0376 0 0 0.0376 0.0376 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 17376 ;...
0 0 0.0276 0.0276 0 0 0.0276 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 8688 ;...
0.0482 0.0482 0 0 0.0482 0.0482 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 17376 ;...
0 0 0.0226 0.0226 0 0 0.0226 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 8688 ;...
0.0414 0.0414 0 0 0.0414 0.0414 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 17376 ;...
0 0 0.026 0.026 0 0 0.0260 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 8688 ;...
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 193640 ;...
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 69360 ;...
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 188201 ;...
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 201720 ;...
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 89740 ;...
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 99989 ;...
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 79850 ;...
3500 3250 2950 1910 1350 1400 1300 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0] ;
N =[7 :26] ;
[mA,nA] = size(A) ;
kk=0 ;
stop =0 ;
while ~stop
kk=kk+1 ;
if A(mA, :)<=0
```

```
stop=1;
sol= zeros(1,nA-1);
for i=1 :mA-1
sol(N(i))=A(i,nA);
end
disp(' ');
disp('LES VARIABLES DE BASE : ');
disp('=========================');
x1= sol(1)
x2= sol(2)
x3= sol(3)
x4= sol(4)
x5= sol(5)
x6= sol(6)
x7= sol(7)
disp(' ');
disp('LA FONCTION ECONOMIQUE : ');
disp('=========================');
val = -A(mA,nA)
disp(' ');
else
for i=1 :nA-1
if A(mA,i) > 0 & A(1 :mA-1,i) <= 0
disp('have infinite solution!');
stop=1;
break;
end
end
if ~stop
temp=0;
for i=1 :nA-1
if A(mA,i) > temp
```

```
temp = A(mA,i);
inb=i;
end
end
temp = inf;
for i=1 :mA-1
if A(i,inb) > 0
if A(i,nA)/A(i,inb)> 0 & A(i,nA)/A(i,inb) < temp
temp=A(i,nA)/A(i,inb);
outb=i;
end
end
end
for i=1 :mA-1
if i==outb
N(i)=inb;
end
end
for i=1 :mA
if i~= outb
A(i, :)=A(i, :)-A(outb, :)*A(i,inb)/A(outb,inb);
end
end
A(outb, :)=A(outb, :)/A(outb,inb);
end
end
end
end
% FIN DU PROGRAMME
LES VARIABLES DE BASE :
=========================
x1 =
```

193640

x2 =

4838.15694744421

x3 =

188201

x4 =

1191.96965210952

x5 =

62030.7683637591

x6 =

99989

x7 =

44793.7250366872

LA FONCTION ECONOMIQUE :

==========================

val =

1532891601.95349

Tableaux (9) : Les résulats finals

Le produit	Le prix de ventre unitaire	Le plant optimal (proposée)		Le plant de la production de l'entreprise	
		La quantité de la production	Montant de les revenus réalisée	La quantité de la production	Montant de les revenus réalisée
X_1	3500	193640,000	677740000,00	139706,85	488973975,00
X_2	3250	4838,148	15723981,00	69302,25	224908457,57
X_3	2950	188201,000	555192950,00	2618,33	7724073,50
X_4	1910	1191,965	2276720,00	201704,50	383868877,70
X_5	1350	62030,780	83741850,00	15772,00	21204895,50
X_6	1400	99989,000	139984600,00	94024,75	131634650,00
X_7	1300	44793,740	58231899,00	60114,19	58172504,01
La somme	-	594684,633	1532892000,00	583242,87	1316487433,28

On a trouvé le prix de les produit que il est le produit de le prix de vendre unitaire avec la quantité de la production et le prix total de ces produits est la fonction objectif qui sa valeur $1532892000,00$ alors que la valeur obtenue par l'entreprise d'une année 2008 est : $1316487433,28$ et la comparaisonde ces deux résultats montrent que la résultats montrent que la résultat de le plan (optimale) dépasse la résultat de plant de la production de l'entreprise par une ration égal

$$Ration\ de\ l'augmentation$$
$$= ((\mathbf{1532892000,00 - 1316487433,28})/\mathbf{1316487433,28}) \times 100 = \mathbf{16,44}\%$$

Alors la production de l'entreprise va augmenté par une ration $\mathbf{16,44}\%$

Conclusion

La programmation linéaire fait partie de la programmation mathémattique que étudie les méthodes de recherche de l'extrémun lieé des fonctions de plusieurs variables. Dans la littérateur mathématique, on trouve plusieurs méthodes pour la résolution d'un programmation linéaire : graphique, simplex, grand M, deux phase.......

Dans notre travail, on s'est intéresser à appliquer la technique de la programmation linéaire pour guider l'utilisation des ressours de l'entreprise disponible c'est -t-à-dire d'essyer de déterminer la réparation optimal des ressources diponible de générer la meilleur revenu possible, mais cela ne peut atteint pas sauf si les conditiosn sont convenables, si les condition ne sont convenable il faut trouver un autre ensemble de solution qui utilisé la même technique, finalement en laisant la liberté de décision à l'entreprise et leurs dirigents par ce qu'ils sont conscients de véritable situation par rapport aux autres.

Alors on peut donner certaines suggestion peuvant être pour améliorer l'utilisation des ressources de l'entreprise disponible :

- Attention à la programmation linéaire et autre méthodes quantatives, au du moins les définir pour n'est pas restée sant utilisation.
- Il faut utilise les gens de ce domaine pour bon décision et pour bon profit.

Bibliographie

[1] Mokhtar S.Bazaraa, J.arvis, Linear programming and network Flows.

[2] A. Gourdin, M.Boumahrat, Méthodes Numériques Appliquées

[3] S.ACHMANOV, Programmation linéaire.

[4] Dantzig G.B , linear programming and extension press,princeton , Jersey,1963.

[5] Gass S.I Linear programming ,MacGr-Hill , New York,1958.

[6] 1. ANTOINE Joseph, CORNIL jean-paul, Lexique thématique de la comptabilité, dictionnaire spécialisé explicatif édition revue, augmentée et mise à jour avec la collaboration de Stéphane mercier, Belgique 2002

[7] BAILLARGEON Gérald, programmation linéaire appliqué, outils d'optimisation et d'aide à la décision, copyright © 1996, édition SMG.

[8] BAIR Jacques, algèbre linéaire, pour l'économie et les sciences sociales, deuxième édition, édition De Boeck, Bruxelles 1994.

[9] BARRE.R, LORY.R, RICHEZ.M, comptabilité analytique d'exploitation, édition ISTRA, Paris 1980.

[10] BASTIN Fabian, modèle de recherche opérationnelle, édition viaduc de Millau, France 2006.

[11] BENGHEZAL Amour Farouk, programmation linéaire, revues et augmentée, édition de l'office des publications universitaire, 2eme édition, Alger 2006 .

[12] BOUQUIN Henri, comptabilité de gestion, édition économica, Paris, 2000.

[13] Boussard Jean-marc, programmation mathématique et théorie de la production agricole, éditions cujus, paris 1970.

[14] COLLETTE.Yann, SIARRY.Patrick, multiobjective optimization, principles and case studies series editor, publication due august, France 2003.

ملخص:

إن من أهم المشكلات التي تواجه المؤسسة الاقتصادية هي مسالة تحسين استعمال وتخصيص الموارد المتاحة لديها على الاستخدامات البديلة ولا يمكن حل هذه المسالة بالاعتماد على الحدس والتخمين القائمين على الأساس الذاتي للمسير، بل إن ذلك يستدعي استخدام الأساليب الرياضية المساعدة على اتخاذ القرار الأمثل.

وتهدف هذه المذكرة إلى إبراز دور وأهمية تطبيق تقنية البرمجة الخطية في تحسين استعمال موارد المؤسسة المتاحة، وذلك بالتطرق إلى واقع استخدام الأساليب الكمية ودورها في تحسين أداء المؤسسات الاقتصادية، مع عرض وتحليل نتائج الدراسة الميدانية بإحدى الوحدات الاقتصادية الجزائرية.

Résumé:

Les problèmes les plus importants aux quels sont confrontées les entreprises économiques sont les problèmes de l'amélioration de l'utilisation et de la répartition des ressources disponibles pour des utilisations alternatives, et nous ne pouvons pas résoudre ce problème en nous fiant à basées, sur le principe de l'outo décideur, en utilisant les méthodes mathématiques pour obtenir le meilleure décision

Le but de cette mémoire est de mettre en évidence le rôle et l'importance de l'application de la technique de la programmation linéaire pour améliorer l'utilisation des ressources disponible de l'entreprise, ce qui conduira à la amélioration de la performance des institutions économiques.

Abstract :

The Most important problèmes facing the economic enterprises are the issue of improving the use and allocation of resources available to alternative uses, and we can not resolve this issue by relying on intuition and guess work based on the basis of self-decision maker, this should be required by the use of mathematical methods to make the best decision.

The aim of this study is to high light the role and importance of applying the technique of linear programming to improve the use of resources availability of the enterprise, and that will lead to the improvement of the performance of economic institutions.