UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option : Mathématiques Discrètes

Par
Bouguerra Nassima

Sujet

Etudes et représentations des certaines algèbres trivalenes

Devant le jury :

Mr ZEDAM Lemnouar Prof. Univ de M'sila Président
Mr AMROUNE Abdelaziz Prof. Univ de M'sila Rapporteur
Mr LADJLETE Lahcene Prof. Univ de M'sila Examinateur

Promotion : 2016 / 2017

Remerciement

Je remerciement beaucoup Dieu de me avoir aider pour atteindre ce but de me avoir donner la force et la patience pour accomplir notre travail.

j'exprime me meilleurs remerciement à Monsieur ***A. AMROUNE*** professeur à l'Université de M'sila, qui a accepté de diriger ce mémoire en témoignant sa confiance.

Je tient aussi à exprimer mes vifs remerciement les membres du jury à ***L. ZADAM*** et ***L. LAJELETE*** d'avoir accepter d'examiner ce travail.

En fin je remercie tous ceux qui m'ont aidé dans la recherche de la documentation.

Table des matières

Introduction

En 1920, le philosophe polonais Jan Łukasiewicz introduisit la notion de la logique multivalente, et comme tout développement dans la logique mathématique s'associé en même temps d'un développement de l'algèbre

Moisil en 1940 introduisit la notion d'algèbre de Łukasiewicz comme modèle algébrique de la logique de Łukasiewicz.

La logique floue débute officiellement en 1965, avec la publication de l'article « Fuzzy sets » (ensembles flous), par Lotfi Zadeh dans la revue « information and control ». Lotfi Zadeh actuellement professeur émérite à l'Université de Californie à Berkeley. Donc la logique floue intervient dans la manipulation de connaissances imparfaites.

Par la suite, Moisil dans son article : « Ensembles flous et logique à plusieurs valeurs » (Université de Montréal, mai 1973), il a mis en lumière les relations existantes entre les structures floues au sens de Zadeh et les algèbres de Łukasiewicz.

Le but de ce mémoire est détudier l'algèbre trivalente de Łukasiewicz et son représentation par l'ensemble des parties floues.

Le mémoire est subdivisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre nous présentons quelques notions importantes de base des treillis et des algèbres de Boole, et on présente les définitions et l'illustration des concepts utilisés dans les autres chapitres.

Dans le deuxième chapitre on étudie la sémantique de la logique de Łukasiewicz, la syntaxe de Wajsberg de la logique trivalente et l'algèbre trivalente de Łukasiewicz et ses propriétés fondamentales.

Dans le troisième chapitre nous avons présenter les structures floues, les parties floues, les niveaux de flou et la relation d'ordre sur l'ensemble des parties floues.

En fin, la représentation des algèbres trivalentes de Łukasiewicz est donné par diférentes manières.

Chapitre 1

Généralité sur les treillis et algèbres de Boole

Dans ce chapitre, nous allons présenté quelques définitions du treillis, treillis distributif, treillis complémenté, treillis de Boole et algèbre de Boole.

1.1 Treillis

1.1.1 Définition d'un treillis

Définition 1.1 (Demi-treillis)

Un ensemble ordonné X est un inf-demi-treillis si toute paire (x, y) de ses éléments admet un infimum $x \wedge y$. C'est un sup-demi-treillis si toute paire de ses éléments admet un supermum $x \vee y$. C'est un treillis si toute paire de ses éléments admet un supermum et un infimum donc s'il est à la fois inf- et sup-demi treillis.

Un treillis sera souvent noté $T = (X, \leq, \wedge, \vee)$.

Définition 1.2 (Treillis)

Un treillis est un ensemble ordonné $(T, \leqslant)$ dans le quel tout pair d'éléments (x, y) admet une borne supérieure noté $x \vee y$ et une borne inférieure noté $x \wedge y$:

$\forall x, y \in T$ $\sup\{x, y\}$ et inf $\{x, y\}$ existent.

Exemple 1.1

(1) Soit $(P(E), \subseteq)$, l'ensemble de toutes les parties d'un l'ensemble E. L'ensemble partiellement ordonné $(P(E), \subseteq)$ forme un treillis. Pour tous $A, B \in P(E)$,

$\inf(A, B) = A \cup B$.

$\sup(A, B) = A \cap B$.

L'ensemble vide est contenu dans tous les éléments de $P(E)$, et ils sont tous contenu dans E.

(2) L'ensemble des entiers naturels différente zéro muni de relation "divise" forme un treillis, où la borne supérieure est **PPCM** et la borne inférieur est **PGCD.**

C'est un treillis borné (**l'élément minimum est** 1**, et l'élément maximum est** 0**).**

Remarque 1.1 Soit X un ensemble non vide, alors $P(X)$ est un treillis.

Proposition 1.1 *Si $(T, \leq)$ un treillis fini, alors T admet un plus grand et un plus petit élément.*

Proposition 1.2 *[8]*

Dans un treillis quelconque $(T, \leq)$: $\forall x,\ y \in T$

► $x \leq y \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x \wedge y \\ y = x \vee y \end{cases}$

► *Idempotence :*

$x \vee x = x$ *et* $x \wedge x = x$.

► *Commutativité :*

$x \vee y = y \vee x$ *et* $x \wedge y = y \wedge x$.

► *L'associativité :*

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ *et* $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

► *L'absorption :*

$x \vee (x \wedge y) = x$ *et* $x \wedge (x \vee y) = x$.

Définition 1.3 (**treillis fermé**)

Un treillis T est dit fermé s'il possède un plus petit élément noté (0) et un plus grande éléments noté (1).

Exemple 1.2

1. Le treillis $D(30) = \{$ L'ensemble de diviseur de 30 $\}$ est fermé $(0) = 1$ et $(1) = 30$.
2. $(P(E), \subseteq)$ est fermé $(0) = \phi$ et $(1) = E$.

1.2 Morphismes et isomorphisme de treillis

Définition 1.4

Soient E et T deux treillis f est une application de E dans T. On dit que f est un morphisme de treillis si :

$$\forall x, y \in E \begin{cases} f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y); \\ f(x \vee y) = f(x) \vee f(y). \end{cases}$$

Remarque 1.2

1. Un morphisme bijectif entre deux treillis est un isomorphisme de treillis.

1.3 Treillis remarquables

1.3.1 Treillis distributif

Définition 1.5 [4]

Un treillis T est distributif si $\forall x, y, z \in T$ on a :

$$\begin{array}{lrcl} (P_1) & x \vee (y \wedge z) & = & (x \vee y) \wedge (x \vee z). \\ (P_2) & x \wedge (y \vee z) & = & (x \wedge y) \vee (x \wedge z). \end{array}$$

Remarque 1.3

Les conditions (P_1) et (P_2) sont équivalentes. En effet, supposons que (P_1) soit vérifiée, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= ((x \vee y) \wedge x) \vee ((x \vee y) \wedge z) \\ &= x \vee ((x \vee y) \wedge z) \quad \text{(loi d'absorption)} \\ &= x \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\ &= x \vee (y \wedge z) \quad \text{(loi d'absorption).} \end{aligned}$$

et (P_2) est aussi vérifiée.

La réciproque, supposons que (P_2) soit vérifiée, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
(x \wedge y) \vee (x \wedge z) &= ((x \wedge y) \vee x) \wedge ((x \wedge y) \vee z) \\
&= x \wedge (z \vee (x \wedge y)) \quad \text{(loi d'absorption)} \\
&= x \wedge (z \vee x) \wedge (z \vee y) \\
&= x \wedge (y \vee z) \quad \text{(loi d'absorption).}
\end{aligned}$$

Exemple 1.3

a) Toute chaîne C est un treillis distributif

En effet, soient $x, y, z \in C$,
$\min(x, \max(y, z)) = \max(\min(x, y), \min(x, z))\,(p_2)$.

b) Considérons le treillis $E = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ ordonné par divisibilité

$x \vee y = ppmc(x, y)$ et $x \wedge y = p\,\mathrm{gcd}(x, y)$. Ce treillis n'est pas distributif, car par exemple :

$2 \wedge (3 \vee 5) \neq (2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5)$.
En effet, $2 \wedge (3 \vee 5) = 2 \wedge 30 = 2$ et $(2 \wedge 3) \vee (2 \wedge 5) = 1 \vee 1$.
De même $2 \vee (3 \wedge 5) \neq (2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5)$.
En effet, $2 \vee (3 \wedge 5) = 2 \vee 1 = 2$ et $(2 \vee 3) \wedge (2 \vee 5) = 30 \wedge 30 = 30$

Théorème 1.1 *[7]*

Pour qu'un treillis E soit distributif il faut et suffit qu'il vérifie, quels que soient x, y, z, la condition :

$$\left.\begin{array}{l} x \wedge z = y \wedge z \\ x \vee z = y \vee z \end{array}\right\} \Longrightarrow x = y.$$

Preuve. $((x \wedge z = y \wedge z \text{ et } x \vee z = y \vee z) \overset{?}{\Longrightarrow} (x = y))$.

$$
\begin{aligned}
x &= x \vee (x \wedge z) \\
&= x \vee (y \wedge z) \\
&= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\
&= (x \vee y) \wedge (y \vee z) \\
&= (x \wedge z) \vee y \\
&= (y \wedge z) \vee y \\
&= y.
\end{aligned}
$$

■

1.3.2 Treillis complémenté

Définition 1.6

C'est un treillis fermé T tel que pour chaque $x \in T$ il existe au moins $x' \in T : \begin{cases} x \wedge x' = 0 \\ x \vee x' = 1 \end{cases}$ x' est dit complément de x.

Remarque 1.4 Dans un treillis distributif le complément s'il existe est unique.

En effet $\left.\begin{array}{l} x \vee x' = x \vee x'' = 1 \\ x \wedge x' = x \wedge x'' = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x' = x''.$

Exemple 1.4

1. Tout treillis $(P(E), \subseteq)$ est complémenté, si $X \subseteq E$ son complément (unique) n'est autre que le complémentaire de $X = \ C_x$.
2. $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ est complémenté

1.3.3 Treillis modulaires

Définition 1.7

Un treillis E est dit un treillis modulaire s'il vérifie, quels que soient les élément x, y, z, la condition :

$x \leq y \Longrightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. (Une propriété plus faible que la distributivité).

Remarque 1.5

Tout treillis distributif est modulaire.

1.3.4 Treillis de Boole

Définition 1.8 [6]

Un treillis de Boole est un treillis distributif fermé et complémenté.

Exemple 1.5

1. $(P(E), \subset, \cup, \cap)$ est un treillis de Boole.
2. La chaine $U = \{0, 1\}$ est un treillis de Boole.
3. $(D(6), \shortmid) = (1, 2, 3, 6\}$ est un treillis de Boole.

1.4 Filtres et idéaux dans un treillis

Définition 1.9 (Filtres)

Soit T un treillis, on appelle filtre toute partie non vide F de T vérifiants :

a) Si $x \in F$ et $x \leq y$, alors $y \in F$;

b) Si $x \in F$ et $y \in F$, alors $x \wedge y \in F$.

Exemple 1.6

$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

$F_1 = \{2, 6, 10, 30\}$ est un filtres et $F_2 = \{2, 10, 30\}$ n'est pas un filtres car, $2 \leq 6$ et $6 \notin F_2$.

Définition 1.10 (Ultrafiltre)

Un ultrafiltre est un filtres maximale pour l'ordre d'inclusion entre filtres propre.

Proposition 1.3

Soit F un filtre propre, les deux assertions suivantes sont équivalent :

1. *F est un ultrafiltre ;*
2. *Pour tout $x \notin F$, il existe $y \in F$ tel que $x \wedge y = 0$.*

Exemple 1.7

$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$.

(i) Les filtres propres sont $\{2,6,10,30\}$, $\{10,30\}$, $\{6,30\}$, $\{5,10,15,30\}$, $\{15,30\}$, $\{3,6,15,30\}$, $\{30\}$.

(ii) Les ultrafiltres sont $\{2,6,10,30\}$, $\{5,10,15,30\}$, $\{3,6,15,30\}$ on constate que tout les filtre propres sont inclus dans des ultrafiltres

Définition 1.11 (Idéal)

On appelle idéale d'un treillis E toute partie non vide I de E vérifiant :

a) Si $x \in I$ et $x \geq y$ alors $y \in I$;

b) Si $x \in I$ et $y \in I$ alors $x \vee y \in I$.

L'idéal I est dit propre si $I \neq T$, et impropre dans le cas contraire.

1.5 Algèbre de Boole

Définition 1.12

Une algébre de Boole est un treillis distributif fermé et complémenté.

Exemple 1.8

1) Le treillis $(P(E), \subseteq)$ est une algébre de Boole.

2) $(D(6), \shortmid)$ est une algébre de Boole.

Définition 1.13

Soient B_1 et B_2 deux algèbres de Boole. On appelle morphisme d'algèbre de Boole de B_1 Dans B_2 toute fonction $f : B_1 \longrightarrow B_2$ telle que pour tout $x, y \in B_1$ on a :

$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$.

$f(0) = 0$.

$f(\overline{x}) = \overline{f(x).}$

(Ce égalités impliquent également que $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ et $f(1) = 1$)

Proposition 1.4 *Dans une algèbre de Boole on a :*

1. $\rceil 0 = 1, \rceil 1 = 0$.
2. $\rceil\rceil x = x$.
3. $\rceil(x \wedge y) = \rceil x \vee \rceil y$ *et* $\rceil(x \vee y) = \rceil x \wedge \rceil y$ *(lois de De Morgan).*

Preuve.

1. $\left.\begin{array}{l}1 \vee 0 = 1\\ 1 \wedge 0 = 0\end{array}\right\} \implies \rceil 0 = 1$ et $\rceil 1 = 0.$

2. $\left.\begin{array}{l}\rceil x \wedge \rceil(\rceil x) = 0\\ \rceil x \vee \rceil(\rceil x) = 1\end{array}\right\} \implies x = \rceil(\rceil x)$

3. a)
$$\begin{array}{llllllll} (x \wedge y) \wedge (\rceil x \vee \rceil y) & = & (x \wedge y \wedge \rceil x) \vee (x \wedge y \wedge \rceil y) & = & (0 \wedge y) \vee (x \wedge 0) & = & 0 \vee 0 \\ (x \wedge y) \vee (\rceil x \vee \rceil y) & = & (x \vee \rceil x \vee y) \wedge (y \vee \rceil x \vee \rceil y) & = & (\rceil y \vee 1) \wedge (\rceil x \vee 1) & = & 1 \wedge 1. \end{array}$$

Donc $\rceil(x \wedge y) = \rceil x \vee \rceil y$

b)
$$\begin{array}{llllllll} (x \vee y) \vee (\rceil x \vee \rceil y) & = & (x \vee y \vee \rceil x) \wedge (x \vee y \vee \rceil y) & = & (1 \vee y) \wedge (x \vee 1) & = & 1 \wedge 1 \\ (x \vee y) \wedge (\rceil x \wedge \rceil y) & = & (x \wedge \rceil x \wedge y) \vee (y \wedge \rceil x \wedge \rceil y) & = & (\rceil y \wedge 0) \vee (\rceil x \wedge 0) & = & 0 \vee 0. \end{array}$$

Donc $\rceil(x \vee y) = \rceil x \wedge \rceil y$ ■

Définition 1.14

Soient $x, y \in T$, on définit la somme $x + y$ par :

$$\begin{array}{lll} x + y & = & (x \wedge \rceil y) \vee (\rceil x \wedge y) \\ x + y & = & (\rceil x \vee \rceil y) \wedge (x \vee y). \\ \rceil(x + y) & = & (x \wedge y) \vee (\rceil x \wedge \rceil y). \\ \rceil(x + y) & = & (\rceil x \vee y) \wedge (x \vee \rceil y). \end{array}$$

1.5.1 Propriétés des algèbres de Boole

Involution :

Le complément du complément de x est x, c'est-à-dire :

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

Formules de De Morgan

$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}.$

$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}.$

Preuve. Soit $u = x \vee y$ et $v = \overline{x} \wedge \overline{y}.$

Pour montrer que $\overline{u} = v$, on va montrer que $u \wedge v = 0$ et que $u \vee v = 1.$

$$\begin{aligned}
u \wedge v &= (x \vee y) \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y}) \\
&= (x \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y})) \vee (y \wedge (\overline{x} \wedge \overline{y})) \\
&= ((x \wedge \overline{x}) \wedge \overline{y}) \vee ((y \wedge \overline{y}) \wedge \overline{x}) \\
&= (0 \wedge \overline{y}) \vee (0 \wedge \overline{x}) \\
&= 0 \vee 0 = 0.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u \vee v &= (x \vee y) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y}) \\
&= (\overline{x} \vee (x \vee y) \wedge (\overline{y} \vee (x \vee y)) \\
&= ((\overline{x} \vee x) \vee y) \wedge ((\overline{y} \vee y) \vee x) \\
&= (1 \vee y) \wedge (1 \vee x) \\
&= 1 \wedge 1 = 1.
\end{aligned}$$

La deuxième formule se démontre de la même façon, en posant :
$u = x \wedge y$ et $v = \overline{x} \vee \overline{y}$.
et en montrant que $u \wedge v = 0$ et $u \vee v = 1$. ■

1.6 Théorème de représentation de stone

Théorème 1.2 *Tout algèbre de Boole s'injecte dans une sous algèbre de la forme $P(x)$.*

Preuve. On considère une algèbre de Boole B, X :l'ensemble des ultrafiltres de B,

$\sigma : B \longrightarrow p(x)$

$\sigma(x) = \{U \in X / x \in U\}$

σ homomorphisme si :

1. $\sigma(x \vee y) = \sigma(x) \cup \sigma(y)$
2. $\sigma(x \wedge y) = \sigma(x) \cap \sigma(y)$
3. $\sigma(\rceil x) = C\sigma(x)$

On a :

$$\begin{aligned}\sigma(x\vee y) &= \{U\in X\backslash x\vee y\in U\}\\ &= \{U\in X\backslash x\in U \text{ où } y\in U\}\\ &= \sigma(x)\cup\sigma(y).\end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned}\sigma(x\wedge y) &= \{U\in X\backslash x\wedge y\in U\}\\ &= \{U\in X\backslash x\in U \text{ et } y\in U\}\\ &= \sigma(x)\cap\sigma(y).\\ \sigma(\rceil x) &= \{U\in X\backslash \rceil x\in U\}\\ &= \{U\in X\backslash x\notin U\}\\ &= C_{\gamma(x)}.\end{aligned}$$

σ est injective :

$$\begin{aligned}x\in Ker\sigma &\Longleftrightarrow \sigma(x)=\phi\\ &\Longleftrightarrow x\notin U,\ \forall U\in X\\ &\Longleftrightarrow \rceil x\in U,\ \forall U\in X\\ &\Longleftrightarrow \rceil x\in \cap_{U_x}U=\{1\}\\ &\Longleftrightarrow \rceil x=1\end{aligned}$$

Donc σ est injective.

$\sigma(\rceil x)=C\sigma(x)$?

$$\begin{aligned}U\in\sigma(\rceil x) &\Longleftrightarrow \rceil x\in U\\ &\Longleftrightarrow x\notin U\\ &\Longleftrightarrow U\notin\sigma(x)\\ &\Longleftrightarrow U\in C\sigma(x)\\ &\Longleftrightarrow \sigma(\rceil x)=C\sigma(x).\end{aligned}$$

Si B est fini alors σ est surjective.

En effet, si B est finie tout filtre est principal $F=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$,

$a=a_1,a_2,\ldots,a_n\in F$

F est principal et engendre par a, $\sigma : B\longrightarrow P(x)$.

Soit $y\in P(X)$, $y\subset X$

Si $y=\phi=\sigma(0)$

Si $y=x=\sigma(1), y=\{U_1,U_2,\ldots,U_k\}, F=U_1\cap U_2\cap\ldots\cap U_k$

F est principal, $F=B\vee a$.

$Y=\sigma(a)$?

$(\Longrightarrow)$

$$\begin{aligned}\text{Soit } U_i\in y &\Longrightarrow a\in U_i\\ &\Longrightarrow U_i\in\sigma(a)\\ &\Longrightarrow y\in\sigma(a)\end{aligned}$$

$(\Longleftarrow)$

$$\begin{array}{lll} \text{Soit } v \in \sigma(a) & \Longrightarrow & a \in v \\ & \Longrightarrow & F \subset v \end{array}$$

Supposons que

$$\begin{array}{lll} v \neq U_i, \forall i, i = 1 \cdots k & \Longrightarrow & U_i \not\subseteq_{\forall i=1,\ldots,k} v \forall i, \exists X_i \backslash X_i \in U_i \text{ et } X_i \notin v \\ \text{Soit } X = X_1 \vee X_2 \vee \ldots \vee X_k & \Longrightarrow & X \in \cup_i, \forall i = 1, \ldots, k \\ & \Longrightarrow & X \in F \\ & \Longrightarrow & X \in v \end{array}$$

contradiction il existe donc un $i_0 \backslash v = U_{i_0}$, donc $v \in y$, $\sigma(a) \subset y$, $\sigma(a) = y$

B algèbre de Boole fini alors $B \simeq 2^n$ ■

Chapitre 2

Logique trivalente de Łukasiewicz

Dans ce chapitre, on étudie la sémantique de la logique de Łukasiewicz, la syntaxe de wajsberg de la logique trivalente et l'algèbre trivalente de Łukasiewicz et ses propriétés fondamentales (voir [1] et pour [3], [5] plus de détails).

2.1 Sémantique

L'ensemble de valeurs de vérité est la chaine $T = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

$$2 \text{ connecteurs} \Longrightarrow \begin{cases} \text{la négation} \\ \text{implication} \end{cases}$$

1. Négation

Définie négation N par la table :

x	$N(x)$
0	1
1/2	1/2
1	0

Nx

On remarque que N est décroissante et involutive dans l'ensemble $\{0, 1/2, 1\}$ i.e. $NNx = x$.

2. Implication

L'implications notée par $x \longrightarrow y$ est définie par la table :

$x\diagdown y$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1/2	1	1
1	0	1/2	1

$x \longrightarrow y$

On constate que dans l'ensemble $T = \{0, 1/2, 1\}$ naturellement ordonné on a :

$x \leq y \Longleftrightarrow x \longrightarrow y = 1$

3. Disjonction

Ce connecteur défini dans la logique trivalente de Łukasiewicz comme suit :

$x \vee y = (x \longrightarrow y) \longrightarrow y.$

Et la table de vérité est :

$x\diagdown y$	0	1/2	1
0	0	1/2	1
1/2	1/2	1/2	1
1	1	1	1

$x \vee y$

Remarque 2.1 Dans une algèbre de Boole on a :

$$\begin{aligned}
(x \longrightarrow y) \longrightarrow y &= \rceil(\rceil x \vee y) \vee y \\
&= (\rceil(\rceil x) \wedge \rceil y) \vee y \\
&= (x \wedge \rceil y) \vee y \\
&= (x \vee y) \wedge (\rceil y \vee y) \\
&= (x \vee y) \wedge 1 \\
&= x \vee y.
\end{aligned}$$

En peut également faire :

$x \vee y = \sup(x, y)$

$x \wedge y = \inf(x, y)$

4. Conjonction

Łukasiewicz à défini la conjonction $(x \wedge y)$ par :

$x \wedge y = N(Nx \vee Ny).$

Et la table de vérité de la conjonction est :

$x\diagdown y$	0	1/2	1
0	0	0	0
1/2	0	1/2	1/2
1	0	1/2	1

$(x \wedge y)$

Dans une algèbre de Boole on a :

$$\begin{aligned} N(Nx \vee Ny) &= N(Nx) \wedge N(Ny) \\ &= x \wedge y \end{aligned}$$

Łukasiewicz a défini 2 connecteurs supplémentaires unaires **possibilité** μ **et nécessité** ν.

5. Possibilité et nécéssité

Le connecteur de posssipilité et nécéssité est défini comme suite :

$\mu x = Nx \longrightarrow x$, $\nu x = N\mu Nx$

Et sa table de vérité du connecteur de possibilité est :

x	Nx	$Nx \longrightarrow x$	μx
0	1	0	0
1/2	1/2	1	1
1	0	1	1

(μx)

Et la table de vérité du connecteur de nécéssité est :

x	Nx	μNx	$N\mu Nx$	νx
0	1	1	0	0
1/2	1/2	1	0	0
1	0	0	1	1

(νx)

6. Impossibilité et contingence

Dans le calcul propositionnel trivalent de Łukasiewicz que nous désignons désormais par $Ł_3$, on peut définir les connecteurs d'impossibilité (η) et de contingence (γ) :

$\eta x = N\mu x \Longrightarrow N\eta x = \mu x$;

$\gamma x = N\nu x \Longrightarrow N\gamma x = \nu x$.

Qui puisse être interpréter comme suit :

ν : est nécessaire que.

μ : il est peut être vraie que.

γ : il est peut être faux.

η : il est impossible que

Ce qui donne la table :

x	ηx
0	1
1/2	0
1	0

ηx

x	γx
0	1
1/2	1
1	0

γx

7. Implication faible

A Monteiro a introdui l'implication faible notés $p \xrightarrow{M} q$ par :

$p\diagdown q$	0	1/2	1
0	1	1	1
1/2	1	1	1
1	0	1/2	1

$\left(p \xrightarrow{M} q\right)$

On pourra remarquer que : $p \longrightarrow q = \gamma p \vee q$

L'implication de Łukasiewicz se retrouve à partir de l'implication faible :
$p \longrightarrow q = (p \xrightarrow{M} q) \wedge (Nq \xrightarrow{M} Np)$.

2.1.1 Axiomatisation de Wajsberg (1931)

Le système logique trivalente de Łukasiewicz est formalisable au moyen des quatre schémas d'axiomes suivants :

W1 $x \longrightarrow (y \longrightarrow x)$,

W2 $(x \longrightarrow y) \longrightarrow ((y \longrightarrow z) \longrightarrow (x \longrightarrow z))$,

W3 $((x \longrightarrow Nx) \longrightarrow x) \longrightarrow x$,

W4 $(Nx \longrightarrow Ny) \longrightarrow (y \longrightarrow x)$.

Tables de vérité de **W1** et **W4 :**

x	y	$y \longrightarrow x$	$x \longrightarrow (y \longrightarrow x)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

(**W1**)

x	y	Nx	Ny	$y \longrightarrow x$	$Nx \longrightarrow Ny$	$(Nx \longrightarrow Ny) \longrightarrow (y \longrightarrow x)$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

(**W4**)

Remarque 2.2 : On remarque que ces quatre schémas d'axiomes sont des thèses dans le calcul propositionnel classique que nous désignons par L_2

2.2 Algèbres trivalentes de Łukasiewicz

Dans cette section on va parler sur les définitions des $Ł_3-$algèbres et nous passons en revue quelque propriétés, et principe de détermination de Moisil.

Définition 2.1 [1] [5]

Une $Ł_3-$algèbre est un système $(L, \vee, \wedge, 0, 1, N, \mu)$ ou :

L$_1$: $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ est un treillis distributif fermé.

L$_2$: N est une involution décroissante c'est-à-dire :

$x \leq y \Longrightarrow Ny \leq Nx$, $NNx = x$, $N0 = 1$, $N1 = 0$,

L$_3$: l'opération unaire μ est un endomorphisme sur L, idempotent extensif,

endomorphisme : $\mu(x \wedge y) = \mu(x) \wedge \mu(y)$, $\mu(x \vee y) = \mu(x) \vee \mu(y)$,

idempotent :$\mu\mu(x) = \mu(x)$,

Extensif : $\mu(x) \geq x$,

L$_4$: $N\mu N\mu x = \mu x$,

L$_5$: $Nx \vee \mu x = 1$,

L$_6$: $x \wedge Nx = \mu x \wedge Nx$.

Cette algèbre est notée : $Ł_3$ algèbre.

Exemple 2.1 [1]

1) $T = \{0, 1/2, 1\}$ la plus petite $Ł_3$ algèbre.

2) Tout algèbre dé Boole est une $Ł_3$ algèbre.

3) Soit B^2=$\{(x, y)/x \in B$ et $y \in B\}$ une algèbre de Boole.

l'ensemble $L(B) = \{(x, y)/x \leq y\}$ est un sous treillis de B^2, cette ensemble muni par les lois :

$\bullet(x,y)\vee(x',y')=(x\vee x',y\vee y')$.

$\bullet(x,y)\wedge(x',y')=(x\wedge x',y\wedge y')$.

$\bullet N(x,y)=(\rceil y,\rceil x)$.

$\bullet\mu(x,y)=(y,y)\geq(x,y)$

Est une Ł$_3$ algèbre car :

1. $(0,0)\in L(B)$ le plus petit élément de $L(B)$, et $(1,1)$ le plus grand élément de $L(B)$fermé.

2. $L(B)$ distributif car :

Soient $(x,y),(x',y'),(x",y")\in L(B)$

$$\begin{array}{rcl}(x,y)\vee[(x',y')\wedge(x",y")] & = & (x,y)\vee[x'\wedge x",y'\wedge y"]\\ & = & (x\vee(x'\wedge x"),y\vee(y'\wedge y"))\\ & = & ((x\vee x')\wedge(x\vee x"),(y\vee y')\wedge(y\vee y"))\\ & = & (x\vee x',y\vee y')\wedge(x\vee x",y\vee y")\\ & = & [(x,y)\vee(x',y')]\wedge[(x,y)\vee(x",y")]\end{array}$$

donc

$(x,y)\vee[(x',y')\wedge(x",y")]=[(x,y)\vee(x',y')]\wedge[(x,y)\vee(x",y")]$.

3. N est une involution décroissante, car :

On a : $(x,y),(x\prime,y\prime)\in L(B)$

On suppose que $(x,y)\leq(x',y')$, et on démontre que : $N(x',y')\leq N(x,y)$

$$\text{ona : }(x,y)\leq(x',y')\quad\Longrightarrow\quad\begin{cases}x\leq x'\\ y\leq y'\end{cases}$$

et comme $x,y\in B$ algèbre de Boole, donc :

$$\begin{array}{lcl}\rceil x' & \leq & \rceil x\\ \rceil y' & \leq & \rceil y\end{array}$$

Donc $(\rceil y',\rceil x')\leq(\rceil y,\rceil x)$ c'est-à-dire :$N(x',y')\leq N(x,y)$

Alors si $(x,y)\leq(x',y')\Longrightarrow N(x',y')\leq N(x,y)$.

$N(0,0)=(\rceil 0,\rceil 0)=(1,1)$.

$N(1,1)=(\rceil 1,\rceil 1)=(0,0)$.

$NN(x,y)=N(\rceil y,\rceil x)=(\rceil\rceil x,\rceil\rceil y)=(x,y)$.

Ainsi N est une involution décroissante.

4. μ endomorphisme :

$$\begin{array}{rcl}\mu((x,y)\vee(x',y')) & = & \mu(x\vee x',y\vee y')\\ & = & (y\vee y',y\vee y')\\ & = & (y,y)\vee(y',y')\end{array}$$

$$\begin{cases} \mu(x,y) = (y,y) \\ \mu(x,y) = (y',y') \end{cases} \Longrightarrow \mu(x,y) \vee \mu(x,y) = (y,y) \vee (y',y').$$

Donc : $\mu((x,y) \wedge (x',y')) = \mu(x,y) \wedge \mu(x',y')$.

$$\begin{aligned} \mu((x,y) \wedge (x',y')) &= \mu(x \wedge x', y \wedge y') \\ &= (y \wedge y', y \wedge y') \\ &= (y,y) \wedge (y',y'). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mu(x,y) = (y,y) \\ \mu(x,y) = (y',y') \end{cases} \Longrightarrow \mu(x,y) \wedge \mu(x,y) = (y,y) \wedge (y',y').$$

Donc $\mu((x,y) \wedge (x',y')) = \mu(x,y) \wedge \mu(x',y')$.

5. μ idempotent :

On a : $\mu(\mu(x,y)) = \mu^2(x,y) = \mu(x,y) = (y,y)$,

donc μ est idempotent.

6. μ est extensif :

$\mu(x,y) = (y,y)$.

On a : $(x,y) \in L(B)$ donc :

$$\begin{cases} y \geq x \\ y \geq y \end{cases} \Longrightarrow (y,y) \geq (x,y),$$

c'est-à-dire : $\mu(x,y) \geq (x,y)$.

Alors μ est extensif.

7.

$$\begin{aligned} N\mu N\mu(x,y) &= N\mu N\mu(y,y) \\ &= N\mu(\rceil y, \rceil y) \\ &= (y,y) \\ &= \mu(x,y). \end{aligned}$$

Donc $N\mu N\mu(x,y) = \mu(x,y)$.

8.

$$\begin{aligned} N(x,y) \vee \mu(x,y) &= (\rceil y, \rceil x) \vee (y,y) \\ &= (\rceil y \vee y, \rceil x \vee y) \\ &= (1, \rceil x \vee y) \\ &= (1, x \longrightarrow y). \end{aligned}$$

Et comme $(x,y) \in L(B)$, c'est-à-dire $x \leq y$

Et d'après la propriété de l'implication suivante :

$x \longrightarrow y = 1$ si et seulement si $x \leq y$

Donc $x \longrightarrow y = 1$, car $(\rceil x \vee y = 1)$

$$\begin{aligned} \text{Alors } N(x,y) \vee \mu(x,y) &= (1, \rceil x \vee y) \\ &= (1, x \longrightarrow y) \\ &= (1,1). \end{aligned}$$

Ou bien $\rceil x \leq \rceil x$

$$\begin{aligned} x \leq y &\Longrightarrow \rceil x \vee x \leq \rceil x \vee y \\ &\Longrightarrow 1 \leq \rceil x \vee y \leq 1 \\ &\Longrightarrow \rceil x \vee y = 1. \end{aligned}$$

Alors $N(x,y) \vee \mu(x,y) = (1,1)$.

9.

$$\begin{aligned} (x,y) \wedge N(x,y) &= (x,y) \wedge (\rceil y, \rceil x) \\ &= (x \wedge \rceil y, y \wedge \rceil x). \end{aligned}$$

On a : $x \leq y \Longrightarrow \rceil y \leq \rceil x$ et $x \leq x$

Donc $x \wedge \rceil y \leq 0$ et $x \wedge \rceil y \geq 0 \Longrightarrow 0 \leq x \wedge \rceil y \geq 0$ alors $x \wedge \rceil y = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } (x,y) \wedge N(x,y) &= (x \wedge \rceil y, y \wedge \rceil x) \\ &= (0, y \wedge \rceil x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(x,y) \wedge N(x,y) &= (y,y) \wedge (\rceil y, \rceil x) \\ &= (y \wedge \rceil y, y \wedge \rceil x) \\ &= (0, y \wedge \rceil x). \end{aligned}$$

Finalement on obtient : $(x,y) \wedge N(x,y) = \mu(x,y) \wedge N(x,y)$.

2.2.1 Propriétés

Propriétés des Ł$_3$-algèbre.

N vérifie les lois de De Morgan :

1/ $N(x \vee y) \stackrel{?}{=} N(x) \wedge N(y)$.

2/ $N(x \wedge y) \stackrel{?}{=} N(x) \vee N(y)$.

On a $\begin{cases} x \leq x \vee y \\ y \leq x \vee y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} N(x) \geq N(x \vee y) \\ N(y) \geq N(x \vee y) \end{cases}$

$\Longrightarrow N(x \vee y) \leq N(x) \wedge N(y) \ldots\ldots\ldots (1)$.

On veut montrer que $N(x \vee y) \geq N(x) \wedge N(y)$.

Soit z : $\begin{cases} z \leq N(x) \\ z \leq N(y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} Nz \geq x \\ Nz \geq y \end{cases} \Longrightarrow x \vee y \leq Nz$

$\Longrightarrow z \leq N(x \vee y)$.

Et on a $\begin{cases} N(x) \wedge N(y) \leq N(x) \\ N(x) \wedge N(y) \leq N(y) \end{cases}$

Donc $N(x \vee y) \geq N(x) \wedge N(y) \ldots\ldots\ldots (2)$.

De (1) et (2) on obtient $N(x \vee y) = N(x) \wedge N(y)$.

Et veut même chose pour $N(x \wedge y) = N(x) \vee N(y)$.

3/ $N(0) = 1$, $N(1) = 0$.

- $N(1) \stackrel{?}{=} 0$.

On a $\forall x \in L : N(x) \geq 0$

donc $N(1) \geq 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

et on a $\forall x \in L : N(x) \leq 1$.

$$\begin{cases} x \geq N(1) \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow N(1) \leq 0 \ldots\ldots\ldots (2)$$

de (1) et (2) : $0 \leq N(1) \leq 0$, donc : $N(1) = 0$

- $N(0) \stackrel{?}{=} 1$.

$$\begin{aligned} \text{On a } N(1) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad NN(1) = N(0) \\ &\Longrightarrow \quad 1 = N(0) \end{aligned}$$

4/ $\mu(1) = 1$.

On a $\forall x \in L : \mu(x) \geq x$, donc : $\mu(1) \geq 1$

Et d'autre part : alors $\forall x \in L : \mu(x) \leq 1$ alors $\mu(1) \leq 1$

$\mu(1) \geq 1$ et $\mu(1) \leq 1$ donc $\mu(1) = 1$.

5/ $\mu(0) \stackrel{?}{=} 0$.

$\forall x \in L : (L_6) \forall x \in L : x \wedge N(x) = \mu(x) \wedge N(x)$.

Pour $x = 0$ on a :

$$\begin{aligned} 0 \wedge N(0) &= \mu(0) \wedge N(0) \\ 0 \wedge 1 &= \mu(0) \wedge 1 \\ 0 &= \mu(0). \end{aligned}$$

Donc : $\mu(0) = 0$.

6/ $N\mu(x) \leq N(x) \leq \mu N(x)$

On a : $\forall x \in L : \mu(x) \geq x \Longrightarrow N(x) \geq N\mu(x) \ldots\ldots\ldots (1)$.

D'autre par $\mu N(x) \geq N(x)$ (μ extensif) $\ldots\ldots\ldots (2)$.

De (1) et (2) on obtient $N\mu(x) \leq N(x) \leq \mu N(x)$.

7/ $N\mu(Nx) \leq x \leq \mu(x)$

En utilisant la propriété (6) on obtient :

$$\begin{aligned} \text{On a : } N\mu(x) \leq N(x) \quad &\Longrightarrow \quad N(N(x)) \leq N(N\mu(x)) \\ &\Longrightarrow \quad x \leq \mu(x) \ldots\ldots\ldots (1). \end{aligned}$$

D'autre part : on a $N(x) \leq \mu N(x) \implies N\mu N(x) \leq N(N(x))$.

$\implies N\mu N(x) \leq x \ldots\ldots\ldots(2)$.

De (1) et (2) on obtient $N\mu N(x) \leq x \leq \mu(x)$.

8 ν et η sont des endomorphismes rétractants, idempotentes.

On pose $\begin{cases} N\mu = \eta \\ \mu N = \gamma \\ N\mu N = \nu \end{cases}$

1) ν **endomorphisme :**

$$\begin{aligned}
\nu(x \vee y) &= N\mu N(x \vee y) \\
&= N\mu(Nx \wedge Ny) \\
&= N(\mu Nx \wedge \mu Ny)(\text{car } \mu \text{ endomorphisme}) \\
&= N\mu N(x) \vee N\mu N(y) \\
\nu(x \vee y) &= \nu(x) \vee \nu(y). \\
\nu(x \wedge y) &= N\mu N(x \wedge y) \\
&= N\mu(Nx \vee Ny) \\
&= N(\mu Nx \vee \mu Ny) \\
&= N\mu N(x) \wedge N\mu N(y) \\
&= \nu(x) \wedge \nu(y).
\end{aligned}$$

Donc ν endomorphisme.

2) ν **est une rétraction :**

$\nu x = N\mu N(x) \leq x$ (d'après la propriété 7)

$\nu x \leq x$, donc rétractent.

3) ν **idempotente :**

$$\begin{aligned}
\nu\nu x &= N\mu N(N\mu Nx) \\
&= N\mu NN(\mu Nx) \\
&= N\mu\mu(Nx) \\
&= N\mu Nx \\
&= \nu x.
\end{aligned}$$

Donc ν idempotente **.**

9/ η et γ vérifiant les lois de De Morgan appelé dualités.

$\eta(x \vee y) = \eta x \wedge \eta y$.

$\eta(x \wedge y) = \eta x \vee \eta y$.

En effet

$$\begin{aligned}\eta(x \vee y) &= N\mu N(x \vee y)\\ &= N(\mu x \vee \mu y)\\ &= N\mu x \wedge N\mu y\\ &= \eta x \wedge \eta y.\end{aligned}$$

Et veut même chose pour $\eta(x \wedge y) = \eta x \vee \eta y$.

10/ $\eta x \leq Nx \leq \gamma x$.

On a $\nu(x) \leq x \leq \mu(x)$, en remplaçant x par Nx :

donc $\mu(Nx) \leq Nx \leq \nu(Nx)$.

Alors $\eta x \leq Nx \leq \gamma x$.

Les 6 opérateurs $\{I, N, \mu, N\mu, \mu N, N\mu N\}$ forment un monoïde avec la table suivante :

$\circ$	I	N	μ	ν	η	γ
I	I	N	μ	ν	η	γ
N	N	I	η	γ	μ	ν
μ	μ	γ	μ	ν	η	γ
ν	ν	η	μ	ν	η	γ
η	η	ν	η	γ	μ	ν
γ	γ	μ	η	γ	μ	ν

Ce monoïde est engendré par N et l'un quelconque de μ, ν, η, γ.

11/ L_5 est équivalente à :

1- $x \vee \gamma x = 1$.

2- $\eta x \vee \mu x = 1$.

3- $\nu x \vee \gamma x = 1$.

4- $\mu x \vee \gamma x = 1$.

Preuve. :

• (L_5) $\Longrightarrow$ (1)

On suppose que : $Nx \vee \mu x = 1$.

Remplaçons x par Nx dans L_5,on obtient :

$Nx \vee \mu x = NNx \vee \mu Nx = 1$

$\Longrightarrow x \vee \mu Nx = 1$ i.e. $x \vee \gamma x = 1$.

Donc (L_5) $\Longrightarrow$ (1).

• (1) $\Longrightarrow$ (L_5)

On suppose que : $x \vee \gamma x = 1$.

En remplaçant x par Nx,on obtient :

$Nx \vee \gamma Nx = 1 \Longrightarrow Nx \vee \mu x = 1.$

Donc (L_5) $\Longleftrightarrow$ (1)

• (1) $\Longrightarrow$ (2).

On suppose que :

$x \vee \gamma x = 1.$

En remplaçant x par μx :

$x \vee \gamma x = 1.$

$\Longrightarrow \mu x \vee \gamma \mu x = 1$

$\Longrightarrow \mu x \vee \eta x = 1.$

Donc (1) $\Longrightarrow$ (2).

• (2) $\Longrightarrow$ (3).

Supposons que :

$\eta x \vee \mu x = 1.$

En remplaçant x par Nx

$$\begin{array}{rcl} \eta x \vee \mu x & = & \eta Nx \vee \mu Nx \\ & = & \nu x \vee \gamma x \\ & = & 1. \end{array}$$

Donc (2) $\Longrightarrow$ (3).

• (3) $\Longrightarrow$ (1)

Supposons que : $\nu x \vee \gamma x = 1.$

On a $\forall x \in L : \nu x \leq x.$

Donc $\nu x \vee \gamma x \leq x \vee \gamma x$ alors $x \vee \gamma x = 1.$

i.e. (3) $\Longrightarrow$ (1)

• (L_5) $\Longrightarrow$ (4)

Supposons que : $Nx \vee \mu x = 1.$

$$\text{On a } \forall x \in L : \begin{array}{rcl} Nx & \leq & \mu Nx \\ Nx & \leq & \gamma x. \end{array}$$

Donc $Nx \vee \mu x \leq \mu x \vee \gamma x.$

$\Longrightarrow \ 1 \leq \mu x \vee \gamma x.$

$\Longrightarrow \ \mu x \vee \gamma x = 1.$

Donc (L_5) $\Longrightarrow$ (4).

• (4) $\Longrightarrow$ (2).

On suppose que : $\mu x \vee \gamma x = 1.$

Remplaçant x par μx.

$$\begin{aligned} \mu x \vee \gamma x &= \mu\mu x \vee \gamma\mu x \\ &= \mu x \vee \eta x \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc (4) $\Longrightarrow$ (2). ■

12/ L_5 est équivalente à :

1. $\mu x \wedge \eta x = 0.$

2. $\eta x \wedge x = 0.$

3. $\eta x \wedge \nu x = 0$

4. $\gamma x \wedge \nu x = 0.$

5. $Nx \wedge \nu x = 0.$

Preuve.

• $L_5 \overset{?}{\Longrightarrow}$ (1).

On a $Nx \vee \mu x = 1.$

Remplaçant x par μx :

$$\begin{aligned} Nx \vee \mu x = 1 &\Longrightarrow N(Nx \vee \mu x) = N(1) \\ &\Longrightarrow x \wedge N\mu x = 0. \end{aligned}$$

Remplacer x par μx :

$\mu x \wedge N\mu\mu x = 0 \Longrightarrow \mu x \wedge \eta x = 0.$

Donc $L_5 \Longrightarrow$ (1).

• (1) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ (2)

$\mu x \wedge \eta x = 0 \Longrightarrow \eta x \wedge x = 0.$

On a $x \leq \mu x \Longrightarrow \eta x \wedge x \leq \eta x \wedge \mu x = 0.$

Donc $\eta x \wedge x = 0.$

Alors (1) $\Longrightarrow$ (2)

• (2) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ (3)

$\eta x \wedge x = 0 \Longrightarrow \eta x \wedge \nu x = 0$

On a $\nu x \leq x \Longrightarrow \eta x \wedge \nu x \leq \eta x \wedge x = 0.$

Donc $\eta x \wedge \nu x = 0.$

Alors (2) $\Longrightarrow$ (3)

• (3) $\overset{?}{\Longrightarrow}$ (4)

$\eta x \wedge \nu x = 0 \Longrightarrow \gamma x \wedge \nu x = 0.$

$N\mu x \wedge N\mu N x = 0.$

Remplaçant x par μx :

$N\mu\mu x \wedge N\mu N\mu x = 0$,on obtient $N\mu x \wedge \mu x = 0.$

Et en remplaçant x par Nx :

$N\mu Nx \wedge \mu Nx = 0 \implies \gamma x \wedge \nu x = 0.$

Alors (3) $\implies$ (4).

• (4) $\overset{?}{\implies}$ (5)

$\gamma x \wedge \nu x = 0 \implies Nx \wedge \nu x = 0.$

On a $Nx \leq \gamma x \implies Nx \wedge \nu x \leq \gamma x \wedge \nu x = 0$

Donc $Nx \wedge \nu x = 0.$

Alors (4) $\implies$ (5).

• (5) $\overset{?}{\implies}$ L_5

$Nx \wedge \nu x = 0 \implies Nx \vee \mu x = 1.$

$$\begin{aligned} Nx \wedge \nu x = 0 &\implies N(Nx \wedge \nu x) = N(0) \\ &\implies x \vee \mu Nx = 1. \end{aligned}$$

En remplaçant x par Nx :

$Nx \vee \mu x = 1.$ ■

13/ L_6 est équivalente à :

(1) $x \wedge Nx = x \wedge \gamma x.$

(2) $x \vee Nx = x \vee \eta x.$

(3) $x \vee Nx = \nu x \vee Nx$

Preuve.

On a : $L_6 = x \wedge Nx = \mu x \wedge Nx.$

(1) $L_6 \overset{?}{\Longrightarrow}$ (1).

On suppose $x \longleftarrow Nx.$

$\mu x \wedge Nx = \mu Nx \wedge NNx = \gamma x \wedge x.$

Donc $L_6 \Longrightarrow$ (1).

(1) $\overset{?}{\implies}$ L_6.

On suppose $x \longleftarrow Nx.$

$x \wedge Nx = Nx \wedge \gamma Nx = Nx \wedge \mu x.$

Donc $1 \Longrightarrow L_6.$

(2) $L_6 \overset{?}{\Longleftrightarrow}$ (2).

$$\begin{aligned} (x \wedge Nx = \mu x \wedge Nx) &\iff N(x \wedge Nx) = N(\mu x \wedge Nx) \\ &\iff Nx \vee x = \eta x \vee x. \end{aligned}$$

(3) (1) $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ (3).

$$\begin{aligned} Nx \vee NNx &= Nx \vee N\gamma x. \\ Nx \vee x &= Nx \vee \nu x. \end{aligned}$$

Donc (1) $\Longleftrightarrow$ (3). $\blacksquare$

14/

a) $\mu x \wedge Nx = x \wedge \gamma x.$

b) $x \wedge \eta x = Nx \vee \nu x.$

a) $\mu x \wedge Nx \stackrel{?}{=} x \wedge \gamma x.$

D'apré la propriété 13.1

$x \wedge \gamma x = x \wedge Nx = \mu x \wedge Nx.$

b) $x \vee \eta x \stackrel{?}{=} Nx \vee \nu x.$

D'apré la propriété 13.2 et 13.3

$x \vee \eta x = x \vee Nx = Nx \vee \nu x.$

Propriétés fondamentales :

$Nx = \eta x \vee (x \wedge \gamma x).$

Preuve. : On sait que :

$(x \leq \mu x)$ d'où $x = x \wedge \mu x.$

$$\begin{aligned} x \vee 0 &= x \vee (\mu x \wedge \eta x) \\ &= (x \wedge \mu x) \vee (\mu x \wedge \eta x) \\ &= \mu x \wedge (x \vee \eta x). \end{aligned}$$

Et on a : $x = \mu x \wedge (Nx \vee \nu x) \ldots\ldots (*)$

$$\begin{aligned} \text{Donc } Nx &= N\mu x \vee (NNx \wedge N\nu x) \\ &= \eta x \vee (x \wedge \gamma x) \end{aligned}$$ $\blacksquare$

2.2.2 Principe de détermination de Moisil

Proposition 2.1 *[3]*

$$\begin{cases} \mu x = \mu y \\ \nu x = \nu y \end{cases} \Longrightarrow x = y.$$

Preuve. :

Supposons que : $\mu x = \mu y$ et $\nu x = \nu y$.

D'après $(*)$:

$$\begin{aligned} x \vee y &= \mu(x \vee y) \wedge [N(x \vee y) \vee \nu(x \vee y)]. \\ &= (\mu x \vee \mu y) \wedge [(Nx \wedge Ny) \vee (\nu x \vee \nu y)]. \\ &= \mu x \wedge (Nx \vee \nu x) \wedge \mu y \wedge (Ny \vee \nu y). \\ &= x \wedge y \end{aligned}$$

Donc : $x \vee y = x \wedge y$.

$x \wedge y \leq x \leq x \vee y$.

$x \vee y \leq x \leq x \vee y$.

$\Longrightarrow x \vee y = x$. Mais $x \vee y = y$.

$\Longrightarrow x = y$. ■

Corollaire 2.1 *:*

$$\begin{cases} \mu x \leq \mu y \\ \nu x \leq \nu y \end{cases} \Longrightarrow x \leq y.$$

Preuve.

Preuve par l'absurde : supposons que $x \nleq y$.

$x \nleq y \Longleftrightarrow y < x$ *ou* $x \parallel y$ *(* $\parallel$ *appelé incomparable)*

1 $^{\text{ère}}$ *cas* $y < x$ *:*

$y < x \underset{endomorphisme}{\overset{\mu}{\Longrightarrow}} \mu(y) \leq \mu(x)$ *et par hypothèses*

$\mu(x) \leq \mu(y) \Longrightarrow \mu(x) = \mu(y) \ldots\ldots (*)$

$y < x \underset{endomorphisme}{\overset{\mu}{\Longrightarrow}} \nu(y) \leq \nu(x)$ *et par hypothèses*

$\nu(x) \leq \nu(y) \Longrightarrow \nu(x) = \nu(y) \ldots\ldots (**)$

d'après $(*)$ *et* $(**)$ *on a* $\begin{cases} \mu x = \mu y \\ \nu x = \nu y \end{cases} \Longrightarrow x = y$ *(Principe de détermination de Moisil)*

(Contradiction car $y < x$*).*

2 $^{\text{ème}}$ *cas* $x \parallel y$ *:*

$x \parallel y \Longrightarrow x \wedge y = a$ *tq :* $\begin{cases} a < x \\ a < y \end{cases}$

$$x \wedge y = a \Longrightarrow \begin{cases} \mu(x \wedge y) = \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(a) \\ \nu(x \wedge y) = \nu(x) \wedge \nu(y) = \nu(a) \end{cases}$$

d'autre part : $\begin{cases} \mu(x) \leq \mu(y) \\ \nu(x) \leq \nu(y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(x) \\ \nu(x) \wedge \nu(y) = \nu(x) \end{cases}$

$\Longrightarrow \begin{cases} \mu(x) = \mu(a) \\ \nu(x) = \nu(a) \end{cases} \Longrightarrow x = a$ *(contradiction, car* $a < x$*).* ■

2.3 Deuxième axiomatisations des Ł$_3$ algèbres

Dans cette section on va parler sur la $1^{érè}$ axiomatisation est du a Moisil (1940)(voir [9]) c'est à dire l'ensemble des axiomes L_1 à L_6 est équivalent à la suivante :

Une Ł$_3$ algèbre est une structure $(L, \wedge, \vee, 0, 1, \mu, \nu)$ tel que :

$\mathbf{L}_1'$: $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ est un treillis distributif fermé,

$\mathbf{L}_2'$: μ, ν sont des endomorphisme conservant 0 et 1,

$\mathbf{L}_3'$: $\mu\nu = \nu, \nu\mu = \nu$,

$\mathbf{L}_4'$: $\nu \leq \mu$,

$\mathbf{L}_5'$: $\mu(x) = \mu(y), \nu(x) = \nu(y) \implies x = y$,

$\mathbf{L}_6'$: μ, ν sont chrysippiens : $\mu, \nu : L \longrightarrow CL = \{$ des éléments complémentés de $L\}$.

La première axiomatisation est equivalente ($\iff^{te}$) a la deuxième axiomatisation.

Preuve. $1 \implies 2$

- Supposons que on a L_1, L_1' est donc vérifié.
- L_2' pour cela il suffit de poser :

$\nu = N\mu Nx$.

Donc L_2' est vérifié.

- L_3 on a :

$$\begin{aligned} \mu\nu &= \mu N\mu N \\ &= N\mu N\mu NN \\ &= N\mu N \\ &= \nu. \\ \nu\mu &= N\mu N\mu \\ &= \mu. \end{aligned}$$

- L_4' on a :

$\nu x \leq \mu x$ d'après $_3$ $Nx \leq \mu Nx \implies x \geq N\mu Nx = \nu x, x \leq \mu x \implies \nu x \leq \mu x$.

- L_5'(on va montrer par proposition 2.1)
- L_6' μ est ν sont chrysippiens :

μ est chrysippiens ?

$Nx \vee \mu x = 1$ en utilisant $_3$ et en posant $x = \mu x$.

$$\begin{aligned} N\mu x \vee \mu\mu x = 1 &\implies NN\mu x \wedge N\mu\mu x = 0 \\ &\implies \mu x \wedge N\mu x = 0 \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} N\mu x \vee \mu x = 1 \\ N\mu x \wedge \mu x = 0 \end{cases}$

alors μx est complément est (chrysippiens) et son complément $N\mu x = \overline{\mu}x$.

- ν est chrysippiens ?

D'après L_5, en utilisant $_3$ et on posant $x = \nu x$.

$$\begin{aligned} N\nu x \vee \nu x = 1 \quad &\Longrightarrow \quad NN\nu x \wedge N\nu x = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \nu x \wedge N\nu x = 0 \end{aligned}$$

Donc $\begin{cases} N\mu x \vee \mu x = 1 \\ N\mu x \wedge \mu x = 0 \end{cases}$

Alors νx est complément est (chysippiens) et sont complément $N\nu x = \overline{\nu}x$.

$2 \Longrightarrow 1$

Supposons que j'ai les axiomes $L'_1 \Longrightarrow L'_6$.

- L_1 est vérifiè.
- L'_2 : Posant $Nx = \overline{\mu}x \vee (x \wedge \overline{\nu}x)$ N est une involution décroissante.

N une involution $NNx = \overline{\mu}Nx \vee (Nx \wedge \overline{\nu}Nx)$.

Essayons d'exprimer $\overline{\mu}$ et $\overline{\nu}$

On $\mu x \wedge \overline{\mu}x = 0$ et $\mu x \vee \overline{\mu}x = 1$.

En prenons l'image que μ

$\begin{cases} \mu x \wedge \mu\overline{\mu}x = 0 \\ \mu x \vee \mu\overline{\mu}x = 1 \end{cases}$

donc $\mu\overline{\mu} = \overline{\mu}$.

En remplaçant x par μx.

$\begin{cases} \mu x \wedge \overline{\mu}\mu x = 0 \\ \mu x \vee \overline{\mu}\mu x = 1 \end{cases}$

on a $\overline{\mu}\mu = N\mu\mu = \overline{\mu}$.

En prenant l'image que ν

$\begin{cases} \mu x \wedge \nu\overline{\mu}x = 0 \\ \mu x \vee \nu\overline{\mu}x = 1 \end{cases}$

on obtient

$$\begin{aligned} \text{- } \nu\overline{\mu} &= N\mu NN\mu \\ &= N\mu\mu \\ &= \overline{\mu}. \end{aligned}$$

Alors $\nu\overline{\mu} = \overline{\mu}$.

$$\begin{aligned} \text{- } \nu\overline{\nu} &= N\mu NNN\mu N \\ &= N\mu N\mu N \\ &= \overline{\nu}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{\nu}\nu &= NN\mu NN\mu N \\ &= NN\mu N \\ &= \overline{\nu}. \end{aligned}$$

Donc $\mu\overline{\nu} = \overline{\nu}$, $\nu\overline{\mu} = \overline{u}$, $\overline{\mu\mu} = \overline{\mu}$, $\overline{\nu\nu} = \nu$, $\overline{\mu}\nu = \nu$.

Alors L_2est vérifie.

définissons N par :

$$\begin{aligned} Nx &= \overline{\mu}x \vee (x \wedge \overline{\nu}x) \\ NNx &= \overline{\mu}Nx \vee (Nx \wedge \overline{\nu}Nx). \end{aligned}$$

Exprimons $\overline{\mu}Nx$, $\overline{\nu}Nx$, en terme de μx, νx.

$$\begin{aligned} \overline{\mu}Nx &= \overline{\mu\mu}x \wedge (\overline{\mu}x \vee \overline{\mu\nu}x) \\ &= \mu x \wedge (\overline{\mu}x \vee \nu x) \\ &= \mu x \wedge \overline{\mu}x \vee \mu x \wedge \nu x) \\ &= \nu x. \\ \overline{\nu}Nx &= \overline{\nu\mu}x \wedge (\overline{\nu}x \vee \overline{\nu\nu}x) \\ &= \mu x \wedge (\overline{\nu}x \vee \nu x) \\ &= \mu x. \\ NNx &= \overline{\mu}(Nx) \vee (Nx \wedge \overline{\nu}(Nx)) \\ &= \nu x \vee (Nx \wedge \mu x) \\ &= (\nu x \vee Nx) \wedge (\nu x \vee \mu x) \\ &= [\nu x \vee \overline{\mu}x \vee (x \wedge \overline{\nu}x)] \wedge \mu x \\ &= [(\nu x \vee \overline{\mu}x \vee x) \wedge (\nu x \vee \overline{\mu}x \vee \overline{\nu}x)] \wedge \mu x \\ &= (\nu x \vee \overline{\mu}x \vee x) \wedge \mu x \\ &= (\overline{\mu}x \wedge \mu x) \vee (\nu x \wedge \mu x) \vee (x \wedge \mu x) \\ &= x. \end{aligned}$$

On suppose $\nu x \vee x = y$.

$$\begin{aligned} \mu y &= \mu(\nu x \vee x) \\ &= \mu\nu x \vee \mu x \\ &= \nu x \vee \mu x \\ &= \mu x. \\ \nu(y) &= \nu(\nu x \vee x) \\ &= \nu(x) \vee \nu(x) \\ &= \nu(x). \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \mu(x) = \mu(y) \\ \nu(x) = \nu(y) \end{cases} \Longrightarrow x = y.$$

- N est décroissante ?

Si $x \leq y \Longrightarrow \begin{cases} \overline{\nu}(y) \leq \overline{\nu}(x) \\ \overline{\mu}(y) \leq \overline{\mu}(x) \end{cases}$

$$\begin{cases} \mu(Ny) \leq \mu(Nx) \\ \nu(Ny) \leq \nu(Nx) \end{cases} \Longrightarrow N(y) \leq N(x).$$

$$\begin{aligned}\mu(Nx) &= \mu\overline{\mu}x \vee (\mu x \wedge \mu\overline{\nu}x)\\ &= \overline{\mu}x \vee (\mu x \wedge \overline{\nu}x)\\ &= (\overline{\mu}x \vee \mu x) \wedge (\overline{\mu}x \wedge \overline{\nu}x)\\ &= \overline{\mu}x.\end{aligned}$$

On a $\nu \leq \mu$ d'où $\begin{array}{ccc}\mu(Nx) & \geq & \mu(Ny)\\ \overline{\nu}(x) & \geq & \overline{\nu}(y)\end{array}$

• L_3 : μ est un endomorphisme sur L, idempotent extensif.

$\mu\mu = \mu, \nu\mu = \mu.$

$\begin{cases}\mu x \leq \mu\mu x\\ \nu x \leq \nu\mu x\end{cases} \implies x \leq \mu x$ donc est extensif.

• L_4 est vérifie i.e.$N\mu N\mu x = \mu x$.

$$\begin{aligned}N\mu x &= \overline{\mu}(\mu x) \vee (\mu x \wedge \overline{\nu}(\mu x))\\ &= \overline{\mu}x \vee (\mu x \wedge \overline{\mu}x))\\ &= \overline{\mu}x.\end{aligned}$$

$\mu\overline{\mu}(x) = \overline{\mu}.$

$$\begin{aligned}N\overline{\mu}(x) &= \overline{\mu}(\overline{\mu}x) \vee (\overline{\mu}x \wedge \overline{\nu}(\overline{\mu}x))\\ &= \mu x \vee (\overline{\mu}x \wedge \nu x)\\ &= (\mu x \vee \overline{\mu}x) \wedge (\mu x \vee \nu x)\\ &= 1 \wedge \mu x\\ &= \mu x.\end{aligned}$$

$N\mu N\mu = \mu.$

• L_5 $Nx \vee \mu x = 1$.

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(x) \vee (x \wedge \overline{\nu}(x)) \vee \mu x &= 1\\ (\overline{\mu}(x) \vee \mu x) \vee (x \wedge \overline{\nu}(x)) &= 1 \vee (x \wedge \overline{\nu}(x))\\ &= 1.\end{aligned}$$

• L_6 $x \wedge Nx = \mu x \wedge Nx$.

$$\begin{aligned}x \wedge Nx &= x \wedge (\overline{\mu}(x) \vee (x \wedge \overline{\nu}(x)))\\ &= (x \wedge \overline{\mu}(x)) \vee (x \wedge (x \wedge \overline{\nu}(x)))\\ &= (x \wedge \overline{\mu}(x)) \vee (x \wedge \overline{\nu}(x))\\ &= x \wedge \overline{\nu}(x).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu x \wedge Nx &= \mu x \wedge (\overline{\mu}(x) \vee (x \wedge \overline{\nu}(x)))\\ &= (\mu x \wedge \overline{\mu}(x)) \vee (\mu x \wedge (x \wedge \overline{\nu}(x)))\\ &= \mu x \wedge (x \wedge \overline{\nu}(x))\\ &= x \wedge \overline{\nu}(x).\end{aligned}$$ ■

Chapitre 3

Représentation des algèbres trivalentes de Łukasiewicz

Dans ce chapitre on présenter la représentation des algèbres trivalentes de Łukasiewicz et représentation des algèbres trivalentes par des partie floue, on étudie à l'aide l'ensemble des parties floues.pour plus de détails voire [2]

3.1 Théorème de représentation des algèbres trivalentes de Łukasiewicz

L'objet de ce problème est d'obtenir des Théorème de représentation pour les algèbres trivalentes de Łukasiewicz.

3.1.1 Représentation d'un treillis distributif et fermé.

On considère un treillis L distributif et fermé. On désigné par $C(L)$ le sous treillis booléen des éléments complémentés (ou chrysippiens) de L, si $x \in C(L)$ on note x' son complément.

Proposition 3.1 *:*

Soit a un éléments fixé de L, on définit la relations binaire dans L, notée :
$x \equiv y(a)$, *par :* $a \wedge x = a \wedge y$.

$(\equiv)$ *c'est une relation d'équivalence compatible avec les lois* $\wedge$ *et* $\vee$*. On pourra définir le treillis quotient qui sera noté par* L/a.

Preuve. :

• On montre que $(\equiv)$ est une **relation d'équivalence** on a :

La réflexivité :

$a \wedge x = a \wedge x \implies x \equiv x(a)$ donc xRx.

La symétrie :

$xRy \implies yRx$.

$$\begin{aligned} x \equiv y(a) &\iff a \wedge x = a \wedge y \\ &\iff a \wedge y = a \wedge x \\ &\iff y \equiv x(a). \end{aligned}$$

La transitivité :

$xRy \wedge yRz. \implies xRz.$

Soit $x, y, z \in L$.

$$\begin{cases} x \equiv y(a) \\ y \equiv z(a) \end{cases} \iff \begin{cases} a \wedge x = a \wedge y \\ a \wedge y = a \wedge z \end{cases} \implies a \wedge x = a \wedge z.$$

Donc $x \equiv z(a)$.

Donc $(R = \equiv)$ est relations d'équivalence.

• **Compatibilité de R** avec les lois $\wedge, \vee$.

$$(xRy \text{ et } x'Ry') \implies \begin{cases} x \wedge x'Ry \wedge y' \\ x \vee x'Ry \vee y' \end{cases}$$

soient $\begin{cases} xRy \\ x'Ry' \end{cases} \iff \begin{cases} a \wedge x = a \wedge y \ldots\ldots (1) \\ a \wedge x' = a \wedge y' \ldots\ldots (2) \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} (1) \wedge (2) \iff a \wedge (x \wedge x') = a \wedge (y \wedge y') \\ (1) \vee (2) \iff a \wedge (x \vee x') = a \wedge (y \vee y') \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} (x \wedge x') \equiv (y \wedge y')(a) \\ (x \vee x') \equiv (y \vee y')(a) \end{cases}$$

Alors $(\equiv)$ compatible avec $\wedge$ et $\vee$. ■

Conclusion 3.1 *:*

Comme $(\equiv)$ est une relations d'éqivalence sur le treillis $(L, \wedge, \vee)$ et compatible avec les lois ($\wedge$ et $\vee$) alors L/a treillis quotient.

Lemme 3.1 *:*

Soit a un éléments fixé de $C(L)$,pour tout éléments x de L on notera $\overline{x}$ sa classe dans L/a et $\widetilde{x}$ sa classe dans L/a'.

On a L'application θ définie par $\theta(x) = (\overline{x}, \widetilde{x})$ est un isomorphisme du treillis L sur le treillis produit $L/a \times L/a'$.

Preuve. : On a $\theta : L \longrightarrow L/a \times L/a'$.

$$x \longmapsto \theta(x) = (\overline{x}, \widetilde{x})$$

• θ es **morphisme** de treillis.

$$\begin{array}{rcl} - \theta(x \wedge y) & = & (\overline{x \wedge y}, \widetilde{x \wedge y}) \\ & = & (\overline{x} \wedge \overline{y}, \widetilde{x} \wedge \widetilde{y}) \\ & = & \theta(x) \wedge \theta(y). \\ - \theta(x \vee y) & = & (\overline{x \vee y}, \widetilde{x \vee y}) \\ & = & (\overline{x} \vee \overline{y}, \widetilde{x} \vee \widetilde{y}) \\ & = & \theta(x) \vee \theta(y). \end{array}$$

Donc θ est morphisme.

• $\theta(0) = (\overline{0}, \widetilde{0})$

$= 0_{L/a \times L/a'}$.

• $\theta(1) = (\overline{1}, \widetilde{1})$

$= 1_{L/a \times L/a'}$.

• θ **bijective** :

- θ est *injective :*

Soient $x, y \in L^2$, $\theta(x) = \theta(y) \overset{?}{\Longrightarrow} x = y$.

$$(\overline{x}, \widetilde{x}) = (\overline{y}, \widetilde{y}) \Longrightarrow \begin{cases} \overline{x} = \overline{y} \\ \widetilde{x} = \widetilde{y} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a \wedge x = a \wedge y. \\ a' \wedge x = a' \wedge y. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} (a \wedge x) \vee (a' \wedge x) & = & (a \wedge y) \vee (a' \wedge y) \\ x \wedge (a \vee a') & = & y \wedge (a \vee a') \\ x & = & y \end{array}$$

donc θ est injective.

- θ est surjective : $\forall\ (y) \in L/a \times L/a', \exists x \overset{?}{\in} L$ tel que $y = (\overline{y}, \widetilde{z})$.

On va résoudre l'équation $\theta(x) = y$

$\theta(x) = y \Longleftrightarrow (\overline{x}, \widetilde{x}) = (\overline{y}, \widetilde{z})$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \overline{x} = \overline{y} \\ \widetilde{x} = \widetilde{z} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a \wedge x = a \wedge y \ldots\ldots (1) \\ a' \wedge x = a' \wedge z \ldots\ldots (2) \end{cases}$$

donc de (1) ou (2) on a

$$\begin{array}{rcl} (a \wedge x) \vee (a' \wedge x) & = & (a \wedge y) \vee (a' \wedge z) \\ x \wedge (a \vee a') & = & (a \wedge y) \vee (a' \wedge z) \\ x & = & (a \wedge y) \vee (a' \wedge z) \in L. \end{array}$$

Donc $\theta(x) = y$ admet un solution, alors θ est surjective.

Comme θ morphisme de treillis et bijective, alors θ est isomorphisme de treillis.

■

3.1.2 Complément sur Ł$_3$ algèbre

Définition 3.1 :

Soit $(L,\wedge,\vee,1,0,N,\mu)$ une Ł$_3$ algèbre (au sens de la première définition de Moisil),on a y définit comme d'habitude les autres modalités η,γ,ν. On définira également deux nouveaux σ et τ par :

$\sigma(x)=\nu(x)\vee\eta(x)$.

$\tau(x)=\mu(x)\wedge\gamma(x)$.

On pose les définitions suivantes :

- Un éléments x de L est dit possible si $\mu(x)=1$.
- Un éléments x de L est dit contingent si $\gamma(x)=1$.
- Un éléments x de L est dit centre s'il est à la fois possible contingent.

Proposition 3.2 *Pour tout $x\in L$, $x\vee N(x)$ est possible.*

Preuve.

a) On a

$$\begin{aligned}\mu(x\vee Nx) &= \mu(x)\vee\mu(Nx);\\ &= \mu(x)\vee\gamma(x) \text{ (d'après propriétés 11);}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc $x\vee N(x)$ est possible ■

Proposition 3.3 *Pour tout $x\in L$, $x\wedge N(x)$ est contingent.*

Preuve. : On a

$$\begin{aligned}\gamma(x\wedge N(x)) &= \mu N(x\wedge Nx)\\ &= \mu(Nx\vee x)\\ &= \mu(Nx)\vee\mu(x)\\ &= \gamma(x)\vee\mu(x)=1.\end{aligned}$$ ■

Proposition 3.4 *:*

Un centre s'il existe, il est unique

Preuve. Soient x,y deux centres, donc

$$\begin{cases}\mu(x)=\mu(y)=1\\ \gamma(x)=\gamma(y)=1\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}\mu(x)=\mu(y)=1.\\ N\gamma(x)=N\gamma(y)=0.\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}\mu(x)=\mu(y).\\ \nu(x)=\nu(y).\end{cases}\Longrightarrow x=y.$$

Alors le centre s'il existe est unique. ■

Proposition 3.5 *x centre $\Longleftrightarrow x = Nx$.*

Preuve. (i) x centre $\implies x = Nx$.

x centre alors $\mu(x) = 1, \gamma(x) = 1$. On a $y \wedge Ny = \mu(y) \wedge N(y), \forall y \in L$.

$$\begin{cases} \text{Si } y = x \Longrightarrow \\ \text{Si } y = Nx \Longrightarrow \end{cases} \begin{cases} x \wedge Nx = \mu(x) \wedge N(x) \\ x \wedge Nx = \gamma(x) \wedge x \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x \wedge Nx = 1 \wedge N(x) = N(x) \\ x \wedge Nx = 1 \wedge x = x \end{cases} \Longrightarrow x = N(x).$$

(ii) $x = Nx \stackrel{?}{\Longrightarrow} x$ centre.

$$\begin{aligned} \mu(x) \vee N(x) = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \mu(x) \vee x = 1 \text{ (car } x = Nx \text{)} \\ &\Longrightarrow \quad \mu(x) = 1 \text{ (car } x \leq \mu(x) \text{)} \\ &\Longrightarrow \quad \mu(Nx) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad \gamma(x) = 1. \end{aligned}$$

On a $\mu(x) = 1$ et $\gamma(x) = 1$ alors x centre. ■

Proposition 3.6 *:*

Soit $a \in C(L)$, La relations $(\equiv)$ (d'après la Proposition 2.1) est une relation d'équivalence est compatible avec N, μ :

Preuve. : La relations d'équivalence **Compatible avec** N :

$x \equiv y(a) \Longleftrightarrow N(x) \equiv N(y)(a)$.

Soit $(x, y) \in L^2$ tel que $x \equiv y(a) \Longleftrightarrow a \wedge x = a \wedge y$.

$$\begin{aligned} a' \vee (a \wedge x) &= a' \vee (a \wedge y) \\ (a' \vee a) \wedge (a' \vee x) &= (a' \vee a) \wedge (a' \vee y) \\ 1 \wedge (a' \vee x) &= 1 \wedge (a' \vee y). \end{aligned}$$

Donc
$$\begin{aligned} a' \vee x = a' \vee y \quad &\Longrightarrow \quad N(Na \vee x) = N(Na \vee y) \\ &\Longrightarrow \quad a \wedge N(x) = a \wedge N(y). \end{aligned}$$

Alors $a \wedge N(x) = a \wedge N(y) \Longleftrightarrow N(x) \equiv N(y)(a)$.

La relations d'équivalence est **compatible avec** μ **:**

On a $x \equiv y(a) \Longleftrightarrow a \wedge x = a \wedge y$.

$$\begin{aligned} a \wedge x = a \wedge y \quad \Longrightarrow \quad \mu(a \wedge x) &= \mu(a \wedge y) \\ \Longrightarrow \quad \mu(a) \wedge \mu(x) &= \mu(a) \wedge \mu(y) \\ \Longrightarrow \quad a \wedge \mu(x) &= a \wedge \mu(y) \text{ (comme } a \in L : \mu(a) = a); \end{aligned}$$

Alors $\mu(x) \equiv \mu(y)(a)$. ■

Corollaire 3.1 *:*

Comme $(\equiv)$ compatible avec $(\wedge, \vee, N, \mu)$ alors $(L/a, \leq', \wedge', \vee', N', \mu')$ est un L_3 algèbre quotient (car L est un L_3 algèbre)

Lemme 3.2 *Si L est un $Ł_3$-algèbre :*

l'application θ définie comme suite $\theta : L \longrightarrow L/a \times L/a'$

$$x \longmapsto \theta(x) = (\overline{x}, \widetilde{x}).$$

Est un isomorphe de $Ł_3$ algèbre.

Preuve. 1) par Lemme 3.1 θ est un isomorphisme de treillis fermé.

2) $\theta(Nx) = N'\theta(x)$, $\theta(\mu x) = \mu'\theta(x)$.

- $$\begin{aligned} \theta(Nx) = (\overline{Nx}, \widetilde{Nx}) &= N'(\overline{x}, \widetilde{x}) \\ &= N'\theta(x). \end{aligned}$$

Avec N' est l'involution de $Ł_3$ algèbre $L/a \times L/a'(N'(\overline{x}, \widetilde{x}) = (\overline{Nx}, \widetilde{Nx}))$.

- $$\begin{aligned} \theta(\mu x) = (\overline{\mu(x)}, \widetilde{\mu(x)}) &= \mu'(\overline{x}, \widetilde{x}) \\ &= \mu'\theta(x). \end{aligned}$$

Avec μ' est de $Ł_3$ algèbre $L/a \times L/a'(\mu'(\overline{x}, \widetilde{x}) = (\overline{\mu x}, \widetilde{\mu x}))$.

d'après (1) et (2) θ est isomorphisme de $Ł_3$ algèbre. ■

Propriété 3.1 *:*

1. $x \in C(L) \Longleftrightarrow \tau(x) = 0$.
2. $x \in L$ est un centre $\Longleftrightarrow \sigma(x) = 0$.
3. $\forall a \in L$, L est isomorphe (au sense des à $Ł_3$ algèbre) à $L/\sigma(a) \times L/\tau(a)$.

Preuve. :

pour tout x de L, L est isomorphe à $L/\sigma(a) \times L/\tau(a)$. On montrons que $\sigma(a)$ est complémente et sont complément est $\tau(a)$.

$$\tau(a) = (\sigma(a))' \Longleftrightarrow \begin{cases} \sigma(a) \wedge \tau(a) = 0 \\ \sigma(a) \vee \tau(a) = 1 \end{cases}$$

- $$\begin{aligned} \sigma(a) \wedge \tau(a) &= (\eta(a) \vee \nu(a)) \wedge (\mu(a) \wedge \gamma(a)) \\ &= (\eta(a) \wedge \mu(a) \wedge \gamma(a)) \vee (\mu(a) \wedge \gamma(a) \wedge \nu(a)) \\ &= (0 \wedge \gamma(a)) \vee (\mu(a) \wedge 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \sigma(a) \vee \tau(a) &= (\eta(a) \vee \nu(a)) \vee (\mu(a) \wedge \gamma(a)) \\ &= (\mu(a) \vee \eta(a) \vee \nu(a)) \wedge (\gamma(a) \vee \eta(a) \vee \nu(a)) \\ &= (1 \wedge \nu(a)) \wedge (\eta(a) \vee 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Donc $\sigma(a)$ est chrysippiens et sont complément est $\tau(a)$ par conséquence L est isomorphe à $L/\sigma(a) \times L/\tau(a)$. ■

Lemme 3.3 *:*

Soit L une $Ł_3$ algèbre ayant un centre w et dont tous les autres éléments sont chrysippiens, alors L est isomorphe a la chaine $T = \{1, \frac{1}{2}, 1\}$.

Preuve. : Soit $x \in L$ tel que $x \neq w$, donc $x \in C(L)$ si et seulement si $\mu(x) = x$.

On pourra distinguer les deux cas possibles

a) $x \wedge w = w$.

b) $x \wedge w \neq w \Longrightarrow (x \wedge w) \in C(L)$.

• Si $x \wedge w = w$, alors $\mu(x \wedge w) = \mu(w)$

$$\begin{array}{rcl} \Longrightarrow \mu(x) \wedge \mu(w) & = & \mu(w) \\ \Longrightarrow \quad x \wedge \mu(w) & = & \mu(w) \\ \Longrightarrow \quad x \wedge 1 & = & 1. \end{array}$$

Donc $x = 1$ (car w centre $\mu(w) = 1$).

• Si $(x \wedge w) \in C(L) \Longleftrightarrow \tau(x \wedge w) = 0$.

Donc

$$\begin{array}{rcl} \tau(x \wedge w) & = & 0 \\ \mu(x \wedge w) \wedge \gamma(x \wedge w) & = & 0 \\ \mu(x) \wedge \mu(w) \wedge \gamma(x) \wedge \gamma(w) & = & 0 \\ \mu(x) \wedge 1 \wedge \gamma(x) \wedge 1 & = & 0 \\ x & = & 0. \end{array}$$

Finalement $\forall x \in L$ tel que $x \neq w$.

Soit $x = 0$, soit $x = 1$ donc $L = \{0, w, 1\} \approxeq T = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. ■

3.1.3 Représentation de $Ł_3$ algèbre de la forme $U^p \times T^q$.

Soit L un $Ł_3$ algèbre fini ($|L| = n$), alors L est isomorphe à un produit fini $U^p \times T^q (p \geq 0, q \geq 0)$, ou $U = \{0, 1\}$, $T = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Preuve. Par récurrence sur le cardinal de $L(|L| = n)$

• Si $|L| = 2 \implies L = \{0, 1\} = U$.

Donc $L \approxeq U^1 \times T^0$.

• Si $|L| = 3 \implies L = \{0, w, 1\}$.

Donc $L \approxeq U^0 \times T^1$.

On suppose la propriété de récurrence est valable jusqu'à n et on le démontre pour $n + 1$.

Supposon $|L| = n + 1$, donc on a 3 cas possible :

i) Si $L = C(L), L \approxeq \{0, 1\}^p = U^p$.

Donc $L \approxeq U^p \times T^0$, Alors la propriété vraie.

ii) Si $L = C(L) \cup \{w\}$ donc forcément w est le centre de L (par Lemme 3.4) on a

$L \approxeq T = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Donc $L \approxeq U^0 \times T^1$, Alors la propriété vraie.

iii) Si L possède un éléments a tel que a n'est pas un centre et $a \in C(L)$.

on a $x \notin C(L) \Longleftrightarrow \tau(x) \neq 0$ (par Propriété 3.1.1) et comme $\tau(x) \in C(L)$ donc L est isomorphe à $L/\sigma(a) \times L/\tau(a)$ (par Propriété 3.1.3).

On a : $|L| = n+1$ et $|L/\tau(a)| = n1$, $|L/\sigma(a)| = n2$, comme $\tau(x) \neq 0$ alors :

$$\begin{cases} n1 < n+1 \\ n2 < n+1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n1 \leq n; \\ n2 \leq n. \end{cases}$$

Et $L/\tau(a)$ et $L/\sigma(a)$ sont des Ł$_3$ algèbre d'après l'hypothèse récurrence

$$\begin{cases} L/\tau(a) \approxeq U^{p1} \times T^{q1} \\ L/\sigma(a) \approxeq U^{p2} \times T^{q2} \end{cases} \Longrightarrow L/\tau(a) \times L/\sigma(a) \approxeq U^{p1+p2} \times T^{q1+q2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Et comme } L &\approxeq L/\tau(a) \times L/\sigma(a) \\ &\approxeq U^{p1+p2} \times T^{q1+q2} \end{aligned}$$

donc $L \approxeq U^{p1+p2} \times T^{q1+q2} = U^{p'} \times T^{q'}$.

Donc la récurrence vraie pour $n+1$ alors $L \approxeq U^{p'} \times T^{q'}$. ■

3.1.4 Représentation booléenne

Soit L une Ł$_3$ algèbre quelconques, l'application ϕ définie par :

$$\text{si } x \in L : \phi(x) = (\nu x, \mu x).$$

Preuve. : a) On montre que ϕ est une Ł$_3$ monomorphisme de L dans $L(C(L))$.

1) Ł$_3$ morphisme :

• $\phi(x \wedge y) \stackrel{?}{=} \phi(x) \wedge \phi(y)$

Soient $x, y \in L$, donc

$$\begin{aligned} \phi(x \wedge y) &= (\nu(x \wedge y), \mu(x \wedge y)) \\ &= (\nu(x) \wedge \nu(y), \mu(x) \wedge \mu(y)) \\ &= (\nu(x), \mu(x)) \wedge (\nu(y), \mu(y)) \\ &= \phi(x) \wedge \phi(y). \end{aligned}$$

D'où $\phi(x \wedge y) = \phi(x) \wedge \phi(y)$.

• $\phi(x \vee y) \stackrel{?}{=} \phi(x) \vee \phi(y)$.

$$\begin{array}{rcl}\phi(x\vee y) & = & (\nu(x\vee y),\mu(x\vee y))\\ & = & (\nu(x)\wedge\nu(y),\mu(x)\wedge\mu(y))\\ & = & (\nu(x),\mu(x))\vee(\nu(y),\mu(y))\\ & = & \phi(x)\vee\phi(y).\end{array}$$

D'où $\phi(x\vee y)=\phi(x)\vee\phi(y)$.

• $\phi(0)=(\nu(0),\mu(0))=(0,0)=0_{C(L)}$.

$\phi(1)=(\nu(1),\mu(1))=(1,1)=1_{C(L)}$.

2) $\phi(Nx)\stackrel{?}{=}N\phi(x)$.

$$\begin{array}{rcl}\phi(Nx) & = & (\nu(Nx),\mu(Nx))\\ & = & (N\mu NNx,\mu(Nx))\\ & = & (N\mu x,\mu(Nx))\\ & = & N(\mu(x),\nu(x)).\end{array}$$

Alors $\phi(Nx)=N\phi(x)$.

3) $\phi(\mu x)\stackrel{?}{=}\mu\phi(x)$.

$$\begin{array}{rcl}\phi(\mu x) & = & (\nu(\mu x),\mu(\mu x))\\ & = & (N\mu N\mu(x),\mu(x))\\ & = & (\mu(x),\mu(x)).\\ \mu\phi(x) & = & \mu(\nu(x),\mu(x))\\ & = & (\mu(x),\mu(x)).\end{array}$$

Alors $\phi(\mu x)=\mu\phi(x)$.

4) ϕ injective ?

Soient $(x,y)\in L^2$ tel que :

$\phi(x)=\phi(y)\stackrel{?}{\Longrightarrow}x=y$.

$$\begin{array}{rcl}\phi(x)=\phi(y) & \Longleftrightarrow & (\nu(x),\mu(x))=(\nu(y),\mu(y))\\ & \Longleftrightarrow & \left\{\begin{array}{l}\nu(x)=\nu(y)\\ \mu(x)=\mu(y)\end{array}\right.\stackrel{PDM}{\Longrightarrow}x=y\end{array}$$

b) ϕ est un isomorphisme si et seulement si L est une Ł$_3$ algèbre centrée.

$\exists w\in L$ centrée : $\left\{\begin{array}{l}\mu(x)=1\\ \gamma(x)=1\end{array}\right.\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\nu(x)=0\\ \mu(x)=1\end{array}\right.$

$\Longrightarrow$)

Comme ϕ est un isomorphisme : L est uneŁ$_3$ algèbre

$(0,1)\in L(C(L^2))$ et ϕ surjective.

$\exists w\in L:\phi(w)=(\nu(w),\mu(w))=(0,1)$.

$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\nu(w)=0\\ \mu(w)=1\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\gamma(w)=1\\ \mu(w)=1\end{array}\right.\Longrightarrow w$ contrée de L.

$\Longleftarrow$)

Comme L centrée, $\exists w \in L$
$$\begin{cases} \nu(w) = 0 \\ \mu(w) = 1 \end{cases}$$
Soit $(a, b) \in L(C(L)), a \leq b$.

$x = a \vee (b \wedge w)$;

$\phi(x) = ((\nu(x), \mu(x)) \stackrel{?}{=} (a, b)$.

$$\begin{array}{rcc} \nu(x) & = & \nu(a \vee (b \wedge w) \\ & = & \nu(a) \vee (\nu(b) \wedge \nu(w)) \\ & = & v(a) \vee 0 \\ & = & \nu(a) = a. \\ \mu(x) & = & \mu(a \vee (b \wedge w) \\ & = & \mu(a) \vee (\mu(b) \wedge \mu(w)) \\ & = & \mu(a) \vee \mu(b) \\ & = & \mu(a \vee b) = b. \end{array}$$

Alors

$\phi(x) = ((\nu(x), \mu(x)) = (a, b)$.

Donc ϕ surjective. $\blacksquare$

.

3.2 Représentation des algèbres trivalentes par des partie floue

3.2.1 Rappelle sur les ensembles floues

Soit E un ensemble non vide et $P(E)$ l'ensemble des parties de E. $P(E)$ muni des opérations usuelles d'intersection $(\cup)$,de réunion $(\cap)$ et de complément $(\complement)$ est algèbre de Boole.

Si l'on note par U l'ensemble à deux éléments $U = \{0, 1\}$ on sait qu'il y a une correspondance (bijection) entre $P(E)$ et U^E (ensemble des applications de E dans $\{0, 1\}$) de la façon suivante :

A chaque partie A de E on associe sa fonction caractéristiques

$\gamma_A : P(E) \longrightarrow U^E$ définie par :

$A \longrightarrow \gamma_A$

$$\gamma_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A; \\ 0 \text{ si } x \notin A. \end{cases}$$

A chaque application $\delta : E \longrightarrow U$ on associe la partie A=$\delta^{-6}(1)$.

Dans tout ce qui suite nous conviendrons d'identifier chaque partie A avec sa fonction γ_A.

Ainsi on écrira aussi bien

$$\begin{cases} x \in A \text{ ou } A(x) = 1; \\ x \notin A \text{ ou } A(x) = 0. \end{cases}$$

Par ailleurs l'ensemble U ordonné naturellement $(0 < 1)$ est une algèbre de Boole (en même temps qu'une chaîne) avec les opérations

$\alpha \wedge \beta = \min(\alpha, \beta)$.

$\alpha \vee \beta = \max(\alpha, \beta)$.

$\rceil \alpha = 1 - \alpha$.

Il est identifier γ_A à A $(\gamma_A \simeq A)$.

Il facile de voire que si $A, B \in P(E)$

$\gamma_{A \cup B} = \gamma_A \vee \gamma_B$.

D'où :

$(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$, pour tout $x \in E$.

$(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$, pour tout $x \in E$.

$\complement A(x) = \rceil A(x)$,pour tout $x \in E$.

$\phi(x) = 0$, pour tout $x \in E$.

Structure J-floue :

Soit J un treillis distributif fermé, on appelle structure $J-$floue (E, J) tel que $J = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

Si E finie alors structure floue finie

Partie floue :

Dans une structure floue on appelle partie floue de E, toute application de E dans J.

Les parties floues seront généralement notées $\widetilde{A}, \widetilde{B}, \ldots$

L'ensemble des parties $J-$floues de E notée par $J^E = \widetilde{P}(E)$.

Si $\widetilde{A} \in \widetilde{P}(E), x \in E, \widetilde{A} \in J$ est la valeur d'appartenance de x à $\widetilde{A}$, si $\widetilde{A} = \alpha$, ou pourra notée $x \in_\alpha A$

Parties nettes :

Soit l'application $A : E \longrightarrow U$, $U = \{0, 1\}$ alors $P(E) = \{$parties nettes de $E\}$, $P(E) \subseteq \widetilde{P}(E)$.

Niveaux de flou :

Posons $J^0 = J - \{0\}, J^1 = J - \{1\}$.

Soit $\widetilde{A}$ une partie floue dans une structure floue (E, J).

Pour tout $\alpha \in J$ on définit le niveau de flou de degré α comme étant l'application $N_\alpha : \widetilde{P}(E) \longrightarrow P(E)$ définie par :

$N_\alpha(\widetilde{A}) = \{x \in E / \widetilde{A}(x) \geq \alpha\}$.

Niveau struct de flou strong α cut :

Pour tout $\alpha \in J^1$ on définit le niveau de flou de degré α comme étant l'application $N'_\alpha : \widetilde{P}(E) \longrightarrow P(E)$ définie par :

$N'_\alpha(\widetilde{A}) = \{x \in E / \widetilde{A}(x) > \alpha\}$.($\alpha$ cute)

Rolation d'ordre sur les parties floues :

$\forall \widetilde{A}, \widetilde{B} \in \widetilde{P}(E)$: si

$\widetilde{A} \subseteq \widetilde{B}$ si et seulement si pour tout $x \in E : \widetilde{A}(x) \leq \widetilde{B}(x)$.

Proposition 3.7 *:*

$\widetilde{A} \subset \widetilde{B} \Longleftrightarrow N_\alpha(\widetilde{A}) \subset N_\alpha(\widetilde{B}), \forall \alpha \in J^0$

Preuve. *:* $\Longrightarrow$) *Si* $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$, *Soit* $x \in E, x \in N_\alpha(\widetilde{A}) \implies \widetilde{A}(x) \geq \alpha$

Our $\widetilde{A}(x) \leq \widetilde{B}(x)$.

Donc $\widetilde{B}(x) \geq \alpha \implies x \in N_\alpha(\widetilde{B})$.

$\Longleftarrow$) *Posons* $N_\alpha(\widetilde{A}) \subset N_\alpha(\widetilde{B})$

Est-ce-que $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$?

Soit $x \in E, \widetilde{A}(x) = \lambda$.

$$\begin{array}{rcl} Si\ \lambda = 0, \widetilde{B}(x) \geq \lambda & \Longrightarrow & \widetilde{A}(x) \leq \widetilde{B}(x). \\ Si\ \lambda > 0, x \in N_\alpha(\widetilde{A}) & \Longrightarrow & x \in N_\alpha(\widetilde{B}). \\ & \Longrightarrow & \widetilde{B}(x) \geq \lambda = \widetilde{A}(x). \end{array} \quad \blacksquare$$

Réunion et intersections :

L'union et l'intersection dans $\widetilde{P}(E)$ prolongent d'une manière naturelle l'union et l'intersection dans $P(E)$.

La réunion de deux partie floues $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ est définie par :

$(\widetilde{A} \cup \widetilde{B})(x) = \widetilde{A}(x) \vee \widetilde{B}(x)$.

l'intersection de deux partie floues $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ est définie par :

$(\widetilde{A} \cap \widetilde{B})(x) = \widetilde{A}(x) \wedge \widetilde{B}(x)$.

Conclusion 3.2 *:*

- $(\widetilde{P}(E), \cup, \cap, \complement, \phi, E)$ *est un treillis distributif fermé*
- $P(E)$ *est un sous treillis de Boole de* $\widetilde{P}(E)$
- $\complement\widetilde{A}(x) = 1 - \widetilde{A}(x)$.

Propriétés

1. $N_\alpha(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) = N_\alpha(\widetilde{A}) \cap N_\alpha(\widetilde{B})$

Preuve.

$$\begin{array}{rcl} N_\alpha(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) & = & \{x \in E/(\widetilde{A} \cap \widetilde{B})(x) \geq \alpha\}. \\ & = & \{x \in E/(\widetilde{A}(x) \wedge \widetilde{B}(x)) \geq \alpha\}. \\ & = & \{x \in E/\widetilde{A}(x) \geq \alpha \text{ et } \widetilde{B}(x) \geq \alpha\}. \\ & = & \{x \in E/\widetilde{A}(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in E/\widetilde{B}(x) \geq \alpha\}. \\ N_\alpha(\widetilde{A} \cap \widetilde{B}) & = & N_\alpha(\widetilde{A}) \cap N_\alpha(\widetilde{B}) \end{array} \quad \blacksquare$$

2. $N_\alpha(\widetilde{A} \cup \widetilde{B}) = N_\alpha(\widetilde{A}) \cup N_\alpha(\widetilde{B})$

Preuve. :

$$\begin{array}{rcl} N_\alpha(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}) & = & \{x\in E/(\widetilde{A}\cup\widetilde{B})(x)\geq\alpha\}. \\ & = & \{x\in E/(\widetilde{A}(x)\vee\widetilde{B}(x))\geq\alpha\}. \\ & = & \{x\in E/\widetilde{A}(x)\geq\alpha \text{ ou } \widetilde{B}(x)\geq\alpha\}. \\ & = & \{x\in E/\widetilde{A}(x)\geq\alpha\}\cup\{\ x\in E/\widetilde{B}(x)\geq\alpha\}. \\ N_\alpha(\widetilde{A}\cup\widetilde{B}) & = & N_\alpha\widetilde{A}\cup N_\alpha(\widetilde{B}). \end{array} \quad\blacksquare$$

3. $N_\alpha(\phi)=\phi$.

Preuve. : Soit $\alpha\in J^0$.

$$\begin{array}{rcl} N_\alpha(\phi) & = & \{x\in E/\phi(x)\geq\alpha\} \\ & = & \{x\in E/0\geq\alpha\} \text{ telle que } \alpha\in\{\frac{1}{2},1\} \\ & = & \phi. \end{array} \quad\blacksquare$$

4. $N_\alpha(E)=E$.

Preuve. :

$$\begin{array}{rcl} N_\alpha(E) & = & \{x\in E/E(x)\geq\alpha\} \\ & = & \{x\in E/1\geq\alpha\} \\ & = & E. \end{array} \quad\blacksquare$$

3.2.2 Théorème de représentation de L$_3$ algèbre

Lemme 3.4 *:*

Soit $(L,\wedge,\vee,0,1,\mu,\nu)$ *un* Ł$_3$ *algèbre,* $J=T=\{0,\frac{1}{2},1\}$ *et* $J^0=\{\frac{1}{2},1\}$.

X *: l'espace duale de* $C(L)$*(éléments chysippiens de*L*).*

$C(L)\xrightarrow{\delta}P(X),\delta(x)=\{U\in X/x\in U\}$.

δ *est le monomorphisme de Stone.*

On considère :

$$\begin{array}{rcl} f:L & \rightarrow & \widetilde{p}(X). \\ x & \longmapsto & f(x)=\widetilde{A}_x. \end{array}$$

La fonction $f(x)$ *définie par :*

$f(x):X\longrightarrow T$

$U\longmapsto(f(x)(U))$.

$$\widetilde{A}_x(U)=f(x)(U)\begin{cases} 0 \ si\ \mu(x)\notin U; \\ \frac{1}{2}\ si\ \mu(x)\in U\ \ et\ \nu(x)\notin U; \\ 1\ \mu(x)\in U\ \ et\ \nu(x)\in U. \end{cases}$$

$$\widetilde{A}_x\diagup C(L)=\sigma\implies\begin{cases} f(0)=\phi \\ f(1)=X \end{cases}$$

Preuve. :

Si $x \in C(L)$, on a : x est complémenté donc

$x = \mu(x) = \nu(x)$.

$$f(x)(U) = \tilde{A}_x(U) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \notin U & \Longrightarrow \ U \notin \delta(x); \\ 1 \text{ si } x \in U & \Longrightarrow \ U \in \delta(x). \end{cases}$$

$$\text{Donc} \begin{cases} f(x)(U) = \begin{cases} 0 \text{ si } U \notin \delta(x) \\ 1 \text{ si } U \in \delta(x) \end{cases} \\ \delta(x)(U) = \begin{cases} 0 \text{ si } U \notin \delta(x) \\ 1 \text{ si } U \in \delta(x) \end{cases} \end{cases} \Longrightarrow \ f(x)(U) = \delta(x)(U).$$

Alors la restriction de f sur $C(L)$ est le monomorphisme de stone i.e.$A_x \diagup C(L) = \delta \Longrightarrow \begin{cases} f(0) = \emptyset \\ f(1) = 1 \end{cases}$

• Soit $x \in L$ $\mu(x), \nu(x)$ sont des éléments chysippiens donc

$$\begin{aligned} \text{- } f(\mu x) = \delta(\mu x) \quad &= \quad \{U \in X/\mu(x) \in U\} \\ &= \{U \in X/f(x)(U) \geq \tfrac{1}{2}\} \\ &= \quad N_{\frac{1}{2}}(f(x)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{- } f(\nu(x)) = \delta(\nu(x)) \quad &= \quad \{U \in X/\nu(x) \in U\} \\ &= \{U \in X/f(x)(U) \geq 1\} \\ &= \quad N_1(f(x)). \end{aligned}$$

$f(\mu x) = \mu' f = N_{\frac{1}{2}}(f(x))$.

$f(\nu x) = \nu' f = N_1(f(x))$.

(1) Soit $x, y \in L$, on montrons que f est un morphisme de treillis fermé

$$\begin{aligned} \bullet \ N_{\frac{1}{2}}(f(x \vee y)) = f(\mu(x \vee y)) \quad &= \quad f(\mu(x) \vee \mu(y)) \\ &= \quad \delta(\mu(x) \vee \mu(y)) \\ &= \quad \{U \in X/\mu(x) \vee \mu(y) \in U\} \\ &= \quad \{U \in X/\mu(x) \in U \text{ ou } \mu(y) \in U\} \\ &= \quad \{U \in X/\mu(x) \in U\} \cup \{U \in X/\mu(y) \in U\} \\ &= \quad f(\mu(x)) \cup f(\mu(y)). \end{aligned}$$

D'où $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$.

$$\begin{aligned} \bullet \ N_1(f(x \vee y)) = f(\nu(x \vee y)) \quad &= \quad f(\nu(x) \vee \nu(y)) \\ &= \quad \delta(\nu(x) \vee \nu(y)) \\ &= \quad \{U \in X/\mu(x) \vee \mu(y) \in U\} \\ &= \quad \{U \in X/\mu(x) \in U \text{ ou } \mu(y) \in U\} \\ &= \quad \{U \in X/\mu(x) \in U\} \cup \{U \in X/\mu(y) \in U\} \\ &= \quad f(\mu(x)) \cup f(\mu(y)). \end{aligned}$$

Donc f est une morphisme d'algèbre trivalente de Łukasiewicz.

• Montrons que f est injective.

Supposons $f(x) = f(y)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} N_{\frac{1}{2}}(f(x)) = N_{\frac{1}{2}}(f(y)) \\ N_1(f(x)) = N_1(f(y)) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \delta(\mu(x)) = \delta(\mu(y)) \\ \delta(\nu(x)) = \delta(\nu(y)) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mu(x) = \mu(y) \\ \nu(x) = \nu(y) \end{cases} \Longrightarrow x = y \text{ (Principe de détermination de Moisil).}$$

Donc f est injective. ■

Conclusion

Dans ce travail, nous avons traité quelques concepts de treillis et d'algèbres de Boole, ensuite on a étudie l'algèbre trivalente qui accompagne la logique trivalente de Łukasiewicz, et quelques de ces propriétés de ces notions.
Ensuite nous avons essayé de donner des représentations cette algèbre. On donné une représentation booléenne et une représentation de la forme $U^p \times T^q$.
En fin, on a terminé par une à l'aide l'ensemble des parties floues.

.

Bibliographie

[1] A.AMROUNE, **Logique multivalente de Łukasiewicz.** Cour de master, Université de M'sila, 2016.

[2] A.AMROUNE, **Représentation des algèbre de Łukasiewicz.** Cour de master, Université de M'sila, 2016.

[3] A.MONTEIRO, **Sur la définition des algèbres de Łukasiewicz trivalente,** Universidad National del Sur Bahia Blanka.

[4] B.A.Davey, H.A.Priestley, **Introduction to lattices and order,** Second edition, Cambridge University Press, Combridge, 2002.

[5] D.BECCHIO, **Logique trivalente de Łukasiewicz**, Université de clermont-Ferrand 2, tome 66, série Mathématiques, n^0 16(1978), p.33-83.

[6] D.M.MILLER and M.A.THORNTON, **Multiples valued logique : concepts and représentations**, University of Victoria, Canada, Southern Medhodist University, USA.

[7] D.Ponasse, J.C.CARREGA, **Algèbre et topologie booléennes**, MASSON, 1979.

[8] GARRETT BIRKHOFF, **Lattice theory**, American Mathematical Society, 1948.

[9] V.BOICESCU, A.FILIPOIU, G.GEORGESCU, S.RUDEANU, **Łukasiewicz Moisil algebras**, NORTH-HOLLAND-AMSTERDAM, NEW YORK, OXFORD, TOKYO, 1991.

ملخص :

- في المذكرة درسنا بعض المفاهيم الأساسية في نظرية الشبكات وجبور بول ثم درسنا منطق ثلاثي القيم لكازيوفتش مرورا بصيغته الجبرية.

وأخيرا قمنا بتمثيل الجبور الثلاثية بثلاث طرق مختلفة.

Résumé :

Dans ce mémoire, nous avons étudié quelques notions de base de la théorie des treillis, et des algèbres de Boole, puis on a étudié la logique trivalente de £ukasiewicz en passant par l'algébrisation de cette logique.

En fin, la représentation des algèbres trivalentes de £ukasiewicz est donnée par trois différentes manières.

Abstract :

In this paper, we have studied some basic notions of lattice theory and Boolean algebras, and we have studied the trivalent logic of £ukasiewicz by algebraizing this logic.

Finally, the representation of the trivalent algebras of £ukasiewicz is given in different ways.