



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : EDP et Applications

Thème

*Impédance approchée d'une bande
mince en élasticité asymétrique*

Présenté par :
Bakhouche Wassila

Devant le jury composé de :

<i>M^r</i> S. Abdelmouhcene	MCA,	Université de M'sila	Président.
<i>M^r</i> A. Abdallaoui	MCB,	ENS Bou Saâda	Encadreur.
<i>M^r</i> B. Baugherara	MCA,	Université de M'sila	Co-Encadreur.
<i>M^r</i> S. Abderachid	MCA,	Université de M'sila	Examineur.

Année universitaire 2020/2021

Table des matières

Introduction	7
1 Éléments d'analyse fonctionnelle pour les équations aux dérivées partielles	9
1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$, $(1 \leq p \leq +\infty)$	9
1.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	10
1.3 Les espaces de Hilbert $H(\text{div}, \Omega)$	14
2 Quelques éléments sur la théorie d'élasticité asymétrique	16
2.1 Motivation pour la théorie de l'élasticité asymétrique	16
2.2 Notations	17
2.3 Loi de comportement pour l'élasticité asymétrique	18
2.4 Problème stationnaire mixte pour l'élasticité asymétrique	18
2.4.1 Position du problème	18
2.4.2 Equations variationnelles et l'existence et l'unicité de la solution	19
2.4.3 Interprétation mécanique d'équations d'équilibre variationnelle	21
2.5 Problème modèle de transmission pour l'élasticité asymétrique	21
2.5.1 Problème de transmission dans un domain fixe avec bande mince plane	21
2.5.2 Formulation faible du problème de transmission et l'existence et l'unicité de sa solution	24
3 Impédance d'une couche mince plane en élasticité asymétrique	25
3.1 introduction	25
3.1.1 Position du problème	25
3.1.2 Définition formelle de l'impédance	27
3.2 Dérivation d'une condition aux limites d'impédance approchée en utilisant le développement de Taylor	29

3.3	Estimation d'erreur pour le problème d'impédance approché .	30
3.3.1	Formulation faible du problème d'impédance approché	30
3.3.2	Résultat de stabilité pour le problème d'impédance approchée	31
3.3.3	Développement asymptotique pour le problème d'impédance approchée	32
3.3.4	Estimation d'erreur pour le problème d'impédance approchée	33
3.4	Construction d'une condition d'impédance approchée par développement asymptotique avec changement d'échelle	33
3.4.1	Changement d'échelle	34
3.4.2	Développement asymptotique	36
3.4.3	L'impédance approché d'ordre 1	38
3.5	Estimation d'erreur pour le problème de transmission	39
3.5.1	Formulation faible du problème de transmission dans le domaine fixe	39
3.5.2	Résultat de stabilité pour le problème de transmission .	40
3.5.3	Estimation d'erreur pour le problème de transmission .	41
3.6	Estimation d'erreur entre le problème de transmission et le problème d'impédance	42
	Conclusion	43
	Références	43
	Résumé	46

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

1438

Remerciements

Début de louange et d'action de grâce à Allah tout puissant pour notre succès et pour nous avoir donné courage, force et volonté de réussir

tout au

long de notre vie. Merci à Monsieur A. Abdallaoui mon directeur de mémoire pour son aide précieuse et ses conseils tout au long de ce mémoire.

Je tiens à remercier aussi

les membres du jury pour leur précieux temps consacré à l'étude de ce mémoire et à tous ceux qui ont contribué directement ou indirectement

à la réalisation et à la réussite de ce projet de fin d'études.



Dédicaces

Je dédie cette note à mes chers parents, il n'y a ni sentiment ni mot qui puisse exprimer pleinement la gratitude et l'amour que je porte pour vous. Je mets entre vos mains les fruits de longues années et jours d'apprentissage, loin de vous, de votre amour et de votre tendresse. Vous m'avez toujours donné votre soutien et vos encouragements pour persévérer et prospérer dans la vie. Chaque mot et chaque lettre de ce message exprime à vous l'étendue de l'amour, du respect, de la gratitude, de l'appréciation et des remerciements à vous et à tous mes amis, mes frères et sœurs pour leur tendresse et leur présence à mes côtés et m'aidant dans ma carrière scolaire. Tout le monde est ma famille sans exception, à tous mes professeurs qui ont réussi à m'enseigner, ils ont aussi et à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin.



Introduction

La théorie plane de l'élasticité asymétrique est basée sur l'hypothèse que l'interaction de deux parties d'un corps élastique se produit non seulement par un vecteur de force comme dans l'élasticité classique, mais aussi par un vecteur de moment. Ainsi, la déformation est décrite par les vecteurs du déplacement et de la rotation u et ω , respectivement. Lors de la déformation chaque particule du corps élastique subit un déplacement u et une rotation ω , le corps élastique est donc constitué de points (particules) orientés. On parle de milieu micropolaire.

L'élasticité asymétrique a été introduite par Voigt [18] pour parer l'insuffisance de la théorie classique de l'élasticité qui était inopérante pour décrire, par exemple, le comportement des corps granuleux et multi-cellulaires, comme par ex. les polymères. Il existe, en général, deux problèmes plans d'élasticité asymétrique (voir [13]) :

- (i) Le premier problème plan : les inconnues de ce problème sont le vecteur de déplacement $u = (u_1, u_2)$ et la rotation scalaire ω .
- (ii) Le deuxième problème plan : les inconnues de ce problème sont le vecteur de la rotation $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ et le déplacement scalaire u .

Dans ce mémoire on va travailler avec le premier problème plan, on va s'intéresser à la modélisation de l'effet d'une couche mince plane pour le premier problème plan d'élasticité asymétrique en utilisant le concept de condition aux limites d'impédance. On souligne que la résolution numérique d'un problème posé dans un domaine fixe lié par une couche mince ne peut être calculée avec précision lorsque l'épaisseur δ de la couche mince est assez petite, en raison des instabilités numériques qui apparaissent (voir [4], [5], [6], [10]), d'où la puissance de la condition d'impédance : elle sert à remplacer le problème initial défini sur la partie mince de tout le domaine par une condition aux limites définie juste sur la jonction entre le domaine fixe et la couche mince. Ainsi, la condition aux limites d'impédance dépend fortement du paramètre δ . Cette condition aux limites est donnée par un opérateur appelé opérateur d'impédance qui est mieux connu dans la littérature anglaise sous le nom "Dirichlet-to-Neumann operator (DtN)".

Le plan de ce mémoire est le suivant :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre, on présente certain nombre d'outils d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans la suite des chapitres de ce mémoire.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre on s'intéresse au problème d'élasticité asymétrique linéaire : les tenseurs décrivant la déformation, les lois de comportement et les équations d'équilibre, on termine ce chapitre par la position d'un problème modèle de transmission avec lequel on va travailler dans le chapitre 3, et on prouve l'existence et l'unicité de sa solution

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, on modélise d'une façon approchée l'effet de la bande mince micropolaire $\Omega_+^\delta = \mathbb{R} \times]0, \delta[$, d'épaisseur δ sur le corps $\Omega_- = \mathbb{R} \times]-1, 0[$, lorsque δ tends vers 0 par les techniques des développements asymptotique avec changement d'échelle, ensuite on montre une estimation d'erreur.

Chapitre 1

Éléments d'analyse fonctionnelle pour les équations aux dérivées partielles

Dans ce chapitre, on va rappeler un certain nombre d'outils d'analyse fonctionnelle que sera utilisé dans la suite. Pour plus de détails voir (voir [3], [7], [16]).

1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$, ($1 \leq p \leq +\infty$)

Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 1.1.1 *L'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions mesurables $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} < +\infty \quad \text{avec} \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \sup_{x \in \Omega} |f(x)| & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

L'application $v \mapsto \|v\|_{L^p(\Omega)} \in L^p(\Omega)$ définit une norme sur l'espace $L^p(\Omega)$ et les espaces $L^p(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$, séparables pour $1 \leq p < +\infty$ et réflexifs pour $1 < p < +\infty$.

Proposition 1.1.1 *Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_{\Omega} |f(x).g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Théorème 1.1.1 Soient $1 \leq p < +\infty$ et $\varphi \in (L^p)'$. Alors il existe $u \in L^{p'}$ unique, $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$, tel que :

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u f dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega),$$

de plus, on a

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}$$

1.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.2.1 On note par $D(\Omega)$ ou $C_c^\infty(\Omega)$ à l'espace de toutes les fonctions f de classe C^∞ et à support compact, aussi appelé l'espace des fonctions test.

Définition 1.2.2 Une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $D(\Omega)$ est dite convergente vers φ dans $D(\Omega)$, s'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\text{supp} \varphi_n \subset K \quad \text{et} \quad \limsup_n \sup_{x \in K} |D^p \varphi_n - D^p \varphi| = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}^n,$$

avec

$$D^p \varphi = \frac{\partial^{|p|} \varphi}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \quad \text{et} \quad |p| = |(p_1, p_2, \dots, p_n)| = p_1 + p_2 + \dots + p_n.$$

Définition 1.2.3 Une forme linéaire $T : D(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ est continue si pour toute suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers φ dans $D(\Omega)$, on a

$$\lim_n T(\varphi_n) = T(\varphi).$$

Définition 1.2.4 Une distribution sur Ω est une forme linéaire continue sur $D(\Omega)$. On note par $D'(\Omega)$ l'espace de toutes les distributions sur Ω .

Définition 1.2.5 On appelle dérivée d'une distribution $T \in D'(\Omega)$, d'ordre $m \in \mathbb{N}^n$, l'application

$$D^m T : D(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \longmapsto D^m T(\varphi) = (-1)^{|m|} (T, D^m \varphi).$$

Définition 1.2.6 Soient Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et $1 \leq p < +\infty$.

Définition 1.2.7 1. L'espace de Sobolev d'ordre 1 est l'ensemble

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega) \\ \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i(x) \varphi(x) dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i \in \overline{1, n} \end{array} \right\}.$$

2. L'espace de Sobolev d'ordre $m \in \mathbb{N}$ est l'ensemble

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \\ \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^\alpha \int_\Omega g_\alpha \varphi(x) dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right\}.$$

Théorème 1.2.1 Pour $1 \leq p < +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = 2$, on pose $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n (\partial_i u, \partial_i v)_{L^2(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert et la norme associée a ce produit scalaire

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 1.2.2 L'application $v \mapsto \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \in W^{1,p}(\Omega)$ définit une norme sur l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ et les espaces $W^{1,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$ et de Hilbert pour $p = 2$, séparables et réflexifs pour $1 < p < +\infty$.

Définition 1.2.8 Soit $1 \leq p < +\infty$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ désigne la fermeture de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme induite par $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable, il est réflexif si $1 < p < +\infty$. $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de $H^1(\Omega)$.

Définition 1.2.9 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de frontière Γ . On dit que Γ (ou Ω) est de classe C^k ($k \in \mathbb{N}$), si pour tout $x_0 \in \Gamma$, il existe une boule $B(x_0, r)$ et une application bijective de $B(x_0, r)$ dans un ouvert V telles que :

1. $\Psi : B(x_0, r) \longrightarrow V$ est un k -difféomorphisme ,
2. $\Psi(\Omega \cap B(x_0, r)) = V \cap \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$,
3. $\Psi(\Gamma \cap B(x_0, r)) = V \cap \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$.

Théorème 1.2.3 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n .

- Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, l'espace des fonctions tests $D(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$.
- Si $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, l'espace des fonctions tests $D(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.2.4 (des traces) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n de classe C^1 , de frontière Γ . On a

1. $C_c^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.
2. L'application trace γ_0 qu'est linéaire continue définie par

$$\begin{aligned} C_c^\infty(\bar{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ u &\longmapsto u|_\Gamma \end{aligned} ,$$

se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \\ u &\longmapsto \gamma_0(u) = u|_\Gamma \end{aligned} .$$

Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant pas de Ω telle que, pour toute fonction v dans $H^1(\Omega)$, on a

$$\|\gamma_0(v)\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)} .$$

Proposition 1.2.1 Les propriétés les plus importantes de la trace sont les suivantes :

- Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors en fait $u|_{\partial\Omega} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ et

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega) ,$$

de plus l'opérateur trace $u \longrightarrow u|_{\partial\Omega}$ est surjectif de $W^{1,p}(\Omega)$ sur $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$.

- Le noyau de l'opérateur trace est $W_0^{1,p}(\Omega)$, c'est-à-dire

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\} .$$

Proposition 1.2.2 (Inégalité de Poincaré) On suppose que Ω est un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante C (dépendant de Ω et p) telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < +\infty .$$

En particulier, l'expression $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui équivale à la norme sur $W^{1,p}(\Omega)$. Sur $H_0^1(\Omega)$ l'expression $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ est un produit scalaire qui induit la norme $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ équivalente à la norme $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Proposition 1.2.3 (Inégalité de Korn pour une fonction à support compact) Soient Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^n et $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Dans le premier membre de l'inégalité il y a toutes les dérivées, par contre dans le second membre n'interviennent que des combinaisons particulières des dérivées. On a

$$\int_{\Omega} |D_i u_j + D_j u_i|^2 d\Omega = \int_{\Omega} (D_i u_j)^2 d\Omega + \int_{\Omega} (D_j u_i)^2 d\Omega + 2 \int_{\Omega} D_i u_j D_j u_i d\Omega.$$

Mais comme $u \in C_c^\infty(\Omega)$, il vient par intégration

$$\int_{\Omega} D_i u_j D_j u_i d\Omega = - \int_{\Omega} (D_j D_i u_j) u_i d\Omega = \int_{\Omega} D_i u_i D_j u_j d\Omega,$$

et ainsi

$$\begin{aligned} 4 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right|^2 d\Omega &= \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |D_i u_j|^2 d\Omega + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |D_j u_i|^2 d\Omega \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} D_i u_j D_j u_i d\Omega \right] \\ &= \left[\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |D_i u_j|^2 d\Omega + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |D_j u_i|^2 d\Omega \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} D_i u_i D_j u_j d\Omega \right] \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |D_i u_j|^2 d\Omega + 2 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n D_i u_i \right) \left(\sum_{j=1}^n D_j u_j \right) d\Omega \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} |D_i u_j|^2 d\Omega + 2 \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^3 D_i u_i \right)^2 d\Omega, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\sum_{i,j=1}^3 \|D_i u_j\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Proposition 1.2.4 (Inégalité de Korn sur $H_0^1(\Omega)$) Soit Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^n . Alors il existe $C > 0$ telle que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème 1.2.5 (Formule de Green) Soit Ω un ouvert régulier. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)\eta_i(x) ds,$$

avec $\eta = (\eta_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

Proposition 1.2.5 On suppose que Ω est un ouvert borné de frontière Γ de classe C^1 . Alors si u est une fonction de $H^2(\Omega)$. L'application

$$\begin{aligned} C_c^\infty(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma) \\ u &\longmapsto (\gamma_0(u), \gamma_1(u)) = (u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\Gamma} = \nabla u \cdot \eta|_{\Gamma}) \end{aligned}$$

se prolonge en une application linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma) \times L^2(\Gamma)$.

Corollaire 1.2.1 Soit Ω est un ouvert borné de frontière Γ de classe C^1 . Pour toute fonction u de $H^2(\Omega)$ et v de $H^1(\Omega)$, on a la formule suivante :

$$\int_{\Omega} (\Delta u)v d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v d\Omega + \int_{\Gamma} \gamma_1(u)\gamma_0(v) d\Gamma.$$

Théorème 1.2.6 (Riesz) Soient H un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté (\cdot, \cdot) et f une forme linéaire continue sur H . Alors

$$\exists! y \in H, \quad \forall x \in H, \quad f(x) = (y, x).$$

Théorème 1.2.7 (Lax-Milgram) Soit H un espace de Hilbert et $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H$ il exist unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = (\varphi, v),$$

de plus si a est symétrique alors u est caractérisé par la propriété $u \in H$ et

$$\frac{1}{2}a(u, u) - (\varphi, u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(u, v) - (\varphi, v) \right\}.$$

1.3 Les espaces de Hilbert $H(\operatorname{div}, \Omega)$

Définition 1.3.1 Soit Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^n . On pose

$$H(\operatorname{div}, \Omega) = \{ \omega \in [L^2(\Omega)]^n; \operatorname{div} \omega \in L^2(\Omega) \}.$$

Proposition 1.3.1 *Muni du produit scalaire*

$$(u, v) = (u, v)_{[L^2(\Omega)]^n} + (\operatorname{div} u, \operatorname{div} v)_{L^2(\Omega)},$$

L'espace $H(\operatorname{div}, \Omega)$ est de Hilbert.

Une conséquence du théorème de Riesz est la caractérisation suivante du dual de $H(\operatorname{div}, \Omega)$.

Définition 1.3.2 *Une forme linéaire $F \in [H(\operatorname{div}, \Omega)]'$ (dual de $H(\operatorname{div}, \Omega)$) si et seulement s'il existe $f \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ telle que*

$$(F, \omega)_{[H(\operatorname{div}, \Omega)]' \times H(\operatorname{div}, \Omega)} = (f, \omega)_{H(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)}, \quad \forall \omega \in H(\operatorname{div}, \Omega).$$

Proposition 1.3.2 *Le sous espace $[C_c^\infty(\overline{\Omega})]^n$ est dense dans $H(\operatorname{div}, \Omega)$.*

Théorème 1.3.1 (de trace) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1 . On définit une application γ_1 par*

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H(\operatorname{div}, \Omega) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ \omega &\longmapsto \gamma_1(\omega) = \omega \cdot \eta|_{\partial\Omega} \end{aligned} .$$

L'application γ_1 (la trace de la composante normale d'un élément de $H(\operatorname{div}, \Omega)$) est linéaire continue surjective de $H(\operatorname{div}, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. En particulier il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout v dans $H(\operatorname{div}, \Omega)$, on a

$$\|v \cdot \eta|_{\partial\Omega}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)} .$$

Théorème 1.3.2 (Formule de Green) *Soit Ω un ouvert borné régulier. Si $u \in H^1(\Omega)$ et $\theta \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ une fonction vectorielle de $[L^2(\Omega)]^n$, telle que $\operatorname{div}\theta(x) \in L^2(\Omega)$, alors*

$$\int_{\Omega} u(x) \operatorname{div}\theta dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \theta(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \theta(x) \eta(x) ds.$$

Chapitre 2

Quelques éléments sur la théorie d'élasticité asymétrique

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème d'élasticité asymétrique linéaire : les tenseurs décrivant la déformation, les lois de comportement et les équations d'équilibre, on termine ce chapitre par la position d'un problème modèle de transmission avec lequel on va travailler dans le chapitre 3, et on prouve l'existence et l'unicité de sa solution

2.1 Motivation pour la théorie de l'élasticité asymétrique

Bien sûr le but de la théorie de l'élasticité classique c'est décrire les déformations d'un corps élastique sous l'effet de force extérieure la déformation d'un corps élastique est caractérisée par le tenseur des déformations symétrique e_{ij} qui est définie à partir des déplacements $u = (u_1, u_2)$ par :

$$e_{ij}(u) = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i), \quad i, j = 1, 2.$$

A l'intérieur d'un corps élastique, il ya des contraintes de forces, elles caractérisent par le tenseur des contraintes symétrique σ_{ij} lié par une loi de comportement linéaire avec le tenseur des déformations e_{ij} comme suite :

$$\sigma_{ij}(u) = 2\mu e_{ij}(u) + \lambda \left(\sum_{k=1}^2 e_{kk}(u) \right) \delta_i^j, \quad i, j = 1, 2,$$

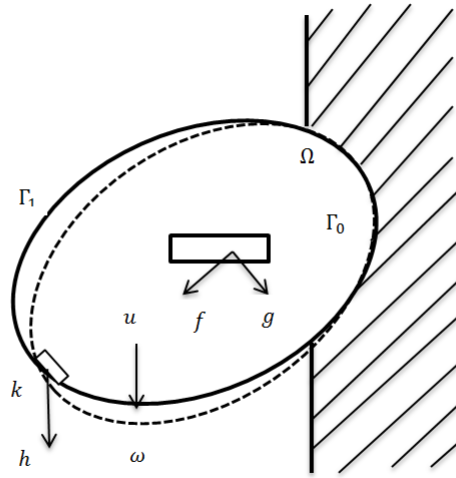
avec δ_i^j est le symbole de Kronecker et λ et μ sont les coefficients de Lamé, ils vérifient :

$$\mu \geq 0 \quad \text{et} \quad \lambda > 0.$$

Certain expériences montrent l'insuffisance de la théorie d'élasticité classique pour décrire les déformations des corps granuleux, par exemple, c'est pour ça, les frères E. et F.Cosserat ([8]) ont introduit une théorie complet sur l'élasticité asymétrique dans laquelle la déformation d'un corps élastique est définie non seulement à partir des déplacement u comme dans l'élasticité classique mais aussi à partir des rotations ω , cette hypothèse conduit nécessairement à l'asymétrie du tenseur des contraintes σ_{ij} qui dépend de u et ω . Alors en élasticité asymétrique les particules subit au cours de la déformation non seulement un déplacement u mais aussi une rotation ω , donc de cette façon on a décrit un milieu micropolaire dont ces points (particules) sont orientés.

2.2 Notations

On considère un corps élastique et homogène occupant dans le plan un surface $\overline{\Omega}$ ou Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^2 de frontière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avec Γ_0 est de mesure non nulle (au sens de lebesgue).



Ce corps est supposé soumis à des forces de surface de densité $f = (f_i)_{1 \leq i \leq 2}$ et à des moments de surface de densité g ainsi ce solide est supposé soumis à des forces et à des moments sur Γ_1 de densité $h = (h_i)_{1 \leq i \leq 2}$ et k respectivement

$$f_i, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad h_i, k : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \forall i = 1, 2.$$

Ce corps sous l'effet de ces forces subit une déformation qui peut être caractérisée par le champ des déplacements $u(x) = (u_i(x))_{1 \leq i \leq 2}$ et le champ des rotations $\omega(x)$ au point x de $\bar{\Omega}$

$$u_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \omega : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ \forall i = 1, 2.$$

Si on suppose que le corps est fixé sur la partie Γ_0 de son bord, on considérera donc des champs de déplacements et de rotations compatible avec cette condition d'attache

$$u_i = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad \forall i = 1, 2 \quad \text{et} \quad \omega = 0 \text{ sur } \Gamma_0.$$

2.3 Loi de comportement pour l'élasticité asymétrique

On désigne par $e(u, \omega) = (e_{ij}(u, \omega))_{1 \leq i, j \leq 2}$ le tenseur de déformations défini par :

$$e_{11}(u, \omega) = D_1 u_1, \quad e_{22}(u, \omega) = D_2 u_2, \\ e_{12}(u, \omega) = D_1 u_2 - \omega, \quad e_{21}(u, \omega) = D_2 u_1 + \omega.$$

On note $\sigma(u, \omega) = (\sigma_{ij}(u, \omega))_{1 \leq i, j \leq 2}$ le tenseur asymétrique des contraintes. Dans le cas d'un milieu isotrope, homogène le tenseur asymétrique des contraintes est donné par la loi de comportement linéaire suivante :

$$\sigma_{ji}(u, \omega) = (\mu + \alpha) e_{ji}(u, \omega) + (\mu - \alpha) e_{ij}(u, \omega) + \lambda e_{kk}(u, \omega) \delta_{ij}, \quad i, j, k = 1, 2,$$

avec δ_{ij} est le Kronecker delta symbole et μ, λ and α sont des constantes du matériau vérifiant les inégalités suivantes :

$$\mu > 0, \quad 3\lambda + 2\mu > 0, \quad \alpha > 0.$$

2.4 Problème stationnaire mixte pour l'élasticité asymétrique

2.4.1 Position du problème

Le problème d'élastostatique (P) dans le cas d'un milieu isotrope, homogène consiste à déterminer le déplacement u et la rotation ω vérifiant :

— Equations d'équilibre dans Ω

$$\begin{cases} D_1\sigma_{11}(u, \omega) + D_2\sigma_{21}(u, \omega) = -f_1 \text{ dans } \Omega, \\ D_1\sigma_{12}(u, \omega) + D_2\sigma_{22}(u, \omega) = -f_2 \text{ dans } \Omega, \\ (\nu + \epsilon)\Delta\omega + \sigma_{12}(u, \omega) - \sigma_{21}(u, \omega) = -g \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

— Conditions aux limites sur Γ_0

$$u_i = h_i \text{ sur } \Gamma_0 \quad \forall i = 1, 2 \quad \text{et} \quad \omega = k \text{ sur } \Gamma_0,$$

— Conditions aux limites sur Γ_1

$$\sum_{i=1}^2 \sigma_{ji}(u, \omega) n_j = p_i \text{ sur } \Gamma_1 \quad \forall i = 1, 2 \quad \text{et} \quad (\nu + \epsilon) \frac{\partial \omega}{\partial n} = q \text{ sur } \Gamma_1,$$

avec $\eta = (\eta_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la normale unité extérieure à Γ_1 . Dans les expressions ci-dessus ν, ϵ - désignent les constantes du matériel. Les fonctions $(f_i)_{1 \leq i \leq 2}$ désignent les composantes des forces de masse, tandis que g - le moment des forces de masse. Les grandeurs $(p_i)_{1 \leq i \leq 2}$ et q désignent respectivement, les composantes des vecteurs des forces et des moments extérieurs sollicitant Γ_1 . Par les symboles $(h_i)_{1 \leq i \leq 2}$ et k nous allons désigner, respectivement, les composantes des vecteurs des déplacements et des rotations sur Γ_0 .

2.4.2 Equations variationnelles et l'existence et l'unicité de la solution

Pour la formulation variationnelle du problème (P) , on va supposer que les composantes des vecteurs du déplacement $(u_i)_{1 \leq i \leq 2}$ et de la rotation ω sur Γ_0 sont nulles. On note $W(\Omega)$ L'espace des déplacements-rotations $(v, \varphi) = (v_1, v_2, \varphi)$ appartient à l'espace de Sobolev $(H^1(\Omega))^3$ et de trace nulle sur Γ_0 .

$$W(\Omega) = \left\{ (v, \varphi) \in (H^1(\Omega))^3 : v_1 = v_2 = \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \right\}.$$

$W(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme naturelle :

$$\|(v, \varphi)\|_{W(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^2 \|v_i\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

La formulation faible du problème (P) s'écrit :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } (u, \omega) \in W(\Omega) : \text{ pour tout } (v, \varphi) \in W(\Omega), \text{ on a :} \\ a[(u, \omega), (v, \varphi)] = l(v, \varphi), \end{aligned}$$

avec

$$a[(u, \omega), (v, \varphi)] = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(u, \omega) e_{ij}(v, \varphi) + (\nu + \epsilon) \sum_{i=1}^2 D_i \omega D_i \varphi \right] d\Omega,$$

et

$$l(v, \varphi) = \int_{\Omega} (f \cdot v + g\varphi) d\Omega + \int_{\Gamma_1} (p \cdot v + q\varphi) d\Gamma_1.$$

On vérifie que a est une forme bilinéaire continue et coercive sur $W(\Omega)$. On a

$$\begin{aligned} a[(u, \omega), (u, \omega)] &= \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(u, \omega) e_{ij}(v, \varphi) + (\nu + \epsilon) \sum_{i=1}^2 D_i \omega D_i \varphi \right] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\begin{aligned} &\lambda(e_{11} + e_{22})^2 + \mu(e_{12} + e_{21})^2 \\ &+ 2\mu((e_{11})^2 + (e_{22})^2) + \alpha(e_{12} - e_{21})^2 \\ &+ (\nu + \epsilon)((D_1 \omega)^2 + (D_2 \omega)^2) \end{aligned} \right] d\Omega \\ &\geq C \int_{\Omega} \left[\begin{aligned} &(D_1 u_1)^2 + \frac{1}{2}(D_1 u_2 + D_2 u_1)^2 + (D_2 u_2)^2 \\ &+ ((D_1 \omega)^2 + (D_2 \omega)^2) \end{aligned} \right] d\Omega, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Korn et de Poincaré, on trouve

$$a[(u, \omega), (u, \omega)] \geq C \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \omega\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = C \|(u, \omega)\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

On suppose que $(f_1, f_2, g) \in (L^2(\Omega))^3$ et $(p_1, p_2, q) \in (L^2(\Gamma_1))^3$, alors $l(v, \varphi)$ est une forme linéaire continue sur $W(\Omega)$. On peut donc appliquer le théorème de Lax Milgram : il existe une unique fonction $(u, \omega) \in W(\Omega)$ solution du problème

$$a[(u, \omega), (v, \varphi)] = l(v, \varphi), \quad \forall (v, \varphi) \in W(\Omega), \quad (2.1)$$

de plus, comme la forme bilinéaire $a(., .)$ est symétrique, on introduit la fonctionnelle quadratique :

$$\begin{aligned} J(v, \varphi) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(u, \omega) e_{ij}(v, \varphi) + (\nu + \epsilon) \sum_{i=1}^2 D_i \omega D_i \varphi \right] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} (f \cdot v + g\varphi) d\Omega - \int_{\Gamma_1} (p \cdot v + q\varphi) d\Gamma_1. \end{aligned} \quad (2.2)$$

La solution (u, ω) de (2.2) est caractérisée par :

$$J(u, \omega) = \min_{(v, \varphi) \in W(\Omega)} J(v, \varphi).$$

2.4.3 Interprétation mécanique d'équations d'équilibre variationnelle

On peut donc donner une interprétation mécanique des formulations $a[(u, \omega), (v, \varphi)]$ et $l(v, \varphi)$. L'espace $W(\Omega)$ représente l'espace des déplacements v et des rotations φ admissibles, la formulation variationnelle (2.1) exprime le principe de travaux virtuels (voir [12], [13]). En effet si $(v, \varphi) \in W(\Omega)$, alors

$$a[(u, \omega), (v, \varphi)] = \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(u, \omega) e_{ij}(v, \varphi) + (\nu + \epsilon) \sum_{i=1}^2 D_i \omega D_i \varphi \right] d\Omega,$$

représente le travail de déformation du corps élastique correspondant au déplacement v et à la rotation φ , tandis que

$$(v, \varphi) \mapsto \int_{\Omega} (f \cdot v + g\varphi) d\Omega + \int_{\Gamma_1} (p \cdot v + q\varphi) d\Gamma_1,$$

représente le travail des forces et des moments extérieures. Le déplacement et la rotation réels (u, ω) sont le déplacement et la rotation de $W(\Omega)$ pour lesquels ces deux travaux sont égaux et ceci pour tout $(v, \varphi) \in W(\Omega)$. Alors le déplacement et la rotation réels (u, ω) sont celui parmi tous les déplacements et les rotations $(v, \varphi) \in W(\Omega)$ qui minimisent l'énergie potentielle élastique :

$$J(v, \varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(v, \varphi) e_{ij}(v, \varphi) + (\nu + \epsilon) \sum_{i=1}^2 D_i \varphi D_i \varphi \right] d\Omega - \int_{\Omega} (f \cdot v + g\varphi) d\Omega - \int_{\Gamma_1} (p \cdot v + q\varphi) d\Gamma_1,$$

cette énergie potentielle élastique $J(v, \varphi)$ se compose de l'énergie de déformation :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\sum_{i,j=1}^2 \sigma_{ij}(v, \varphi) e_{ij}(v, \varphi) + (\nu + \epsilon) \sum_{i=1}^2 D_i \varphi D_i \varphi \right] d\Omega,$$

et de l'énergie potentielle des forces et des moments extérieures :

$$\left(\int_{\Omega} (f \cdot v + g\varphi) d\Omega + \int_{\Gamma_1} (p \cdot v + q\varphi) d\Gamma_1 \right).$$

2.5 Problème modèle de transmission pour l'élasticité asymétrique

2.5.1 Problème de transmission dans un domaine fixe avec bande mince plane

Dans le troisième chapitre, on va travailler avec un problème modèle de transmission dans le cadre de l'élasticité asymétrique, on va modéliser l'effet

de la couche mince $\Omega_+^\delta = \mathbb{R} \times]0, \delta[$ sur le domaine fixe $\Omega_- = \mathbb{R} \times]-1, 0[$ par une condition aux limite d'impédance définie sur la jonction entre Ω_- et Ω_+^δ , cette condition aux limite d'impédance est définie à l'aide d'un opérateur dite opérateur d'impédance qu'on va définir clairement dans le troisième chapitre. Dans cette partie on va écrire la formulation faible du problème de transmission et étudier l'existence et l'unicité de sa solution. On considère alors une famille (P^δ) , où δ est un petit paramètre positif, de problèmes de transmission bidimensionnels d'élasticité asymétrique linéaire dans un domaine Ω^δ constitué de deux corps micropolaires liés Ω_- et une couche mince Ω_+^δ . On suppose que Ω_- et Ω_+^δ sont homogènes et isotropes. De tels problèmes modélisent la propagation des ondes entre Ω_- et la couche mince Ω_+^δ . On limite notre considération au cas élastostatique et un simple cas géométrique (voir Figure 1). On prend

$$\begin{aligned} \Omega^\delta &= \mathbb{R} \times]-1, \delta[, \quad \Omega_- = \mathbb{R} \times]-1, 0[, \quad \Omega_+^\delta = \mathbb{R} \times]0, \delta[\\ \Gamma_- &= \mathbb{R} \times \{-1\}, \quad \Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}, \quad \Gamma_+^\delta = \mathbb{R} \times \{\delta\}. \end{aligned}$$

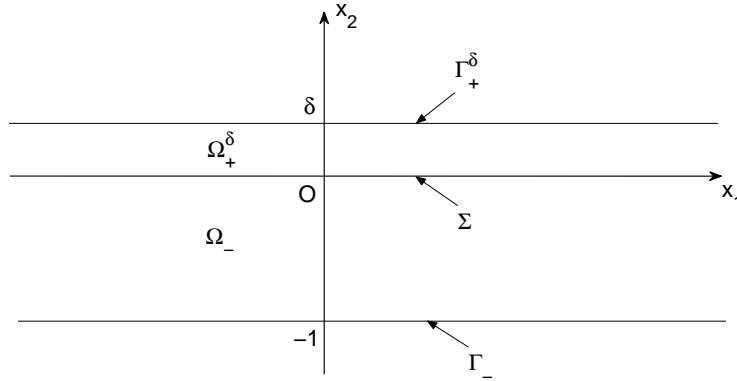


FIGURE 2.1 – Géométrie du problème étudié

On considère le problème de transmission (P^δ) pour le système de l'élasticité asymétrique :

— Equations in Ω_-

$$\begin{cases} D_1 \sigma_{-11} (u_-^\delta, \omega_-^\delta) + D_2 \sigma_{-21} (u_-^\delta, \omega_-^\delta) = -f_{-1}, \\ D_1 \sigma_{-12} (u_-^\delta, \omega_-^\delta) + D_2 \sigma_{-22} (u_-^\delta, \omega_-^\delta) = -f_{-2}, \\ (\nu_- + \epsilon_-) \Delta \omega_-^\delta + 2\alpha_- (D_1 u_{-2}^\delta - D_2 u_{-1}^\delta) - 4\alpha_- \omega_-^\delta = -g_-. \end{cases} \quad (2.3)$$

— Equations in Ω_+^δ

$$\begin{cases} D_1\sigma_{+11}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) + D_2\sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ D_1\sigma_{+12}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) + D_2\sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+) \Delta\omega_+^\delta + 2\alpha_+ (D_1u_{+2}^\delta - D_2u_{+1}^\delta) - 4\alpha_+\omega_+^\delta = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

— Conditions aux limites sur Γ_-

$$\begin{cases} u_-^\delta = 0, \\ \omega_-^\delta = 0. \end{cases}$$

— Conditions aux limites sur Γ_+^δ

$$\begin{cases} \sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_2\omega_+^\delta = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

— Conditions de transmission sur Σ

$$\begin{cases} u_-^\delta = u_+^\delta, \\ \omega_-^\delta = \omega_+^\delta, \\ \sigma_{-21}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = \sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta), \\ \sigma_{-22}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta), \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2\omega_-^\delta = (\nu_+ + \epsilon_+) D_2\omega_+^\delta, \end{cases}$$

où ν_\pm et ϵ_\pm sont des constantes positives dépendant de la nature du matériau Ω_\pm , f_- et g_- sont la force et le moment exercés sur Ω_- respectivement, u_\pm^δ et ω_\pm^δ sont les champs du déplacement et de la rotation, respectivement

$$(u_\pm^\delta, \omega_\pm^\delta) = (u_{\pm 1}^\delta, u_{\pm 2}^\delta, \omega_\pm^\delta),$$

$\gamma_{\pm ji}$ est le tenseur de déformation défini par :

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm 11}(u_\pm^\delta, \omega_\pm^\delta) &= D_1u_{\pm 1}^\delta, & \gamma_{\pm 22}(u_\pm^\delta, \omega_\pm^\delta) &= D_2u_{\pm 2}^\delta, \\ \gamma_{\pm 12}(u_\pm^\delta, \omega_\pm^\delta) &= D_1u_{\pm 2}^\delta - \omega_\pm^\delta, & \gamma_{\pm 21}(u_\pm^\delta, \omega_\pm^\delta) &= D_2u_{\pm 1}^\delta + \omega_\pm^\delta, \end{aligned}$$

et $\sigma_{\pm ji}$ est le tenseur de contrainte donné par la loi linéaire :sion d'élasticité asymétrique qui a été introduit dans la section précédente. On note

$$\begin{aligned} (u_\pm, \omega_\pm) &\equiv (u_{\pm 1}, u_{\pm 2}, \omega_\pm) \\ (v_\pm, \varphi_\pm) &\equiv (v_{\pm 1}, v_{\pm 2}, \varphi_\pm) \end{aligned}$$

$$\sigma_{\pm ji} = (\mu_\pm + \alpha_\pm) \gamma_{\pm ji} + (\mu_\pm - \alpha_\pm) \gamma_{\pm ij} + \lambda_\pm \gamma_{\pm kk} \delta_{ij},$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et μ_\pm , λ_\pm , α_\pm sont des constantes matérielles satisfaisant les inégalités :

$$\mu_\pm > 0, \quad 3\lambda_\pm + 2\mu_\pm > 0, \quad \alpha_\pm > 0.$$

2.5.2 Formulation faible du problème de transmission et l'existence et l'unicité de sa solution

Ici, on écrit la formulation faible du problème de transmission on introduit l'espace V :

$$V = \left\{ \begin{array}{l} (v_{\pm}, \varphi_{\pm}) \in \mathbb{H}^1(\Omega_{\pm}) \times H^1(\Omega_{\pm}) : \\ v_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ v_{+1} = v_{-1} \text{ sur } \Sigma, v_{+2} = v_{-2} \text{ sur } \Sigma, \\ \varphi_+ = \varphi_- \text{ sur } \Sigma \end{array} \right\}.$$

En multipliant par $v_{\pm} = (v_{\pm 1}, v_{\pm 2})$ les deux premières équations d'équilibre des forces, l'équation d'équilibre du moment par φ_{\pm} , et en effectuant la somme des équations on trouve que le problème (P^{δ}) formellement équivalent au problème variationnel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } (u_{\pm}^{\delta}, \varphi_{\pm}^{\delta}) \in V, \text{ telle que } \forall (v_{\pm}, \varphi_{\pm}) \in V : \\ a^- [(u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}), (v_-, \varphi_-)] + a^+ [(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}), (v_+, \varphi_+)] = L_{\delta}(v_{\pm}, \varphi_{\pm}), \end{array} \right.$$

avec

$$a^- [(u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}), (v_-, \varphi_-)] = \int_{\Omega_-} \left[\begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{-ij}(u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}) e_{-ij}(v_-, \varphi_-) \\ + (\nu_- + \epsilon_-) \sum_{i=1}^2 D_i \omega_{-i}^{\delta} D_i \varphi_{-i} \end{array} \right] d\Omega_-,$$

$$a^+ [(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}), (v_+, \varphi_+)] = \int_{\Omega_+^{\delta}} \left[\begin{array}{l} \sum_{i,j=1}^2 \sigma_{+ij}(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) e_{+ij}(v_+, \varphi_+) \\ + (\nu_+ + \epsilon_+) \sum_{i=1}^2 D_i \omega_{+i}^{\delta} D_i \varphi_{+i} \end{array} \right] d\Omega_+^{\delta},$$

et

$$L_{\delta}(v_{\pm}, \varphi_{\pm}) = \int_{\Omega_-} (f_- \cdot v_- + g_- \cdot \varphi_-) d\Omega_-.$$

Pour tout $\forall (u_{\pm}^{\delta}, \omega_{\pm}^{\delta}), (v_{\pm}, \varphi_{\pm}) \in V$, on pose

$$\begin{aligned} a [(u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}), (v_{\pm}, \varphi_{\pm})] &= a^- [(u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}), (v_-, \varphi_-)] + a^+ [(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}), (v_+, \varphi_+)] \\ L_{\delta}(v_{\pm}, \varphi_{\pm}) &= \int_{\Omega_-} (f_- \cdot v_- + g_- \cdot \varphi_-) d\Omega_-. \end{aligned}$$

L_{δ} est une forme linéaire continue sur V , et grâce à l'inégalité de Korn $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et coercive sur V .

Chapitre 3

Impédance d'une couche mince plane en élasticité asymétrique

3.1 introduction

Dans ce chapitre, on va modéliser d'une façon approchée l'effet de la bande mince élastique micropolaire $\Omega_+^\delta = \mathbb{R} \times]0, \delta[$, d'épaisseur δ sur le corps fixe $\Omega_- = \mathbb{R} \times]-1, 0[$, lorsque δ tends vers 0 par les techniques des développements asymptotique avec changement d'échelle, ensuite on montre une estimation d'erreur.

3.1.1 Position du problème

On considère une famille (P^δ) , avec δ est un petit paramètre positif de problèmes de transmission bidimensionnels de l'élasticité asymétrique. On limite notre considération au cas des élastostatiques et un géometrie simple. On pose :

$$\begin{aligned} \Omega^\delta &= \mathbb{R} \times]-1, \delta[, \quad \Omega_- = \mathbb{R} \times]-1, 0[, \quad \Omega_+^\delta = \mathbb{R} \times]0, \delta[, \\ \Gamma_- &= \mathbb{R} \times \{-1\}, \quad \Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}, \quad \Gamma_+^\delta = \mathbb{R} \times \{\delta\}, \end{aligned}$$

et on considère le problème de transmission (P^δ) :

- (a) Inconnues : $u_\pm(x_1, x_2) = (u_{\pm 1}(x_1, x_2), u_{\pm 2}(x_1, x_2))$ champ des déplacements, $\omega_\pm(x_1, x_2)$ champ des rotations.
- (b) Données : $f_-(x_1, x_2)$ champ des forces de masse et $g_-(x_1, x_2)$ champ des couples de masse.
- (c) La loi de comportement : Le tenseur asymétrique de contraintes $\sigma_{\pm ji}$ est lié avec le tenseur de déformation asymétrique $e_{\pm ji}$ par la loi de comportement

linéaire suivante :

$$\sigma_{\pm ji} = (\mu_{\pm} + \alpha_{\pm}) e_{\pm ji} + (\mu_{\pm} - \alpha_{\pm}) e_{\pm ij} + \lambda_{\pm} \left(\sum_{k=1}^2 e_{\pm kk} \right) \delta_{ij}; \quad i, j = 1, 2,$$

avec δ_{ij} est le symbole de Kronecker et le tenseur asymétrique de déformation $e_{\pm ji}$ est défini par :

$$\begin{aligned} e_{\pm 11} (u_{\pm}^{\delta}, \omega_{\pm}^{\delta}) &= D_1 u_{\pm 1}^{\delta}, \quad e_{\pm 22} (u_{\pm}^{\delta}, \omega_{\pm}^{\delta}) = D_2 u_{\pm 2}^{\delta}, \\ e_{\pm 12} (u_{\pm}^{\delta}, \omega_{\pm}^{\delta}) &= D_1 u_{\pm 2}^{\delta} - \omega_{\pm}^{\delta}, \quad e_{\pm 21} (u_{\pm}^{\delta}, \omega_{\pm}^{\delta}) = D_2 u_{\pm 1}^{\delta} + \omega_{\pm}^{\delta}, \end{aligned}$$

avec $D_j. \equiv \frac{\partial}{\partial x_j}$ est la dérivation par rapport à x_j pour $j = 1, 2$ et μ_{\pm} , λ_{\pm} et α_{\pm} sont des constantes matérielles satisfaisant les inégalités :

$$\mu_{\pm} > 0, \quad 3\lambda_{\pm} + 2\mu_{\pm} > 0, \quad \alpha_{\pm} > 0.$$

— Equations dans Ω_-

$$\begin{cases} D_1 \sigma_{-11} (u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}) + D_2 \sigma_{-21} (u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}) = -f_{-1}, \\ D_1 \sigma_{-12} (u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}) + D_2 \sigma_{-22} (u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}) = -f_{-2}, \\ (\nu_- + \epsilon_-) \Delta \omega_-^{\delta} + 2\alpha_- (D_1 u_{-2}^{\delta} - D_2 u_{-1}^{\delta}) - 4\alpha_- \omega_-^{\delta} = -g_-. \end{cases} \quad (3.1)$$

— Equations dans Ω_+^{δ}

$$\begin{cases} D_1 \sigma_{+11} (u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) + D_2 \sigma_{+21} (u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) = 0, \\ D_1 \sigma_{+12} (u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) + D_2 \sigma_{+22} (u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+) \Delta \omega_+^{\delta} + 2\alpha_+ (D_1 u_{+2}^{\delta} - D_2 u_{+1}^{\delta}) - 4\alpha_+ \omega_+^{\delta} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

— Conditions aux limites sur Γ_-

$$\begin{cases} u_-^{\delta} = 0, \\ \omega_-^{\delta} = 0. \end{cases}$$

— Conditions aux limites sur Γ_+^{δ}

$$\begin{cases} \sigma_{+21} (u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) = 0, \\ \sigma_{+22} (u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \omega_+^{\delta} = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

— Conditions de transmission sur Σ :

$$\begin{cases} u_-^{\delta} = u_+^{\delta}, \\ \omega_-^{\delta} = \omega_+^{\delta}, \\ \sigma_{-21} (u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}) = \sigma_{+21} (u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}), \\ \sigma_{-22} (u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}) = \sigma_{+22} (u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}), \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_-^{\delta} = (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \omega_+^{\delta}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Il est bien connu (voir chapitre 2) que le problème de transmission (P^δ) admet une unique solution dans l'espace canonique de Sobolev

$$V = \left\{ \begin{array}{l} (v_\pm, \varphi_\pm) \in \mathbb{H}^1(\Omega_\pm) \times H^1(\Omega_\pm) := (H^1(\Omega_\pm) \times H^1(\Omega_\pm)) \times H^1(\Omega_\pm); \\ v_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ v_{+1} = v_{-1} \text{ sur } \Sigma, v_{+2} = v_{-2} \text{ sur } \Sigma, \\ \varphi_+ = \varphi_- \text{ sur } \Sigma. \end{array} \right\}$$

Lorsque l'épaisseur δ de la couche Ω_+^δ est assez petite, la solution numérique du problème de transmission (P^δ) ne peut pas être calculée avec précision en raison des instabilités numériques qui apparaissent. Alors, notre objectif dans ce chapitre est de modéliser l'effet de la couche mince Ω_+^δ sur le domaine fixe Ω_- par une condition aux limites d'impédance approchée sur Σ , pour ramener le problème de transmission (P^δ) à un problème aux limites équivalent posé seulement dans le domaine fixe Ω_- , c'est à dire, on remplace le système d'équations dans Ω_+^δ , les conditions de transmission sur Σ et les conditions aux limites sur Γ_+^δ par une condition aux limites d'impédance sur Σ , qui sera établi par une méthode basée sur la technique du développement asymptotique avec changement d'échelle.

3.1.2 Définition formelle de l'impédance

Le paramètre δ est supposé être suffisamment petit, on va remplacer le problème de transmission posé dans Ω^δ par un problème posé seulement dans le domaine fixe Ω_- . Pour cela, on résout le problème aux limites suivant :

$$(P_+^\delta) : \left\{ \begin{array}{l} \text{Equations (3.2) dans } \Omega_+^\delta, \\ \text{Conditions aux limites sur } \Gamma_+^\delta, \\ u_+^\delta = \psi^\delta \text{ sur } \Sigma, \omega_+^\delta = \phi^\delta \text{ sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

Dans un espace adéquat, le problème (P_+^δ) a une solution unique $(u_+^\delta, \omega_+^\delta)$ et alors on définit l'opérateur d'impédance T_δ comme suit :

$$(\psi^\delta, \phi^\delta) \longmapsto T_\delta(\psi^\delta, \phi^\delta) := \left(\sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta)|_\Sigma, \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta)|_\Sigma, (v_+ + \epsilon_+)D_2\omega_+^\delta|_\Sigma \right),$$

en utilisant les conditions de transmission (3.4), on obtient

$$\left(\sigma_{-21}(u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma, \sigma_{-22}(u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma, (v_- + \epsilon_-)D_2\omega_-^\delta|_\Sigma \right) = T_\delta \left((u_+^\delta, \omega_+^\delta)|_\Sigma \right),$$

et le problème de transmission (P^δ) est alors équivalent au problème d'impédance suivant posé dans Ω_- :

$$(P_-^\delta) : \left\{ \begin{array}{l} \text{Equations (3.1) dans } \Omega_-, \\ u_-^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_- \text{ et } \omega_-^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \left[\begin{array}{l} (\sigma_{-21}(u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma, \sigma_{-22}(u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma, (v_- + \epsilon_-)D_2\omega_-^\delta|_\Sigma) \\ = T_\delta((u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma) \end{array} \right] \end{array} \right\}.$$

L'opérateur d'impédance T_δ décrit exactement l'effet de la couche mince Ω_+^δ sur le domaine fixe Ω_- . Comme l'opérateur d'impédance exact T_δ ne peut pas être calculé, on va seulement prouver qu'il peut être approché par $T_{*\delta} = \delta T_*$ avec T_* est donné par :

$$T_*(\psi^\delta, \phi^\delta) = (C_1, C_2, C_3)(\psi^\delta, \phi^\delta),$$

ou

$$\begin{aligned} C_1(\psi^\delta, \phi^\delta) &= \frac{4\mu_+(\mu_+ + \lambda_+)}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1^2 \psi_1^\delta, \\ C_2(\psi^\delta, \phi^\delta) &= \frac{4\alpha_+\mu_+}{\mu_+ + \alpha_+} D_1 (D_1 \psi_2^\delta - \phi^\delta) \end{aligned}$$

et

$$C_3(\psi^\delta, \phi^\delta) = (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \phi^\delta + \frac{4\alpha_+\mu_+}{\mu_+ + \alpha_+} (D_1 \psi_2^\delta - \phi^\delta).$$

La solution $(u_-^\delta, \omega_-^\delta)$ de (P^δ) dans Ω_- est alors approchée par la solution $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$ du problème d'impédance approchée suivant (P_{-*}^δ) donnée par :

$$(P_{-*}^\delta) : \left\{ \begin{array}{l} D_1 \sigma_{-11}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + D_2 \sigma_{-21}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = -f_{-1} \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + D_2 \sigma_{-22}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = -f_{-2} \text{ dans } \Omega_-, \\ (v_- + \epsilon_-) \Delta \omega_{-*}^\delta + 2\alpha_- (D_1 u_{-*2}^\delta - D_2 u_{-*1}^\delta) - 4\alpha_- \omega_{-*}^\delta = -g_- \text{ dans } \Omega_-, \\ u_{-*}^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \omega_{-*}^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \left[\begin{array}{l} (\sigma_{-21}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)|_\Sigma, \sigma_{-22}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)|_\Sigma, (v_- + \epsilon_-)D_2\omega_{-*}^\delta|_\Sigma) \\ = T_{*\delta}((u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)|_\Sigma) \end{array} \right] \end{array} \right\},$$

et on va prouver le théorème suivant :

Théorème 3.1.1 *le problème (P_{-*}^δ) a une unique solution dans l'espace*

$$V_* = \left\{ \begin{array}{l} (v_-, \varphi_-) \in \mathbb{H}^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_-); \\ (D_1 v_{-1}, D_1 v_{-2}) \in \mathbb{L}^2(\Sigma), D_1 \varphi_- \in L^2(\Sigma), \\ v_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_- \end{array} \right\}$$

et on a l'estimation d'erreur suivante :

$$\|u_-^\delta - u_{-*}^\delta\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\omega_-^\delta - \omega_{-*}^\delta\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^{3/2},$$

avec $C > 0$ est une constante qui ne depend que de f_- et g_- et les coefficients d'élasticité.

Ce chapitre est organisé comme suite dans la section 2, on calcule un impédance approchée en utilisant le développement de Taylor. Dans la section 3, on utilise les techniques du développement asymptotique avec changement d'échelle pour obtient la meme impédance approchée, ensuite on établit un résultat de stabilité pour le problème de transmission. Dans la section 4, on montre un résultat de stabilité pour le problème d'impédance approché. Enfin dans la section 5, on estime l'erreur entre $(u_-^\delta, \omega_-^\delta)$ et $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$ dans l'espace de Sobolev.

3.2 Dérivation d'une condition aux limites d'impédance approchée en utilisant le développement de Taylor

Ici, on va considérer $\sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta)$, $\sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta)$ et $D_2\omega_+^\delta$ comme fonctions des variables x_1 et x_2 avec $(x_1, x_2) \in \Omega_+^\delta$, et on va construire une approximation d'ordre 1 de l'impédance en utilisant le développement de Taylor. Les approximations de $\sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta)$, $\sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta)$ et $D_2\omega_+^\delta$ quand δ tends vers 0, donne

$$\begin{cases} \sigma_{+21}(x_1, \delta) = \sigma_{+21}(0) + \delta D_2\sigma_{+21}(x_1, 0) + \dots, \\ \sigma_{+22}(x_1, \delta) = \sigma_{+22}(0) + \delta D_2\sigma_{+22}(x_1, 0) + \dots, \\ (v_+ + \epsilon_+)D_2\omega_+^\delta(x_1, \delta) = (v_+ + \epsilon_+)D_2\omega_+^\delta(x_1, 0) + \delta(v_+ + \epsilon_+)D_2^2\omega_+^\delta(x_1, 0) + \dots \end{cases} \quad (3.5)$$

La clé pour obtenir une condition aux limites approchée est le fait que les dérivées normales de σ_{+21} , σ_{+22} et $D_2\omega_+^\delta$ sur Σ peuvent être exprimées explicitement en termes de traces sur Σ des contraintes σ_{+21} , σ_{+22} , le déplacement u_+^δ et la rotation ω_+^δ . Comme on a

$$\begin{aligned} \sigma_{+21}(x_1, x_2) &= [(\mu_+ + \alpha_+)D_2u_{+1}^\delta + (\mu_+ - \alpha_+)D_1u_{+2}^\delta + 2\alpha_+\omega_+^\delta](x_1, x_2), \\ \sigma_{+22}(x_1, x_2) &= [(2\mu_+ + \lambda_+)D_2u_{+2}^\delta + \lambda_+D_1u_{+1}^\delta](x_1, x_2), \\ \sigma_{+11}(x_1, x_2) &= [(2\mu_+ + \lambda_+)D_1u_{+1}^\delta + \lambda_+D_2u_{+2}^\delta](x_1, x_2), \\ \sigma_{+12}(x_1, x_2) &= [(\mu_+ + \alpha_+)D_1u_{+2}^\delta + (\mu_+ - \alpha_+)D_2u_{+1}^\delta - 2\alpha_+\omega_+^\delta](x_1, x_2), \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} D_2 u_{+2}^\delta(x_1, x_2) &= \left[\frac{1}{2\mu_+ + \lambda_+} (\sigma_{+22} - \lambda_+ D_1 u_+^\delta) \right] (x_1, x_2) \\ D_2 u_{+1}^\delta(x_1, x_2) &= \frac{1}{\mu_+ + \alpha_+} [\sigma_{+21} - (\mu_+ - \alpha_+) D_1 u_{+2}^\delta - 2\alpha_+ \omega_+^\delta] (x_1, x_2), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sigma_{+11}(x_1, x_2) = \left[\frac{4\mu_+(\mu_+ + \lambda_+)}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1 u_{+1}^\delta + \frac{\lambda_+}{2\mu_+ + \lambda_+} \sigma_{+22} \right] (x_1, x_2), \quad (3.6)$$

et

$$\sigma_{+12}(x_1, x_2) = \left[\frac{4\mu_+\alpha_+}{\mu_+ + \alpha_+} (D_1 u_{+2}^\delta - \omega_+^\delta) + \frac{\mu_+ - \alpha_+}{\mu_+ + \alpha_+} \sigma_{+21} \right] (x_1, x_2). \quad (3.7)$$

En utilisant (3.2) et l'expressions (3.6) et (3.7) de σ_{+11} et σ_{+12} , on obtient :

$$\begin{cases} D_2 \sigma_{+21} = -\frac{4\mu_+(\mu_+ + \lambda_+)}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1^2 u_{+1}^\delta - \frac{\lambda_+}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1 \sigma_{+22}, \\ D_2 \sigma_{+22} = -\frac{4\mu_+\alpha_+}{\mu_+ + \alpha_+} (D_1^2 u_{+2}^\delta - D_1 \omega_+^\delta) - \frac{\mu_+ - \alpha_+}{\mu_+ + \alpha_+} D_1 \sigma_{+21}, \\ (v_+ + \epsilon_+) D_2^2 \omega_+^\delta = \left[-\frac{4\mu_+\alpha_+}{\mu_+ + \alpha_+} (D_1 u_{+2}^\delta - \omega_+^\delta) - (v_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_+^\delta \right. \\ \left. + \frac{2\alpha_+}{\mu_+ + \alpha_+} \sigma_{21} \right] \end{cases} \quad (3.8)$$

En utilisant (3.5), (3.8) et les condtons aux limites (3.3) sur Γ_+^δ , on obtient à l'ordre 1, l'impédance approché $T_{*\delta}$ donné par sa formule dans la section 3.1.2 et ainsi on obtient le problème (P_{-*}^δ) posé dans Ω_- .

3.3 Estimation d'erreur pour le problème d'impédance approché

Ici, on va énoncer et prouver un résultat de stabilité pour le problème (P_{-*}^δ) dans Ω_- , ainsi on va déterminer les premiers termes du développement asymptotique de sa solution.

3.3.1 Formulation faible du problème d'impédance approché

L'espace pour étudier le problème d'impédance (P_{-*}^δ) est :

$$V_* = \left\{ \begin{array}{l} (v_-, \varphi_-) \in \mathbb{H}^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_-); \\ (D_1 v_{-1}, D_1 v_{-2}) \in \mathbb{L}^2(\Sigma), \quad D_1 \varphi_- \in L^2(\Sigma), \\ v_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \quad \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_- \end{array} \right\}.$$

Soit

$$a^- [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_-, \varphi_-)] = \int_{\Omega_-} \left[\begin{array}{l} \sigma_{-11} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-11} (v_-, \varphi_-) + \\ \sigma_{-21} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-21} (v_-, \varphi_-) \\ + \sigma_{-12} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-12} (v_-, \varphi_-) \\ + \sigma_{-22} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-22} (v_-, \varphi_-) \\ + (\nu_- + \epsilon_-) (D_1 \omega_{-*}^\delta D_1 \varphi_- + D_2 \omega_{-*}^\delta D_2 \varphi_-) \end{array} \right] d\Omega_-,$$

et

$$a_\Sigma [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_-, \varphi_-)] = \int_\Sigma \left[\begin{array}{l} \frac{4\mu_+(\mu_+\lambda_+)}{2\mu_+\lambda_+} D_1 u_{-*1|\Sigma}^\delta D_1 v_{-1|\Sigma} \\ + \frac{4\mu_+\alpha_+}{(\mu_+\alpha_+)} \left(D_1 u_{-*2|\Sigma}^\delta - \omega_{-*|\Sigma}^\delta \right) (D_1 v_{-2|\Sigma} - \varphi_{-|\Sigma}) \\ + (\nu_+ + \epsilon_+) D_1 \omega_{-*|\Sigma}^\delta D_1 \varphi_{-|\Sigma} \end{array} \right] d\Sigma.$$

Le problème d'impédance approché (P_{-*}^δ) admet la formulation faible suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \in V_*, \text{ tel que pour tout } (v_-, \varphi_-) \in V_* : \\ a^- [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_-, \varphi_-)] + \delta a_\Sigma [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_-, \varphi_-)] \\ = \int_{\Omega_-} f_- \cdot v_- + g_- \cdot \varphi_-. \end{array} \right.$$

3.3.2 Résultat de stabilité pour le problème d'impédance approchée

L'existence et l'unicité de la solution du problème (P_{-*}^δ) dans l'espace V_* , s'obtient et on a le résultat de stabilité suivant.

Théorème 3.3.1 *Soit L_δ une forme linéaire continue sur V_* telle que :*

$$|L_\delta(v_-, \varphi_-)| \leq l_\delta \left(\mathbb{A} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + \sqrt{\delta} \mathbb{B} (v_-, \varphi_-) \right)$$

où l_δ est une fonction de $\delta > 0$, peut-être pas bornée quand δ tend vers 0. et

$$\begin{aligned} \mathbb{A} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) &= \|v_-\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\varphi_-\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)}, \\ \mathbb{B} (v_-, \varphi_-) &= \left(\begin{array}{l} \left\| D_1 v_{-*1|\Sigma}^\delta \right\|_{L^2(\Sigma)} + \left\| D_1^\delta \omega_{-*1|\Sigma}^\delta \right\|_{L^2(\Sigma)} \\ + \left\| D_1 v_{-*2|\Sigma}^\delta - \omega_{-*|\Sigma}^\delta \right\|_{L^2(\Sigma)} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Alors il exist $C > 0$ (indépendante de δ) telle que la solution $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$ du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \in V_*, \text{ tel que pour tout } (v_-, \varphi_-) \in V_* : \\ a^- [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_-, \varphi_-)] + \delta a_\Sigma [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_-, \varphi_-)] = L_\delta(v_-, \varphi_-). \end{array} \right. \quad (3.9)$$

satisfait les estimations suivantes :

$$\mathbb{A}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \leq Cl_\delta \quad (3.10)$$

$$\mathbb{B}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \leq C\delta^{-\frac{1}{2}}l_\delta \quad (3.11)$$

Preuve. On a

$$\forall (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \in V_* : a_\Sigma [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)] \geq 0,$$

et par l'inégalité de Korn, $A^2(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$ est équivalente à $a^- [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)]$ et on a

$$a_\Sigma [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)] \leq C \mathbb{B}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta),$$

où $C > 0$ est une constante dépendant uniquement des coefficients d'élasticité. Alors en prenant $(v_-, \varphi_-) = (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$ dans la formulation faible (3.9), on obtient avec une constante positive $K > 0$ indépendante de δ , l'estimation suivante :

$$\mathbb{A}^2(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + \delta \mathbb{B}^2(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \leq Kl_\delta \left(\mathbb{A}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + \sqrt{\delta} \mathbb{B}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \right),$$

ce qui donne directement les estimations (3.10) et (3.11).

3.3.3 Développement asymptotique pour le problème d'impédance approchée

On pose

$$\begin{aligned} u_{-*}^\delta &= u_{-*}^0 + \delta u_{-*}^1 + \delta^2 u_{-*}^2 + \dots, \\ \omega_{-*}^\delta &= \omega_{-*}^0 + \delta \omega_{-*}^1 + \delta^2 \omega_{-*}^2 + \dots \end{aligned}$$

En injectant ce développement asymptotique dans le problème d'impédance approchée (P_{-*}^δ) et en identifiant les coefficients de même puissance de δ , on obtient une hiérarchie d'équations et de conditions aux limites. A l'ordre 0 on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 \sigma_{-11}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) + D_2 \sigma_{-21}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) = -f_{-1} \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) + D_2 \sigma_{-22}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) = -f_{-2} \text{ dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-) \Delta \omega_{-*}^0 + 2\alpha_- (D_1 u_{-*2}^0 - D_2 u_{-*1}^0) - 4\alpha_- \omega_{-*}^0 = -g_- \text{ dans } \Omega_-, \\ u_{-*}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \omega_{-*}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \left(\sigma_{-21}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0)|_\Sigma, \sigma_{-22}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0)|_\Sigma, (v_- + \epsilon_-) D_2 \omega_{-*}^0|_\Sigma \right) = O_{1 \times 3}. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

A l'ordre 1, on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} D_1 \sigma_{-11} (u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) + D_2 \sigma_{-21} (u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12} (u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) + D_2 \sigma_{-22} (u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-) \Delta \omega_{-*}^1 + 2\alpha_- (D_1 u_{-*2}^1 - D_2 u_{-*1}^1) - 4\alpha_- \omega_{-*}^1 = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ u_{-*}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \omega_{-*}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \left[\begin{array}{l} (\sigma_{-21} (u_{-*}^1, \omega_{-*}^1)|_{\Sigma}, \sigma_{-22} (u_{-*}^1, \omega_{-*}^1)|_{\Sigma}, (v_- + \epsilon_-) D_2 \omega_{-*}^1|_{\Sigma}) \\ = T_* \left((u_{-*}^0, \omega_{-*}^0)|_{\Sigma} \right) \end{array} \right] \end{array} \right. \quad (3.13)$$

3.3.4 Estimation d'erreur pour le problème d'impédance approchée

On pose

$$\begin{aligned} u_{-*}^{(\delta,1)} &= u_{-*}^0 + \delta u_{-*}^1, \quad \omega_{-*}^{(\delta,1)} = \omega_{-*}^0 + \delta \omega_{-*}^1, \\ a^- \left[\left(u_{-*}^\delta - u_{-*}^{(\delta,1)}, \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^{(\delta,1)} \right), (v_-, \varphi_-) \right] \\ + \delta a_\Sigma \left[\left(u_{-*}^\delta - u_{-*}^{(\delta,1)}, \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^{(\delta,1)} \right), (v_-, \varphi_-) \right] &= L_\delta (v_-, \varphi_-), \end{aligned}$$

et en utilisant les équations et des conditions aux limites satisfaites par $(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0)$ et $(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1)$, on obtient

$$L_\delta (v_-, \varphi_-) = -\delta^2 a_\Sigma \left[(u_{-*}^2, \omega_{-*}^2), (v_-, \varphi_-) \right]$$

et alors

$$|L_\delta (v_-, \varphi_-)| \leq C \delta^{3/2} \left(\begin{array}{l} \|v_-^\delta\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\varphi_-^\delta\|_{H^1(\Omega_-)} + \sqrt{\delta} \|D_1 v_{-1}^\delta\|_{L^2(\Sigma)} \\ + \sqrt{\delta} \|D_1 v_{-2}^\delta - \varphi_-^\delta\|_{L^2(\Sigma)} + \sqrt{\delta} \|D_1 \varphi_{-1}^\delta\|_{L^2(\Sigma)} \end{array} \right),$$

ce qui implique, par le résultat de stabilité (voir Théorème 3.3.1), l'estimation d'erreur suivante :

$$\left\| u_{-*}^\delta - u_{-*}^{(\delta,1)} \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^{(\delta,1)} \right\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C \delta^{3/2}. \quad (3.14)$$

3.4 Construction d'une condition d'impédance approchée par développement asymptotique avec changement d'échelle

Une condition d'impédance approchée peut également être construite par un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur δ de la couche

mince Ω_+^δ comme suit :

3.4.1 Changement d'échelle

Pour travailler dans un domaine fixe comme dans ([2]), on va effectuer le changement d'échelle suivant dans la couche mince Ω_+^δ . On pose :

$$x_2 = \delta z \text{ avec } z \in]0, 1[\text{ et } \Omega_+ = \mathbb{R} \times]0, 1[, \Gamma_+ = \mathbb{R} \times \{1\},$$

et on définit

$$\tilde{u}_-^\delta(x_1, z) = u_-^\delta(x_1, z), \quad \tilde{\omega}_-^\delta(x_1, z) = \omega_-^\delta(x_1, z)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{u}_+^\delta : \Omega_+ &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, z) &\mapsto (u_{+1}^\delta(x_1, \delta z), \delta u_{+2}^\delta(x_1, \delta z)) \\ \tilde{\omega}_+^\delta : \Omega_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, z) &\mapsto \omega_+^\delta(x_1, \delta z). \end{aligned}$$

et alors on a les dérivées suivantes :

$$\begin{aligned} D_1 u_{+1}^\delta(x_1, \delta z) &= D_1 u_{+1}^\delta(x_1, x_2) = D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta(x_1, z), \\ D_2 u_{+1}^\delta(x_1, \delta z) &= D_2 u_{+1}^\delta(x_1, x_2) = \frac{1}{\delta} D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta(x_1, z), \\ D_1 u_{+2}^\delta(x_1, \delta z) &= D_1 u_{+2}^\delta(x_1, x_2) = \frac{1}{\delta} D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta(x_1, z), \\ D_2 u_{+2}^\delta(x_1, \delta z) &= D_2 u_{+2}^\delta(x_1, x_2) = \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta(x_1, z), \\ D_1 \omega_+^\delta(x_1, \delta z) &= D_1 \omega_+^\delta(x_1, x_2) = D_1 \tilde{\omega}_+^\delta(x_1, z), \\ D_2 \omega_+^\delta(x_1, \delta z) &= D_2 \omega_+^\delta(x_1, x_2) = \frac{1}{\delta} D_2 \tilde{\omega}_+^\delta(x_1, z). \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre dans la couche mince Ω_+^δ , les conditions aux limites sur Γ_+^δ et les conditions de transmission sur Σ devient :

— Equations d'équilibre dans Ω_+ :

$$\begin{aligned}
(E_{+1}) \quad & D_1 \left[2\mu_+ D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta + \lambda_+ \left(D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta + \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta \right) \right] \\
& + \frac{1}{\delta} D_2 \left[\begin{array}{c} \mu_+ \frac{1}{\delta} (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta + D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \\ -\alpha_+ \frac{1}{\delta} (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta \end{array} \right] = 0, \\
(E_{+2}) \quad & D_1 \left[\begin{array}{c} \mu_+ \frac{1}{\delta} (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta + D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \\ +\alpha_+ \frac{1}{\delta} (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) - 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta \end{array} \right] \\
& + \frac{1}{\delta} D_2 \left[2\mu_+ \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta + \lambda_+ \left(D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta + \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta \right) \right] = 0, \\
(E_{+3}) \quad & (\nu_+ + \epsilon_+) \left(D_1^2 + \frac{1}{\delta^2} D_2^2 \right) \tilde{\omega}_+^\delta \\
& + 2\alpha_+ \frac{1}{\delta} (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) - 4\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta = 0.
\end{aligned}$$

— Conditions aux limites sur Γ_+ :

$$\begin{aligned}
(BC\Gamma_{+1}) \quad & \frac{1}{\delta} \left[\begin{array}{c} \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta + D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \\ -\alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \end{array} \right] + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta = 0, \\
(BC\Gamma_{+2}) \quad & 2\mu_+ \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta + \lambda_+ \left(D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta + \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta \right) = 0, \\
(BC\Gamma_{+3}) \quad & (\nu_+ + \epsilon_+) \frac{1}{\delta} D_2 \tilde{\omega}_+^\delta = 0.
\end{aligned}$$

— Conditions de transmission sur Σ :

$$\begin{aligned}
(TC\Sigma_1) \quad & \tilde{u}_{+1}^\delta = \tilde{u}_{-1}^\delta, \\
(TC\Sigma_2) \quad & \frac{1}{\delta} \tilde{u}_{+2}^\delta = \tilde{u}_{-2}^\delta, \\
(TC\Sigma_3) \quad & \tilde{\omega}_+^\delta = \tilde{\omega}_-^\delta, \\
(TC\Sigma_4) \quad & \sigma_{-21}(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) = \frac{1}{\delta} \left[\begin{array}{c} \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta + D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \\ -\alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \end{array} \right] + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta, \\
(TC\Sigma_5) \quad & \sigma_{-22}(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) = 2\mu_+ \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta + \lambda_+ \left(D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta + \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta \right), \\
(TC\Sigma_6) \quad & (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \tilde{\omega}_-^\delta = (\nu_+ + \epsilon_+) \frac{1}{\delta} D_2 \tilde{\omega}_+^\delta.
\end{aligned}$$

3.4.2 Développement asymptotique

On écrit le développement de la solution $(\tilde{u}^\delta, \tilde{\omega}^\delta)$ du problème de transmission en puissance de δ sous la forme

$$\begin{aligned}\tilde{u}_-^\delta &= u_-^\delta = u_-^0 + \delta u_-^1 + \delta^2 u_-^2 + \dots, \\ \tilde{\omega}_-^\delta &= \omega_-^\delta = \omega_-^0 + \delta \omega_-^1 + \delta^2 \omega_-^2 + \dots, \\ \tilde{u}_+^\delta &= \tilde{u}_+^0 + \delta \tilde{u}_+^1 + \delta^2 \tilde{u}_+^2 + \dots, \\ \tilde{\omega}_+^\delta &= \tilde{\omega}_+^0 + \delta \tilde{\omega}_+^1 + \delta^2 \tilde{\omega}_+^2 + \dots,\end{aligned}$$

où $\tilde{u}_+^k, \tilde{\omega}_+^k, u_-^k, \omega_-^k, k \geq 0$ sont indépendants de δ . En injectant ce développement asymptotique dans le problème de transmission après changement d'échelle et en identifiant les coefficients de même puissance de δ , on obtient la hiérarchie suivante de problèmes aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} (EE_{+1})_{k-2} \quad D_1 [2\mu_+ D_1 \tilde{u}_{+1}^{k-2} + \lambda_+ (D_1 \tilde{u}_{+1}^{k-2} + D_2 \tilde{u}_{+2}^k)] \\ \quad + D_2 \left[\begin{array}{l} \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k + D_2 \tilde{u}_{+1}^k) \\ -\alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k - D_2 \tilde{u}_{+1}^k) + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^{k-1} \end{array} \right] = 0 \text{ dans } \Omega_+, \\ (EBCT_{+1})_{k-1} \quad \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k + D_2 \tilde{u}_{+1}^k) - \alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k - D_2 \tilde{u}_{+1}^k) \\ \quad + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^{k-1} = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ (ETC\Sigma_4)_{k-1} \quad \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k + D_2 \tilde{u}_{+1}^k) - \alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k - D_2 \tilde{u}_{+1}^k) \\ \quad + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^{k-1} = \sigma_{21} (u_-^{k-1}, \omega_-^{k-1}) \text{ sur } \Sigma, \\ (ETC\Sigma_1)_k \quad \tilde{u}_{+1}^k = u_{-1}^k \text{ sur } \Sigma,\end{array} \right. \quad (3.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (EE_{+2})_{k-3} \quad D_1 \left[\begin{array}{l} \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^{k-2} + D_2 \tilde{u}_{+1}^{k-2}) \\ +\alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^{k-2} - D_2 \tilde{u}_{+1}^{k-2}) - 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^{k-3} \end{array} \right] \\ \quad + D_2 [2\mu_+ D_2 \tilde{u}_{+2}^k + \lambda_+ (D_1 \tilde{u}_{+1}^{k-2} + D_2 \tilde{u}_{+2}^k)] = 0 \text{ dans } \Omega_+, \\ (EBCT_{+2})_{k-2} \quad (2\mu_+ + \lambda_+) D_2 \tilde{u}_{+2}^k + \lambda_+ D_1 \tilde{u}_{+1}^{k-2} = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ (ETC\Sigma_2)_{k-1} \quad \tilde{u}_{+2}^k = u_{-2}^{k-1} \text{ sur } \Sigma, \\ (ETC\Sigma_5)_{k-2} \quad (2\mu_+ + \lambda_+) D_2 \tilde{u}_{+2}^k + \lambda_+ D_1 \tilde{u}_{+1}^{k-2} \\ \quad = \sigma_{-22} (u_-^{k-2}, \omega_-^{k-2}) \text{ sur } \Sigma,\end{array} \right. \quad (3.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (EE_{+3})_{k-2} \quad (\nu_+ + \epsilon_+) (D_1^2 \tilde{\omega}_+^{k-2} + D_2^2 \tilde{\omega}_+^k) \\ \quad + 2\alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^{k-1} - D_2 \tilde{u}_{+1}^{k-1}) - 4\alpha_+ \tilde{\omega}_+^{k-2} = 0 \text{ dans } \Omega_+, \\ (EBCT_{+3})_k \quad (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \tilde{\omega}_+^k = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ (ETC\Sigma_3)_k \quad \tilde{\omega}_+^k = \omega_-^k \text{ sur } \Sigma, \\ (ETC\Sigma_6)_{k-1} \quad (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \tilde{\omega}_+^k = (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_-^{k-1} \text{ sur } \Sigma,\end{array} \right. \quad (3.17)$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{u}_+^{-2} = \tilde{u}_+^{-1} = 0 \text{ dans } \Omega_+, \quad \tilde{\omega}_+^{-3} = \tilde{\omega}_+^{-2} = \tilde{\omega}_+^{-1} = 0 \text{ dans } \Omega_+, \\ \tilde{\omega}_+^{-1} = \tilde{u}_{+1}^{-2} = \tilde{u}_{+1}^{-1} = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \quad \tilde{\omega}_+^{-1} = \tilde{u}_{+1}^{-2} = \tilde{u}_{+1}^{-1} = u_{-2}^{-1} = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_{21}(u_-^{-1}, \omega_-^{-1}) = \sigma_{-22}(u_-^{-2}, \omega_-^{-2}) = \sigma_{-22}(u_-^{-1}, \omega_-^{-1}) = D_2\omega_-^{-1} = 0 \text{ sur } \Sigma.\end{aligned}$$

Notons que les équations dans Ω_+ pour les problèmes (3.15) – (3.17) sont des équations différentielles d'ordre deux par rapport à la variable x_2 . En intégrant ces équations et en prenant en compte les conditions de transmission sur Σ et les conditions aux limites sur Γ_+ , on peut exprimer $\tilde{u}_+^k, \tilde{\omega}_+^k$ en fonction des traces de u_-^k et ω_-^k sur Σ . L'étude des problèmes (3.15) – (3.17), donne les résultats suivants :

Pour $k = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{2+}^0 &= 0 \text{ dans } \Omega_+, \\ \tilde{u}_{+1}^0 &= u_{-1|\Sigma}^0 \text{ dans } \Omega_+, \\ \tilde{\omega}_+^0 &= \omega_{-|\Sigma}^0 \text{ dans } \Omega_+.\end{aligned}$$

Pour $k = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{+2}^1 &= u_{-2|\Sigma}^0 \text{ dans } \Omega_+, \\ \tilde{\omega}_+^1 &= \omega_{-|\Sigma}^1 \text{ dans } \Omega_+,\end{aligned}$$

$$\tilde{u}_{+1}^1(x_1, x_2) = u_{-1|\Sigma}^1 - \frac{x_2}{\mu_+ + \alpha_+} \left[\begin{array}{c} (\mu_+ - \alpha_+) D_1 u_{-2|\Sigma}^0 \\ + 2\alpha_+ \omega_{-|\Sigma}^0 \end{array} \right] \text{ dans } \Omega_+.$$

Pour $k = 2$, on obtient

$$\tilde{u}_{+2}^2(x_1, x_2) = u_{-2|\Sigma}^1 - x_2 \frac{\lambda_+}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1 u_{-1|\Sigma}^0 \text{ dans } \Omega_+,$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{+1}^2(x_1, x_2) &= u_{-1|\Sigma}^2 - \frac{x_2}{\mu_+ + \alpha_+} \left[\begin{array}{c} (\mu_+ - \alpha_+) D_1 u_{-2|\Sigma}^1 \\ + 2\alpha_+ \omega_{-|\Sigma}^1 \end{array} \right] \\ &+ \frac{1}{\mu_+ + \alpha_+} \left[\begin{array}{c} \frac{\lambda_+(\mu_+ - \alpha_+) x_2^2}{2\mu_+ + \lambda_+} \\ + \left(x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) \frac{4\mu_+(\mu_+ + \lambda_+)}{2\mu_+ + \lambda_+} \end{array} \right] D_1^2 u_{-1|\Sigma}^0 \text{ dans } \Omega_+,\end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}_+^2(x_1, x_2) = \left(x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) \left[\begin{array}{c} \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)(\nu_+ + \epsilon_+)} \left(D_1 u_{-2|\Sigma}^0 - \omega_{-|\Sigma}^0 \right) \\ + D_1^2 \omega_{-|\Sigma}^0 \end{array} \right] + \omega_{-|\Sigma}^2 \text{ dans } \Omega_+,$$

$$(2\mu_+ + \lambda_+) D_2 \tilde{u}_{+2}^2(x_1, x_2) + \lambda_+ D_1 \tilde{u}_{+1}^0(x_1, x_2) = 0 \text{ in } \Omega_+.$$

Pour $k = 3$ le problème (3.17) donne la relation suivante :

$$(2\mu_+ + \lambda_+) D_2 u_{+2}^3 + \lambda_+ D_1 u_{+1}^1 = (1 - x_2) \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} \left(D_1^2 u_{-2| \Sigma}^0 - D_1 \omega_{-| \Sigma}^0 \right) \quad \text{dans } \Omega_+.$$

Alors le développement asymptotique des équations d'équilibre dans Ω_- , les conditions aux limites sur Γ_- et les conditions de transmission $(TC\Sigma_4) - (TC\Sigma_6)$ sur Σ donnent les problèmes aux limites suivants dans Ω_- :

$$\begin{cases} D_1 \sigma_{-11} (u_-^0, \omega_-^0) + D_2 \sigma_{-21} (u_-^0, \omega_-^0) = -f_{-1} & \text{dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12} (u_-^0, \omega_-^0) + D_2 \sigma_{-22} (u_-^0, \omega_-^0) = -f_{-2} & \text{dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-) \Delta \omega_-^0 + 2\alpha_- (D_1 u_{-2}^0 - D_2 u_{-1}^0) - 4\alpha_- \omega_-^0 = -g_- & \text{dans } \Omega_-, \\ u_-^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \omega_-^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \left(\sigma_{-21} (u_-^0, \omega_-^0)_{| \Sigma}, \sigma_{-22} (u_-^0, \omega_-^0)_{| \Sigma}, (v_- + \epsilon_-) D_2 \omega_{-| \Sigma}^0 \right) = O_{1 \times 3}, \end{cases} \quad (3.18)$$

ce qui signifie qu'à l'ordre zéro, la couche mince Ω_+^δ n'a aucun effet sur Ω_- . A l'ordre un l'effet de la couche mince Ω_+^δ sur Ω_- se traduit par des forces et des moments de forces s'exerçant sur Σ .

$$\begin{cases} D_1 \sigma_{-11} (u_-^1, \omega_-^1) + D_2 \sigma_{-21} (u_-^1, \omega_-^1) = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12} (u_-^1, \omega_-^1) + D_2 \sigma_{-22} (u_-^1, \omega_-^1) = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-) (D_1^2 + D_2^2) \omega_-^1 + 2\alpha_- (D_1 u_{-2}^1 - D_2 u_{-1}^1) - 4\alpha_- \omega_-^1 = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ u_-^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \omega_-^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \left[\begin{array}{l} \left(\sigma_{-21} (u_-^1, \omega_-^1)_{| \Sigma}, \sigma_{-22} (u_-^1, \omega_-^1)_{| \Sigma}, (v_- + \epsilon_-) D_2 \omega_{-| \Sigma}^1 \right) \\ = T_* \left((u_-^0, \omega_-^0)_{| \Sigma} \right) \end{array} \right] \end{cases} \quad (3.19a)$$

3.4.3 L'impédance approché d'ordre 1

La fonction inconnue définie par $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = (u_-^0 + \delta u_-^1, \omega_-^0 + \delta \omega_-^1)$ satisfait

$$\left[\begin{array}{l} \left(\sigma_{-21} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)_{| \Sigma}, \sigma_{-22} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)_{| \Sigma}, (v_- + \epsilon_-) D_2 \omega_{-*| \Sigma}^\delta \right) \\ = \delta T_* \left((u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)_{| \Sigma} \right) - \delta^2 T_* \left((u_-^1, \omega_-^1)_{| \Sigma} \right). \end{array} \right]$$

Si on néglige les termes d'ordre deux par rapport à δ , on retrouve l'impédance obtenue par le développement formelle de Taylor dans la section 3.1.2.

Remarque. D'après (3.12), (3.13), (3.18) et (3.19a), on remarque que les termes $(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0)$ et (u_-^0, ω_-^0) (respectivement $(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1)$ et (u_-^1, ω_-^1)) du développement asymptotique de $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$ et $(u_-^\delta, \omega_-^\delta)$ sont des solutions du même problème aux limites à l'ordre zéro (respectivement à l'ordre un). Alors par l'unicité de la solution, on a

$$(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) = (u_-^0, \omega_-^0) \text{ et } (u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) = (u_-^1, \omega_-^1).$$

3.5 Estimation d'erreur pour le problème de transmission

Ici, on va énoncer et prouver un résultat de stabilité pour le problème de transmission (P^δ), pour cela on doit écrire sa formulation faible dans le domaine fixe $\Omega = \mathbb{R}^2 \times]-1, 1[$ puis l'utiliser pour établir une estimation d'erreur entre la solution du problème de transmission dans $\Omega_- = \mathbb{R}^2 \times]-1, 0[$ et son approximation d'ordre 1.

3.5.1 Formulation faible du problème de transmission dans le domaine fixe

L'espace canonique pour l'étude du problème de transmission (P^δ) dans la jonction des domaines Ω_- et Ω_+ est : (voir [3], [7])

$$V_\delta = \left\{ \begin{array}{l} (v_\pm, \varphi_\pm) \in \mathbb{H}^1(\Omega_\pm) \times H^1(\Omega_\pm); \\ v_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ v_{+1} = v_{-1} \text{ sur } \Sigma, \frac{1}{\delta}v_{+2} = v_{-2} \text{ sur } \Sigma, \\ \varphi_+ = \varphi_- \text{ sur } \Sigma \end{array} \right\},$$

et sa formulation faible s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\tilde{u}_\pm^\delta, \tilde{\varphi}_\pm^\delta) \in V_\delta, \text{ tel que } \forall (v_\pm, \varphi_\pm) \in V_\delta : \\ a^- [(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta), (v_-, \varphi_-)] + a^+ [\delta; (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)] = L_\delta(v_\pm, \varphi_\pm), \end{array} \right.$$

avec

$$a^- [(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta), (v_-, \varphi_-)] = \int_{\Omega_-} \left[\begin{array}{l} \sigma_{-11} (\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \gamma_{-11} (v_-, \varphi_-) \\ + \sigma_{-21} (\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \gamma_{-21} (v_-, \varphi_-) \\ + \sigma_{-12} (\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \gamma_{-12} (v_-, \varphi_-) \\ + \sigma_{-22} (\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \gamma_{-22} (v_-, \varphi_-) \\ + (\nu_- + \epsilon_-) (D_1 \tilde{\omega}_-^\delta D_1 \varphi_- + D_2 \tilde{\omega}_-^\delta D_2 \varphi_-) \end{array} \right] d\Omega_-,$$

$$a^+ [\delta; (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)] = \delta a_1^+ [(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)] + a_0^+ [(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)] \\ + \frac{1}{\delta} a_{-1}^+ [(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)] + \frac{1}{\delta^3} a_{-3}^+ [(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)],$$

$$a_{+1}^+ [(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)] = \int_{\Omega_+} \left[\begin{array}{l} (\lambda_+ + 2\mu_+) D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta D_1 v_{+1} \\ + (v_+ + \epsilon_+) D_1 \tilde{\omega}_+^\delta D_1 \varphi_+ + 4\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta \varphi_+ \end{array} \right] d\Omega_+,$$

$$a_0^+ [(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)] = \int_{\Omega_+} 2\alpha_+ \left[\begin{array}{l} \tilde{\omega}_+^\delta (D_2 v_{+1} - D_1 v_{+2}) \\ + (D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta - D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta) \varphi_+ \end{array} \right] d\Omega_+,$$

$$a_{-1}^+ [(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)] = \int_{\Omega_+} \left[\begin{array}{l} \alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) (D_1 v_{+2} - D_2 v_{+1}) \\ + \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta + D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) (D_1 v_{+2} + D_2 v_{+1}) \\ + \lambda_+ (D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta D_2 v_{+2} + D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta D_1 v_{+1}) \\ + (v_+ + \epsilon_+) D_2 \tilde{\omega}_+^\delta D_2 \varphi_+ \end{array} \right] d\Omega_+,$$

$$a_{-3}^+ [(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)] = \int_{\Omega_+} (\lambda_+ + 2\mu_+) D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta D_2 v_{+2} d\Omega_+,$$

et

$$L_\delta (v_\pm, \varphi_\pm) = \int_{\Omega_-} (f_- v_- + g_- \varphi_-) d\Omega_-.$$

3.5.2 Résultat de stabilité pour le problème de transmission

On va énoncer et prouver un résultat de stabilité pour le problème de transmission (P^δ).

Théorème 3.5.1 *Soit L_δ une forme linéaire continue sur V_δ telle que*

$$|L_\delta (v_\pm, \varphi_\pm)| \leq l_\delta \left[\begin{array}{l} \mathbb{A} (v_-, \varphi_-) + \sqrt{\delta} \mathbb{B} (v_+, \varphi_+) \\ + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \mathbb{C} (v_+, \varphi_+) + \frac{1}{\delta \sqrt{\delta}} \mathbb{D} (v_+, \varphi_+) \end{array} \right]$$

où l_δ est une fonction de $\delta > 0$, peut-être pas bornée quand δ tend vers 0, et

$$\begin{aligned} \mathbb{A} (v_-, \varphi_-) &= \|v_-\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\varphi_-\|_{H^1(\Omega_-)}, \\ \mathbb{B} (v_+, \varphi_+) &= \|D_1 v_{+1}^\delta\|_{L^2(\Omega_+)} + \|D_1 \varphi_+^\delta\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\varphi_+^\delta\|_{L^2(\Omega_+)}, \\ \mathbb{C} (v_+, \varphi_+) &= \left[\begin{array}{l} \|D_1 v_{+2}^\delta + D_2 v_{+1}^\delta\|_{L^2(\Omega_+)} + \\ \|\|D_1 v_{+2}^\delta - D_2 v_{+1}^\delta\|_{L^2(\Omega_+)} + \|D_2 \varphi_+^\delta\|_{L^2(\Omega_+)} \end{array} \right], \\ \mathbb{D} (v_+, \varphi_+) &= \|D_2 v_{+2}^\delta\|_{L^2(\Omega_+)}. \end{aligned}$$

Alors il existe $C > 0$ (ne dépend pas de δ) telle que $(\tilde{u}_\pm^\delta, \tilde{\omega}_\pm^\delta)$ la solution du problème

$$a^- [(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta), (v_-, \varphi_-)] + a^+ [\delta; (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)] = L_\delta (v_\pm, \varphi_\pm) \quad (3.20)$$

satisfait les estimations

$$\mathbb{A} (\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \leq C l_\delta, \quad (3.21)$$

$$\mathbb{B} (\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \leq C \delta^{-1/2} l_\delta, \quad (3.22)$$

$$\mathbb{C} (\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \leq C \delta^{1/2} l_\delta, \quad (3.23)$$

$$\mathbb{D} (\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \leq C \delta^{3/2} l_\delta. \quad (3.24)$$

Preuve. L'expression $\mathbb{A}^2(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta)$ est équivalente à $a^-[(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta), (\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta)]$,
et on a

$$\begin{aligned} a_{-1}^+[(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta)] &\leq \left[\begin{array}{c} (v_+ + \epsilon_+ + \mu_+ + \alpha_+) \mathbb{C}^2(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) \\ + 2\lambda_+ (\mathbb{B} \cdot \mathbb{D})(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) \end{array} \right], \\ a_0^+[(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta)] &\leq 4\alpha_+ (\mathbb{B} \cdot \mathbb{C})(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), \\ 4\alpha_+ (\mathbb{B} \cdot \mathbb{C})(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) &\leq 2\alpha_+ \left[\delta \mathbb{B}^2(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) + \frac{1}{\delta} \mathbb{C}^2(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) \right] \end{aligned}$$

et

$$2\lambda_+ \frac{1}{\delta} (\mathbb{B} \cdot \mathbb{D})(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) \leq \lambda_+ \left[\delta \mathbb{B}^2(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) + \frac{1}{\delta^3} \mathbb{D}^2(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) \right].$$

Alors en prenant $(v_\pm, \varphi_\pm) = (\tilde{u}_\pm^\delta, \tilde{\omega}_\pm^\delta)$ dans la formulation faible (3.20), on obtient l'estimation suivante :

$$\left[\begin{array}{c} \mathbb{A}^2(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) + \delta \mathbb{B}^2(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) \\ + \frac{1}{\delta} \mathbb{C}^2(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) + \frac{1}{\delta^3} \mathbb{D}^2(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) \end{array} \right] \leq C l_\delta \left[\begin{array}{c} \mathbb{A}(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) + \sqrt{\delta} \mathbb{B}(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) \\ + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \mathbb{C}(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) + \frac{1}{\delta \sqrt{\delta}} \mathbb{D}(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) \end{array} \right]$$

où $C > 0$ est une constante positive indépendante de δ . Ce qui conduit à les estimations (3.21) – (3.24).

3.5.3 Estimation d'erreur pour le problème de transmission

On pose

$$\begin{aligned} u_-^{(\delta,1)*} &= u_-^0 + \delta u_-^1, \quad u_+^{(\delta,1)*} = \tilde{u}_+^0 + \delta \tilde{u}_+^1 + \delta^2(0, \tilde{u}_{+2}^2), \\ \omega_-^{(\delta,1)*} &= \omega_-^0 + \delta \omega_-^1, \quad \omega_+^{(\delta,1)*} = \tilde{\omega}_+^0 + \delta \tilde{\omega}_+^1. \end{aligned}$$

Le choix de

$$u_{+2}^{\delta*} = \tilde{u}_+^0 + \delta \tilde{u}_+^1 + \delta^2 \tilde{u}_{+2}^2$$

a été effectué afin de satisfaire la condition de transmission $u_{+2}^{\delta*} = \delta u_{-2}^{\delta*}$ sur Σ et donc on a $(u_\pm^{(\delta,1)*}, \omega_\pm^{(\delta,1)*})$ dans l'espace V_δ . En utilisant les problèmes à l'ordre zéro et à l'ordre un satisfaits par (u_-^0, ω_-^0) et (u_+^1, ω_+^1) et aussi les problèmes (3.15) – (3.17) pour $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, on obtient

$$\begin{aligned} L_\delta(v_\pm, \varphi_\pm) &= a_{-3}^+[(\tilde{u}_+^3, \tilde{\omega}_+^3), (v_+, \varphi_+)] + \delta a_{-1}^+[(0, \tilde{\omega}_+^2), (v_+, \varphi_+)] \\ &\quad - \delta^2 a_{+1}^+[(\tilde{u}_+^1, \tilde{\omega}_+^1), (v_+, \varphi_+)] - \delta^2 a_0^+[((0, \tilde{u}_{+2}^2), (0, 0)), (v_+, \varphi_+)] \\ &\quad + \delta \int_{\Omega_+} (\mu_+ + \alpha_+) D_2 \tilde{u}_{+1}^2 D_2 v_{+1} - \delta \int_{\Omega_+} \left[\begin{array}{c} (\mu_+ + \alpha_+) D_1 \tilde{u}_{+2}^2 \\ - 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^1 \end{array} \right] D_1 v_{+2}, \end{aligned}$$

où

$$a^- \left[\left(\tilde{u}_-^\delta - u_-^{(\delta,1)*}, \tilde{\omega}_-^\delta - \omega_-^{(\delta,1)*} \right), (v_-, \varphi_-) \right] \\ + a^+ \left(\left[\left(\tilde{u}_+^\delta - u_+^{(\delta,1)*}, \tilde{\omega}_+^\delta - \omega_+^{(\delta,1)*} \right), (v_+, \varphi_+) \right] \right) = L_\delta(v_\pm, \varphi_\pm)$$

et donc

$$|L_\delta(v_\pm, \varphi_\pm)| \leq C\delta^{3/2} \left[\begin{array}{l} \mathbb{A}(v_-, \varphi_-) + \sqrt{\delta}\mathbb{B}(v_+, \varphi_+) \\ + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\mathbb{C}(v_+, \varphi_+) + \frac{1}{\delta\sqrt{\delta}}\mathbb{D}(v_+, \varphi_+) \end{array} \right],$$

ce qui implique par le résultat de la stabilité (voir Théorème 3.5.1) l'estimation d'erreur suivante :

$$\left\| \tilde{u}_-^\delta - u_-^{(\delta,1)*} \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \tilde{\omega}_-^\delta - \omega_-^{(\delta,1)*} \right\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^{3/2}. \quad (3.25)$$

où C est une constante positive indépendante de δ .

3.6 Estimation d'erreur entre le problème de transmission et le problème d'impédance

Maintenant, on se concentre sur l'estimation d'erreur entre la solution du problème de transmission (P^δ) et la solution du problème d'impédance approchée (P_{-*}^δ). Comme à l'ordre un, le développement asymptotique de la solution du problème de transmission dans Ω_- et le développement asymptotique de la solution du problème d'impédance est le même, on peut écrire

$$\left\| \tilde{u}_-^\delta - u_{-*}^\delta \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \tilde{\omega}_-^\delta - \omega_{-*}^\delta \right\|_{H^1(\Omega_-)} \\ \leq \left\| \tilde{u}_-^\delta - u_-^0 - \delta u_-^1 \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \tilde{\omega}_-^\delta - \omega_-^0 - \delta \omega_-^1 \right\|_{H^1(\Omega_-)} \\ + \left\| u_{-*}^\delta - u_{-*}^0 - \delta u_{-*}^1 \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^0 - \delta \omega_{-*}^1 \right\|_{H^1(\Omega_-)},$$

et en vertu de (3.25) et (3.14), on trouve

$$\left\| \tilde{u}_-^\delta - u_{-*}^\delta \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \tilde{\omega}_-^\delta - \omega_{-*}^\delta \right\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^{3/2},$$

où $C > 0$ est une constante positive dépendant uniquement de f_- , g_- et des coefficients d'élasticité.

Conclusion

Dans ce mémoire on a considéré un problème d'élasticité asymétrique posé dans le domaine fixe $\Omega_- = \mathbb{R} \times]-1, 0[$ avec la couche mince $\Omega_+^\delta = \mathbb{R} \times]0, \delta[$. Le sujet de notre mémoire concerne la modélisation approchée de l'effet de la couche mince élastique micropolaire Ω_+^δ sur le corps Ω_- . L'effet de la couche mince Ω_+^δ à été modélisé grâce a la notion de l'impédance. On a dérivé une approximation du premier ordre de la condition aux limites d'impédance. Cette approximation a été obtenue dans un premier temps par une approximation de Taylor et dans un second temps par un développement asymptotique avec changement d'échelle dans la couche mince. Notre objectif dans tout cela est de réduire ou de supprimer la couche mince Ω_+^δ et de rendre l'erreur entre la solution du problème avec la couche mince et la solution du problème sans la couche mince très faible ou totalement inexistant.

Bibliographie

- [1] A. Abdallaoui, Impédance mécanique d'une couche mince en élasticité micropolaire linéaire. PhD thesis, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène, 2018.
- [2] A. Abdallaoui, K. Lemrabet, Mechanical impedance of a thin layer in asymmetric elasticity, *Applied Mathematics and Computation*, 316 :467-479, 2018.
- [3] R. Adams, Sobolev spaces, Academic press, New York, 1975.
- [4] N. Bartoli and A. Bendali, Numerical solving of electromagnetic scattering by coated perfectly conducting obstacles. Technical report TR/EMC/01/42, CERFACS, Toulouse, France, 2001.
- [5] N. Bartoli and A. Bendali, Robust and high-order effective boundary conditions for perfectly conducting scatterers coated by a thin dielectric layer, *IMA Journal of Applied Mathematics* 67 (2002), 479–508.
- [6] A. Bendali and K. Lemrabet, The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation. *SIAM J. Appl. Math.* 56 (6) (1996) 1664-1693.
- [7] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.
- [8] E. et F. Cosserat, *Théorie des corps déformables*, A. Hermann, Paris 1909.
- [9] F. Z. Goffi, K. Lemrabet and T. Arens, Approximate impedance for time-harmonic Maxwell's equations in a non planar domain with contrasted multi-thin layers, *J. Math. Anal. Appl.*(2020), 124-141.
- [10] F. Z. Goffi, K. Lemrabet and T. Laadj, Transfer and approximation of the impedance for time-harmonic Maxwell's system in a planar domain with thin contrasted multi-layers. *Asymptotic Analysis*, 101(1-2), pp.1-15, 2017.
- [11] D. J. Hoppe and Y. Rahmat-Samii, *Impedance boundary conditions in electromagnetics*, 1995.

- [12] V. D. Kupradze, T.G. Gegelia, M.O. Basheleishvili and T.V. Burchuladze, Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity. Academic Press, Elsevier,1976.
- [13] W. Nowacki, Theory of asymmetric elasticity. Pergamon Press,1985.
- [14] W. Nowacki, Les problèmes dynamiques d'élasticité asymétrique. Académie polonaise des sciences, centre scientifique de Paris,1970.
- [15] B. Stupfel, Implementation of high order impedance boundary conditions in some integral equation formulations, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 63(4), pp. 1658-1668, 2015.
- [16] P. A. Raviart and J. M. Thomas, Introduction à l'analyse numérique des equations aux dérivées partielles, Masson, Paris Milan Barcelone Mexico, 1988.
- [17] P. Soudais, 3D MoM computations with high order impedance boundary condition. 2017 International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications (ICEAA), pp. 340-341, Verona, Italy, 2017
- [18] W. Voigt, Theorische studien iiber die elastizitätsverhältnisse der kristalle, Abh. Ges.Wissen. Göttingen, 34 (1887).

Résumé

Dans ce mémoire, on a considéré une famille (P^δ) , où δ est un petit positif paramètre, de problèmes de transmission bidimensionnels d'élasticité asymétrique linéaire dans un domaine Ω^δ constitué de deux corps micro polaires liés : Ω_- et une couche mince Ω_+^δ . On a supposé que Ω_- et Ω_+^δ sont homogènes et isotropes. De tels problèmes modélisent la propagation des ondes entre Ω_- et la couche mince Ω_+^δ . Notre objectif est de modéliser l'effet de la couche mince Ω_+^δ sur le domaine fixe Ω_- par des conditions aux limites d'impédance en utilisant les techniques du développement asymptotique avec changement d'échelle. Le problème de transmission est alors approché par un problème aux limites d'impédance posé dans le domaine fixe Ω_- , et on a prouvé alors une estimation d'erreur entre la solution du problème de transmission dans Ω_- et la solution du problème d'impédance approché.

Mots clés : Milieu micro polaire, couche mince, opérateur d'impédance, élasticité asymétrique.

Abstract :

In this Memory, we have considered a family (P^δ) , where δ is a small positive parameter, of two-dimensional transmission problems of linear asymmetric elasticity in a domain Ω^δ consisting of two bonded micropolar bodies : Ω_- and a thin layer Ω_+^δ . It has been assumed that Ω_- and Ω_+^δ are homogeneous and isotropic. Such problems model for instance wave propagation between Ω_- and the layer Ω_+^δ . We have restricted our consideration to the case of elastostatics and a simple geometry. We have modeled the effect of the thin layer Ω_+^δ on the fixed domain Ω_- by an impedance boundary condition using techniques of asymptotic expansion. The transmission problem is then approached by an approximate impedance problem set in the fixed domain Ω_- , and we have proved an error estimate.

Keywords : Micro polar body, thin layer, impedance operator, asymmetric elasticity.

الملخص:

في مذكرتنا إعتبرنا عائلة (P^δ) ، حيث δ وسيط حقيقي موجب وصغير بالقدر الكافي، من مسائل الانتقال في البعد 2 للمرونة الخطية غير المتناظرة في نطاق Ω^δ مكون من جسمين قطبيين متصلين هما: الجسم Ω_- والطبقة السمكية Ω_+^δ . فرضنا أن كلا من الجسمين Ω_- و Ω_+^δ متجانسا ومتماثلا. هذا النوع من المسائل ينمذج إنتشار الموجات بين الجسمين Ω_- و Ω_+^δ . إقتصرنا في دراستنا على مسألة المرونة غير التطورية وفي حالة هندسة بسيطة لنطاق المسألة. نمذجنا تأثير الطبقة السمكية Ω_+^δ على Ω_- بمؤثر مقاومة وذلك بإستعمال تقنية النشر التقاربي مع تغيير السلم مما سمح لنا بإستبدال مسألة الانتقال بمسألة مقاومة تقريبية مطروحة على Ω_- فقط. قمنا كذلك بتقدير الخطأ بين حل مسألة الانتقال في النطاق Ω_- وحل مسألة المقاومة التقريبية.