



RUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE  
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE  
M'SILA



Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département des Mathématiques

MEMOIRE DE MASTER

**Domaine :** Mathématiques et Informatique

**Filière :** Mathématiques

**Option:** Analyse Mathématiques et Numérique

**THÈME**

---

*Solution numérique pour l'écoulement à surface libre non linéaire*

---

**Présentée par :**

Melle. CHERRID Amal

**Soutenu le :** 11/06/2024

**Devant le jury :**

Président:	TOUAHRIA Messoud	M.C.B,	Université-M'SILA
Encadreur :	BLIZAK Tahar	M.C.B,	Université-M'SILA
Examineur :	MIHOUBI Hamza	M.C.B,	Université-M'SILA

Année Universitaire: 2023/2024



# Dédicace

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(وَأَخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنْ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ)

Je dédie ce travail à ceux en qui Allah tout puissant a dit :

(وَأَخْفِضْ لَهُمَا جَنَاحَ الذُّلِّ مِنَ الرَّحْمَةِ وَقُلْ رَبِّ أَرْحَمُهُمَا كَمَا رَبَّيَانِي صَغِيرًا)

A la bougie qui brule pour éclairer mon chemin

Ma chère mère

À celui qui m'a appris que la vie est un combat et que le savoir est une arme, à celui qui s'est efforcé d'assurer mon confort et ma réussite, au plus grand homme de l'univers.

Mon cher père

A moi-même qui a supportée toutes les épreuves et qui a continue malgré les

Difficultés

A celui en qui Dieu tout puissant a dit :

(قَالَ سَتَشُدُّ عَضُدَكَ بِأَخِيكَ)

Mes frères et ma sœur

A mes petites, Ibtisam et Assil

A l'âme de mon deuxième père, mon grand-père AL amari, que Dieu lui fasse

Miséricorde

A tous mes amis



## REMERCIEMENTS

Tout d'abord, je remercie Allah qui m'a donné la santé, le courage, la force et la patience d'accomplir ce travail. En second lieu je remercie ma famille pour leur soutien morale et physiques et l'encouragement tout au long des mon étude. Je tiens remercier tout particulièrement mon directeur de mémoire, Monsieur Dr.TAHAR BLIZAK qui a bien voulu superviser ce travail et pour tous les efforts qu'il a déployés pour faciliter et surmonter les difficultés, ainsi que pour ses conseils et son soutien pour lesquels. Je lui dois tout mon respect et ma gratitude. Je tiens également à exprimer mes sincères remerciements et ma gratitude à tous ceux qui m'ont appris une lettre et on partagé leurs connaissances avec moi depuis le début de ma carrière académique jusqu'à aujourd'hui. Mes remerciements vont aussi aux membres de jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et pour l'avis de leur suggestions. Je remercie également tous les enseignants et les étudiants de faculté de mathématique et d'informatique de l'université de MOHAMED BOUDIAF de M'sila et tous qui m'ont aidé ne serait ce que par un mot gentil.

merci à tous

# Notations

$\varphi$	La fonction potentiel de vitesse.
$\psi$	La fonction de courant.
$\vec{V}$	La vitesse d'une particule de fluide.
$\vec{\nabla}, \overrightarrow{\text{grad}}$	$\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ .
$\Delta$	Laplacien.
$\overrightarrow{\text{rot}}(v)$	$\vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ .
$\text{div}(\vec{v})$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ .
$p$	La pression du fluide.
$\rho$	La densité de fluide.
$V$	La vitesse de fluide.
$K$	Courbure de la surface libre.
$U$	La vitesse de référence.
$\theta$	Argument de la vitesse complexe.
$T$	Tension de surface .
$We$	Nombre de Weber.
$\delta$	Inverse de nombre de weber

# Table des matières

Notations	i
Table des matières	ii
Table des figures	iii
Introduction	1
<b>1 Notation préliminaires et définitions sur la mécanique des fluides</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Les fluides . . . . .	3
1.2.1 La densité . . . . .	4
1.2.2 La masse volumique . . . . .	5
1.2.3 L'écoulement fluide est à deux dimensions . . . . .	5
1.2.4 Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel . . . . .	5
1.3 Type des écoulement de fluide . . . . .	6
1.3.1 Fonction de courant . . . . .	8
1.3.2 Lignes de courant . . . . .	9
1.3.3 Équation de bernoulli . . . . .	10
1.4 Potentiel complexe pour les écoulements plans . . . . .	11

1.4.1	Fonction d'une variable complexe . . . . .	11
1.4.2	Potentiel complexe . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Applications et transformations conformes</b>	<b>16</b>
2.1	Transformations conformes . . . . .	16
2.1.1	Forme complexe d'un transformation . . . . .	17
2.2	Quelques transformations conformes . . . . .	17
2.3	La transformation de Schwartz -Christoffel . . . . .	18
2.4	Représentation sur le Demi-Plan . . . . .	20
2.4.1	Transformation hodographe . . . . .	21
2.4.2	Applications à l'écoulement des fluides . . . . .	22
<b>3</b>	<b>L'écoulement dans un canal ouvert avec un forme triangulaire im-</b>	
	<b>mergée</b>	<b>25</b>
3.1	Introduction . . . . .	25
3.2	Formulation du problème . . . . .	27
3.3	L'équation integro-differentielle . . . . .	33
3.4	Procedure numerique . . . . .	37
3.4.1	Calcul numérique de $\tau$ . . . . .	37
3.4.2	Forme de la surface libre . . . . .	39
3.5	Resultats et discussion . . . . .	40
	<b>Conclusion</b>	<b>42</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>43</b>

# Table des figures

1.1	représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme . . . . .	6
2.1	transformation conforme de l'intérieur d'un polygone sur le demi-plan supérieur . . . . .	19
2.2	Transformer un canal avec une source en un demi-plan supérieur . . .	20
2.3	Semi-infinite canal avec une source en un demi-plan supérieur . . . .	20
2.4	Transformation d'Hodographe . . . . .	21
2.5	Le plan physique : $z = x + iy$ . . . . .	23
2.6	Le plan : $Q = \ln q + i\theta$ . . . . .	23
2.7	le plan : $\zeta = \xi + i\eta$ . . . . .	24
3.1	Le plan complexe $z = x + iy$ , la forme de la surface libre $EF$ . . . . .	26
3.2	Le plan complexe $f = \phi + i\psi$ . . . . .	29
3.3	Le demi plan supérieur $\zeta = \alpha + i\beta$ . . . . .	33
3.4	Le chemin $\Gamma$ dans $\zeta$ plan . . . . .	34
3.5	Forme de la surface libre pour quelques valeurs de nombre de webre $We$	40
3.6	Forme de la surface libre pour quelques valeurs d'angle $\gamma$ . . . . .	41

# Introduction

La mécanique des fluides est la science des lois de l'écoulement des fluides, elle est la base du dimensionnement des conduites des fluides et des mécanismes de transfert des fluides. Les problèmes d'écoulement à surfaces libres se représentent dans beaucoup d'applications industrielles et urbaines, sont étudiés d'une façon très intensive. Ce type d'écoulement fait l'objet d'un grand nombre d'études théorique, qui doivent être trouvée comme faisant partie de la solution. Dans notre mémoire on se propose l'écoulement à surface libre d'une obstacle au fond d'un canal est pris en compte, le fluide est supposé être non visqueux est incompressible et l'écoulement est stable et irrotationnel. Le plan des variables  $(x, y)$  d'écoulement est identifié au plan de la variable complexe  $z = x + iy$ , en négligent les forces de gravités, et on peut trouvé la solution numérique en utilisant la méthode d'intégré-différentielle. Ce problème a été étudié précédement par Dias.F, Vanden-Broeck , Forbes et aussi S.N.Hanna.

Notre travail est organisé en trois chapitres :

Le premier chapitre est réalisé dans le cadre de présenter les concepts généraux de mécanique des fluides, et l'analyse complexe et en décrivant les propriétés d'écoulement, et on parle aussi sur les potentiels complexe des vitesses et l'équation de bernoulli.

Dans le second chapitre on a étudié les transformations conformes telles que la transformation d'hodographe et la transformation de Schwartz-Christoffel.

Dans le dernier chapitre on traite le problème d'un écoulement potentiel, bidimen-

sionnel d'un fluide incompressible et non visqueux passant au dessus d'une depression de forme triangul. Si les effets de la tension superficielle n'est pas négligeable, dans ce cas, le problème sera caractérisé par le nombre de Weber  $We$ . Nous adoptons la méthode numérique d'équation intégral-différentielle, ce problème est réduit à un système algébrique de  $N$  équations non linéaires. On constate que l'algorithme converge pour tout  $We > 0$ . On détermine la solution pour chaque valeur de nombre de Weber  $We > 0$ .

# Chapitre 1

## Notation préliminaires et définitions sur la mécanique des fluides

### 1.1 Introduction

Ce chapitre est réalisé dans le cadre de présenter les concepts généraux de mécanique des fluides, et l'analyse complexe et en décrivant les propriétés d'écoulement .

### 1.2 Les fluides

Un fluide est un corps dont les molécules ont peu d'adhésion et peuvent glisser librement les unes sur les autres (liquides) ou se déplacer indépendamment les unes des autres (gaz). Les fluides n'ont pas de forme propre (à la différence des solides), donc ils se déforment facilement. Quand vous introduisez un fluide dans un récipient, ce dernier en épouse les formes.

Généralement, les fluides sont répartis en deux groupes :

- Les liquides : Corps peu compressibles et dont la masse volumique est importante (eau, huile, etc.). Les liquides occupent des volumes bien définis et présentent des surfaces libres.

- Les gaz : Corps très compressibles et même extensibles (dioxyde de carbone, air, etc.). Les gaz se dilatent jusqu'à occuper toutes les parties du récipient qui les contient.

Pour les liquides, on distingue deux classes :

- Les liquides parfaits : Un fluide parfait est un fluide dont les molécules glissent les unes sur les autres sans aucun frottement.

- Les fluides réels : Un fluide réel est un fluide dont les molécules glissent les unes sur les autres avec frottement.

### 1.2.1 La densité

La densité d'un corps est le rapport entre la masse volumique de ce corps et la masse volumique d'un corps de référence.

$$d = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \quad (1.1)$$

Les deux masses volumiques sont déterminées dans les mêmes conditions de température et de pression.

- Pour les liquides, cette définition se traduit par la relation suivante :

$$d_l = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide d'eau}} = \frac{\rho}{\rho_{eau}} \quad (1.2)$$

- Pour les gaz, cette définition se traduit par la relation suivante :

$$d_g = \frac{\text{masse volumique du fluide}}{\text{masse volumique d'un fluide gaz}} = \frac{\rho}{\rho_{gaz}} \quad (1.3)$$

### 1.2.2 La masse volumique

La masse volumique est le rapport entre la masse  $m$  d'une matière et son volume  $v$ . Généralement elle est exprimée en  $\frac{Kg}{m^3}$ .

$$\rho = \frac{Masse}{Volumue} = \frac{m}{v} \quad (1.4)$$

Pour les liquides la masse volumique varie très peu avec la pression, mais plus sensiblement avec la température. Les liquides sont appelés des fluides incompressibles .

Contrairement à celle des liquides, la masse volumique des gaz varie avec la pression et la température. Les liquides sont appelés des fluides compressibles.

### 1.2.3 L'écoulement fluide est à deux dimensions

Les caractéristiques de l'écoulement dans un plan sont les mêmes que dans tout plan parallèle. Ceci permet de ne considérer qu'un plan que nous prendrons pour plan des  $Z$ . Les figures construites dans ce plan seront considérées comme les sections droites de cylindres infinis à génératrices perpendiculaires au plan considéré.

### 1.2.4 Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel

Si  $v_x$  et  $v_y$  désignent les composantes de la vitesse du fluide en  $(x, y)$  selon les axes des  $x$  et  $y$ , il existe une fonction  $\phi$  appelée potentiel des vitesses tel que

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.5)$$

De façon équivalente, si  $C$  est une courbe fermée simple quelconque du plan de la variable  $z$  et si  $v_t$  désigne la composante tangentielle de la vitesse sur  $C$

$$\oint_C v_t ds = \oint_C v_x dy - v_y dx = 0 \quad (1.6)$$

L'une ou l'autre des intégrales 1.6 est appelée la circulation du fluide le long de  $C$ . Quand la circulation est nulle sur toute courbe  $C$ , le fluide est dit irrotationnel.

### 1.3 Type des écoulement de fluide

#### Écoulement uniforme

Un écoulement bidimensionnel a surface libre est dit uniforme si la vitesse d'écoulement est constante.

$$A_1 = A_2$$

Où  $A_1$  et  $A_2$  deux sections transversales quelconques.

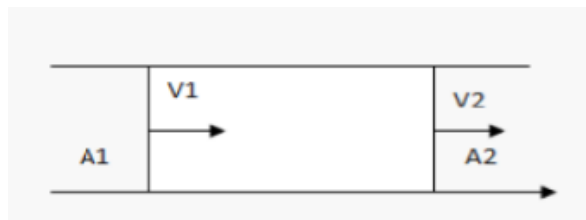


FIG. 1.1 – représentation de la vitesse dans un écoulement uniforme

### Écoulement permanent

On dit aussi stationnaire, si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad (1.7)$$

### Écoulement irrotationnel

Un écoulement est dit irrotationnel si :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = 0 \quad (1.8)$$

en tout point du fluide.

### Écoulement incompressible

Un fluide est incompressible si le volume de chaque particule fluide ne varie pas au cours de mouvement se traduit par l'équation

$$\overrightarrow{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$$

### Écoulement parfait

Un écoulement parfait est une approximation utilisée dans les cas où les effets visqueux sont négligeables. Cela signifie que le fluide est considéré comme ayant une viscosité rigoureusement nulle.

La relation entre un fluide parfait et un écoulement parfait est la suivante :

Fluide parfait  $\implies$  Écoulement parfait

## Écoulement stationnaire

Un écoulement stationnaire, ou écoulement permanent, est un type d'écoulement où toutes les caractéristiques quantitatives, notamment la vitesse du fluide, sont indépendantes du temps. Cela signifie que les propriétés de l'écoulement à un point donné restent constantes au cours du temps.

$$\frac{\partial v(x_1, x_2, x_3)}{\partial t} = 0$$

Cette équation signifie simplement que les lignes de courant (ou lignes d'écoulement) ne changent pas au cours du temps. En d'autres termes, dans un écoulement stationnaire, les lignes de courant sont fixes et ne varient pas, ce qui implique que la configuration de l'écoulement est stable et invariante dans le temps.

### 1.3.1 Fonction de courant

Dans un domaine  $D$ , on appelle écoulement plan (ou bidimensionnel) si en tout point de ce domaine, à l'instant  $t$ , le vecteur vitesse  $\vec{v}$  est parallèle à un plan

$$\operatorname{div}(\vec{v}) = 0 \tag{1.9}$$

Pour toutes les pointes de ce domaine

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.10}$$

Cela implique que la forme différentielle  $udy - vdx$  est, à  $t$  fixé, la différentielle totale d'une certaine fonction  $\psi$  :

$$\exists \psi(x, y, t), d(\psi) = udy - vdx \tag{1.11}$$

On a donc immédiatement

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (1.12)$$

$\psi$  s'appelle la fonction de courant, car elle permet un calcul simple des lignes de courant.

Les lignes  $\psi(x, y, t) = c(t)$  sont les lignes de courant. De plus, la propriété de l'écoulement irrotationnel pour un écoulement plan entraîne :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{v} = 0 = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u = \partial\psi/\partial y \\ v = -\partial\psi/\partial x \end{pmatrix} = -\partial^2\psi/\partial^2x - \partial^2\psi/\partial^2y = 0 \quad (1.13)$$

$\implies \Delta\psi = 0$ ,  $\psi$  est vérifiée aussi l'équation de Laplace.

### 1.3.2 Lignes de courant

**Définition 1.3.1** *La description eulérienne conduit elle aussi à une représentation du champ de vitesse, à un instant  $t$ , sous la forme d'une famille de lignes tangentes en chaque point au vecteur vitesse, que l'on appelle lignes de courant. L'équation des lignes de courant se déduit directement de cette définition en écrivant que : un petit déplacement  $\vec{dx}$  sur la ligne de courant est colinéaire au vecteur vitesse :*

$$\vec{v} \wedge \vec{dx} = 0$$

en explicitant cette relation, on obtient :

$$\begin{cases} v_2 dx_3 - v_3 dx_2 = 0 \\ v_3 dx_1 - v_1 dx_3 = 0 \\ v_1 dx_2 - v_2 dx_1 = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

les lignes de courant sont donc les integrales du système différentiel :

$$\frac{dx_1}{v_1(\vec{x}, t)} = \frac{dx_2}{v_2(\vec{x}, t)} = \frac{dx_3}{v_3(\vec{x}, t)} \quad (1.16)$$

Où  $t$  la valeur fixée.

### 1.3.3 Équation de bernoulli

Le théorème de Bernoulli est une application de la conservation de l'énergie dans le cas des fluides en mouvement. Pour un fluide laminaire, visqueux et incompressible, en négligeant les effets de la gravité, on obtient la relation suivante :

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{constante} \quad (1.17)$$

Où :

$P$  est la pression du fluide,

$\rho$  est la densité du fluide,

$v$  est la vitesse du fluide,

$g$  est l'accélération due à la gravité,

$h$  est la hauteur relative dans le champ gravitationnel.

Si

Le fluide non visqueux dans ce cas l'équation de bernoulli est devient comme suite :

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \quad (1.18)$$

## 1.4 Potentiel complexe pour les écoulements plans

Les flux plans se distinguent des autres flux bidimensionnels, caractérisés par deux variables indépendantes, du fait que ces dernières,  $x$  et  $y$ , peuvent être combinées en une seule variable complexe.

$$z = x + iy, \quad i^2 = -1 \quad (1.19)$$

### 1.4.1 Fonction d'une variable complexe

**Définition 1.4.1** *La fonction complexe  $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  est dite analytique dans un ensemble ouvert  $G \subset \mathbb{C}$ , s'il est différentiable en tout point  $z \in G$ .*

**Théorème 1.4.1** *Soit  $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  une fonction définie dans un voisinage d'un point  $z$ , de plus en ce point les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont différentiables. Alors, pour que la fonction de la variable complexe  $f(z)$  soit différentiable au point  $z$ , il faut et il suffit que l'on ait, en ce point, les relations*

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1.20)$$

Ces équations s'appellent conditions de Cauchy-Riemann

Si les dérivées partielles sont continues dans  $G \subset \mathbb{C}$ , alors les conditions de Cauchy-Riemann sont des conditions suffisantes pour que  $f$  soit analytique dans  $G$ . Les fonctions  $\phi$  et  $\psi$  sont souvent appelées fonctions conjuguées

**Théorème 1.4.2** *Soit  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  et  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Si les dérivées partielles secondes  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  sont continues au voisinage de  $(x_0, y_0) \in \Omega$  alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \quad (1.21)$$

Cet théorème s'appelle le théorème de Schwartz.

### Fonctions harmoniques

Les conditions Cauchy-Riemann 1.20 et 1.21 impliquent que le partie réelle et imaginaire de la fonction doivent satisfaire les équations de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y} = 0 \quad (1.22)$$

Ou

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{et} \quad \Delta \psi = 0 \quad (1.23)$$

Ces équations sont les formes cartésiennes de l'équation de Laplace. Les parties réelle  $\phi$  et imaginaire  $\psi$  de la fonction sont appelées fonctions harmoniques dans la région  $G$ .

### 1.4.2 Potentiel complexe

On voit d'après 1.22 que le potentiel des vitesse et harmonique, vérifie l'équation de laplace

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 y} = 0 \quad (1.24)$$

On en déduit qu'il existe une fonction harmonique conjuguée  $\psi(x, y)$  tel que :

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (1.25)$$

Soit analytique, on a d'après 1.20 par dérivation :

$$\frac{df}{dz} = f'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} - i\frac{\partial\phi}{\partial y} = v_x - iv_y \quad (1.26)$$

La vitesse (appelée quelque fois vitesse complexe ) est donc donnée par :

$$V = v_x - iv_y = \overline{df/dz} = \overline{f'(z)} \quad (1.27)$$

et a pour module

$$q = |V| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \left| \overline{f'(z)} \right| = |f'(z)| \quad (1.28)$$

Les points pour aux quels la vitesse est nulle,  $f'(z) = 0$  sont appelées points d'arrêt(ou point de stagnation), la fonction  $f$  dont l'importance fondamentale dans la caractérisation d'un écoulement est appelée le potentiel complexe.

### Exemple 1.4.1

On considère l'écoulement plan défini en variable d'Euler par :

$$u = 2y \quad \text{et} \quad v = 2x$$

L'écoulement irrotationnel car :

$$\text{rot}(\vec{u}) = \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \vec{e}_z = \vec{0}$$

Fonction de courant  $\psi$  est :

$$d\psi = udy - vdx$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v = -2x \text{ et } \frac{\partial\psi}{\partial y} = u = 2y$$

En intégrant la première équation par rapport à  $x$ , nous obtenons :

$$\psi = -x^2 + F(y) \text{ } F \text{ est une fonction arbitraire de } y$$

On dérive ce résultat par rapport à  $y$  et on l'identifie avec la seconde équation :

$$F'(y) = 2y \text{ d'ou } F(y) = y^2 + k_1, \text{ avec } k_1 \text{ est une constante.}$$

La fonction de courant est donc

$$\psi = -x^2 + y^2 + k_1$$

Fonction de potentiel des vitesses  $\phi$  est :

$$d\phi = udx + vdy$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = u = 2y \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial y} = v = 2x$$

En intégrant la première équation par rapport à  $x$ , nous obtenons :

$$\phi = 2xy + G(y) \text{ } G \text{ est une fonction arbitraire de } y$$

On dérive ce résultat par rapport à  $y$  et on l'identifie avec le seconde équation :

$G'(y) = 2y$  d'où  $G'(y) = 0$  et  $G(y) = k_2$ , avec  $k_2$  est une constante.

$$\phi = 2xy + k_2$$

La fonction de potentiel complexe de l'écoulement est donc

$$f(z) = -iz^2 + k_2 + ik_1, \quad z = x + iy$$

### Formule de Cauchy

Soit une fonction  $f(z)$  analytique dans à l'intérieur d'un contour fermé  $C$ , et si  $z_0$  est un point à l'intérieur de ce contour, alors la formule intégrale de Cauchy s'énonce comme suit :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz \quad (1.29)$$

# Chapitre 2

## Applications et transformations conformes

Dans ce chapitre, nous allons introduire les transformations conformes, une classe importante de fonctions en analyse complexe qui préservent les angles. Nous présenterons quelques propriétés fondamentales de ces transformations et nous examinerons deux transformations spécifiques : la transformation hodographique et la transformation de Schwarz-Christoffel.

### 2.1 Transformations conformes

**Définition 2.1.1** *L'ensemble des équations*

$$u = u(x, y) \quad v = v(x, y) \tag{2.1}$$

Définit, en général, une transformation ou une cartographie, qui établit une correspondance entre les points des plans  $uv$  et  $xy$ . les équations (2.1) sont appelées équations de transformation. Si à chaque point du plan  $uv$  correspond un et un seul

point du plan  $xy$ , et inversement on parle d'une transformation ou d'une cartographie biunivoque. Dans ces cas, un ensemble des points dans la plan  $xy$  (comme un courbe ou une région) est mappé dans un ensemble de points dans le plan  $uv$  (courbe ou région) et inversement.

### 2.1.1 Forme complexe d'un transformation

Un cas particulièrement intéressant se présente lorsque  $u$  et  $v$  sont les parties réelle et imaginaire d'une fonction analytique de la variable complexe  $z = x + iy$ , c'est-à-dire  $w = u + iv = f(z)$ . Dans ce cas, le jacobien de la transformation est donné par :

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2 \quad (2.2)$$

Il s'ensuit que la transformation est conforme dans les domaines où  $f'(z) \neq 0$ . Les points pour lesquels  $f'(z) = 0$  sont appelés points critiques.

## 2.2 Quelques transformations conformes

Dans les exemples suivants  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  sont des constantes complexes, et  $a$  et  $\theta_0$  sont des constantes réelles.

**Translation**  $w = z + \beta$

par cette tranformation les figures du plan  $z$  sont déplacées ou translitées dans la direction du vecteur  $\beta$ .

**Rotation**  $w = e^{i\theta_0} z$

par cette transformation les figures du plan  $z$  subissent une rotation d'angle  $\theta_0$ .

**Homothétie**  $w = az$

par cette transformation les figures sont dilatées (ou contractées) si  $a > 1$  (si  $0 < a < 1$ ). On considère la contraction comme un cas particulier de dilatation .

**Inversion**  $w = \frac{1}{z}$

Pour  $z$  non nul transformée les cercles en cercles / droites, les lignes en droites / cercles selon que l'objet passe ou non par l'origine .

**Transformation linéaire**  $w = \alpha z + \beta$

ou  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes complexes est appelée une transformaiion linéaire. Etant donné que l'on peut .Ecrire  $w = \alpha z + \beta$  au moyen des transformation successives  $w = \zeta + \beta, \zeta = e^{i\theta_0\tau}, \tau = \alpha z,$

$\alpha = ae^{i\theta_0}$  on voit que la transformation linéaire la plus générale s'exprime sous la forme de produit de la transformation telles que translation, rotation, homothétie.

**Transformation bilinéaire ou fractionnelle**

la transformation

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{2.3}$$

Avec  $a, b, c, d$  des complexes. Transformées les cercles en droites est respectivement.

## 2.3 La transformation de Schwartz -Christoffel

Considérons un polygone[figure 2.4.1] dans le plan des  $w$  ,ayant pour sommets  $w_1, w_2, \dots, w_n$  et pour angles intérieurs respectivement  $1, 2, \dots, n$ . Soit  $w_1, w_2, \dots, w_n$  les poits

correspondant respectivement  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de l'axe réel du plan des  $Z$  2.1

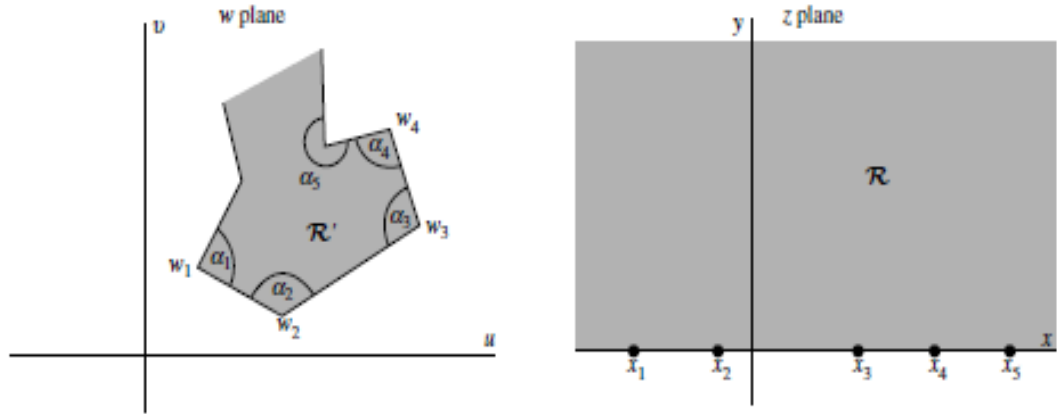


FIG. 2.1 – transformation conforme de l'intérieur d'un polygone sur le demi-plan supérieur

Une transformation qui représente l'intérieur  $R$  d'un polygone considéré sur le demi-plan supérieur d'un plan  $Z$ , et la frontière d'un polygone sur l'axe réel, est donné par :

$$\frac{dw}{dz} = A(z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1} \quad (2.4)$$

Alors

$$w = A \int (z - x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z - x_2)^{\alpha_2/\pi-1} \dots (z - x_n)^{\alpha_n/\pi-1} dz + B \quad (2.5)$$

Où  $A$  et  $B$  sont des constantes complexes .

1. Parmi les points  $x_1, x_2, \dots, x_n$  on peut en choisir trois arbitrairement .
2. Les constantes  $A$  et  $B$  déterminent la taille, l'orientation et position du polygone .
3. Il est commode de choisir un point ,par exemple  $x_n$ , à l'infini, cas dans lequel le

dernier facteur de 2.4 et 2.5 n'existe pas .

4. Des polygones infinis non fermés peuvent être considérés comme des cas limites de polygones fermés.

## 2.4 Représentation sur le Demi-Plan

$$w = \exp\left(\frac{\pi z}{a}\right)$$

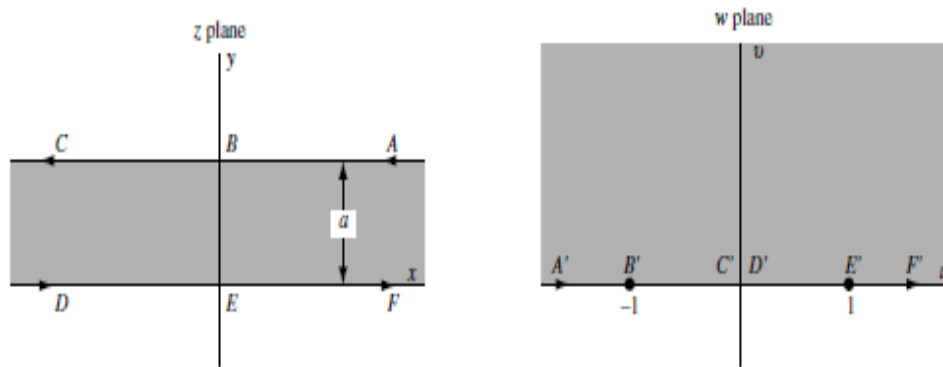


FIG. 2.2 – Transformer un canal avec une source en un demi-plan supérieur

$$w = \cosh\left(\frac{\pi z}{a}\right)$$

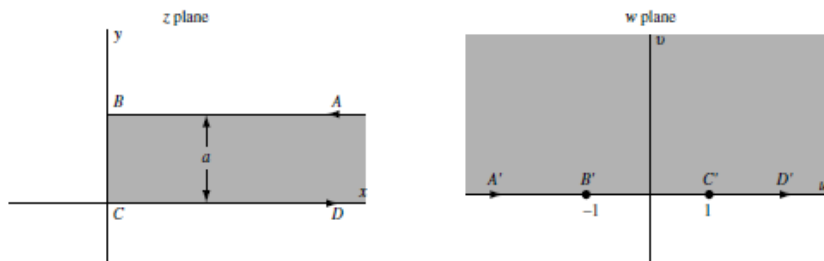


FIG. 2.3 – Semi-infinite canal avec une source en un demi-plan supérieur

### 2.4.1 Transformation hodographe

La théorie des lignes de courant est étudié le problème d'écoulement potentiel et bidimensionnel, bornés par des parois rectilignes et des lignes de courant libre de forme inconnue, sur lesquelles la pression est supposée constante. Cette transformation est utilisée par Kirchhoff 1986 pour trouver la solution exacte. L'idée est d'introduire la fonction complexe  $\Omega$  définie par :

$$\begin{aligned}\Omega &= \log\left(\frac{U}{df/dz}\right) \\ &= \log\left(\frac{U}{u-iv}\right) \\ &= \log\left(\frac{U}{q}\right) + i\theta.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Où  $f = \phi + i\psi$ ,  $\frac{df}{dz} = u - iv$  et  $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ ,  $(u, v)$  sont les composantes du vecteur vitesse suivant les directions de l'axe des  $x$  et l'axe  $y$ , respectivement.  $\theta$  est l'angle que fait le vecteur vitesse avec l'horizontale et  $U$  est la vitesse de référence qui peut être considérée comme unité de vitesse.

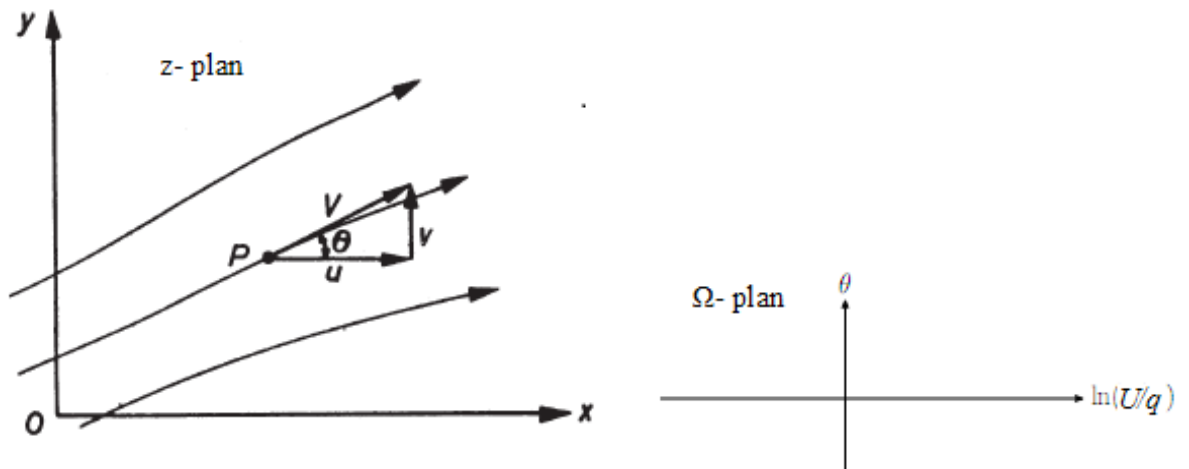


FIG. 2.4 – Transformation d'Hodographe

On note que la fonction  $\Omega$  possède les propriétés suivantes :

-La partie réelle de  $\Omega$  est constante sur chaque ligne de courant libre, c'est à dire  $\log\left(\frac{U}{q}\right) = \text{const.}$

-La partie imaginaire de  $\Omega$  est constante sur chaque paroi rigide rectiligne, c'est à dire  $\theta = \text{const.}$

Par conséquent, dans le plan  $\Omega$ , le domaine d'écoulement est présenté par une figure plane de cotés rectilignes (polygone).

C'est aussi le cas de la transformation  $f$ , qui transforme le plan physique  $z$  en polygone. Il est vient que, si nous pouvons transformer le plan  $\Omega$  vers la moitié supérieure (reps.inférieure) d'une certaine variable complexe  $\lambda$ , alors la relation entre  $z$  et  $f$  ou entre  $df/dz$  et  $f$  est paramétriquement déterminées.

## 2.4.2 Applications à l'écoulement des fluides

**Exemple 2.4.1** *Considérons le cas d'un jet sortant d'un orifice (fig 2.5.3). Encore un fois, on effectue d'abord la transformation hodographique.*

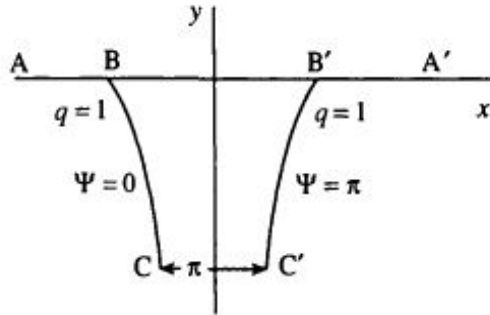
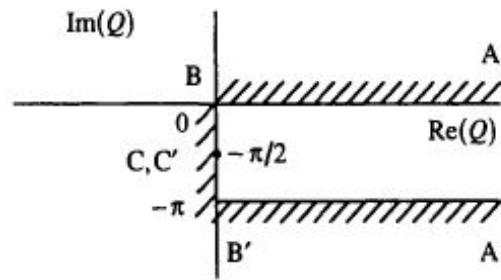
$$Q = \ln\left(\frac{U}{df/dz}\right) = \ln(q) + i\theta \quad (2.7)$$

Où  $U$  est la vitesse uniforme du liquide sur les langes de courant libres qui se séparent les bords de l'orifice, et c'est aussi la vitesse à l'intérieur du jet loin en aval de l'orifice ou les lignes de courant sont droites et parallèles.

### Cartographies conformes pour un jet émergent d'un orifice

On effectue maintenant la transformation de Schwartz-Christoffe

$$\frac{dQ}{d\zeta} = c(\zeta + 1)^{-\frac{1}{2}}(\zeta - 1)^{-\frac{1}{2}}$$


 FIG. 2.5 – Le plan physique :  $z = x + iy$ 

 FIG. 2.6 – Le plan :  $Q = \ln q + i\theta$ 

Donc

$$Q = c \int \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad (2.8)$$

Qui, en utilisant la méthode des variables complexes

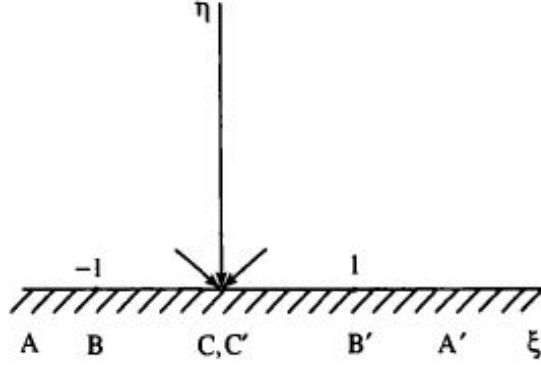
$$\begin{cases} \zeta = -1 : Q = 0 \\ \zeta = 1 : Q = -\pi i \end{cases}$$

devient

$$Q = \cos h^{-1}\zeta - \pi i \quad (2.9)$$

cette transformation transforme le flux donné en celui illustré à la figure 2.5.3. Le potentiel complexe pour ce dernier est donné par

$$\bar{F}(\zeta) = -\ln \zeta$$


 FIG. 2.7 – le plan :  $\zeta = \xi + i\eta$ 

Notons que, sur la ligne de courant libre BC (figure 2.5.3), on a

$$ds = d\Phi = -\frac{d\zeta}{\zeta} = -\frac{d[\cos h(i\theta + i\pi)]}{\cos h(i\theta + i\pi)} = \frac{d(\cos \theta)}{\cos \theta} = -\tan \theta \cdot d\theta$$

d'où

$$dx = \sin \theta \cdot d\theta, \quad dy = -\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} d\theta \quad (2.11)$$

Ainsi, la ligne de courant libre BC est donnée par :

$$x = \frac{\pi}{2} - \cos \theta, \quad y = \sin \theta - \ln \left| \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| \quad (2.12)$$

le coefficient de contraction du jet est donc donné par

$$\frac{2x_c}{2x_b} = \frac{\pi}{\pi + 2} \quad (2.13)$$

# Chapitre 3

## L'écoulement dans un canal ouvert avec un forme triangulaire immergée

### 3.1 Introduction

Considérons un écoulement fluide stable et bidimensionnel avec une surface libre dans la demi plan supérieur, au-dessus d'un obstacle triangulaire incliné à un angle  $\gamma$  par rapport à l'horizontale, avec  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ . Le fluide est supposé incompressible et non visqueux, et l'écoulement est uniforme et non turbulent à une vitesse  $U$  et une élévation  $H$  à l'infini 3.1.

Sans tenir compte de la gravité ou de la tension de surface, nous pouvons obtenir une solution explicite à ce problème en utilisant la méthode des lignes de courant et des transformations conformes [4] pour décrire la forme de la surface libre de manière paramétrique. Cependant, lorsque nous incluons l'effet de la tension de surface, le problème devient plus complexe en raison de la présence d'un terme non linéaire dans la condition aux limites de la surface libre. Dans ce cas, la résolution nécessite

une approche numérique.

Nous adoptons une méthode d'intégrale développée par S.N. Hanna et M.N. Abdel-Malek [5], Frédéric Dias et Vanden-Broeck [6], pour résoudre numériquement ce problème d'écoulement à surface libre sur une dépression de forme triangulaire, en prenant en compte l'effet de la tension de surface.

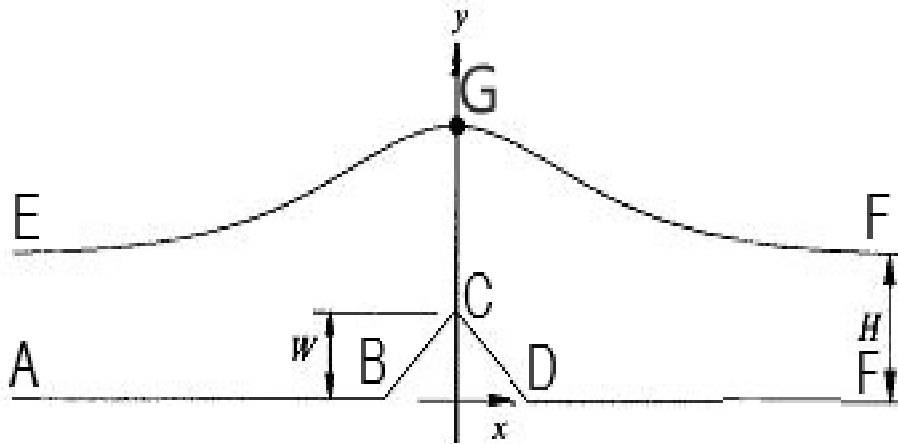


FIG. 3.1 – Le plan complexe  $z = x + iy$ , la forme de la surface libre  $EF$

Les paramètres suivants seront utilisés pour décrire le flux. Le nombre de Weber, représenté par  $We$  est défini comme :

$$We = \frac{\rho U^2 H}{T}$$

Où  $U$  est la vitesse d'écoulement à l'infini,  $H$  est l'élévation à l'infini,  $\rho$  est la densité du fluide et  $T$  est la tension de surface. Ce nombre de Weber est un indicateur de l'importance relative de la force inertielle par rapport à la tension de surface dans le système d'écoulement.

## 3.2 Formulation du problème

Considérons un écoulement bidimensionnel et irrotationnel sur un plan horizontal  $XOY$  d'un fluide incompressible et non visqueux, s'écoulant au-dessus d'un creux triangulaire. Les cotès  $BC$  et  $CD$  du triangle forment un angle  $\gamma$  avec l'axe des  $OX$  où  $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ . La ligne de courant libre est  $EGF$  (voir FIG 3.1). Supposons que lorsque  $X$  tend vers l'infini, la vitesse s'approche de la vitesse uniforme  $U_\infty$  et l'élévation de  $H$ . Le plan  $XOY$  du couple  $(X, Y)$  sera considéré comme un plan de variable complexe  $Z = X + iY$ . Soit  $\mathbf{V} = (U(X, Y), V(X, Y))$  le champ de vecteurs vitesse de l'écoulement. Nous introduisons la fonction potentielle de vitesse  $\Phi$  et la fonction de courant  $\Psi$ , alors les conditions de Cauchy-Riemann sont données.

$$\begin{cases} U = \frac{\partial \Phi}{\partial X} = \frac{\partial \Psi}{\partial Y} \\ V = \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial X} \end{cases} \quad (3.1)$$

la fonction potentielle comolexe  $F$  définie par :

$$F = \Phi(X, Y) + i\Psi(X, Y)$$

La relation (3.1) implique que la fonction complexe  $\mathbf{V} = U - iV$  la fonction potentielle  $F$  sont des fonctions analytiques de variable  $Z = X + iY$ . On transforme le plan de l'écoulement réel dans le plan complexe  $Z$  (FIG. 3.1) au plan de l'écoulement  $F$  tels que les points  $A, E, G$  et  $F$  dans plan complexe  $Z$  se transforement aux points  $A = E = -\infty, G = 0$  et  $F = +\infty$  dans le plan  $F$ . Sans perte de généralité, on choisit  $\Phi = 0$  au point  $G$  et  $\Psi = 0$  sur la surface libre  $EGF$ . Il s'ensuit que  $\Psi = -U_\infty H$  sur la ligne de courant  $ABCDF$ .

Les effets de la tension de surface et non négligeable. Dans ce cas, la condition de

Bernoulli sur la surface libre est donné par :

$$\frac{1}{2}\tilde{q}^2 + \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{2}U_\infty^2 + \frac{\tilde{p}_0}{\rho} = \text{const} \quad \text{sur } EF \quad (3.2)$$

Où  $\tilde{q} = \sqrt{U^2 + V^2}$  et  $\tilde{p}, \tilde{p}_0$  désignent respectivement la pression du fluide sur la surface libre, le module de vitesse et la pression atmosphérique qui est constante au dessus de la surface libre. La relation entre  $\tilde{p}$  et  $\tilde{p}_0$  donnée par la loi de Laplace :

$$\tilde{p} - \tilde{p}_0 = \frac{\tilde{T}}{\tilde{R}} = \tilde{K}\tilde{T} \quad (3.3)$$

Où  $\tilde{K}$  est la courbure de la surface libre,  $\tilde{R}$  est le rayon de courbure et  $\tilde{T}$  dénote la tension de surface. Par convention de signe,  $\tilde{R}$  est négatif si le centre rayon de courbure est en dehors du fluide et de signe positif dans le cas contraire . Dans notre cas,  $\tilde{K}$  est de signe négatif. Avant de résoudre le problème, nous allons écrire l'équation (3.2) en variable non dimensionnelles, pour cela, on choisit  $U$  comme unité de vitesse et  $H$  comme unité de longueur et on pose

$$u = \frac{U}{U_\infty}, v = \frac{V}{U_\infty}, K = \tilde{K}H, x = \frac{X}{H}, y = \frac{Y}{H}, f = \phi + i\psi \quad (3.4)$$

Où  $\phi = \frac{\Phi}{U_\infty H}, \psi = \frac{\Psi}{U_\infty H}$

En substituant (3.3) et (3.4) dans (3.2) on trouve :

$$\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + \delta K = \frac{1}{2} \quad \text{où } \delta = \frac{1}{We} \quad (3.5)$$

Avec les conditions :

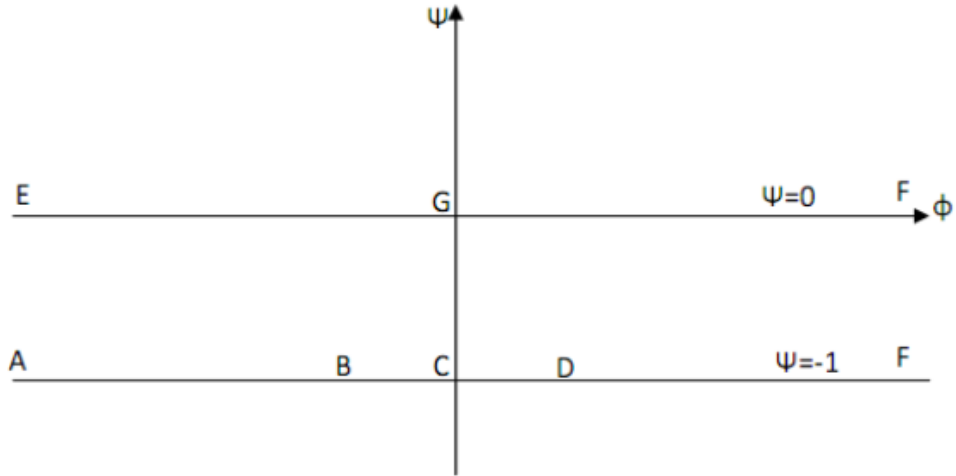


FIG. 3.2 – Le plan complexe  $f = \phi + i\psi$

$$\begin{cases} v = 0 \text{ sur } \psi = -1 \text{ et } -\infty < \phi < \phi_B \text{ et } \phi_D < \phi < +\infty \\ v = u \tan \gamma \text{ sur } \psi = -1 \text{ et } \phi_B < \phi < \phi_C \text{ et } \phi_C < \phi < \phi_D \end{cases} \quad (3.6)$$

On note par  $\xi$  le vecteur de vitesse où  $\xi = \frac{U}{U_\infty} - i \frac{V}{U_\infty} = u - iv$ , comme  $\zeta$  est analytique dans le domaine de l'écoulement,  $\xi$  peut s'écrire sous forme :

$$\xi = u - iv = e^{\tau - i\theta} \quad (3.7)$$

Où  $\theta$  désigne l'angle entre le vecteur de vitesse et l'horizontale et  $e^\tau = q$ . Avant d'écrire l'équation (3.5) par les nouvelles variables  $\tau$  et  $\theta$ , nous montrons que :

$$K = \frac{1}{R} = \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| e^\tau$$

En effet, désignons par  $\vec{\eta}$  le vecteur de vitesse de coordonnées  $(e^\tau \cos \theta, e^\tau \sin \theta)$ .

En coordonnées intrinsèques on a :

$$\vec{\eta} = \vec{e}_T |\vec{\eta}| = |\zeta| \vec{e}_T$$

Où  $\vec{e}_T$  est le vecteur unitaire tangentiel, on déduit que

$$\vec{e}_T = \cos \theta \vec{i} + i \sin \theta \vec{j}$$

On a aussi par définition :

$$\frac{d\vec{e}_T}{ds} = K \vec{N} = \frac{1}{R} \vec{N}$$

Où  $\vec{N}$  désigne le vecteur unitaire normal à la courbe et élément de longueur d'arc de la ligne de courant EF donc :

$$1 = R \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = R \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| \left| \frac{1}{\eta} \right|$$

C'est à dire

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| e^{-\tau} \quad (3.8)$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| &= \left| -\frac{d\theta}{dt} \sin \theta \vec{i} + \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \vec{j} \right| \\ &= \left| \frac{d\theta}{dt} e^{-i\theta} \right| \end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\left| \frac{d\vec{e}_T}{dt} \right| = \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

En substituant l'expression ci -dessus dans (3.8) on trouve :

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d\theta}{dt} \right| e^{-\tau}$$

comme

$$\begin{aligned}\frac{d\theta}{dt} &= \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\theta}{dy} \frac{dy}{dt} \\ &= \frac{d\theta}{d\phi} \left[ \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{d\phi}{dy} \frac{dy}{dt} \right] \\ &= \frac{d\theta}{d\phi} e^{2\tau}\end{aligned}$$

Sur la surface libre ( $EF$ ).

comme

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{\eta} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} = e^\tau \cos \theta \vec{i} + e^\tau \sin \theta \vec{j}$$

Donc :

$$K = \frac{1}{R} = - \left| \frac{d\theta}{d\phi} \right| e^\tau$$

Comme  $K$  est de signe négatif.

On a :  $q = |\vec{\eta}| = e$ , alors la condition de Bernoulli (3.5) en variables non dimensionnelles sur la ligne de courant libre  $EF$  s'écrit :

$$e^{2\tau} - 2\delta e^\tau \frac{\partial \theta}{\partial \phi} = 1 \text{ sur } EF \quad (3.9)$$

Le domaine occupé par le fluide dans le plan de variable  $f$  est une bande infinie dans la région  $-1 < \psi < 0$  et  $-\infty < \phi < +\infty$ . La transformation conforme d'une bande infinie dans le plan  $f$  au demi plan supérieur d'un autre plan complexe  $\zeta$  est donnée par la relation :

$$\zeta = \alpha + i\beta = e^{-\pi f} = e^{-\pi(\phi+i\psi)} = e^{-\pi\phi}(\cos(\pi\psi) - i \sin(\pi\psi)) \quad (3.10)$$

on a :

$$\begin{cases} \alpha = e^{-\pi\varphi} \cos(-\pi\psi) \\ \beta = e^{-\pi\varphi} \sin(-\pi\psi) \end{cases}$$

si  $\psi = 0$

$$\begin{cases} \alpha = e^{-\pi\varphi} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

si  $\psi = -1$

$$\begin{cases} \alpha = -e^{-\pi\varphi} \\ \beta = 0 \end{cases}$$

les points	plan $f$	plan $\zeta$
A	$\phi = -\infty, \psi = -1$	$\alpha = -\infty, \beta = 0$
B	$\phi = \phi_B, \psi = -1$	$\alpha = -e^{-\pi\phi_B}, \beta = 0$
C	$\phi = 0, \psi = -1$	$\alpha = -1, \beta = 0$
D	$\phi = \phi_D, \psi = -1$	$\alpha = -e^{-\pi\phi_D}, \beta = 0$
F	$\phi = +\infty, \psi = -1$	$\alpha = 0, \beta = 0$
G	$\phi = 0, \psi = 0$	$\alpha = 1, \beta = 0$
E	$\phi = -\infty, \psi = 0$	$\alpha = +\infty, \beta = 0$
F	$\phi = +\infty, \psi = 0$	$\alpha = 0, \beta = 0$

Le plan complexe  $\zeta$  est donnée dans la figure(FIG3.3)

Les conditions aux limites (3.6) dans le plan  $\zeta$  deviennent alors :

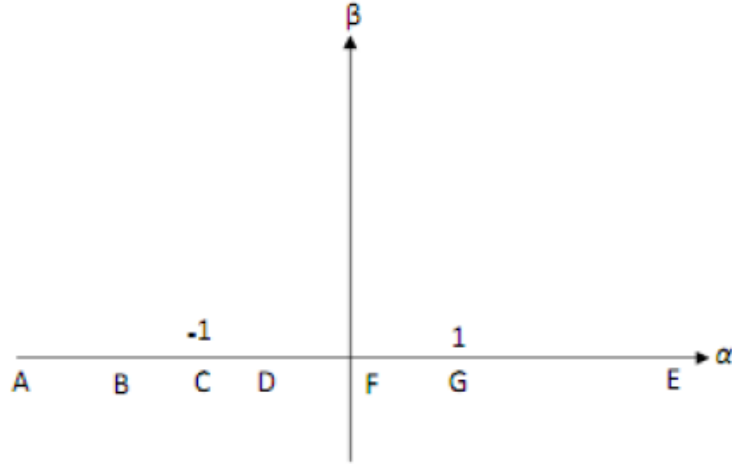


FIG. 3.3 – Le demi plan supérieur  $\zeta = \alpha + i\beta$

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta = 0, \beta = 0, -\infty < \alpha < \alpha_B < 0 \text{ et } \alpha_D < \alpha < 0 \\ \theta = \gamma, \beta = 0, \alpha_B < \alpha < \alpha_C < 0 \\ \theta = -\gamma, \beta = 0, \alpha_C < \alpha < \alpha_D \\ \theta = \text{inconnue}, \beta = 0, 0 < \alpha < +\infty \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Nous cherchons  $\xi(\tau, \theta)$  qui vérifie l'équation (3.9) avec les conditions (3.11). Ce qui termine la formulation du problème.

### 3.3 L'équation integro-differentielle

L'équation (3.9) a été dérivée par des nouvelles variables complexes  $\tau$  et  $\theta$  sur la surface libre. Maintenant, une équation intégrale est dérivée. L'équation différentielle définira une équation qui sera résolue numériquement. Le domaine d'écoulement du problème a une région d'image constituée de la moitié supérieure du plan complexe  $\zeta$ . Une équation intégrale en variables  $\tau$  et  $\theta$  doit être établie en utilisant le théorème

de cauchy dans le plan  $\zeta$ . Soit l'intégral de la forme :

$$\oint \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta \quad (3.12)$$

Où  $\alpha_0$  est une image point d'un point sur la surface libre, c'est -à-dire  $\alpha_0 \in EF$ . Le chemin  $\Gamma$  consiste un grand arc  $\Gamma_R$  de rayon  $R$ , centrée à l'origine ,( Voir (FIG.3.4))

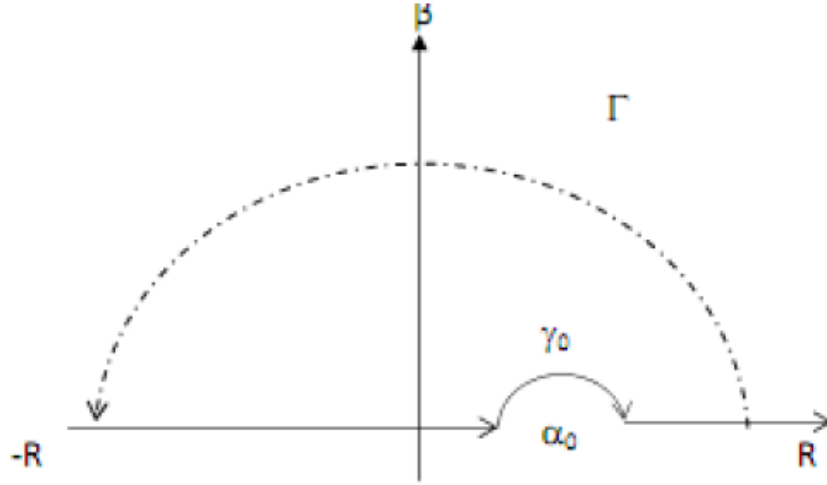


FIG. 3.4 – Le chemin  $\Gamma$  dans  $\zeta$  plan

En décomposant l'intégrale (3.12) sur le contour  $\Gamma$  on trouve :

$$\oint \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta = \int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\zeta \quad (3.13)$$

La premiere intégrale est une intégrale d'une fonction analytique sur le chemin fermé  $\Gamma$ . Donc, le théorème de cauchy implique que l'intégrale du coté gauche de (3.13) est égale à zéro. L'équation (3.13) devient alors :

$$\int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\zeta = 0 \quad (3.14)$$

Commençons par la deuxième intégrale sur  $\gamma_0$ . On pose  $\zeta = \alpha_0 + re^{i\lambda}$  et  $d\zeta = ire^{i\lambda} d\lambda$ , alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\gamma_0} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta = \int_{\pi}^0 \frac{\tau(\alpha_0 + r \cos \lambda, r \sin \lambda) - i\theta(\alpha_0 + r \cos \lambda, r \sin \lambda)}{r e^{i\lambda}} i r e^{i\lambda} d\lambda \\ = \int_{\pi}^0 [\tau(\alpha_0 + r \cos \lambda, r \sin \lambda) - i\theta(\alpha_0 + r \cos \lambda, r \sin \lambda)] i d\lambda \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Lorsque  $r \rightarrow 0$ , alors :

$$i(\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0)) \int_{\pi}^0 d\lambda = -\pi i(\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0)) \quad (3.16)$$

En remplaçant ce résultat dans (3.14), on obtient :

$$(\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0)) = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta + \frac{1}{\pi i} \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = 0 \quad (3.17)$$

La limite de (3.14), lorsque  $R \rightarrow \infty$ , alors, la troisième intégrale du côté droite de (3.14) devient :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi i} \int_{-R}^R \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.18)$$

Les intégrales des coté droits de (3.14) et de (3.15) sont les valeurs principales de cauchy. Comme  $R \rightarrow \infty, |\beta| \rightarrow \infty$ . A partir de (3.7), on constate que  $\phi \rightarrow -\infty$ . Comme  $\phi \rightarrow -\infty$ , l'écoulement est uniforme avec une vitesse non dimensionnelle tend vers à 1, c'est-à-dire  $u - iv \rightarrow 1$ . Dans (3.14), ceci implique que  $\tau - i\theta \rightarrow 0$ . Par conséquent, la limite de la première intégrale du côté droit de (3.14), lorsque  $R \rightarrow \infty$ , devient :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} \frac{\tau(\alpha, \beta) - i\theta(\alpha, \beta)}{\zeta - \alpha_0} d\zeta = 0 \quad (3.19)$$

Maintenant (3.14) se réduit à :

$$\tau(\alpha_0, 0) - i\theta(\alpha_0, 0) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(\alpha, 0) - i\theta(\alpha, 0)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.20)$$

En prenant le partie réelle de (3.20), la relation intégrale entre  $\tau$  et  $\theta$ , sur la surface libre EF, s'écrit alors

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.21)$$

Où  $\theta(\alpha) = \theta(\alpha, 0)$  et  $\tau(\alpha) = \tau(\alpha, 0)$  sont utilisées pour simplifier la notation. En utilisant les conditions aux limites (3.11), l'intégrale (3.21) est séparée en cinq parties, on a alors :

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{\alpha_B} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_B}^{\alpha_c} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_c}^{\alpha_D} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_{\alpha_D}^0 \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha + \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \right]$$

En utilisant (3.11), on obtient :

$$\tau(\alpha_0) = -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{-1 - \alpha_0}{\alpha_B - \alpha_0} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{\alpha_D - \alpha_0}{-1 - \alpha_0} \right| - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\theta(\alpha)}{\alpha - \alpha_0} d\alpha \quad (3.23)$$

Cette équation est définie sur le long de surface libre, donc en utilisant (3.10) ,avec  $\psi = 0$ , on a :

$$\alpha = e^{-\pi\phi}, \alpha_0 = e^{-\pi\phi_0} \quad (3.24)$$

En substituant (3.24) dans (3.23) on trouve :

$$\tau'(\phi_0) = -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1+e^{-\pi\phi_0}}{e^{-\pi\phi_B}+e^{-\pi\phi_0}} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_D}+e^{-\pi\phi_0}}{1+e^{-\pi\phi_0}} \right| + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi)e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi}-e^{-\pi\phi_0}} d\phi \quad (3.25)$$

avec  $\tau'(\phi_0) = \tau(e^{-\pi\phi_0})$  et  $\widehat{\theta}(\phi) = \theta(e^{-\pi\phi})$ . La condition de Bernoulli (3.9) s'écrit maintenant en termes de  $\tau'$  et  $\widehat{\theta}$ , comme

$$\frac{1}{2}e^{2r'} - \delta e^{\tau'} \left| \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{2} \text{ sur } EF \quad (3.26)$$

Ensuite nous calculons la valeur de  $y$  sur la surface libre EF en utilisant la relation (3.10) et la relation :

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{u - iv} = e^{-\tau+i\theta} \quad (3.27)$$

Par intégration, on obtient

$$y(\alpha) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^\alpha \frac{e^{-\tau(\phi_0)} \sin \theta(\phi_0) d\phi_0}{\alpha_0} d\alpha_0 \quad \text{pour } 0 < \alpha < +\infty \quad (3.28)$$

En utilisant (3.24), on réécrit (3.28) comme :

$$\widehat{y}(\phi) = 1 + \int_{-\infty}^\phi e^{-\tau'(\phi_0)} \sin \widehat{\theta}(\phi_0) d\phi_0 \quad (3.29)$$

Où  $-\infty < \phi < +\infty$  et  $\widehat{y}(\phi) = y(e^{-\pi\phi})$ .

En substituant (3.29) dans (3.26), on définit une équation intégral-différentielle non linéaire en fonction de l'inconnue  $\widehat{\theta}$  donnée par :

$$\frac{1}{2} A^2 \exp \left( 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi}} d\phi \right) - \delta A \exp \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\theta}(\phi) e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi}} d\phi \right) \left| \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial \phi} \right| = \frac{1}{2}$$

Où

$$A = \left| \frac{(e^{-\pi\phi_B} + e^{-\pi\phi_0})(e^{-\pi\phi_D} + e^{-\pi\phi_0})}{(1 + e^{-\pi\phi_0})(1 + e^{-\pi\phi_0})} \right|^{\frac{2}{\pi}} \quad (3.31)$$

## 3.4 Procédure numérique

### 3.4.1 Calcul numérique de $\tau$

On cherche la solution du problème numériquement puisque l'équation intégral-différentielle est non linéaire et présence de force de la tension de surface. Les points de la surface libre dans le plan potentiel complexe  $f$  sont représentés par  $\psi = 0$  et  $-\infty < \phi < +\infty$ . En discrétisant l'intervalle  $] -a, a[$  en  $N$  points, où  $a > 0$  un nombre assez grand .

$$\phi_I = \left[ \frac{-(N-1)}{2} + (I-1) \right] \Delta_h, \quad I = 1, \dots, N \quad (3.32)$$

Où  $\Delta_h > 0$  est le pas de discrétisation. Soit l'intégrale dans (3.25) suivant :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi)e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi} - e^{-\pi\phi_0}} d\phi \quad (3.33)$$

pour calculer cette intégrale, on utilise la règle de trapèze avec une sommation sur  $\phi_1$  telle que  $\phi_0$  est le point milieu d'un sous-intervalle qui est défini comme suit :

$$\phi_M = \frac{\phi_{I+1} + \phi_I}{2}, \quad I = 1, \dots, N-1 \quad (3.34)$$

Tout d'abord, (3.25) peut être réécrite comme :

$$\tau_I^M = -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1+e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_B}+e^{-\pi\phi_M}} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_D}+e^{-\pi\phi_M}}{1+e^{-\pi\phi_M}} \right| + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widehat{\theta}(\phi)e^{-\pi\phi}}{e^{-\pi\phi}-e^{-\pi\phi_M}} d\phi$$

Où  $\tau_I^M = \tau'(\phi_M)$  pour simplifier la notation. Ensuite, l'utilisation de la règle de trapèze donne :

$$\tau_I^M = -\frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{1+e^{-\pi\phi_M}}{e^{-\pi\phi_B}+e^{-\pi\phi_M}} \right| + \frac{\gamma}{\pi} \log \left| \frac{e^{-\pi\phi_D}+e^{-\pi\phi_M}}{1+e^{-\pi\phi_M}} \right| + \sum_{j=1}^N \frac{\theta_j e^{-\pi\phi_j} \omega_j \Delta_h}{e^{-\pi\phi_j} - e^{-\pi\phi_M}}, \quad I = 1, \dots, N-1 \quad (3.35)$$

$w_j$  est la fonction de poids, telle que :

$$w_j = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } j = 1, N \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.36)$$

et  $\theta_j = \widehat{\theta}(\phi_j)$ . En substituant (3.35) dans (3.26), on obtient un système de  $N$  équations non linéaires à  $N$  inconnues  $\theta_I$  pour  $I = 1, \dots, N$ , donné par :

$$h_I(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N) = \frac{1}{2} e^{2\tau_I^M} - \delta e^{\tau_I^M} \frac{\theta_{I+1} - \theta_I}{\Delta_h} - \frac{1}{2} = 0, \quad I = 1, \dots, N \quad (3.37)$$

Où la dérivée,  $\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi}$ , aux points de milieu (3.34), est approximée par une différence finie par :

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \phi} \approx \frac{\theta_{I+1} - \theta_I}{\Delta_h}, I = 1, \dots, N - 1$$

pour résoudre ce système on utilise la méthode de Newton .

### 3.4.2 Forme de la surface libre

Pour déterminer la forme de la surface libre, on utilise la relation suivante :

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} + i \frac{\partial y}{\partial \phi} = \xi^{-1} = e^{-\tau + i\theta}$$

Ce qui est équivalent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \phi} = e^{-\tau} \cos \theta \\ \frac{\partial y}{\partial \phi} = e^{-\tau} \sin \theta \end{cases} \quad (3.38)$$

Ainsi, la forme de la surface libre est obtenue en intégrant numériquement les relations (3.37) et en utilisant la méthode d'Euler ce que donne

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_{I+1} = y_I + \Delta_h e^{-\tau M} \sin \theta_M, I = 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} x_1 = \text{assez grand} \\ x_{I+1} = x_I + \Delta_h e^{-\tau M} \cos \theta_M, I = 1, \dots, N - 1 \end{cases}$$

Où  $\theta_M = \frac{\theta_{I+1} + \theta_I}{2}$ . Les résultats présentés ici sont obtenus pour  $N = 201$ .

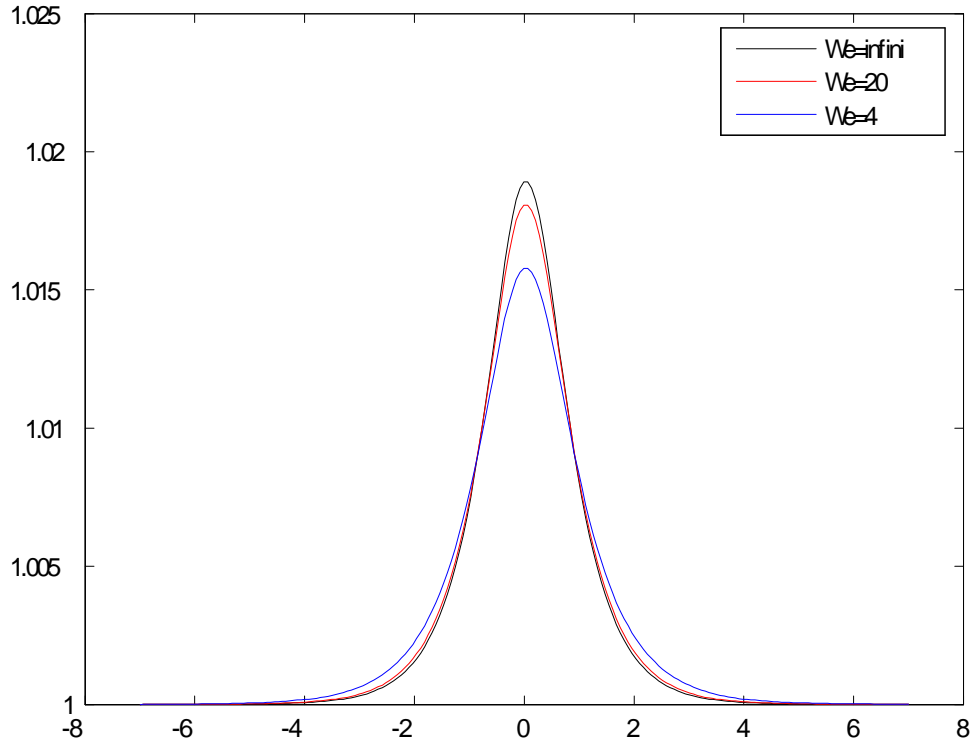


FIG. 3.5 – Forme de la surface libre pour quelques valeurs de nombre de webre  $We$

### 3.5 Resultats et discussion

On utilise la méthode de résolution décrite ci-dessus pour résoudre le système non linéaire (3.26) pour différentes valeurs des deux paramètres de nombre de Weber  $We$  et l'angle  $\gamma$ . On trouve la solution du problème pour chaque valeur des nombres  $We = 4, 20, \infty$ . Nous signalons que la plus part de ces résultats ont été obtenus pour  $N = 201, \Delta_h = 0.07$  et  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ . Dans la figure 3.5, on observe l'influence de la tension de surface sur la configuration de la surface libre, dans un contexte où la force gravitationnelle est considérée comme négligeable. La figure 3.6 illustre la représentation de la surface libre dans les situations suivantes :

pour les angles  $\gamma = \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}$  et  $We = 20$ .

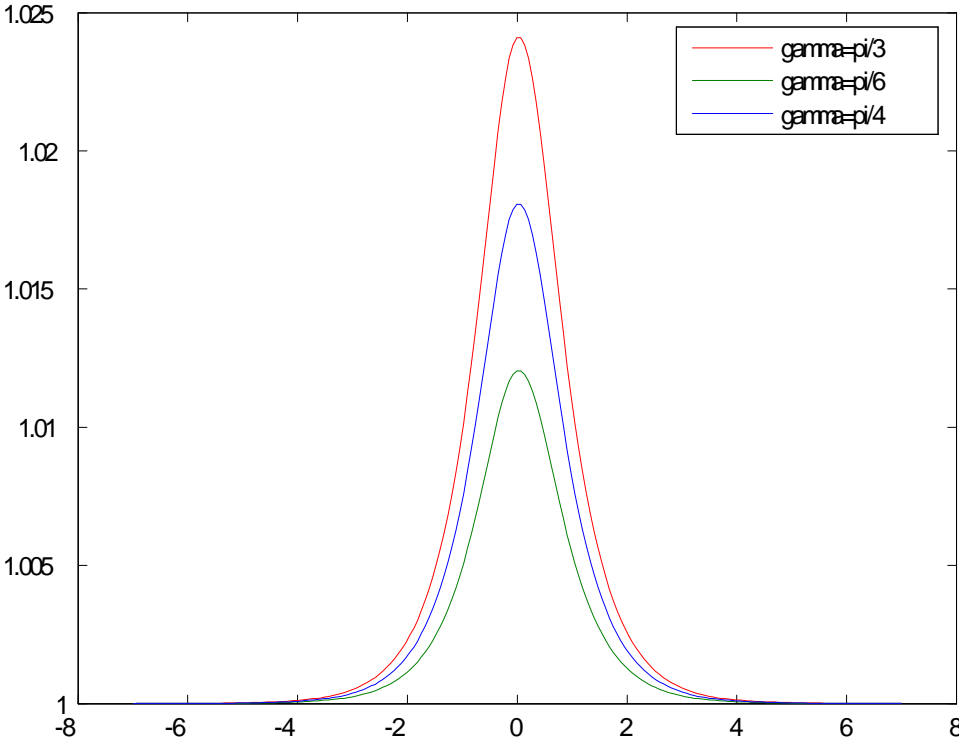


FIG. 3.6 – Forme de la surface libre pour quelques valeurs d'angle  $\gamma$

# Conclusion

Dans ce mémoire, on a étudié le problème non linéaire qui est un écoulement potentiel, bidimensionnel d'un fluide parfait dans un canal ouvert avec une forme triangulaire immergée, les effets de la tension de surface est non négligeable .

Les objectifs principaux de ce travail :

- Analyser le comportement de la surface libre : comprendre comment la tension de surface affecte la forme et le comportement d'une surface libre, en particulier dans des conditions différentes.
- De chercher la solution numérique dans le cas où l'effet de la tension de surface existe, en utilisant la technique d'intégration différentielle et d'étudier l'influence de la tension de surface sur la forme du jet

# Bibliographie

- [1] Murry Spiegel ,Seymour Lipschutz ,John Schiller ,Denis Spellman -Shaum's out lines -complex variable -Mc Graw -Hill (2009).
- [2] A.Laiadi, Sur quelques problèmes d'écoulement à surfaces libres avec tension de surface,Thèse De Doctorat, Universite Mohamed Khider, Biskra ,2018.
- [3] A. Gasmi, H. Mekais, A jet from contrainer and flow past avertical flat plate in a channel with the surface tension effects, Applied math sciences , vol 1,2007 ,no,54,26-27.
- [4] M.I .gurevich, Theory of Jets In Ideal Fluids. Academic press ,New York and London,1965.
- [5] S.N.Hanna, M.N.Abd-el-Malek et M.B.Abd-el-Malek, Super-critical free surface over trapeziodal obstacle. Journale of Computational and applied Math. 66. (1996) pp. 279-291.
- [6] F. Dias.F et J.-M. Vanden-Broeck, Open channel flow with submerged obstructions. J. Fluide.Mech. 206. (1989) pp. 155-170.
- [7] A.Bouzina, Ecoulement d'un jet devant un obstacle,Mémoire de Master, Université Mohamed Boudaifde M'sila, 2022.
- [8] A. kadri ,Problème de la surface de l'écoulement de Navier -stokes bidimensionnel ,Mémoire de Master ,Universite Kasdi Merbah , Ouargla ,2019.

- [9] L.K. Forbes, Free surface flow over a semicircular obstruction , Including the influence of gravity and surface tension ,J. Fluid Mech .127.(1986) pp .283-297.
- [10] A. Hechaichi, Résolution d'un problème non linéaire un écoulement à surface libre, Mémoire De Master, Université Mohamed Boudiaf, M'sila ,2019.
- [11] L. Debih, Etude théoriques et numérique de l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle, Mémoire De Mastre, Université Moohamed Boudiaf, M'sila,2022.
- [12] Bhimsen k Shivamoggi -Theoretical fluid dynamics -John Wiley ,Sons, 2011.

## المخلص

الهدف من هذا العمل، هو دراسة التدفق المحتمل لمائع غير قابل للضغط وغير لزج، ويكون التدفق في قناة مفتوحة ذات شكل مثلث مغمور بالمياه، مع التركيز على الأسطح الحرة، تعتمد المنهجية المستخدمة للحصول على الحل العددي على الطريقة التكاملية.

**الكلمات المفتاحية:** سطح حر، التدفق المحتمل، توتر سطحي.

## Résumé

Le but de ce travail, est d'étudier l'écoulement potentiel d'un fluide incompressible et non visqueux dans un canal ouvert avec une forme triangulaire immergée, en se concentrant sur les surfaces libres. La méthodologie utilisée pour obtenir la solution numérique repose sur la méthode d'intégrale.

**Mots clés** : surface libre, Ecoulement potentiel, tension de surface

## Abstract

The aim of this work, is to study the potential of incompressible and non-viscous fluid in an open channel with an immersed triangular shape, focusing on the free surface. The methodology used to obtain the numerical solution is based on the integral method.

**Key words**: Free surface, potential flow, surface tension