



UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ÉTUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Mathématiques Appliquées et discrètes

Par

Allal Houda

Sujet

Etude des treillis distributifs fermés

Dirigé par :

Mr. A. Amroune

Promotion: 2011/2012

Remerciements

Ce travail a été réalisé au département de mathématique, je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de recherche monsieur A. Amroune. Il a toujours fait preuve d'une grande disponibilité et d'une grande patience pour corriger les différentes versions manuscrites de ce mémoire. De même, il m'a fourni plusieurs preuves (parmi les plus difficiles) que nous avons simplifié.

Mes remerciements vont aussi aux enseignant du département de mathématiques qui ont participé à notre formation.

En fin, je remercie toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Table des matières

Introduction	3
1 Généralités sur les ensembles ordonnés	4
1.1 Fonctions caractéristiques	5
1.2 Ensemble des parties	5
1.3 Relations binaires	5
1.3.1 Généralités	5
1.3.2 Représentation matricielle d'une relation binaire	7
1.4 Relation d'ordre	8
1.4.1 Ensemble ordonné	8
1.5 Éléments remarquables	10
2 Classe d'ordres partiels : Treillis	14
2.1 Définitions	16
2.1.1 Définition par une relation d'ordre	16
2.1.2 Définition algébrique d'un treillis	18
2.2 Isomorphisme de treillis	21
2.3 Treillis remarquables	21
2.3.1 Treillis distributifs	21
2.3.2 Treillis complémentés	23
2.3.3 Treillis de Boole	23

2.4	Filtres et idéaux dans un treillis	24
2.5	Algèbre de Boole	26
2.5.1	Définitions	26
2.5.2	Exemples d'algèbre de Boole	27
2.5.3	Propriétés des algèbres de Boole	28
2.5.4	La structure d'algèbre de Boole	29
2.6	Théorème de représentation de Stone	32
3	Représentation des treillis distributifs	35
3.1	Théorème (Birkhoff 1933)	36
	Bibliographie	38

Introduction

La théorie des treillis est née de l'étude de Richard Dédekind sur la distributivité. Richard Dédekind, autour des années 1890, a considéré la question suivante : Soit trois sous -groupes, d'un groupe abélien. Combien de sous-groupes différents peut - on obtenir en utilisant que les opérations d'intersection et la somme de sous-groupes. ?

La théorie des treillis intervient autant en théorie des groupes, en algèbre abstraite et en topologie générale. Les treillis les plus connus sont les algèbres de Boole.

Un treillis est une classe particulière d'ensembles ordonnés où on prend en considération la notion d'inférieur et supérieur des éléments.

Ce travail est reparti en trois chapitres :

- Dans le premier chapitre on rappelle des définitions essentielles sur les relations d'ordres et on donne quelques propriétés de l'ensembles.
- Dans le deuxième chapitre, nous allons définir la notion de treillis, et nous allons présenter quelques notions et résultats de la théorie des treillis, ensuite donner la définition de l'algèbre de Boole et quelques propriétés.
- Finalement, dans le troisième chapitre on étudie quelques théorèmes de représentation des treillis.

Chapitre 1

Généralités sur les ensembles ordonnés

Résumé

Dans ce chapitre on va rappeler les notions essentielles sur les ensembles ordonnés et donner quelques propriétés de ces ensembles.

Contenu

1.1 Fonctions caractéristiques.

1.2 Ensemble des parties.

1.3 Relations binaires.

1.3.1 Généralités.

1.3.2 Représentation matricielle d'une relation d'ordre.

1.4 Relations d'ordres.

1.4.1 Ensembles ordonnés.

1.5 Éléments remarquables.

1.1 Fonctions caractéristiques

Définition 1.1

Soit E un référentiel et A un sous-ensemble de E , on définit la fonction caractéristique de A , notée 1_A comme suit :

$$1_A : E \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

On note par ailleurs par $\chi(E)$ l'ensemble des toutes les fonctions caractéristiques des sous ensembles de E .

1.2 Ensemble des parties

Définition 1.2

Soient E un ensemble. On appelle ensemble des parties de E l'ensemble noté $P(E)$ constitué des sous-ensembles de E .

On remarquera que les éléments de $P(E)$ sont des ensembles, on a le cardinal de $P(E)$ est $2^{|E|}$, si E est fini.

1.3 Relations binaires

1.3.1 Généralités

Définition 1.3

Soient A et B deux ensembles non vides, le produit cartésien $A \times B$ est l'ensemble des couples ordonnés (x, y) où $x \in A$ et $y \in B$.

Définition 1.4

Soient E et F deux ensembles. On appelle relation binaire de E vers F toute partie R du produit cartésien $E \times F$. Si un couple $(x, y) \in R$ alors on dit que x est en relation avec y et on note cela xRy ou $R(x, y)$.

On écrit $(x, y) \notin R$ (ou $xR^C y$) dans le cas contraire.

Dans le cas particulier où $E = F$ on dit que R est une relation binaire définie sur E .

Exemples 1.1

- 1) $E = \mathbb{R}$, et $xRy \iff x \leq y$ est une relation binaire.
- 2) E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$. Le graphe de f est une relation binaire, on a alors $xRy \iff y = f(x)$.

Notation 1.1

1. Soient R une relation binaire de E vers F et S une relation binaire de F vers G . La composée T de R et S est une relation binaire de E vers G notée $T = SoR$ est définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times G, xTy \iff \exists z \in F \text{ tq } xRz \text{ et } zSy.$$

2. Soit R une relation binaire de E vers F . On appelle relation réciproque de R et on note R^{-1} la relation binaire de F vers E définie par :

$$\forall (x, y) \in E \times F, yR^{-1}x \iff xRy.$$

Exemple 1.2

«plus petit que » et « plus grand que » sont des relations réciproques l'une de l'autre.

Définition 1.5

Soit E un ensemble et R une relation binaire sur E , on dit que R est :

1. Réflexive, si $xRx, \forall x \in E$.
2. Symétrique, si $xRy \implies yRx, \forall x, y \in E$.
3. Antisymétrique, si $(xRy \text{ et } yRx) \implies (x = y), \forall x, y \in E$.
4. Transitive, si $(xRy \text{ et } yRz) \implies (xRz), \forall x, y, z \in E$.
5. Irréflexive, si $(x, x) \notin R, \forall x \in E$.

Exemple 1.3

- 1) Dans un ensemble E , la relation d'égalité $x = y$ est à la fois réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive.
- 2) La relation d'inclusion $A \subset B$ est une relation binaire sur l'ensemble $P(E)$ des parties d'un ensemble E . Elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

1.3.2 Représentation matricielle d'une relation binaire

Définition 1.6

On appelle matrice booléenne d'ordre n , toute matrice $n \times n$ à coefficient dans $\{0, 1\}$.

Définition 1.7

Soit $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un ensemble fini et R une relation binaire sur E . On appelle matrice associé à R la matrice $M_R = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$

$$\forall 1 \leq i, j \leq n \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i R x_j; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1.4 Relation d'ordre

1.4.1 Ensemble ordonné

Définitions 1.8

Soit E un ensemble et R une relation binaire sur E . On dit que R est :

1. Un ordre sur E , si R est réflexive, transitive et antisymétrique.
2. Un ordre strict sur E , si R est irreflexive et transitive.

Définitions 1.9

Soit E un ensemble non vide et R une relation d'ordre sur E . Alors le couple (E, R) est appelé un ensemble ordonné.

Usuellement R est remplacé par le symbole \leq .

Exemple 1. 4

- 1) $(\mathbb{R}, <)$ est un ordre strict.
- 2) $(P(E), \subseteq)$ est un ordre.
- 3) $(\mathbb{N}^*, /)$ est un ordre.
- 4) (\mathbb{N}, \leq) est un ordre.

Notations 1.2

1. Si E est un ensemble muni d'une relation d'ordre \leq , on dira que deux éléments peuvent être comparables si on a au moins une des relations : $x \leq y$ ou $y \leq x$.
2. Si tous les éléments d'un ensemble E peuvent être comparés avec la relation \leq , cet ensemble est dit une chaîne ou un ensemble totalement ordonné.
3. Dans le cas contraire, l'ordre est partiel, et l'ensemble (E, \leq) est dit ensemble partiellement ordonné.
4. On dit que y couvre x (Ou que x est couvert par y) et on écrit $x \preceq y$ s'il n'existe pas d'éléments entre eux, i.e : $x \leq z < y \implies x = z$.

5. Si E un ensemble ordonné fini, son diagramme de Hasse est le graphe dont les sommets sont les éléments de E et les arêtes représentées du bas vers le haut sont les couples (x, y) où y couvre x .

Exemples 1.5

- 1) L'ensemble (\mathbb{N}, \leq) est totalement ordonné.
- 2) L'inclusion \subseteq est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des parties d'un ensemble à 3 éléments $\{x, y, z\}$.

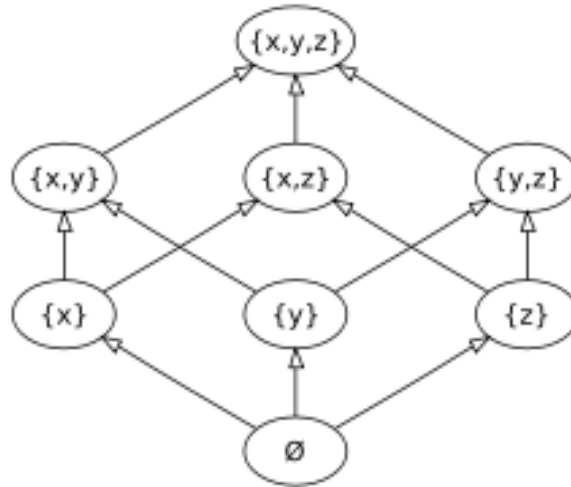


Figure 1.1. Ensemble ordonné

- 3) La relation de divisibilité est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des diviseurs de 30.

La figure suivante représente le diagramme de Hasse de l'ensemble $(D(30), /)$.

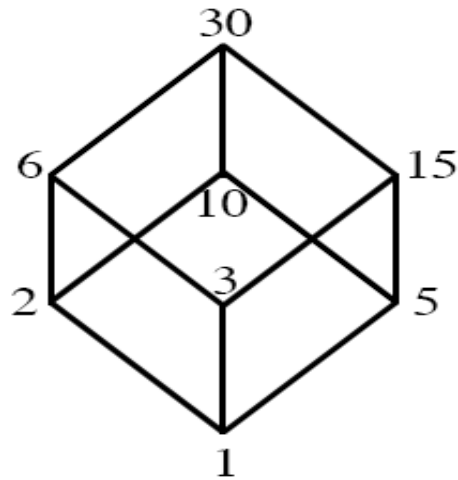


Figure 1.2. Ensemble ordonné

1.5 Éléments remarquables

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné, $A \subset E$ et $a \in E$. On dit que a est :

1. Un majorant (resp, minorant) de A si

$$\forall x \in A, x \leq a \text{ (resp, } a \leq x \text{)}.$$

2. Un élément maximal (resp, minimal) de A , si $a \in A$ et si

$$\forall x \in A, a \leq x \implies x = a \text{ (resp, } x \leq a \implies x = a \text{)}.$$

3. Un plus grand élément (resp, plus petit élément) de A , si $a \in A$ et si

$$\forall x \in A, x \leq a \text{ (resp, } a \leq x \text{) noté par } 1_E \text{ (resp, } 0_E \text{)}.$$

4. Une borne supérieure (resp, inférieure) de A , si a est le plus petit des majorants (resp, le plus grand des minorants).

Notation 1.3

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. L'ensemble des minorants (resp, l'ensemble des majorants) de $x \in E$ se note $(x[= \{t \in E : t \leq x\}$ (resp, $]x) = \{t \in E : x \leq t\}$).

Définition 1.10 (Éléments irréductibles)

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné.

1. $x \in E$ est sup-irréductible s'il n'est borne supérieure d'aucune partie ne le contenant pas. De manière équivalente, x est sup-irréductible s'il n'est pas borne supérieur de la partie $(x[$.
2. $x \in E$ est inf-irréductible s'il n'est borne inférieure d'aucune partie ne le contenant pas. De manière équivalente, x est inf-irréductible s'il n'est pas borne inférieure de la partie $]x)$.
3. $x \in E$ est dit irréductible s'il est sup ou inf-irréductible ; il est dit doublement irréductible s'il est sup et inf-irréductible.

On notera respectivement S_E ou $S(E)$, I_E ou $I(E)$, IR_E ou $IR(E)$ et DIR_E ou $DIR(E)$ l'ensemble des éléments sup-irréductibles, inf-irréductibles, irréductibles et doublement irréductibles d'un ensemble ordonné E . On notant S_x l'ensemble des sup-irréductibles inférieures ou égaux à x , et I_x l'ensemble des éléments inf-irréductibles supérieurs ou égaux à x .

Exemple 1.6

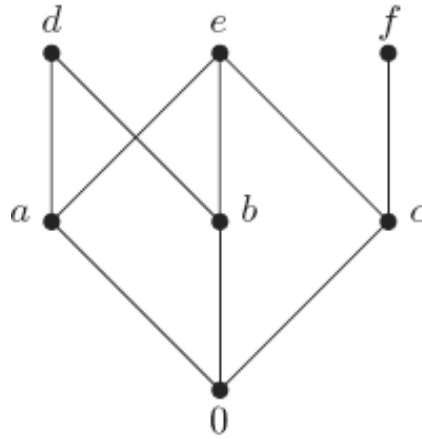


Figure 1.3. E est un ensemble ordonné

Pour l'ensemble ordonné E , tous les éléments sauf 0 et e sont sup-irréductibles tandis que d, e, f sont les inf-irréductibles.

Proposition 1.1[3]

Pour tout élément x d'un ensemble ordonné E , on a $x = \vee S_x$.

Définition 1.11 (parties commençantes, parties finissantes)

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné. Une partie C de E est une partie commençante si, pour tout $t \in E$ et $y \in C, t \leq y$ implique $t \in C$. Une partie F de E est une partie finissante si, pour tout $t \in E$ et $y \in F, y \leq t$ implique $t \in F$.

On note $C(E)$ (resp, $F(E)$) l'ensembles des parties commençantes (resp, finissantes) de E .

Propriété 1.1

Dans le cas d'ensemble ordonné fini on a :

1. L'union et l'intersection des parties commençantes (resp, finissantes) sont des parties commençantes (resp, finissantes).
2. Le complémentaire dans un ensemble ordonné E d'une partie commençante (resp, finissante) est une partie finissante (resp, commençante).

Exemple 1.7

Soit l'ensemble ordonné $E = (X, \leq)$ où $X = \{a, b, c, d, e, \}$ et \leq l'ordre suivant sur X
 $\leq = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e)\}$
 $\{a, c, d\}$ est un partie commençante de E .

Définition 1.12

Soient (E_1, \leq_1) et (E_2, \leq_2) deux ensembles ordonnés et $f : E_1 \longrightarrow E_2$ une application
. On dit que f est croissante si

$$\forall x, y \in E_1, x \leq_1 y \iff f(x) \leq_2 f(y)$$

Définition 1.13

Soit (E, \leq) un ensemble ordonné, on dit que E est inductif si toute chaîne $X \subset E$
admet un majorant.

Lemme de Zorn

Tout ensemble inductif admet un élément maximal.

Chapitre 2

Classe d'ordres partiels : Treillis

Résumé

Dans ce chapitre, nous allons s'intéresser spécialement au cas d'une classe d'ordre partiel (les treillis), et nous allons présenter quelques notions et résultats de la théorie des treillis. Il existe deux définitions de treillis, l'une d'elle est algébrique et l'autre fait appel à la notion d'ordre.

Contenu

- 2.1 Définitions.
 - 2.1.1 Définition par une relation d'ordre.
 - 2.1.2 Définition algébrique d'un treillis.
- 2.2 Isomorphisme de treillis.
- 2.3 Treillis remarquables.
 - 2.3.1 Treillis distributifs.
 - 2.3.2 Treillis complémentés.
 - 2.3.3 Treillis de Boole.
- 2.4 Filtres et idéaux dans un treillis.

2.5 Algèbre de Boole.

2.5.1 Définition.

2.5.2 Exemples d'algèbre de Boole.

2.5.3 Propriétés des algèbres de Boole.

2.5.4 La structure d'algèbre de Boole.

2.6 Théorème de représentation de Stone

2.1 Définitions

On peut donner deux définitions des treillis :

2.1.1 Définition par une relation d'ordre

Définition 2.1

Un ensemble ordonné (T, \leq) est un inf-demi-treillis si pour tout couple $(x, y) \in T^2$, la partie $\{x, y\}$ admet une borne inférieure.

Exemple 2.1

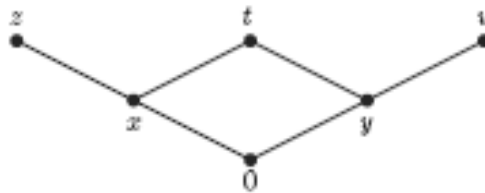


Figure 2.1. Un inf-demi-treillis

Définition 2.2

Un ensemble ordonné (T, \leq) est un sup-demi-treillis si pour tout couple $(x, y) \in T^2$, la partie $\{x, y\}$ admet une borne supérieure.

Exemple 2.2

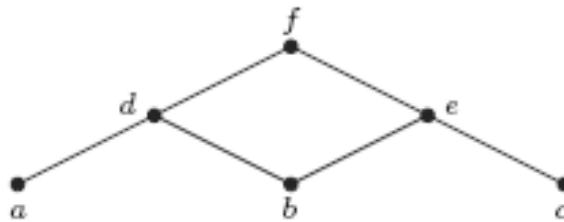


Figure 2.2. Un sup-demi-treillis

Définition 2.3

Un treillis (T, \leq) est un ensemble partiellement ordonné dans lequel chaque couple d'éléments (x, y) , la partie $\{x, y\} \in T$ admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Autrement dit s'il à la fois inf et sup-demi-treillis.

Notation 2.1

1. Si (T, \leq) est un treillis et si $x, y \in T$, on note :

$$x \wedge y = \inf(\{x, y\})$$

$$x \vee y = \sup(\{x, y\}).$$

2. Un treillis sera souvent noté (T, \leq, \vee, \wedge) .

Remarque 2.1

Un treillis est dit fermé s'il possède un plus petit élément (noté 0) et un plus grand élément (noté 1).

Corollaire 2.1

Si (T, \leq) un treillis fini, alors T admet un plus grand et un plus petit élément .

Exemples 2.4

1. $(P(E), \subset, \cap, \cup)$ est un treillis, avec

$$\begin{cases} X \vee Y = X \cup Y \\ X \wedge Y = X \cap Y \end{cases}$$

(est un treillis fermé : $0 = \phi, 1 = E$).

2. Toute chaîne est un treillis, avec

$$x \vee y = \max \{(x, y)\}$$

$$x \wedge y = \min \{(x, y)\}.$$

3. $(\mathbb{N}^*, /, \vee, \wedge)$ est un treillis, avec

$$x \vee y = \text{ppcm}(x, y)$$

$$x \wedge y = \text{pgcd}(x, y)$$

(n'est pas fermé).

4. L'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} , muni de son ordre habituel forme un inf-demi-treillis. Ce n'est pas un treillis car \mathbb{N} n'admet pas de borne supérieure.

Propriétés 2.1

Dans un treillis quelconque (T, \leq) :

1. $x \leq y \iff x = x \wedge y \iff y = x \vee y$.
2. $\forall x \in T, \left. \begin{array}{l} x \vee x = x \\ x \wedge x = x \end{array} \right\} \text{Idempotence.}$
3. $\forall x, y \in T, \left. \begin{array}{l} x \vee y = y \vee x \\ x \wedge y = y \wedge x. \end{array} \right\} \text{Commutativité.}$
4. $\forall x, y, z \in T, \left. \begin{array}{l} x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \\ x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z. \end{array} \right\} \text{Associativité.}$
5. $\forall x, y \in T, \left. \begin{array}{l} x \vee (x \wedge y) = x \\ x \wedge (x \vee y) = x \end{array} \right\} \text{Lois d'absorption.}$

2.1.2 Définition algébrique d'un treillis

Un treillis (T, \vee, \wedge) est un ensemble muni de deux opérations binaires \vee et \wedge , qui sont associatives, commutatives, idempotentes et ces deux lois vérifient la loi d'absorption.

Proposition 2.1

Les deux définitions de treillis sont équivalentes, c'est-à-dire, (T, \leq) est un treillis si et seulement si (T, \vee, \wedge) est un treillis, où $\inf(x, y) = x \wedge y$ et $\sup(x, y) = x \vee y$.

Démonstration

1. Soit (T, \leq) un treillis. Posons $\inf(x, y) = x \wedge y$ et $\sup(x, y) = x \vee y$.

Montrons que les lois \vee et \wedge sont idempotentes, commutatives et associatives, puis qu'elles vérifient la loi d'absorption. Il est bien connu que :

1. (a) $\sup(x, x) = x$ et $\inf(x, x) = x$. (Idempotente)
- (b) $\sup(x, y) = \sup(y, x)$ et $\inf(x, y) = \inf(y, x)$. (Commutative)
- (c) $\sup(\sup(x, y), z) = \sup(x, \sup(y, z))$ et $\inf(\inf(x, y), z) = \inf(x, \inf(y, z))$. (Associative)
- (d) $\sup(x, \inf(x, y)) = x$ et $\inf(x, \sup(x, y)) = x$.

On a donc que (T, \wedge, \vee) est bien un treillis.

2. Soit (T, \wedge, \vee) un treillis. Supposons que $x \leq y \iff x \wedge y = x$ et montrons que (T, \leq) est un treillis. Démontrons d'abord que (T, \leq) est un ensemble partiellement ordonné.

(a) Puisque \wedge est idempotent, on a bien que \leq est réflexive.

(b) Soit $x \leq y$ et $y \leq x$. On a $x = x \wedge y$ et $y = y \wedge x$. Comme l'opération intersection est commutative, on obtient $x = x \wedge y = y \wedge x = y$. Ainsi, $x = y$, d'où l'antisymétrie.

(c) Soit $x \leq y$ et $y \leq z$. On a $x = x \wedge y$ et $y = y \wedge z$. On obtient donc $x = x \wedge y = x \wedge (y \wedge z)$. Comme l'opération intersection est associative, on obtient $x = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$. Donc on a bien que $x \leq z$, d'où la transitivité. On conclut que (T, \leq) est un ensemble partiellement ordonné.

Montrons maintenant que les bornes supérieures et inférieures existent en prouvant que $\inf(x, y) = x \wedge y$ et $\sup(x, y) = x \vee y$. Soit $x \wedge y \leq x$ et soit $(x \wedge y) \wedge x$. Comme ces lois sont idempotentes, associatives et commutatives, on obtient :

$$\begin{aligned}
 (x \wedge y) \wedge x &= x \wedge (y \wedge x) \\
 &= x \wedge (x \wedge y) \\
 &= (x \wedge x) \wedge y \\
 &= x \wedge y.
 \end{aligned}$$

On fait de même pour $x \wedge y \leq y$ et on obtient $(x \wedge y) \wedge y = x \wedge y$. Soit $z \leq x$ et $z \leq y$ tel que $z \wedge x = z$ et $z \wedge y = z$. On veut montrer que $z \leq x \wedge y$. On a :

$$z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge a) \wedge y = z \wedge y = z.$$

Ainsi, $z \leq x \wedge y$ et donc $\inf(x, y) = x \wedge y$.

Soit $x \leq x \vee y$ et $y \leq x \vee y$. En vertu de la loi d'absorption, on a :

$$x = x \wedge (x \vee y) \text{ et } y = y \wedge (x \vee y).$$

Soit $x \leq z$ et $y \leq z$ tel que $x = x \wedge z$ et $y = y \wedge z$. On veut montrer que $x \vee y \leq z$.

On a par la loi d'absorption :

$$\begin{aligned} (x \vee z) &= (x \wedge z) \vee z = z \\ \text{et } (y \vee z) &= (y \wedge z) \vee z = z. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} (x \vee y) \wedge z &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee (y \vee z)) \\ &= (x \vee y) \wedge ((x \vee y) \vee z) \\ &= x \vee y. \end{aligned}$$

Ainsi, $x \vee y \leq z$, ce qui fait que $\sup(x, y) = x \vee y$.

D'où (T, \leq) est un treillis.

De ceci nous avons donc les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \sup(x, y) &= x \vee y \\ \inf(x, y) &= x \wedge y. \end{aligned}$$

2.2 Isomorphisme de treillis

Définition 2.4

Soient E et T deux treillis et f est une application de E dans T . On dit que f est un morphisme de treillis si

$$\forall x, y \in E, \begin{cases} f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y); \\ f(x \vee y) = f(x) \vee f(y). \end{cases}$$

Définition 2.5

Un morphisme bijectif entre deux treillis est un isomorphisme de treillis.

2.3 Treillis remarquables

2.3.1 Treillis distributifs

Définition 2.6

Un treillis T est distributif si $\forall x, y, z \in T$ on a :

$$\begin{cases} x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z); \\ \text{ou} \\ x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z). \end{cases}$$

C'est-à-dire qu'un treillis est distributif si et seulement si on a la distributivité de l'opération \wedge par rapport à l'opération \vee ou la distributivité de l'opération \vee par rapport à l'opération \wedge .

Supposons que T distributif alors :

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = [(x \vee y) \wedge x] \vee [(x \vee y) \wedge z].$$

Soit par application de loi d'absorption

$$\begin{aligned}
 (x \vee y) \wedge (x \vee z) &= x \vee [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \\
 &= x \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \\
 &= x \vee (y \wedge z).
 \end{aligned}$$

La réciproque s'établit de manière analogue en montrant que :

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) .$$

Propositions 2.2[3]

Dans un treillis distributif, on peut simplifier les propriétés algébriques suivantes :

$$\forall x, y, z \in T, \left\{ \begin{array}{l} x \wedge z = y \wedge z, \\ \text{et} \\ x \vee z = y \vee z \end{array} \right. \implies x = y .$$

Théorème 2.1[3]

Un treillis T est distributif si et seulement si il vérifie l'une quelconque des propriétés suivantes :

1. Pour tous $x, y, z \in T$, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
2. Pour tous $x, y, z \in T$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
3. Pour tous $x, y, z \in T$, $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (x \vee z)$.
4. Pour tous $s \in S_T$, $X \subseteq T$, $s \leq \vee X$ implique $s \leq x$ pour au moins un élément $x \in X$.
5. Pour tout $x, y \in T$, on a $S_{x \vee y} = S_x \cup S_y$.
6. Pour tous $i \in I_T$, $X \subseteq T$, $i \geq \wedge X$ implique $i \geq x$ pour au moins un élément $x \in X$.

2.3.2 Treillis complémentés

Définition 2.7

Dans un treillis possédant un élément plus grand que tous les autres (que l'on notera 1) et un élément plus petit que tous les autres (que l'on notera 0), le complément d'un élément $x \in T$ est un élément $\bar{x} \in T$ tel que

$$\begin{cases} x \vee \bar{x} = 1 \\ x \wedge \bar{x} = 0. \end{cases}$$

Définition 2.8

Un treillis dans lequel tout élément a au moins un complément est un treillis complémenté.

Remarque 2.2

Dans un treillis distributif le complément d'un élément s'il existe est unique (Propositions 2.2).

2.3.3 Treillis de Boole

Définition 2.9

Un treillis distributif fermé et complémenté est un treillis de Boole.

Exemples 2.5

- 1) $(P(E), \subset, \cup, \cap)$ est un treillis de Boole.
- 2) Toute chaîne est un treillis de Boole.
- 3) $(D(6), /)$ est un treillis de Boole.

2.4 Filtres et idéaux dans un treillis

Définition 2.10

Soit T un treillis, on appelle filtre toute partie non vide F de T vérifiant :

1. si $x \in F$ et $x \leq y$ alors $y \in F$;
2. si $x \in F$ et $y \in F$ alors $(x \wedge y) \in F$.

Le filtre F est dit propre si $F \neq T$, et impropre dans le cas contraire.

D'une manière duale un idéal est une partie I non vide de T vérifiant :

1. si $x \in I$ et $y \leq x$ alors $y \in I$;
2. pour tout $x, y \in I$ alors $(x \vee y) \in I$.

L'idéal I est dit propre si $I \neq T$, et impropre dans le cas contraire.

Remarque 1.3

1. Un filtre F (resp. un idéal I) est propre si et seulement si $0 \notin F$ (resp. $1 \notin I$).
2. Soit 1 le plus grand élément (resp. 0 le plus petit élément) de T , alors $\{1\}$ est le plus petite filtre (resp. $\{0\}$ le plus petit idéal) de T .
3. Si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de filtres dans E , alors $\bigcap \{F_i, i \in I\}$ est un filtre.

Filtres et idéaux principaux

Soit $a \in T$, l'ensemble F_a définie par $F_a = \{x \in T / x \geq a\}$ est un filtre engendré par a (filtre principal). Et l'ensemble $I_a = \{x \in T / x \leq a\}$ est un idéal engendré par a (idéal principal).

Exemple 2.6

Dans le treillis $(D(30), /)$ on a : le filtre principal $F_6 = \{6, 30\}$, et l'idéal principal $I_6 = \{1, 2, 3, 6\}$.

Filtre engendré par G

C'est l'intersection de tous les filtres contenant G , c'est -à - dire le plus petit filtre (au sens de l'inclusion) contenant G , il sera noté F_G .

$$F_G = \{x \in T / x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n, a_i \in G\}$$

La partie vide engendre le filtre $\{1\}$ ($F_\emptyset = \{1\}$) (plus petit filtre de T).

Définition 2.11

Soit F un filtre propre alors :

1. F est premier si $\forall x, y \in E$ alors $x \vee y \in F \Rightarrow x \in F$ ou $y \in F$.
2. F est irréductible, s'il n'existe pas de filtres propres F_1 et F_2 tels que :

$$F = F_1 \cap F_2 \text{ avec } F \neq F_1 \text{ et } F \neq F_2.$$

Proposition 2.3

Il existe des filtres propres maximaux pour l'inclusion, ils seront appelés des ultrafiltres

Définition (Ultrafiltre) 2.12

Soit (T, \leq, \vee, \wedge) un treillis, un ultrafiltre U est un filtre de T qui est maximal

c'est-à-dire : s'il existe un filtre F tel que $U \subset F$; alors $U = F$

Lemme

Soit B une algèbre de Boole, alors tout filtre propre de B est contenu dans un ultrafiltre.

Proposition 2.4

Si $U \subseteq B$ est un ultrafiltre, on a

- 1) $x \wedge y \in U \iff x \in U$ et $y \in U$;
- 2) $x \vee y \in U \iff x \in U$ ou $y \in U$;
- 3) si $\bar{x} \in U \iff x \notin U$.

2.5 Algèbre de Boole

2.5.1 Définitions

Définition 2.13

Une algèbre de Boole est une treillis distributif et complémenté.

Caractérisation algébrique

On peut voir une algèbre de Boole comme un ensemble muni de deux éléments particuliers 0 et 1, de trois lois de composition interne :

- deux opérations binaires : \vee et \wedge (inf et sup),
- une opération unaire : $-$ (complément)

qui satisfont les axiomes d'associativité, de commutativité, d'absorption, de distributivité et complémentation, en ce sens que toute structure $(B, 0, 1, -, \vee, \wedge)$ qui satisfait les axiomes ci dessus est induite par un treillis distributif complémenté dont la relation d'ordre est donné par

$$x \leq y \iff x \wedge y = x \iff x \vee y = y.$$

Définition 2.14

Soient B_1 et B_2 deux algèbres de Boole. On appelle un morphisme d'algèbres de Boole de B_1 dans B_2 tout fonction $f : B_1 \longrightarrow B_2$ telle que pour tous $x, y \in B_1$ on a :

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

$$f(0) = 0$$

$$f(\bar{x}) = \overline{f(x)}.$$

(Ces égalités impliquent également que $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ et $f(1) = 1$.)

Sous-algèbres de Boole

Étant donnée une algèbre de Boole B , on dit qu'un sous-ensemble $C \subset B$ est une sous-algèbre de Boole de B si C contient 0 et est close par les opérations $-, \vee, \wedge$.

2.5.2 Exemples d'algèbre de Boole

L'algèbre de Boole dégénérée

Elle contient un seul élément. Sa relation d'ordre est l'égalité, qu'est un ordre dans un ensemble à un seul élément.

Le diagramme de Hasse est réduit à un sommet isolé :

$$\begin{array}{c} \cdot \\ 0 = 1 \end{array}$$

Algèbre de Boole binaire

Elle contient deux éléments, 0 et 1 avec la relation d'ordre $0 \leq 1$.

Le diagramme de Hasse est réduit à un arc :

$$\begin{array}{c} 1 \\ \uparrow \\ 0 \end{array}$$

Ensemble des parties d'un ensemble

On sait que $P(E)$, muni de l'inclusion, est un treillis distributif fermé et complété. Les opérations \vee et \wedge sont respectivement l'union, l'intersection et le complémentaire par rapport à E . Les éléments 0 et 1 sont l'ensemble vide ϕ et l'ensemble E .

2.5.3 Propriétés des algèbres de Boole

Involution

Le complément du complément de x est x , c'est-à-dire

$$\overline{\overline{x}} = x.$$

Preuve

Soient $x \in \beta$, \bar{x} son complément, $\overline{\bar{x}}$ le complément de \bar{x} :

$$x \vee \bar{x} = \bar{x} \vee \overline{\bar{x}} = 1$$

$$x \wedge \bar{x} = \bar{x} \wedge \overline{\bar{x}} = 0$$

$$x = x \wedge 1 \implies x = x \wedge (\bar{x} \vee \overline{\bar{x}})$$

$$= (x \wedge \bar{x}) \vee (x \wedge \overline{\bar{x}})$$

$$= 0 \vee (x \wedge \overline{\bar{x}})$$

$$= x \wedge \overline{\bar{x}}$$

$$x = x \wedge \overline{\bar{x}} \implies x \leq \overline{\bar{x}}$$

$$x = x \vee \bar{x} \implies \bar{x} \leq x$$

$$x \leq \bar{x} \text{ et } x \geq \bar{x} \implies x = \bar{x}.$$

Les formules de De Morgan

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$

$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}.$$

Preuve

Soit $u = x \vee y$ et $v = \bar{x} \wedge \bar{y}$

Pour montrer que $\bar{u} = v$, on va montrer que $u \wedge v = 0$ et que $u \vee v = 1$

$$\begin{aligned}u \wedge v &= (x \vee y) \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y}) \\&= (x \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})) \vee (y \wedge (\bar{x} \wedge \bar{y})) \\&= ((x \wedge \bar{x}) \wedge \bar{y}) \vee ((y \wedge \bar{y}) \wedge \bar{x}) \\&= (0 \wedge \bar{y}) \vee (0 \wedge \bar{x}) \\&= 0 \vee 0 = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u \vee v &= (x \vee y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \\&= (\bar{x} \vee (x \vee y)) \wedge (\bar{y} \vee (x \vee y)) \\&= ((\bar{x} \vee x) \vee y) \wedge ((\bar{y} \vee y) \vee x) \\&\quad (1 \vee y) \wedge (1 \vee x) \\&= 1 \vee 1 = 1.\end{aligned}$$

La deuxième formule se démontre de la même façon, en posant :

$$u = x \wedge y \text{ et } v = \bar{x} \vee \bar{y}$$

et en montrant que $u \wedge v = 0$ et $u \vee v = 1$.

2.5.4 La structure d'algèbre de Boole

Nous pouvons maintenant dégager un certain nombre de structures dont on pourra voir qu'elles sont intimement liées.

La structure d'anneau de Boole

Un anneau de Boole est un anneau (unitaire) β qui vérifie pour tout élément $x \in \beta$ l'identité $x^2 = x$.

Un anneau de Boole β vérifie les propriétés suivantes :

- Pour tout x de β on a $x + x = 0$.
- L'anneau β est commutatif.

La structure de treillis de Boole

Un treillis de Boole β est un ensemble, ayant au moins deux éléments, ordonnés qui

- pour tout couple d'élément x et y admet une borne supérieure $x \vee y$ et une borne inférieure $x \wedge y$
- est doublement distributif (chacune des deux lois \vee, \wedge est distributive par rapport à l'autre)
- admet un plus grand élément noté 1 et un plus petit élément noté 0
- est complémenté, c'est-à-dire que pour tout x il existe un unique élément \bar{x} tel que $x \vee \bar{x} = 1$ et $x \wedge \bar{x} = 0$.

Nous allons voir qu'un anneau de Boole a naturellement une structure de treillis de Boole et réciproquement.

Un anneau de Boole est un treillis de Boole

Soit B un anneau de Boole. Définissons alors une relation d'ordre \leq sur B de la manière suivante

$$(x \leq y) \iff (x.y = x)$$

il est alors facile de voir qu'on a pour tout couple d'élément une borne supérieure et

une borne inférieure en posant

$$x \vee y = x + y + x.y$$

et

$$x \wedge y = x.y$$

que la double distributivité est réalisée.

On voit que l'élément neutre de l'addition 0 est le plus petit élément et que l'élément neutre de la multiplication 1 est le plus grand élément.

Enfin tout élément possède un unique complémentaire obtenu en posant

$$\bar{x} = 1 + x.$$

Un treillis de Boole est un anneau de Boole

Soit maintenant B un treillis de Boole. Définissons alors

$$x + y = (x\bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)$$

et

$$x.y = x \wedge y.$$

On montre qu'on obtient ainsi un anneau de Boole. L'élément neutre de l'addition est le 0 du treillis de Boole et l'élément neutre pour la multiplication est le 1 du treillis associé à cet anneau est le treillis dont on est parti.

2.6 Théorème de représentation de Stone

Théorème 2.3

Toute algèbre Booléenne B est isomorphe à une sous algèbre Booléenne de la forme $P(X)$

Preuve

Soit B une algèbre de Boole. Soit $X = UltB$, l'ensemble des ultrafiltres de B ;

pour tout $x \in B$

posons $\sigma(x) = \{U \in X/x \in U\}$.

σ est un homomorphisme d'algèbre de Boole injectif de B dans $UltB$

$$U \in \sigma(\neg x) \Leftrightarrow \neg x \in U$$

$$\Leftrightarrow x \notin U$$

$$\Leftrightarrow U \notin \sigma(x)$$

$$\Leftrightarrow U \in C_{\sigma(x)}$$

$$\Leftrightarrow \sigma(\neg x) = C_{\sigma(x)}$$

$$\sigma(x \wedge y) = \sigma(x) \cap \sigma(y)$$

$$U \in \sigma(x \wedge y) \Leftrightarrow x.y \in U$$

$$\Leftrightarrow x \in U \text{ et } y \in U$$

$$\Leftrightarrow U \in \sigma(x) \cap \sigma(y)$$

$$\sigma(x \wedge y) = \sigma(x) \cap \sigma(y) \dots\dots(1)$$

De même

$$\sigma(x \vee y) = \sigma(x) \cup \sigma(y) \dots\dots(2)$$

$$\sigma \text{ injectif} \iff \ker \sigma = \phi \dots(3)$$

$$x \in \ker \sigma \Leftrightarrow \sigma(x) = \phi$$

$$\Leftrightarrow C_{\sigma(x)} = X$$

$$\Leftrightarrow \neg x \in U, \forall U \in X$$

$$\Leftrightarrow \neg x \in \bigcap_{U \in X} U = \{1\}$$

$$\Leftrightarrow \neg x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

Donc σ est un monomorphisme qu'on appelle monomorphisme de Stone. X est appelé espace de Stone ou l'espace dual de B .

Remarque 2.4

Si B est fini alors σ est un surjection.

Preuve

$\sigma : B \rightarrow P(X)$ où $\sigma(x) = \{U \subset X : x \in U\}$,

si F un filtre de B alors F est principale ($F = \uparrow a$) car F est fini, $F = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Soit $a = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_k$, on a, $a \in F$ donc $F = B \vee a = \{y \in B : y = x \vee a, x \in B\}$.

Soit $Y \in \rho(X)$

ou bien $Y = \phi$, donc $Y = \sigma(0)$

ou bien $Y = X$, donc $Y = \sigma(1)$

ou bien $\phi \neq Y$ c'est -à-dire $Y \subsetneq X$, donc $Y = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ tel que $0 < k < n$

$F = \bigcap_{i=1}^k u_i$, alors F est principal. Donc $F = B \vee a$ tel que $a = \min F$.

On démontre que $Y = \sigma(a)$

-Soit

$u_i \in Y \implies a \in u_i$

$\implies u_i \in \sigma(a)$

$\implies Y \subset \sigma(a)$

-Soit

$v \in \sigma(a) \implies a \in v$

$\implies F \subset v$

$\implies \bigcap_{i=1}^k u_i \subset v$

supposons que $v \neq u_i \forall i = 1, 2, \dots, k. \implies \forall i, \exists x_i \in u_i$ et $x_i \notin v$

soit $x = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k$, alors $x > x_i \forall i = 1, 2, \dots, k \implies x \in u_i, \forall i = 1, 2, \dots, k. \implies$

$x \in \bigcap_{i=1}^k u_i = F \implies x \in F \implies x \in v$.

mais $x = x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k \in v$, donc $\exists i/x_i \in V$ (v est un ultrafiltre), contradiction

$\implies v \in Y$

$\implies \sigma(a) \subset Y$ alors $\sigma(a) = Y$.

Donc σ est surjectif.

Conséquences

1. Le nombre d'éléments d'une algèbre de Boole B finie est de la forme 2^n , où n représente exactement le nombre d'ultrafiltre de B .

Exemple 2.7

$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ $CardD(6) = 22$ donc il y a 2 ultrafiltres.

Chapitre 3

Représentation des treillis distributifs

Résumé

Dans ce chapitre nous allons donner quelques théorèmes de représentation des treillis distributifs.

Contenu

3.1 Théorème de Birkhoff.

Nous énonçons le théorème fondamental de représentation des treillis distributifs dû à Birkhoff.

Rappelons que pour tout élément x d'un treillis T , $S_x = \{s \in S_T : s \leq x\}$.

3.1 Théorème (Birkhoff 1933)

Soit T un treillis distributif. L'application $x \longrightarrow c(x) = S_x$ est un isomorphisme entre T et le treillis $C(S_T)$ des parties commençantes de l'ensemble ordonné S_T des éléments sup-irréductible de T . l'isomorphisme inverse entre $C(S_T)$ et T est l'application $C \longrightarrow \vee C$

Preuve

Considérons l'application f définie dans l'énoncé du théorème. Il est d'abord clair que S_x est une partie commençante de S_T et on sait (proposition 1.1) que $x = \vee S_x$. De cette égalité, on déduit immédiatement que f est injective et que $x \leq y$ si et seulement si $S_x \subseteq S_y$. Pour une partie commençante C de S_T , posons $x = \vee C$. On a donc $C \subseteq S_x$. Soit s un sup-irréductibles de T tel que $s \in S_x$. Puisque $s \leq x = \vee C$, il résulte de la caractérisation (4) des treillis distributif du Théorème (5.1) que s est inférieur ou égal à un élément de la partie commençante C . Donc $s \in C$, $C = S_x$ et f est surjective, donc un isomorphisme. Finalement on a les deux égalités $x = \vee S_x$ et $C = c(\vee C)$.

Remarque 3.1

On a vu que l'application f qui à tout x de T , associe l'ensemble S_x des sup-irréductible inférieurs ou égaux à x est inf-morphisme. Le théorème précédent montre que, si T est un treillis distributif, elle est aussi un sup-morphisme, i.e que pour tous $x, y \in T$, on a $S_{x \vee y} = S_x \cup S_y$. Cette égalité résulte aussi immédiatement de la caractérisation (4) des treillis distributif du théorème (5.1), puisque $s \leq x \vee y$ implique $s \leq x$ ou $s \leq y$.

La figure 3.1 donne un exemple de la représentation d'un treillis distributif T par $C(S_T)$ et du treillis dual de T par $F(I_T)$

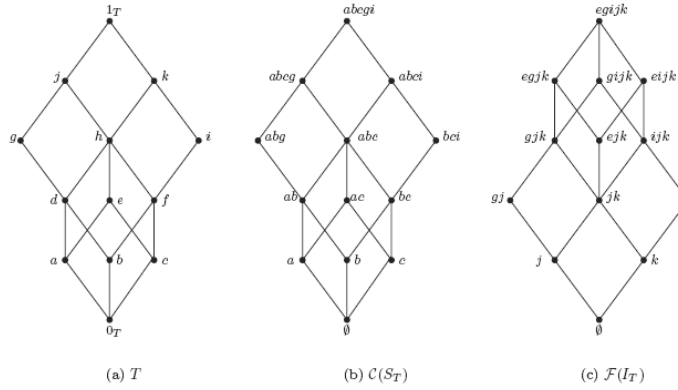


Figure 3.1.(a) un treillis T , (b) le treillis $C(S_T)$ et (c) le treillis $F(I_T)$

Théorème

Soit T un treillis. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) T est distributif;
- (ii) Etant donné un idéal J de T et un filtre F de T avec $J \cap F = \phi$, alors existe un idéal principal I telque $J \subseteq I$ et $I \cap F = \phi$;
- (iii) Etant donné $a, b \in T$ avec $a \not\leq b$, existe un idéal principal I tel que $a \notin I$ et $b \in I$;
- (iv) l'application $\eta : a \longrightarrow X_a = \{I \in \mathbf{I}_p(T)/a \notin I\}$ est un monomorphisme de T dans $P(\mathbf{I}_p(T))$;
- (v) T est isomorphe à un treillis des ensembles.

Preuve

Les implications (iv) \implies (v) \implies (i) sont insignifiants et (i) \implies (ii) est le rapport que le (DPI), se tient pour T .

Pour prouver (ii) \implies (iii) prendre $J = \downarrow b$ et $F = \uparrow a$ (DPI). Puisque le η est un homomorphisme.

Pour montrer que (iii) \implies (iv), il est assez pour prouver que $a \leq b \implies X_a \not\subseteq X_b$. C'est vrai puisque l'idéal principal I assuré par le (iii) appartient au $X_a \setminus X_b$.

Bibliographie

- [1] Belhadj. A, *Génération de treillis et propriétés algébriques*. Mémoire de Magistère, Tizi-Ouzou, 2011.
- [2] Birkhoff. G, *Lattice theory*. American Mathematical Society, Providence, 1967.
- [3] Caspard. N, Leclerc. B, Manjardet. *Ensembles ordonnés finis : Concepts, Résultats et usages. 60*. Springer, Berlin, 2007.
- [4] Davey. B. A, Priestley. H. A. *Introduction to lattices and order*. Second edition. Cambridge University Press, New York, 1990.
- [5] Grätzer. G ; *Lattice theory*. Birkhäuser, Berlin. (1978)
- [6] Padmanabhan. R, Rudeanu. S. *Axiomes for lattices and Boolean algebras*. World Scientific Publishing Co, Pte, Ltd, Hackensack, Nj, 2008.
- [7] Rolland. R. *Algèbres de Booles-Fonctions Booleennes*. "www.acrypta.com"
- [8] Roman. S. *Lattices and ordered sets*. Springer, 2008.
- [9] Saadaoui. K. *Dualité de Priestley pour les treillis flous*. Mémoire de Magistère, M'Sila, 2007-2008.
- [10] Skornjokov. L. A. *Elements of lattice theory*. Hindustan publishing corporation, India, 1977.

ملخص

في هذه المذكرة نعطي بعض المفاهيم الأساسية حول الشبكات التوزيعية المغلقة و نذكر ببعض نظريات تمثيل هذه الشبكات و كما هو معروف فان الشبكات تلعب دورا هاما في العديد من المجالات العلمية.

Résumé

Dans ce mémoire d'étude de treillis, nous débuterons par des rappels de notions préliminaires sur les treillis distributif. Ensuite, nous rappelons des théorèmes de représentations des treillis. Comme il est connu les treillis jouent un rôle très important dans plusieurs domaines scientifiques.

Abstract

In this memory, we give some notions on the distributive lattices and we recall the representations theorems of lattices. It's well known that the lattices play a very important role in several scientific fields.

Mots clés

Relation d'ordre.
Ensemble ordonné.
Treillis.
Treillis distributif.
Algèbre de Boole.

Key word

Order relation.
Ordered sets.
Lattice.
Distributive lattice.
Boolean algebra