N° d'ordre:

UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

Spécialité : Mathématiques

Option : Logique mathématique, Langages formels et Analyse non standard

Par

Ali OUMHANI

SUJET

Fuzzification d'un système de fermeture et treillis flou

Soutenu publiquement le 13/07/2010 devant le jury composé de :

D. MIHOUBI	M. C.	Université de M'sila	Président
A. AMROUNE	M.C.	Université de M'sila	Rapporteur
Dj. BENTERKI	Pr.	Université F.A de Sétif	Examinateur
A. MERZOUGUI	M.C.	Université de M'sila	Examinateur
L. ZEDAM	M.C.	Université de M'sila	Examinateur

Promotion : 2007/2008

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur A. AMROUNE Maître de Conférences à l'Université de M'sila, pour ces conseils précieux et pour ces encouragements, ainsi que pour la confiance et l'aide qu'il ma accordé pour mener ce travail à terme.

Je remercie Monsieur D. MIHOUBI Maître de Conférences à l'Université de M'sila, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance.

Mes remerciements vont également à Monsieur Dj. BENTERKI Professeur à l'Université Ferhat Abbas de Sétif, A. MERZOUGUI Maître de Conférences à l'Université de M'sila et L. ZEDAM Maître de Conférences à l'Université de M'sila, pour l'honneur qu'ils me font d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je n'oublierai pas de remercier ma famille qui m'a toujours encouragé et soutenu, ainsi que tous mes amis

Je dédie ce modeste travail :
A mes très chers parents.

A toute ma famille. . .

.

Table des matières

Introduction

Depuis le papier célèbre " Fuzzy Sets " présenté en l965 par le Professeur L.A.Zadeh, la théorie d'ensembles flous a fait de progrès considérable. Elle a exercé une influence terrible sur la science moderne et technologie tel que mathématiques, science naturelle, science de la gestion, sociologie, philosophie de l'économie, psychologie, linguistique, médecine, théorie du contrôle, traitement de signal, ..etc.

Le but de ce travail est d'assimiler les concepts et les résultats de Monsieur Branimir Šešelja et Andreja Tepavčević, présentés dans leur article (Fuzzifying Closure Systems and Fuzzy lattices) d'une part d'autre part d'assimiler également les concepts et les résultats de Monsieur Mustafa Demirci présentés dans son article (A theory of vague lattices based on many-valued equivalence relations-I : general representation results).

Commençons par le travail de Monsieur Branimir. Šešelja, ce dernier introduit la notion de système de fermeture comme ensemble flou, il a montré ensuite que tout treillis flou complet est représentable par un système de fermeture fuzzifier.

Le travail de Monsieur Mustafa Demirci introduit une nouvelle théorie générale de relations d'ordres et de treillis basés sur des relations d'équivalence multivalentes sous le nom relations d'ordre vague et treillis vagues.

Dans le cadre des concepts cités ci-dessus, nous avons essayé de détailler la démonstration de certains théorèmes et de démontrer certains théorèmes non démontrés dans ces travaux. Notre mémoire est réparti en quatre chapitres.

Le premier chapitre donne quelques définitions de base concernant les relations d'ordre classiques, les ensembles ordonnés, semi-treillis, treillis et les systèmes de fermeture classiques. Enfin nous montrons le théorème classiques que tout treillis complet L est isomorphe a un système de fermeture C, constitué par tous les idéaux principaux engendrés par les éléments de L (n'est pas démontré dans l'article).

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, on présente un aperçu général sur les relations floues, la fuzzification d'un treillis (treillis complet), la fuzzification d'un système (sous système) de fermeture et la fuzzification d'une famille des systèmes (sous systèmes) de fermetures. On rappel la notion d'isomorphisme avec l'introduction des structures d'ordres flous. Soient $(M, \leq)$, $(N, \leq)$ et $(L, \leq)$ des treillis dont L est complet et soient $\mu : M \longrightarrow L$ et $\nu : N \longrightarrow L$ deux L-sous poset flou ordonné de M et N respectivement. On dit que μ et ν sont isomorphes, s'il existe un isomorphisme $\psi : M \longrightarrow N$ tel que pour tout $\alpha \in L$ la restriction de ψ à μ_α $(\alpha - coupes)$ est un isomorphisme de μ_α dans ν_α.

Dans le troisième chapitre, on donne tout d'abord quelques définitions concernant les relations d'équivalence multivalentes, les opérations vagues et leurs propriétés, on donne également la définitions des ordres flous -basés sur une similarité (relation d'équivalence) et leurs représentations sur la base d'un iccqm-treillis en générale, $M = (L, \leq, *)$ [8].

Le quatrième chapitre est basé sur l'étude de la notion des treillis vagues comme la théorie requise de treillis classiques, et étudie leurs propriétés élémentaires. Les notions de minorants, majorants, le plus grand des minorants, le plus petit des majorants, le plus grand des éléments et le plus petit des éléments d'un ensemble classique dans la théorie classique des treillis seront prolongées aux approches vagues [8]. Par la suite une étude de représentations et de constructions des treillis vagues sera faite [8].

Chapitre 1

Notions de base sur les relations d'ordre et les systèmes de fermeture

Résumé

Dans ce chapitre, nous donnons quelques définitions de base concernant les relations d'ordre classiques, et les ensembles ordonnés et semi-treillis, en se basant sur les treillis et les systèmes de fermeture classiques. Enfin, nous montrons que tout treillis complet L est isomorphe à un système de fermeture C, constitué par tous les idéaux principaux engendrés par les éléments de L.

Contenu

1.1 Relations d'ordre

Définition 1.1.1 *Soit X et Y deux ensembles non vides, une relation binaire R entre deux ensembles X et Y est une partie de $X \times Y$. Pour $(x, y) \in R \subseteq X \times Y$, on note xRy ou $R(x, y) = 1$.*

Définition 1.1.2 *Une relation binaire R sur un ensemble non vide X est une partie de $X \times X$.*

Propriétés d'une relation binaire sur un ensemble X

Définition 1.1.3 *Soit R une relation binaire sur un ensemble non vide X.*

R est réflexive	$\Leftrightarrow$	$\forall x,\ x \in X \Rightarrow xRx.$
R est symétrique	$\Leftrightarrow$	$\forall x, y \in X,\ xRy \Rightarrow yRx.$
R est antisymétrique	$\Leftrightarrow$	$\forall x, y \in X,\ (xRy \text{ et } yRx) \Rightarrow x = y.$
R est transitive	$\Leftrightarrow$	$\forall x, y, z \in X,\ (xRy \text{ et } yRz) \Rightarrow xRz.$

Définition 1.1.4 *Une relation R qui est réflexive, antisymétrique et transitive est dite une relation d'ordre sur X. On la note $\leqslant$. S'il existe au moins deux éléments $x, y \in X$ tel que $x \nleqslant y$ et $y \nleqslant x$ l'ordre est dit partiel. Si pour tout $x, y \in X, x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ l'ordre est dit linéaire et que X est linéairement ordonné.*

Définition 1.1.5 *Soit R est une relation sur X. Le dual de R est la relation R^d définie comme suit, pour tout $(x, y) \in X^2$, $xR^d y \Leftrightarrow yRx$.*

Théorème 1.1.6 *Soit R une relation sur un ensemble non vide X, et R^d son dual.*
R est une relation d'ordre, équivaut à R^d est une relation d'ordre.

Preuve. $(\Rightarrow)$

Soit R une relation d'ordre sur un ensemble non vide X, on va montrer que R^d est une relation d'ordre.

(1) La réflexivité,

$$\begin{aligned} R \text{ est réflexive} &\iff \forall x \in X : (x, x) \in R \\ &\iff \forall x \in X : (x, x) \in R^d \\ &\iff R^d \text{ est réflexive} \end{aligned}$$

(2) L'antisymétrie,

$$\begin{aligned}
R \text{ est antisymétrique } &\Leftrightarrow \forall x, y \in X, ((x,y) \in R \text{ et } (y,x) \in R) \Longrightarrow x = y \\
&\Leftrightarrow \forall x, y \in X, ((x,y) \in R^d \text{ et } (y,x) \in R^d) \Longrightarrow x = y \\
&\Leftrightarrow R^d \text{ est antisymétrique.}
\end{aligned}$$

(3) La transitivité,

$$\begin{aligned}
R \text{ est transitive } &\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X : [((x,y) \in R \text{ et } (y,z) \in R) \Longrightarrow (x,z) \in R]. \\
&\Leftrightarrow \forall x, y, z \in X : ((y,x) \in R^d \text{ et } (z,y) \in R^d) \Longrightarrow (z,x) \in R^d. \\
&\Leftrightarrow R^d \text{ est transitive.}
\end{aligned}$$

■

1.2 Ensembles ordonnés

Notation 1.2.1 Un ensemble non vide muni d'une relation d'ordre $\leq$, est dit poset.

Définition 1.2.2 *Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné. Un sous-ensemble E de X est dit décroissant si et seulement si pour tout $x \in E$, $y \leq x$, alors $y \in E$. Un sous-ensemble croissant est défini dualement.*

Définition 1.2.3 *Soit $(X, \leq)$ un ensemble ordonné et $x \in X$. L'ensemble $\downarrow x = \{y \in X / y \leq x\}$ section commençante (ensemble principal décroissant). La section finissante est défini d'une façon duale $\uparrow x = \{y \in X \ / \ y \geq x\}$(ensemble principal croissant).*

Théorème 1.2.4 *Soient E, F deux ensembles ordonnés, et $f : E \longrightarrow F$ une application, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

$i)$ f est croissante.

$ii)$ L'image inverse de tout ensemble principal décroissant de F est un ensemble décroissant de E.

$iii)$ L'image inverse de tout ensemble principal croissant de F est un ensemble croissant de E.

Preuve. $i) \Longrightarrow ii)$

On suppose que $f : E \longrightarrow F$ est une application *croissante.*

Soit $y \in F$,

$$\begin{aligned} A &= f^{-1}(\downarrow y) \\ &= \{x \in E / f(x) \in \downarrow y\} \\ &= \{x \in E \ / \ f(x) \leq y\}. \end{aligned}$$

Si $A = \phi$ le problème est résolu, (Car l'ensemble vide est un ensemble décroissant).

Si $A \neq \phi$, soit $x \in A$ donc pour tout $t \in E$

$$\begin{aligned} t \leq x &\Longrightarrow f(t) \leq f(x) \leq y \\ &\Longrightarrow f(t) \leq y \\ &\Longrightarrow f(t) \in \downarrow y \\ &\Longrightarrow t \in A. \end{aligned}$$

Donc A est décroissant

$ii) \Longrightarrow i)$

On veut montrer que si l'image inverse de tout ensemble principal décroissant de F est un ensemble principal décroissant de E, alors $f : E \longrightarrow F$ est croissante.

Soit $x \in E$, $f^{-1}(\downarrow f(x)) = \{t \in E / f(t) \in \downarrow f(x)\} = \{t \in E / f(t) \leq f(x)\}$.

On sait que $x \in f^{-1}(\downarrow f(x))$.

Soit $y \in E$,

$$\begin{aligned} y \leq x &\Longrightarrow y \in f^{-1}(\downarrow f(x)) \ \text{ (car } f^{-1}(\downarrow f(x)) \text{ est décroissant)} \\ &\Longrightarrow f(y) \in \downarrow f(x) \\ &\Longrightarrow f(y) \leq f(x). \end{aligned}$$

Donc f est croissante.

$i) \Longrightarrow iii)$

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application croissante, montrons que l'image inverse de tout ensemble principal croissant de F est un ensemble principal croissant de E.

Soit $y \in F$,

$$\begin{aligned} A &= f^{-1}(\uparrow y) \\ &= \{x \in E / f(x) \in \uparrow y\} \\ &= \{x \in E / f(x) \geq y\}. \end{aligned}$$

Si $A = \phi$, le problème est résolu, (Car l'ensemble vide est un ensemble croissant).

Si $A \neq \phi$, soit $x \in A$ donc pour tout $t \in E$

$$\begin{aligned} t \geq x &\Longrightarrow f(t) \geq f(x) \geq y \\ &\Longrightarrow f(t) \geq y \\ &\Longrightarrow f(t) \in \uparrow y \\ &\Longrightarrow t \in A. \end{aligned}$$

Donc, A est croissant.

$iii) \Longrightarrow i)$

On veut montrer que si l'image inverse de tout ensemble principal croissant de F est un ensemble principal croissant de E, alors $f : E \longrightarrow F$ est croissante.

Soit $x \in E$, $f^{-1}(\uparrow f(x)) = \{t \in E / f(t) \in \uparrow f(x)\} = \{t \in E / f(t) \geq f(x)\}$.

On sait que : $x \in f^{-1}(\uparrow f(x))$.

Soit $y \in E$,

$$\begin{aligned} y \geq x &\Longrightarrow y \in f^{-1}(\uparrow f(x)) \ \ (\text{car } f^{-1}(\uparrow f(x)) \text{ est croissant}) \\ &\Longrightarrow f(y) \in \uparrow f(x) \\ &\Longrightarrow f(y) \geq f(x). \end{aligned}$$

Donc f est croissante.

D'où, $i) \Leftrightarrow ii) \Leftrightarrow iii)$. ■

1.3 Applications résiduelles

Pour définir l'application résiduelle, nous avons besoin du théorème suivant :

Théorème 1.3.1 *Si E, F deux ensembles ordonnés et $f : E \longrightarrow F$ une application, alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

$i)$ L'image inverse de tout ensemble principal décroissant de F est un ensemble principal décroissant de E.

$ii)$ f est croissante et il y a une application croissante $g : F \longrightarrow E$ tels que : $g \circ f \geq id_E$ et $f \circ g \leq id_F$.

Preuve. $i) \Rightarrow ii)$

D'après le théorème 1.2.4 f est croissante, donc $\forall y \in F, (\exists x \in E), f^{-1}(\downarrow y) = \downarrow x$ (d'après $i)$), donc pour tout $y \in F$, il existe un élément unique x de E, tel que

$f^{-1}(\downarrow y) = \downarrow x$, alors on défini,

$$\begin{array}{rcl} g : F & \longrightarrow & E \\ y & \longrightarrow & x \end{array}$$

On va montrer que g est croissante.

Soient $y_1, y_2 \in F$, alors $\exists x_1, x_2 \in E$ tel que $f(x_1) = y_1$ et $f(x_2) = y_2$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Si } x_1 < x_2 & \Longrightarrow & f(x_1) \leq f(x_2) \\ & \Longrightarrow & y_1 \leq y_2 \,. \end{array}$$

Par contra posé on a :

$$\begin{array}{rcl} y_1 > y_2 & \Longrightarrow & x_1 \geq x_2 \\ & \Longrightarrow & g(y_1) \geq g(y_2) \text{, donc } g \text{ est croissante.} \end{array}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} \downarrow g(y) & = & \downarrow x \\ & = & f^{-1}(\downarrow y). \end{array}$$

On sait que $g(y) \in \downarrow g(y)$, alors

$$\begin{array}{rcl} g(y) \in \downarrow g(y) & \Rightarrow & g(y) \in f^{-1}(\downarrow y) \\ & \Rightarrow & (f \circ g)(y) \in \downarrow y \\ & \Rightarrow & (f \circ g)(y) \leq y \\ & \Rightarrow & f \circ g \leq id_F. \end{array}$$

D'autre part on a :

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}[\downarrow f(x)] & = & f^{-1}(\downarrow y) \\ & = & \downarrow x \\ & = & \downarrow g(y) \\ & = & \downarrow g[f(x)]\,. \end{array}$$

Alors,

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}[\downarrow f(x)] & \Longrightarrow & x \in \downarrow g[f(x)] \\ & \Longrightarrow & x \leq g[f(x)] \\ & \Longrightarrow & id_E \leq g \circ f. \end{array}$$

$ii) \Rightarrow i)$ évident d'après le théorème 1.2.4. ■

Définition 1.3.2

Soit E, F deux ensembles ordonnés, $f : E \longrightarrow F$ une application, f est dite résiduelle si elle vérifie l'une des conditions du théorème 1.3.1.

1.4 Semi-treillis et treillis

Théorème 1.4.1 *Si E un ensemble ordonné, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Pour tout $x \in E$ l'injection canonique i_x de $\downarrow x \longrightarrow E$ est un résiduelle.*

(ii) *L'intersection de deux ensembles principaux décroissants est un ensemble principal décroissant.*

Preuve. $(i) \Leftrightarrow (ii)$

Pour tout $x \in E$ soit $i_x : \downarrow x \longrightarrow E$ l'injection canonique.

Donc (i) équivalant à pour tout $x, y \in E$ il existe un $\alpha \in E$ tel que $\alpha = \max\{t \in \downarrow x \ / \ t = i_x(t) \leq y\}$,

donc il est clair qu'il existe un $\alpha \in E$ tel que $\downarrow x \cap \downarrow y = \downarrow \alpha$ ce qui équivalant à (ii). ■

Définition 1.4.2 *Si E est un ensemble qui vérifie l'une des deux conditions du théorème 1.4.1 alors on note α par $x \wedge y$ tel que $\downarrow x \cap \downarrow y = \downarrow \alpha$ et on dit que E est un* inf*-semi-treillis, de même façon on peut définir un $\vee$-semi-treillis.*

Définition 1.4.3 *Un treillis est un ensemble ordonné $(E, \leq)$ qui est* inf*-semi-treillis et* sup- *semi-treillis.*

Définition 1.4.4 *Un* inf*-semi-treillis est* inf*-complet si et seulement si tout sous-ensemble $\{x_\alpha / \alpha \in A\}$ possède une borne inférieure notée $\bigwedge\limits_{\alpha \in A} x_\alpha$, d'une façon analogue on défini* sup*-semi-treillis* sup*-complet. Un treillis est dit complet s'il est* inf*-complet et* sup*-complet.*

Théorème 1.4.5 *Un* inf*-semi-treillis* inf*-complet est un treillis complet si et seulement s'il possède une borne supérieure.*

Preuve. $\Rightarrow)$

Soit L un inf-semi-treillis inf-complet tel que 1 est le plus grand élément de L.

Soit $X = \{x_\alpha / \alpha \in A\}$ un ensemble non vide de L. $\bigvee X$ existe car l'ensemble des majorants de $\uparrow X$ de X, tel que $\uparrow X = \{m_\beta / \beta \in B\}$ est non vide car $1 \in \uparrow X$, alors $\bigwedge\limits_{\beta \in B} m_\beta$ existe (car L est $\wedge -$complet), il est claire que $x_\alpha \leq x_\beta, \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$, donc $x_\alpha \leq \bigwedge\limits_{\beta \in B} m_\beta, \forall \alpha \in A, \forall \beta \in B$, alors $\bigwedge\limits_{\beta \in B} m_\beta \in \uparrow X$, par définition on a $\sup X = \bigwedge\limits_{\beta \in B} m_\beta$

D'où L est un treillis complet.

$\Leftarrow)$

Cette implication est clair, car L est complet, donc L est inf-semi-treillis inf-complet et sup-semi-treillis sup-complet et la borne supérieure $\bigvee L$ existe. ■

Définition 1.4.6 *Un treillis L est un ensemble partiellement ordonné tel que tout ensemble de deux éléments $\{a, b\} \subset L$ admet une borne supérieure notée $a \vee b$ et une borne inférieure notée $a \wedge b$, on le note $(L, \leq, \wedge, \vee)$.*

Définition 1.4.7 *Un treillis L est fermé s'il possède un plus grand élément noté 1_L et un plus petit élément noté 0_L.*

Proposition 1.4.8 *Soit $(L, \leq, \wedge, \vee)$ un treillis et soient a, b, c et $d \in L$. Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a \wedge c \leq b \wedge d$ et $a \vee c \leq b \vee d$.*

Preuve. Soient a, b, c et $d \in L$.

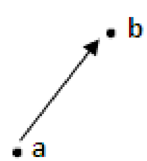
1) Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $(a \wedge c) \wedge (b \wedge d) = (a \wedge b) \wedge (c \wedge d) = a \wedge c$.

D'où $(a \wedge c) \leq (b \wedge d)$.

2) Si $a \leq b$ et $c \leq d$, on a : $(a \vee c) \vee (b \vee d) = (a \vee b) \vee (c \vee d) = b \vee d$.

D'où, $a \vee c \leq b \vee d$. ■

Beaucoup d'ensembles ordonnés peuvent être représentés au moyen de diagramme de Hasse. En représentant les éléments par des points et interprétant $a \leq b$ par



Exemple 1.4.9 Soit $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ l'ensemble de diviseurs positifs de 12. $(D(12), /)$ est un treillis tel que x/y (x divise y).

Exemple 1.4.10 $S = \{a, b, c\}$, $(P(S), \subseteq)$ est un treillis.

Définition 1.4.11 *Un treillis L est dit complet si et seulement si tout sous -ensemble de L admet une borne supérieure et une borne inférieure dans L.*

Proposition 1.4.12 *Si $(L, \leq, \wedge, \vee)$ Un treillis fermé, alors $\bigwedge \phi = 1$ et $\bigvee \phi = 0$.*

Preuve.

Pour tout $x \in L,\ x$ est un majorant de ϕ. Car $\forall x \in L, (y \in \phi) \Rightarrow (y \leq x)$.

Donc, $\bigvee \phi \ = \ \bigwedge \{x, x \in L\} \ = \ \bigwedge L \ = \ 0$, alors $\bigvee \phi = 0$.

De même pour tout $x \in L$, x est un minorant de ϕ.

Donc, $\bigwedge \phi \ = \ \bigvee \{x, x \in L\} \ = \ \bigvee L \ = \ 1$, alors $\bigwedge \phi = 1$. ■

Théorème 1.4.13 *Tout treillis complet est fermé.*

Preuve. Évident. ■

Définition 1.4.14 *Soit $(L, \leq, \wedge, \vee)$ un treillis fermé, un idéal dans L est une partie non-vide I de L tel que,*

$\forall x \in I, y \leq x \Longrightarrow y \in I$;

$\forall x \in I$ et $\forall y \in I \Longrightarrow x \vee y \in I$.

Définition 1.4.15 *Soit x un élément d'un treillis complet L, l'idéal principal engendré par x sera noté par : $\downarrow x$ ou $\downarrow x = \{y \in L / y \leq x\}$.*

Proposition 1.4.16 *Soit $(L, \wedge, \vee, \leq)$ un treillis complet, pour toute famille $\{x_i / i \in I\}$ on a, $\downarrow \left(\bigwedge\limits_{i \in I} x_i \right) = \bigcap\limits_{i \in I} \downarrow x_i$.*

Preuve. Soit a un élément de L,

$a \in \downarrow \left(\bigwedge\limits_{i \in I} x_i \right) \Leftrightarrow a \leq \bigwedge\limits_{i \in I} x_i \Leftrightarrow a \leq x_i, \forall i \in I \Leftrightarrow a \in \downarrow x_i, \forall i \in I \Leftrightarrow a \in \bigcap\limits_{i \in I} \downarrow x_i$.

Alors, $\downarrow \left(\bigwedge\limits_{i \in I} x_i \right) = \bigcap\limits_{i \in I} \downarrow x_i$. ■

Dans tout ce qui suit, $(L, \leq, \wedge, \vee)$ est un treillis complet, dont le plus grand élément est noté 1 et le plus petit élément est noté 0 (dans certains cas on note 1_L et 0_L).

1.5 Systèmes de fermeture

Définition 1.5.1 *Un système de fermeture est une famille C de sous ensembles d'un ensemble non vide S, vérifiant les conditions suivantes :*

1) $S \in C$.

2) Pour toute famille $\{X_i \in C / i \in I\}$, on a $\bigcap\limits_{i \in I} X_i \in C$.

Exemple 1.5.2 Soit $S = \{a, b, c\}$,

1) $P(S)$ est un système de fermeture.

2) $C_A = \{A, S\}$ est un système de fermeture.

3) $C = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ n'est pas un système de fermeture.

Exemple 1.5.3

1) La famille d'ensembles fermés d'un espace topologique est un système de fermeture.

2) La famille d'idéaux principaux des éléments d'un treillis complet est un système de fermeture.

lemme 1.5.4

(i) *Tout système de fermeture est un treillis complet ordonné par l'inclusion.*

(ii) *Chaque treillis complet L est isomorphe à un système de fermeture C, constitué par tous les idéaux principaux engendrés par les éléments de L.*

Preuve.

(i) Soit C un système de fermeture sur un ensemble non vide S. Montrons que $(C, \subseteq, \wedge, \vee)$ est un treillis.

Pour tout $C_1, C_2 \in C$,

$$\begin{cases} C_1 \wedge C_2 \ = C_1 \cap C_2 \\ et \\ C_1 \vee C_2 = \cap \{\mathbf{C} \in C / C_1 \cup C_2 \ \subseteq \mathbf{C}\}. \end{cases}$$

1) On a : $C_1 \wedge C_2 \in C$ et $C_1 \vee C_2 \in C$ (par définition), alors $(C, \subseteq, \wedge, \vee)$ est un treillis.

2) On va montrer que $(C, \subseteq, \wedge, \vee)$ est un treillis complet. Soit $\{C_i\}_{i \in I}$ une famille de parties de C, alors $\bigwedge\limits_{i \in I} \{C_i\} = \bigcap\limits_{i \in I} C_i$, $\bigcap\limits_{i \in I} C_i \in C$. (Car C est un système de fermeture)

Donc C est $\wedge$ semi-treillis $\wedge$ complet.

On a : $S \in C$ et C est inf-semi-treillis inf-complet, alors d'après le théorème1.4.5 C est un treillis complet.

(ii) Si L est un treillis complet, montrons que L est isomorphe à C_L tel que $C_L = \{\downarrow x / x \in L\}$.

Soit φ une application de L dans C_L tel que, pour tout $x \in L$, $\varphi(x) = \downarrow x$.

Montrons que φ est un isomorphisme.

1) Soient $x, y \in L, x \neq y \Rightarrow \downarrow x \neq \downarrow y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)$. Alors φ est une application injective.

2) Soit $\downarrow y \in C_L$, $\exists ?x \in L$ tel que $\varphi(x) = \downarrow y$.

$\downarrow y \in C_L$ par définition $\downarrow y = \varphi(y)$, il suffit de prendre $x = y$, donc φ est surjective.

D'où, φ est bijective.

Soient $x, y \in L$, $\varphi(x \wedge y) = \downarrow (x \wedge y) = \downarrow x \cap \downarrow y = \varphi(x) \cap \varphi(y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$.

Car pour tout $a \in L$,

$$\begin{aligned} a \in \downarrow (x \wedge y) &\Leftrightarrow a \leq x \wedge y \\ &\Leftrightarrow a \leq x \text{ et } a \leq y \\ &\Leftrightarrow a \in \downarrow x \text{ et } a \in \downarrow y \\ &\Leftrightarrow a \in \downarrow x \cap \downarrow y. \end{aligned}$$

Montrons que pour tout $x, y \in L, \varphi(x \vee y) = \downarrow (x \vee y) = \downarrow x \cup \downarrow y = \downarrow x \vee \downarrow y$.

On a : $\downarrow x \vee \downarrow y = \cap \{\downarrow c \in C_L \ / \ \downarrow x \cup \downarrow y \subset \downarrow c\} \in C_L$

Donc, il existe un $\downarrow m \in C_L$ tel que, $\downarrow m = \cap \{\downarrow c \in C_L \ / \downarrow x \cup \downarrow y \subset \downarrow c\}$

On a : pour tout $x, y \in L$,

$$\left\{ \begin{array}{c} x \leq x \vee y \\ \text{et} \\ y \leq x \vee y \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \downarrow x \leq \downarrow (x \vee y) \\ \text{et} \\ \downarrow y \leq \downarrow (x \vee y) \end{array} \right. \Longrightarrow \downarrow x \cup \downarrow y \subset \downarrow (x \vee y).$$

alors $\downarrow m \subset \downarrow (x \vee y)$ (1)

(Car $\downarrow (x \vee y) \in C_L$ contenant $(\downarrow x \cup \downarrow y)$).

D'autre part $\downarrow x \cup \downarrow y \subset \downarrow m$.

Donc,

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{c} \downarrow x \subset \downarrow m \\ \text{et} \\ \downarrow y \subset \downarrow m \end{array} \right. &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x \in \downarrow m \\ \text{et} \\ y \in \downarrow m \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow x \vee y \in \downarrow m \text{ (Car } \downarrow m \text{ est un idéal)} \\ &\Longrightarrow \downarrow (x \vee y) \subset \downarrow m. \qquad (2) \end{aligned}$$

De 1) et 2) on a : $\downarrow (x \vee y) = \downarrow x \vee \downarrow y$.

D'où, $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$, on a : alors, $\varphi(1_L) = \downarrow 1_L = L = 1_{C_L}$.

Par conséquent φ est un isomorphisme.

D'où, L isomorphe à C_L . $\blacksquare$

Chapitre 2

Généralités sur les ensembles flous et les ordres flous

Résumé

Dans ce chapitre on donne un aperçu général sur les relations floues, la fuzzification d'un treillis (Treillis complet), et la fuzzification d'un système (sous système) de fermeture et la fuzzification d'une famille de systèmes (sous systèmes) de fermeture.

On définit la notion d'isomorphisme avec l'introduction des structures d'ordres flous. Soient $(M, \leq)$, $(N, \leq)$ et $(L, \leq)$ des treillis dont L est complet, et soient $\mu : M \longrightarrow L$ et $\nu : N \longrightarrow L$ deux L-sous poset flou ordonné de M et N respectivement. On dit que μ et ν sont isomorphe, s'il existe un isomorphisme $\psi : M \longrightarrow N$ tel que pour tout $\alpha \in L$ la restriction de ψ à μ_α $(\alpha - coupes)$ est isomorphisme de μ_α dans ν_α [15].

Contenu

2.6. Fuzzification d'une famille de système (sous système) de fermeture

2.7. Isomorphisme entre structures floues ordonnée (système de

fermeture, treillis complet)

2.1 Compléments sur les ensembles flous

Dans tout ce qui suit, L est un treillis complet dont le plus grand élément noté 1 et le plus petit élément noté 0.

Sous -ensemble flou

Définition 2.1.1 *Soit S un ensemble non vide. Un sous-ensemble flou de S est une application $\mu : S \to L$.*
Un sous-ensemble classique est un cas particulier d'un sous-ensemble flou défini comme suit $\mu : S \longrightarrow \{0,1\}$.

Opérations ensemblistes sur les sous-ensembles flous

Soient $\mu : S \longrightarrow L$, $\nu : S \longrightarrow L$ deux ensembles flous de S.

Définition 2.1.2 $\mu \cap \nu = \delta$, *tel que pour tout* $x \in S$, $\delta(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$.

Définition 2.1.3 $\mu \cup \nu = \eta$, *tel que pour tout* $x \in S$, $\eta(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$.

Définition 2.1.4 $(\mu \subset \nu) \Leftrightarrow$ *pour tout* $x \in S$, $\mu(x) \leq \nu(x)$.

Définition 2.1.5 $(\mu = \nu) \Leftrightarrow$ *pour tout* $x \in S$, $\mu(x) = \nu(x)$.

Ensembles ordinaires associés à un sous-ensemble flou

Définition 2.1.6 *Soit μ un ensemble flou sur un ensemble non-vide S. Un α-coupe de μ est un ensemble classique de S défini comme suit :*
$\mu_\alpha = \{x \in S \ /\mu(x) \geq \alpha\}, \alpha \in L.$
Un α-coupe strict de μ est un sous ensemble classique de S défini comme suit :
$\mu_\alpha^> = \{x \in S \ /\mu(x) > \alpha\}, \alpha \in L.$

Propriétés 2.1.7

Soient $\mu : S \longrightarrow L$ et $\nu : S \longrightarrow L$ deux ensembles flous et soient $\alpha, \beta \in L$
1) $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \mu_\beta \subseteq \mu_\alpha$.
2) $(\mu \cap \nu)_\alpha = \mu_\alpha \cap \nu_\alpha$, $(\mu \cup \nu)_\alpha = \mu_\alpha \cup \nu_\alpha$.
3) Si $\mu \subseteq \nu \Rightarrow \mu_\alpha \subseteq \nu_\alpha$.

Théorème 2.1.8 *Si $\mu : S \longrightarrow L$ un ensemble flou, alors* $\forall x \in S : \mu(x) = \underset{\alpha \in L-\{0\}}{sup} (\alpha \mu_\alpha(x))$.

Preuve. Soit $x \in S$, on pose $\mu(x) = \alpha$ tel que $\alpha \in L$-$\{0\}$ On a,

$$\begin{cases} \mu_\alpha(x) = 1 & \text{si} \quad \mu(x) \geq \alpha\,; \\ \mu_\alpha(x) = 0 & \text{si} \quad \mu(x) < \alpha. \end{cases}$$

Donc, $\alpha\mu_\alpha(x) = \alpha = \mu(x)$.

D'où, $\underset{\alpha \in L-\{0\}}{sup} (\alpha\mu_\alpha(x)) \geq \mu(x)$. (1)

D'autre part on a :

$$\begin{cases} \mu_\alpha(x) = 1 & \text{si} \quad \mu(x) \geq \alpha\,; \\ \mu_\alpha(x) = 0 & \text{si} \quad \mu(x) < \alpha. \end{cases} \quad \forall \alpha \in L\text{-}\{0\}$$

Alors,

$$\begin{cases} \alpha\mu_\alpha(x) = \alpha & \text{si} \quad \mu(x) \geq \alpha \\ \alpha\mu_\alpha(x) = 0 & \text{si} \quad \mu(x) < \alpha \end{cases} \quad \forall \alpha \in L\text{-}\{0\}.$$

On remarque dans les deux cas que : $\alpha\mu_\alpha(x) \leq \mu(x), \ \forall \alpha \in L\text{-}\{0\}$.

D'où, $\underset{\alpha \in L-\{0\}}{sup} (\alpha\mu_\alpha(x)) \leq \mu(x)$. (2)

De (1), (2) on a : $\forall x \in S : \mu(x) = \underset{\alpha \in L-\{0\}}{sup} (\alpha.\mu_\alpha(x))$. ■

2.2 Relations d'ordre floues

Définition 2.2.1 *Une relation floue ρ entre n ensembles $S_1, S_2, \ldots\ldots., S_n$ est une application ρ de $S_1 \times S_2 \times \ldots. \times S_n$ dans L (dite relation n-aires).*

Cas particuliers

1) Si $n = 2$ on dit que ρ est une relation binaire entre S_1, S_2.

2) Si $n = 2$ et $S_1 = S_2 = S$ on dit que ρ est une relation binaire floue sur S, on l'appelle aussi relation floue L-valente.

Composition de deux relations floues

Définition 2.2.2 *La composition de deux relations floues ρ_1 sur $X \times Y$ et ρ_2 sur $Y \times Z$ est une relation floue $R = \rho_1 \circ \rho_2$ sur $X \times Z$ définie par :*

$\forall (x,z) \in X \times Z,\ R(x,z) = \sup_{y \in Y} (\min\{\rho_1(x,y), \rho_2(y,z)\})$.

Propriétés particulières des relations binaires floues

Les *α-coupes* d'une relation floue

Définition 2.2.3 *Soit $\rho : X^2 \longrightarrow L$, une relation floue L-valente. Un α-coupe de ρ est* *un sous-ensemble classique* ρ_α *de* X^2*, tel que :*

$$\rho_\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \rho(x,y) \geq \alpha\,; \\ 0 & \text{si } \rho(x,y) < \alpha. \end{cases}$$

lemme 2.2.4 *Soit* ρ *une relation floue sur* X*. Alors pour tout* $x, y \in X$ *et* $\alpha \in L$-$\{0\}$,

$\rho(x,y) = \sup\limits_{\alpha \in L-\{0\}} \alpha\rho_\alpha(x,y).$

Preuve.

Evedant d'après le théorème 2.1.8. ∎

Définition 2.2.5 *Une relation floue* ρ, *L-valente sur* S *est dite :*

Réflexive	$\Leftrightarrow$	$\forall x \in S,\ \rho(x,x) = 1.$
Symétrique	$\Leftrightarrow$	$\forall x, y \in S,\ \rho(x,y) = \rho(y,x)\,.$
Antisymétrique	$\Leftrightarrow$	$\forall x, y \in S,\ x \neq y \Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) = 0.$
Transitive	$\Leftrightarrow$	$\forall x, y, z \in S,\ \rho(x,z) \geq \rho(x,y) \wedge \rho(y,z)\,.$

Définition 2.2.6 *Une relation floue* ρ, *L-valente est un ordre flou, si et seulement si* ρ *est réflexive, antisymétrique et transitive.*

Théorème 2.2.7 *Une relation* $\rho : X^2 \to L$ *est un ordre floue si et seulement si, tous les* α*-coupes (sauf le 0-coupe) sont des ordres classiques.*

Preuve.

$(\Rightarrow)$

Soit $\rho : X^2 \to L$ une relation d'ordre floue.

(i) Montrons que ρ_α est réflexive.

Soit $\alpha \in L$-$\{0\}$ et $x \in X$.

On a : $\rho(x,x) = 1 \geq \alpha$,$\forall x \in L$, donc $(x,x) \in \rho_\alpha$, alors ρ_α est réflexive.

(ii) Montrons également que ρ_α est antisymétrique.

Soient $\alpha \in L$ -$\{0\}$, $x, y \in X$.

$$\begin{aligned} (x,y) \in \rho_\alpha \textit{ et } (y,x) \in \rho_\alpha &\Rightarrow \rho(x,y) \geq \alpha \textit{ et } \rho(y,x) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) \neq 0 \text{ (Car } \rho \text{ est antisymétrique)} \\ &\Rightarrow x = y. \end{aligned}$$

Alors ρ_α est antisymétrique.

(iii) On va montrer la transitivité de ρ_α.

Soit $\alpha \in L$-$\{0\}$ et soient $x, y, z \in X$,

$$\begin{aligned} (x,y) \in \rho_\alpha \ et \ (y,z) \in \rho_\alpha &\Rightarrow \rho(x,y) \geq \alpha \ et \ \rho(y,z) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) \ \geq \alpha \\ &\Rightarrow \rho(x,z) \geq \alpha \text{ (Car } \rho \text{ est transitive)} \\ &\Rightarrow (x,z) \in \rho_\alpha. \end{aligned}$$

Donc, ρ_α est transitive. Alors, ρ_α est une relation d'ordre classique.

$(\Leftarrow)$

Inversement on suppose que $\forall \alpha \in L$-$\{0\}$, les *α-coupes* de ρ sont des relations d'ordres classiques et montrons que ρ est une relation d'ordre floue.

(a) La réflexivité,

soit $\alpha \in L$-$\{0\}$ et soit $x \in X$,

$(x,x) \in \rho_\alpha \Rightarrow \rho(x,x) \geq \alpha, \forall \alpha \in L$-$\{0\}$, donc $\rho(x,x) = 1$, donc ρ est réflexive.

(b) L'antisymétrie,

soit $\alpha \in L$-$\{0\}$ est soient $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} x \neq y &\Rightarrow (x,y) \notin \rho_\alpha \text{ ou } (y,x) \notin \rho_\alpha, \forall \alpha \in L - \{0\} \\ &\Rightarrow \rho(x,y) < \alpha \text{ ou } \rho(y,x) < \alpha, \forall \alpha \in L - \{0\} \\ &\Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) < \alpha, \forall \alpha \in L - \{0\} \\ &\Rightarrow \rho(x,y) \wedge \rho(y,x) = 0. \end{aligned}$$

Alors ρ est antisymétrique.

(c) La transitivité, soit $\alpha \in L$-$\{0\}$ et soient $x, y, z \in X$. On a : $\rho(x,y) \in L$ et $\rho(y,z) \in L$, alors $\rho(x,y) \wedge \rho(y,z) \in L$ (L est un treillis complet). On pose $\rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = \alpha$, on a :

$$\begin{aligned} \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = \alpha &\Rightarrow \rho(x,y) \geq \alpha \text{ et } \rho(y,z) \geq \alpha \\ &\Rightarrow (x,y) \in \rho_\alpha \text{ et } (y,z) \in \rho_\alpha \\ &\Rightarrow (x,z) \in \rho_\alpha \text{ (Car } \rho_\alpha \text{ est transitive)} \\ &\Rightarrow \rho(x,z) \geq \alpha \\ &\Rightarrow \rho(x,z) \geq \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) \text{ (Car } \rho(x,y) \wedge \rho(y,z) = \alpha). \end{aligned}$$

Donc, ρ est transitive.

D'où, ρ est une relation d'ordre floue. $\blacksquare$

2.3 Treillis flous

Si M est un treillis, L est un treillis complet, alors $\mu : M \longrightarrow L$ est un treillis flou sur M (Sous treillis flou sur M) si pour toute $x, y \in M$ on a :

$$\begin{cases} \mu(x \wedge y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)\,; \\ \text{et} \\ \mu(x \vee y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y). \end{cases}$$

Où les opérations $\wedge, \vee$ du coté gauche sont les opérations de M et celles de droite sont les opérations de L et $\geq$ est l'ordre dual de L [15].

Théorème 2.3.1 *Soit M un treillis et L un treillis complet, $\mu : M \longrightarrow L$ est un treillis flou si pour tout $\alpha \in L$, μ_α est un sous-treillis classique de M.*

Preuve.

Soit M un treillis et soit L un treillis complet. On a pour tout $\alpha \in L$, μ_α est un treillis de M.

Montrons que pour tout $x, y \in M$,

$$\begin{cases} \mu(x \wedge y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)\ ; \\ \text{et} \\ \mu(x \vee y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)\,. \end{cases}$$

Soient $x, y \in M$, on a $\mu(x) \in L$ et $\mu(y) \in L$, alors $\mu(x) \wedge \mu(y) \in L$ (L est un treillis).

On pose $\mu(x) \wedge \mu(y) = \alpha$. Alors

$$
\begin{cases} \mu(x) \geq \alpha \\ \text{et} \\ \mu(y) \geq \alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \in \mu_\alpha \\ \text{et} \\ y \in \mu_\alpha \end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{cases} x \wedge y \in \mu_\alpha \\ \text{et} \qquad (\mu_\alpha \text{ est un treillis}) \\ x \vee y \in \mu_\alpha \end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{cases} \mu(x \wedge y) \geq \alpha \\ \text{et} \\ \mu(x \vee y) \geq \alpha \end{cases}
$$

$$
\Longrightarrow \begin{cases} \mu(x \wedge y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)\,; \\ \text{et} \\ \mu(x \vee y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)\,. \end{cases}
$$

Donc μ est un treillis flou. ■

Treillis flous complets [15]

On utilise ici la notion de treillis flou complet comme une application μ d'un treillis complet M dans un treillis complet L. On dit que μ est un treillis complet si, pour toute famille $\{x_i,\ i \in I\} \subseteq M$, on a :

$$
\begin{cases} \mu\left(\bigwedge\limits_{i\in I} x_i\right) \geq \bigwedge\limits_{i\in I} \mu(x_i)\ ; \\ \text{et} \\ \mu\left(\bigvee\limits_{i\in I} x_i\right) \geq \bigwedge\limits_{i\in I} \mu(x_i)\,. \end{cases}
$$

Théorème 2.3.2 *Soient M, L deux treillis complets, $\mu : M \longrightarrow L$ sera un treillis flou complet, si pour tout $\alpha \in L$, μ_α est un sous-treillis classique complet de M.*

Preuve.

Soient M, L deux treillis complets et $\mu : M \longrightarrow L$, vérifiant pour tout α de L, μ_α est un treillis complet de M.

Montrons que pour toute famille $\{x_i\ , i \in I\} \subseteq M$,

$$\begin{cases} \mu\left(\bigwedge\limits_{i\in I} x_i\right) \geq \bigwedge\limits_{i\in I} \mu\left(x_i\right) ; \\ \qquad\qquad et \\ \mu\left(\bigvee\limits_{i\in I} x_i\right) \geq \bigwedge\limits_{i\in I} \mu\left(x_i\right). \end{cases}$$

Soit $\{x_i,\ i \in I\} \subseteq M$ on sait que $\forall i \in I : \mu(x_i) \in L$, alors $\bigwedge\limits_{i\in I} \mu(x_i) \in L$, (Car L est un treillis complet), on pose $\bigwedge\limits_{i\in I} \mu(x_i) = \alpha$, donc,

$$\forall i \in I : x_i \in \mu_\alpha \ \Rightarrow \begin{cases} \bigwedge\limits_{i\in I} x_i \in \mu_\alpha ; \\ \qquad \text{et} \\ \bigvee\limits_{i\in I} x_i \in \mu_\alpha. \end{cases} \quad (\text{Car } \mu_\alpha \text{ est un treillis complet})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu\left(\bigwedge\limits_{i\in I} x_i\right) \geq \alpha ; \\ \qquad \text{et} \\ \mu\left(\bigvee\limits_{i\in I} x_i\right) \geq \alpha. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu\left(\bigwedge\limits_{i\in I} x_i\right) \geq \bigwedge\limits_{i\in I} \mu\left(x_i\right) ; \\ \qquad\qquad \text{et} \\ \mu\left(\bigvee\limits_{i\in I} x_i\right) \geq \bigwedge\limits_{i\in I} \mu\left(x_i\right). \end{cases} \quad (\text{Car} \bigwedge\limits_{i\in I} \mu(x_i) = \alpha)$$

Donc μ est un treillis flou complet sur M, de plus on a, $\bigwedge \phi = 1$, donc $\mu(1) \geq 1$ et (car $\mu(1) \leq 1$).

D'où, $\mu(1) = 1$. ■

Pour une autre fuzzification des structures classiques, μ peut être un sous treillis flou complet de M.

2.4 Topologies floues

On conclu avec la notion de topologie floue suivante, pour les ensembles flous intervalle-value [15]. Soit S un ensemble non vide et T une application de $\wp(S)$ (l'ensemble des parties de S) dans un treillis complet L. Alors T est une fuzzification topologique si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

1. $T(S) = 1$;
2. Pour tout $X_1, X_2 \in \wp(S)$, $T(X_1 \cap X_2) \geq T(X_1) \wedge T(X_2)$;
3. Pour toute famille $\{X_i,\ i \in I\} \subseteq \wp(S)$, $T(\cup \{X_i, i \in I\}) \geq \bigwedge_{i \in I} T(X_i)$.

La fuzzification topologique est un cas particulier de topologie lisse, car la topologie lisse est une application d'ensemble des parties floues dans un treillis complet. (Ici nous avons une application de $\wp(S)$ vers un treillis complet).

2.5 Fuzzification d'un système (sous-système) de fermeture

Fuzzification d'un système de fermeture [15]

Soit S un ensemble non vide et L un treillis complet. Un système de fermeture flou sur S est une application $\delta : \wp(S) \longrightarrow L$, telle que pour toute famille $\{X_i/i \in I\} \subseteq \wp(S)$, on a :

$$\bigwedge_{i\in I} \delta(X_i) \leq \delta(\bigcap_{i\in I} X_i). \tag{2.1}$$

lemme 2.5.1 $\delta(S) = 1$ *où* 1 *est le plus grand élément de* L.

Preuve.

Il est claire que $\delta(S) \leq 1$.

Montrons que $\delta(S) \geq 1$.

En effet, d'après 2.1, quand nous considérons la famille vide, l'infimum (inf) du côté gauche de la famille vide est égal au plus grand élément du treillis L, donc 1. D' autre part, l'intersection de la famille vide à droite égale à S, donc nous obtenons $\delta(S) \geq 1$. ■

Il est Claire qu'une fuzzification de système de fermeture sur X est une fuzzification de sous système de fermeture sur $\wp(S)$.

Théorème 2.5.2[15]

Soit $\delta : \wp(S) \longrightarrow L$ *une application.* δ *est un système de fermeture flou si et seulement si pour tout* $\alpha \in L, \delta_\alpha(\alpha\text{-coupe})$ *est un système de fermeture classique sur* S.

Preuve.

$(\Rightarrow)$

Soit $\delta : \wp(S) \longrightarrow L$ un système de fermeture flou. On veut montrer que pour tout $\alpha \in L, \delta_\alpha$ est un système de fermeture classique sur S.

1) $\delta(S) = 1$, alors $\delta(S) \geq \alpha, \forall\alpha \in L$.

Donc, $S \in \delta_\alpha$.

2) Soit $\alpha \in L$,$\{X_i/i \in I\} \subseteq \delta_\alpha$, on veut montrer que $\bigcap_{i\in I} X_i \in \delta_\alpha$.

On sait que $\forall i \in I : X_i \in \delta_\alpha$, alors $\delta(X_i) \geq \alpha,\ \forall i \in I$.

Donc, $\bigwedge_{i\in I} \delta(X_i) \geq \alpha$ (Car L est complet et $\delta(\bigcap_{i\in I} X_i) \geq \bigwedge_{i\in I} \delta(X_i)$).

Alors, $\delta(\bigcap_{i\in I} X_i) \geq \alpha$.

Donc, $\bigcap_{i\in I} X_i \in \delta_\alpha$.

D'où, $\forall\alpha \in L$, δ_α est un système de fermeture classique.

($\Leftarrow$)

On a pour tout $\alpha \in L$, δ_α est un système de fermeture classique.

On veut montrer que $\delta : \wp(S) \longrightarrow L$ un système de fermeture flou.

Soit $\{X_i/i \in I\} \subseteq \wp(S)$ une famille de $\wp(S)$.

On a : $\forall i \in I, \delta(X_i) \in L$.

Donc, $\bigwedge_{i\in I} \delta(X_i) \in L$. On pose $\alpha = \bigwedge_{i\in I} \delta(X_i)$.

Alors on a : $\forall i \in I, \delta(X_i) \geq \alpha$.

Donc, $\forall i \in I$, $X_i \in \delta_\alpha$.

Alors, $\bigcap_{i\in I} X_i \in \delta_\alpha$ (Car δ_α est un système de fermeture).

Donc, $\delta(\bigcap_{i\in I} X_i) \geq \alpha$.

Il s'ensuit que $\delta(\bigcap_{i\in I} X_i) \geq \bigwedge_{i\in I} \delta(X_i)$ $\left(\text{Car } \alpha = \bigwedge_{i\in I} \delta(X_i)\right)$.

D'où, δ est un système de fermeture flou. ■

Fuzzification d'un sous système de fermeture [15]

Soit C un système de fermeture classique sur un ensemble non vide S et L un treillis complet. Un sous système de fermeture flou de C est une application $\sigma : C \longrightarrow L$ telle que, pour toute famille $\{X_i/i \in I\} \subseteq C$ on a :

$$\bigwedge_{i\in I} \sigma(X_i) \leq \sigma(\bigcap_{i\in I} X_i). \tag{2.2}$$

Remarque 2.5.3 Comme dans le lemme 2.5.1 on peut démontrer que dans un sous-système de fermeture flou $\sigma : C \longrightarrow L$ on a $\sigma(S) = 1$.

Remarque 2.5.4 Il est clair qu'un système de fermeture flou sur S est un sous système de fermeture flou de $\wp(S)$.

Théorème 2.5.5 [15] *Soit C est un système de fermeture classique sur un ensemble non* *vide S et $\sigma : C \longrightarrow L$ une application. σ est un sous-système de fermeture flou de C si et seulement si pour tout $\alpha \in L$, σ_α ($\alpha-$coupe de σ) est un sous-système de fermeture classique.*

Preuve.

($\Rightarrow$)Soit $\sigma : C \longrightarrow L$ un sous-système de fermeture flou. On veut montrer que pour tout $\alpha \in L$, σ_α est un système de fermeture classique.

1) $\sigma(S) = 1$, alors $\sigma(S) \geq \alpha, \forall \alpha \in L$.

D'où, $S \in \sigma_\alpha$.

2) Soit $\alpha \in L$ et $\{X_i / i \in I\} \subseteq \sigma_\alpha$. On veut montrer que $\bigcap\limits_{i \in I} X_i \in \sigma_\alpha$.

On sait que, $\forall i \in I, X_i \in \sigma_\alpha$, alors $\sigma(X_i) \geq \alpha, \forall i \in I$,

donc $\bigwedge\limits_{i \in I} \sigma(X_i) \geq \alpha$ (car L est complet),

alors $\sigma(\bigcap\limits_{i \in I} X_i) \geq \alpha$ (Car $\sigma(\bigcap\limits_{i \in I} X_i) \geq \bigwedge\limits_{i \in I} \sigma(X_i)$), donc $\bigcap\limits_{i \in I} X_i \in \sigma_\alpha$.

D'où, $\forall \alpha \in L$, σ_α est un système de fermeture classique.

($\Leftarrow$)

On a : pour tout $\alpha \in L$, σ_α est un système de fermeture classique. On veut montrer que $\sigma : C \longrightarrow L$ un sous-système de fermeture flou.

Soit $\{X_i / i \in I\} \subseteq C$ une famille de C. On a : $\forall i \in I, \sigma(X_i) \in L$. Donc, $\bigwedge\limits_{i \in I} \sigma(X_i) \in L$.

On pose $\alpha = \bigwedge\limits_{i \in I} \sigma(X_i)$.

Alors on a : $\forall i \in I$, $\sigma(X_i) \geq \alpha$.

Donc $\forall i \in I : X_i \in \sigma_\alpha$.

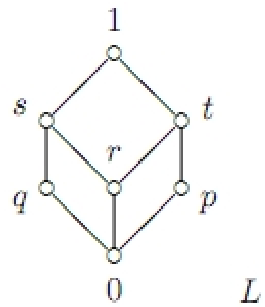
Alors, $\bigcap\limits_{i \in I} X_i \in \sigma_\alpha$ (Car σ_α est un système de fermeture).

Donc, $\sigma(\bigcap\limits_{i \in I} X_i) \geq \alpha$.

Donc, $\sigma(\bigcap\limits_{i \in I} X_i) \geq \bigwedge\limits_{i \in I} \sigma(X_i)$ (Car $\alpha = \bigwedge\limits_{i \in I} \sigma(X_i)$).

D'où, σ est un sous-système de fermeture flou sur S. ■

Exemple 2.5.6 Soit L un treillis complet tel que, et $S = \{a, b, c\}$



.

$$\delta = \begin{pmatrix} \phi & \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a,b\} & \{a,c\} & \{b,c\} & \{a,b,c\} \\ 1 & t & s & t & p & p & q & 1 \end{pmatrix}$$

δ est système de fermeture flou sur S, car δ_α (Les *α-coup* de δ) sont des systèmes de fermeture classiques.

En effet :

$\delta_1 = \{\phi, \{a,b,c\}\}$ est un système de fermeture sur S.

$\delta_p = \{\phi, \{a\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ est un système de fermeture sur S.

$\delta_q = \{\phi, \{b\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$ est un système de fermeture sur S.

$\delta_r = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b,c\}\}$ est un système de fermeture sur S.

$\delta_s = \{\phi, \{b\}, \{a,b,c\}\}$ est un système de fermeture sur S.

$\delta_t = \{\phi, \{a\}, \{c\}, \{a,b,c\}\}$ est un système de fermeture sur S.

$\delta_0 = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{b,c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ est un système de fermeture sur S.

2.6 Fuzzification d'une famille de systèmes de fermeture

Les théorèmes qui suivent concernent la fuzzification d'une familles de systèmes de fermeture.

Théorème 2.6.1 [15] *Soit $\mathcal{F}$ une famille de systèmes de fermeture sur le même ensemble non-vide S, fermé par l'intersection tel que $\wp(S) \in \mathcal{F}$. Alors il y a un treillis L et un système de fermeture flou $\delta : \wp(S) \longrightarrow L$, tel que la famille $\mathcal{F}$ est la famille des α-coupes de δ, c'est-à-dire $\mathcal{F} = \{\delta_\alpha,\ \alpha \in L\}$.*

Preuve.

Soit L l'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{F}, \leq)$, tel que" $\leq$ " est le dual de l'inclusion des ensemble.

On va montrer que $L = (\mathcal{F}, \leq, \bigwedge, \bigvee)$ est un treillis complet.

On a : pour tout $X, Y \in \mathcal{F}, X \bigwedge Y = X \cap Y \in \mathcal{F}$ (Par définition). Donc, $\mathcal{F}$est inf-semi-treillis.

Soit $\{X_i,\ i \in I\} \subseteq \mathcal{F}$,on a, $\bigwedge\limits_{i\in I} X_i = \bigcap\limits_{i\in I} X_i \subset \mathcal{F}$ (Par définition) et on a : $\mathcal{F}$est $\bigwedge$-semi-treillis $\bigwedge$-complet et $\wp(S)$ est le plus grand élément de $\mathcal{F}$ alors d'après le théorème 1.4.5 $\mathcal{F}$ est un treillis complet.

On défini $\delta : \wp(S) \longrightarrow L$ tel que, pour tout $X \subseteq S : \delta(X) = \bigcap \{g \in \mathcal{F}/X \in g\}$.

On va montrer que δ est un ensemble flou c'est-à-dire, δ est une application de $\wp(S)$ dans L.

Soient $X, Y \in \wp(S)$.

Si $X = Y$ alors, $\bigcap \{g \in \mathcal{F}\ /\ X \in g\} = \bigcap \{g \in \mathcal{F}\ /\ Y \in g\}$.

Alors, $\delta(X) = \delta(Y)$.

D'où, δ est une application.

Maintenant on va montrer que l'ensemble des α-*coupes* de δ est bien $\mathcal{F}$.

Soit $\alpha \in \mathcal{F}$ et δ_α le coupe qui correspond à α.

Pour y un élément arbitraire de $\wp(S)$ on a :

$y \in \delta_\alpha \Leftrightarrow \delta(y) \geq \alpha \Leftrightarrow \delta(y) \subseteq \alpha \Leftrightarrow \bigcap \{g \in \mathcal{F} / y \in g\} \subseteq \alpha \Leftrightarrow y \in \alpha.$

Donc : $\delta_\alpha = \alpha$.

Ainsi l'ensemble des α-*coupes* de δ est bien l'ensemble $\mathcal{F}$. De plus l'ensemble flou δ est un système de fermeture flou. (D'après le théorème 2.5.2). ■

De la même façon (En utilisant les mêmes constructions) on peut prouver que pour une fuzzification de sous-système de fermeture d'un système de fermeture classique C.

Théorème 2.6.2 [15] *Soit C un système de fermeture sur un ensemble non vide S et $\mathcal{F}$ une famille de sous-systèmes de fermeture fermé pour l'intersection, tel que $C \in \mathcal{F}$. Alors il existe un treillis L, et un système de fermeture flou $\sigma : C \longrightarrow L$ tel que $\mathcal{F}$ soit la famille des α-coupes de σ.*

Preuve.

Soit L l'ensemble partiellement ordonné, on considère la structure $(\mathcal{F}, \leq)$, tel que $\leq$ dénote le dual de l'inclusion ensembliste. $L = (\mathcal{F}, \leq, \bigwedge, \bigvee)$ défini comme dans le théorème précédent est un treillis complet. On défini $\sigma : C \longrightarrow L$ par : $X \in C$,

$\sigma(X) = \bigcap \{g \in \mathcal{F} / X \in g\}$. De la même façon que dans le théorème 2.6.1, on montre que σ est un ensemble flou et que l'ensemble des f-*coupes* de σ est bien $\mathcal{F}$.

Soit $f \in \mathcal{F}$ et soit σ_f son f-*coupe*.

Si y un élément arbitraire de C, on a :

$y \in \sigma_f \Leftrightarrow \sigma(y) \geq f \Leftrightarrow \sigma(y) \subseteq f \Leftrightarrow \bigcap \{g \in \mathcal{F} / y \in g\} \subseteq f \Leftrightarrow y \in f.$

Donc $\sigma_f = f$, alors l'ensembles des f-*coupes* de σ est bien l'ensemble $\mathcal{F}$, de plus l'ensemble flou σ est un sous-système de fermeture flou de $\wp(S)$ car (D'après le théorème 2.5.5 tous les f-*coupes* sont des systèmes de fermetures classiques). ■

Dans ce qui suit en se basant sur la connection entre les systèmes de fermeture fuzzifier et les treillis flous. Soit $(M, \leq)$ un treillis, $(L, \leq)$ un treillis complet et $\mu : M \longrightarrow L$ une application tels que pour tout $\alpha \in L$, le α-*coupe* de μ, (μ_α) est un treillis avec l'ordre induit par celui de M, sachant que μ est un treillis-sousposet flou ordonné de M, si les treillis M et μ_α $\forall \alpha \in L$ sont des treillis complets, alors le treillis-sousposet flou ordonné μ est dit complet. On remarque que tout sous-treillis flou de M est un treillis-sous-poset flou ordonné de M. De plus la notion ci-dessus est définie au moyen des termes ensemblistes purs, comme dans le cas classique un treillis est un ensemble ordonné. Par conséquent nous n'avons pas besoin des *α-coupes* comme des sous-treillis de μ. (Un sous-treillis est une notion algébrique, il n'est pas une notion de la théorie des ensembles). Donc, un treillis-sous-poset flou ordonné n'est pas en général, un sous treillis flou du même treillis classique.

Théorème 2.6.3 [15] *Soit S un ensemble non vide, C un système de fermeture sur S et $(L, \leq)$ est un treillis complet, alors :*

$i)$ Tout système de fermeture flou $\delta : \wp(S) \longrightarrow L$ sur S est un treillis-sousposet flou ordonné complet du treillis $(\wp(S), \subseteq)$.

$ii)$ Tout sous-système de fermeture flou $\sigma : C \longrightarrow L$ de C est un treillis-sousposet flou ordonné complet du treillis $(C, \subseteq)$.

Preuve. Conséquence direct des théorème 2.5.2 et théorème 2.5.5. tout système de fermeture classique est un treillis complet ordonné par l'inclusion. En effet **:**

$i)$ Soit $\delta : \wp(S) \longrightarrow L$ $(S \neq \phi)$ un système de fermeture sur S. Alors d'après le théorème 2.5.2 tout les *α-coupes* de δ sont des systèmes de fermeture classiques, sachant que tout système de fermeture classique est un treillis complet. D'où, δ est un treillis-sousposet flou ordonné complet du treillis $(\wp(S), \subseteq)$.

$ii)$ Soit C un sous-système de fermeture sur un ensemble non-vide S, et $\sigma : C \longrightarrow L$ un sous-système de fermeture de C. Alors, d'après le théorème 2.5.5 (Tous les *α-coupes* de σ sont des sous-système de fermeture classique) et sachant que tout sous système de fermeture classique est un treillis complet du treillis $(\wp(S), \subseteq)$.

D'où, σ est un treillis-sousposet flou ordonné complet. ■

Exemple 2.6.4 Il est facile de vérifier que les δ_α de l'exemple 2.5.6 sont des treillis complets, donc $(\delta, \subseteq)$ est un treillis-sousposet flou ordonné (treillis de sous ensembles flous partiellement ordonnes) complet du treillis boolien $(\wp(S), \subseteq)$.

Proposition 2.6.5 *Un système de fermeture flou $\delta : \wp(S) \longrightarrow L$ est un treillis flou complet si et seulement si δ est une topologie floue.*

Preuve.

($\Rightarrow$)

Soit $\delta : \wp(S) \longrightarrow L$ un système de fermeture flou sur un ensemble non vide S. On suppose que δ est un treillis flou complet. On veut montrer que δ est une topologie floue.

i) D'après le lemme 2.5.1 on a : $\delta(S) = 1$.

ii) Soient $X_1, X_2 \in \wp(S)$, par définition du treillis flou complet on a : $\delta(X_1 \cap X_2) \geq \delta(X_1) \bigwedge \delta(X_2)$.

iii) Soit $\{X_i/i \in I\}$ une famille de S, donc par définition du treillis flou complet on a : $\delta\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \geq \bigwedge\limits_{i\in I} \delta(X_i)$.

D'après, $i), ii), iii)$ δ est une topologie floue.

($\Leftarrow$)

Soit $\delta : \wp(S) \longrightarrow L$ un système de fermeture flou sur un ensemble non-vide S. On suppose que δ est une topologie floue.

(i) Pour toute famille $\{X_i/i \in I\}$ de S, $\delta\left(\bigcap\limits_{i\in I} X_i\right) \geq \bigwedge\limits_{i\in I} \delta(X_i)$ (De la définition du système de fermeture flou).

(ii) Soit $\{X_i/i \in I\} \subseteq \wp(S)$ On a : $\delta\left(\bigcup_{i\in I} X_i\right) \geq \bigwedge\limits_{i\in I} \delta(X_i)$ (De la définition de la topologie floue).

D'après, (i) , (ii) , δ est un treillis flou complet. ■

2.7 Isomorphisme entre structures floues ordonnées (système de fermeture, treillis complet)

Dans ce qui suit, nous définissons la notion d'isomorphisme avec l'introduction des structures d'ordre flou. Soient $(M, \leq)$, $(N, \leq)$ et $(L, \leq)$ des treillis, dont L est complet et soient $\mu : M \longrightarrow L$ et $\nu : N \longrightarrow L$ deux L-sousposets flous ordonnés de M et N respectivement. Alors, on dit que μ et ν sont isomorphe, s'il y a un isomorphisme $\psi : M \longrightarrow N$ tel que pour tout $\alpha \in L$ la restriction de ψ sur μ_α(α-coupes) est un isomorphisme de μ_α dans ν_α. Comme un treillis flou est un cas particulier de L-sous-poset flou ordonné.

La notion d'isomorphisme ci-dessus reste vraie pour le cas des treillis flous [15].

Théorème 2.7.1 [15] *Soient $(M, \leq), (L, \leq)$ deux treillis complets et C_M le système de fermeture constitué de tous les idéaux principaux engendrés par les éléments de M (Comme dans le lemme.1.5.4), et soit $\mu : M \longrightarrow L$ un L-treillis flou complet, alors l'application $\varphi : C_M \longrightarrow L$ définie par : pour tout $x \in M$, $\varphi(\downarrow x) = \mu(x)$, est un sous système de fermeture de C_M. De plus φ est isomorphe à μ (Treillis flou).*

Preuve.

Soit $\mu : M \longrightarrow L$ un L-treillis flou complet et $\varphi : C_M \longrightarrow L$ tel que $\varphi(\downarrow x) = \mu(x)$, φ est bien définit car pour tout $x, y \in M$,

$\downarrow x = \downarrow y \;\Rightarrow\; x = y \;\Rightarrow\; \mu(x) = \mu(y) \;\Rightarrow\; \varphi(\downarrow x) = \varphi(\downarrow x)$.

Soit $\{X_i / i \in I\}$ une famille de C_M. Il est claire que $X_i = \downarrow x_i$ pour une famille $\{x_i / i \in I\} \subseteq M$. Alors,

$$\begin{aligned}
\bigwedge_{i\in I} \varphi(X_i) &= \bigwedge_{i\in I} \varphi(\downarrow x_i) \\
&= \bigwedge_{i\in I} \mu(x_i) \\
&\leq \mu(\wedge_{i\in I} x_i) \\
&= \varphi(\downarrow (\wedge_{i\in I} x_i)) \\
&= \varphi((\cap_{i\in I} \downarrow x_i)) \text{ (Car } \downarrow (\wedge_{i\in I} x_i) = \cap_{i\in I} \downarrow x_i) \\
&= \varphi((\cap_{i\in I} X_i)).
\end{aligned}$$

Donc, φ est sous-système de fermeture flou de C_M. De plus, dans un treillis flou complet on a : $(\varphi(1_M) = 1_L) \Leftrightarrow (\varphi(M) = 1_L)$. Pour démontrer la deuxième partie, on remarque que l'application f de M dans C_M défini comme suit, $f(x) = \downarrow x$ pour tout $x \in M$ est un isomorphisme de M dans le système de fermeture C_M, qui est un treillis complet ordonné par l'inclusion (D'après le lemme 1.5.4). Pour tout $\alpha \in L$ la restriction de f à μ_α $\left(f/_{\mu_\alpha}\right)$ est un isomorphisme de μ_α dans φ_α.

En effet :

1) Montrons que $f/_{\mu_\alpha}$ est injective.

Pour tout $x, y \in \mu_\alpha,\ x \neq y \implies \downarrow x \neq \downarrow y \implies f/_{\mu_\alpha}(x) \neq f/_{\mu_\alpha}(y)$.

Alors, $f/_{\mu_\alpha}$ est injective.

2) Montrons que $f/_{\mu_\alpha}$ est surjective.

Pour tout $\downarrow y \in \varphi_\alpha : \exists ? x \in \mu_\alpha$ tel que $f/_{\mu_\alpha}(x) = \downarrow y$.

Soit $\downarrow y \in \varphi_\alpha,\ f/_{\mu_\alpha}(x) = \downarrow y \Leftrightarrow \downarrow x = \downarrow y \Leftrightarrow x = y$.

On va montrer que $y \in \mu_\alpha$.

$\downarrow y \in \varphi_\alpha \Leftrightarrow \varphi(\downarrow y) \geq \alpha \Leftrightarrow \mu(y) \geq \alpha \Leftrightarrow y \in \mu_\alpha$.

Il suffit Donc de prendre $x = y$, alors $f/_{\mu_\alpha}$ est surjective.

De 1), 2) $f/_{\mu_\alpha}$ est bijective $\forall \alpha \in L$.

Montrons que

$$\begin{cases} f/_{\mu_\alpha}(x \wedge y) & = & f/_{\mu_\alpha}(x) \bigwedge f/_{\mu_\alpha}(x) \ ; \\ & \text{et} & \\ f/_{\mu_\alpha}(x \vee y) & = & f/_{\mu_\alpha}(x) \bigvee f/_{\mu_\alpha}(x) . \end{cases}$$

Soit $x, y \in \mu_\alpha$, alors, $x \wedge y \in \mu_\alpha$, $x \vee y \in \mu_\alpha$ (Car μ_α est un treillis).

Alors, $f/_{\mu_\alpha}(x \wedge y) = \downarrow(x \wedge y) = \downarrow x \cap \downarrow y = f/_{\mu_\alpha}(x) \bigwedge f/_{\mu_\alpha}(y)$. et

$$\begin{aligned} f/_{\mu_\alpha}(x \vee y) &= \downarrow(x \vee y) \\ &= \bigcap \{\downarrow c \in C_M / \downarrow x \cup \downarrow y \subset \downarrow c\} \\ &= \downarrow x \bigvee \downarrow y \\ &= f/_{\mu_\alpha}(x) \bigvee f/_{\mu_\alpha}(y) . \end{aligned}$$

et on a :

$1_M \in \mu_\alpha$ et $\forall \alpha \in L,\ f/_{\mu_\alpha}(1_M) = \downarrow 1_M = M = 1_{C_M} \in \varphi_\alpha\ \forall \alpha \in L$.

Donc, $f/_{\mu_\alpha}$ est un isomorphisme de μ_α dans φ_α pour tout $\alpha \in L$, par conséquent μ est isomorphisme à υ. ■

Corollaire 2.7.2 *Pour tout treillis flou complet μ, il y a un système de fermeture C tel que μ soit isomorphe à un sous-système de fermeture flou.*

Preuve.

Soit $\mu : M \longrightarrow L$ un treillis flou complet et C un système de fermeture. On prend C=$C_M = \{\downarrow x / x \in M\}$, donc il y a un sous-système de fermeture flou

$$\begin{array}{lccc} \sigma : & C_M & \longrightarrow & L \\ & x & \longrightarrow & \sigma(\downarrow x) = \mu(x) \end{array}$$

D'après le théorème 2.7.1 il y a un isomorphisme $f : \mu \longrightarrow \sigma$ tel que $f(x) = \downarrow x$.

D'où, μ est isomorphisme à σ. ■

Chapitre 3

Relations d'équivalence multivalentes et relations d'ordre vagues

Résumé

On donne tout d'abord quelques définitions concernant les relations d'équivalence multivalentes, les opérations vagues et leurs propriétés. Nous définirons les ordres flous -basé sur une similarité (relation d'équivalence). Leurs représentations, ont complètement été considérées sur la base d'un treillis en particulier (iccqm-treillis), $([0,1], \leq, *)$(voire [5], [6]). Dans cette section, nous donnons l'ordre floue et quelques résultats centraux dans un iccqm-treillis générale, $M = (L, \leq, *)$ [8].

Contenu

3.1 Définitions et propriétés

On appelle un quasi monoïd-treillis intégrale, commutatif et complet (brièvement iccqm-treillis), le triplet $M = (L, \leq, *)$ *vérifiant les axiomes suivants :*

1. $(L, \leq, \wedge, \vee)$ *est un treillis complet avec un plus petit élément noté* 0 *et un plus grand élément noté* 1, *avec* $0 \neq 1$.
2. $(L, *)$ *est un monoïde commutatif avec l'élément d'identité est* 1.
3. *L'opération* $*$ *vérifie l'implication suivante :*
   $(\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in L) \left[(\alpha_1 \leq \alpha_2 \text{ et } \beta_1 \leq \beta_2) \Rightarrow (\alpha_1 * \beta_1 \leq \alpha_2 * \beta_2)\right].$

Dans la section qui suit, on suppose que le triplet fixe $M = (L, \leq, *)$ *représente un iccqm-treillis qui forme la base de la logique multivalente de la théorie des treillis vagues [7]. On note par* $\wedge, \vee, 0, 1$ *pour l'inf (infimum) , sup (supremum), le plus petit élément et le plus grand élément respectivement. Un iccqm-treillis* $M = (L, \leq, *)$ *enrichi d'un opérateur binaire* $(\rightarrow)$ *sur* L *(appelé opérateur résiduel) vérifiant la propriété de l'adjonction.* (AD) $\alpha * \beta \leq \gamma \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \rightarrow \gamma, \forall \alpha, \beta, \gamma \in L$, *est appelé un intégral commutatif cl-monoïde (brièvement iccl-monoïde) [11]. Dans un iccl-monoïde* $M = (L, \leq, *)$ *l'opération monoïdal* $*$ *est distributive sur des supremums arbitraires c'est-à-dire pour tout sous ensemble* $\{\beta_i / i \in I\}$ *de* L, *et pour tout* $\alpha \in L$ *on a l'égalité,* $\alpha * (\vee_{i \in I} \beta_i) = \vee_{i \in I} (\alpha * \beta_i)$.

Dans un iccl-monoïde $M = (L, \leq, *)$ *la propriété d'adjonction garantit l'unicité de l'opérateur résiduel, et l'opérateur résiduel* $\rightarrow$ *est explicitement donné par,*
$\alpha \rightarrow \beta = \vee \{\gamma \in L / \alpha * \gamma \leq \beta\}$ $\forall \alpha, \beta \in L$.

Les deux relations suivantes sont les deux propriétés les plus utilisées dans ce qui est suit,
1) $\alpha \rightarrow \beta = 1 \Leftrightarrow \alpha \leq \beta$ $\forall \alpha, \beta \in L$.
2) $\alpha = 1 \rightarrow \alpha$ $\forall \alpha \in L$.

Proposition 3.1.1 [3],[11] *Dans un iccl-monoïde,* $M = (L, \leq, *)$ *les propriétés suivantes sont valides :*
(i) $\alpha * (\alpha \rightarrow \beta) \leq \beta$ $\forall \alpha, \beta \in L$.

(ii) L'opérateur résiduel $\rightarrow$ n'est pas croissant dans le premier cas et n'est pas décroissant dans le second cas, car pour tout $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in L$,

$[\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow (\alpha_2 \rightarrow \beta_1 \leq \alpha_1 \rightarrow \beta_1)]$ *et* $[\beta_1 \leq \beta_2 \Rightarrow (\alpha_1 \rightarrow \beta_1 \leq \alpha_1 \rightarrow \beta_2)]$.

(iii) $(\alpha \rightarrow \beta) * \gamma \leq \alpha \rightarrow (\beta * \gamma)\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in L$.

Si $(L, \leq, *)$ satisfait la propriété additionnelle de divisibilité ou les lois algébriques de De Morgan fortes au sens [11], alors on a,

(iv) $\alpha * (\beta \wedge \gamma) = (\alpha * \beta) \wedge (\alpha * \gamma)\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in L$.

Preuve.

$i)$ On a : $\forall \alpha, \beta \in L\ \ \alpha \rightarrow \beta \leq \alpha \rightarrow \beta \ \Rightarrow\ (\alpha \rightarrow \beta) * \alpha \leq \beta \ \Rightarrow\ \alpha * (\alpha \rightarrow \beta) \leq \beta$.

$ii)$ On va montrer que $\forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \in L,\ \alpha_1 \leq \alpha_2 \ \Rightarrow\ (\alpha_2 \rightarrow \beta_1 \leq \alpha_1 \rightarrow \beta_1)$.

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \in L$ tel que $\alpha_1 \leq \alpha_2$,on a :

$$\begin{cases} \alpha_1 \leq \alpha_2 \\ \quad et \\ \gamma \leq \gamma \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 * \gamma \leq \alpha_2 * \gamma.$$

Soit, $\gamma \in \{\gamma \in L/\ \alpha_2 * \gamma \leq \beta_1\}$, alors, $\alpha_2 * \gamma \leq \beta_1$, donc, $\alpha_1 * \gamma \leq \alpha_2 * \gamma \leq \beta_1$.

D'où, $\gamma \in \{\gamma \in L/\ \alpha_1 * \gamma \leq \beta_1\}$.

Alors, $\{\gamma \in L/\ \alpha_2 * \gamma \leq \beta_1\} \subset \{\gamma \in L/\ \alpha_1 * \gamma \leq \beta_1\}$.

Donc, $\vee \{\gamma \in L/\ \alpha_2 * \gamma \leq \beta_1\} \leq \vee \{\gamma \in L/\ \alpha_1 * \gamma \leq \beta_1\}$.

D'où, $(\alpha_2 \rightarrow \beta_1 \leq \alpha_1 \rightarrow \beta_1)$.

On va montrer que $\forall \alpha_1, \beta_1, \beta_2 \in L,\ \beta_1 \leq \beta_2 \ \Rightarrow\ (\alpha_1 \rightarrow \beta_1 \leq \alpha_1 \rightarrow \beta_2)$.

Soient $\alpha_1, \beta_1, \beta_2 \in L$, tel que $\beta_1 \leq \beta_2$, et soit $\gamma \in \{\gamma \in L/\ \alpha_1 * \gamma \leq \beta_1\}$,

alors $\alpha_1 * \gamma \leq \beta_1 \leq \beta_2$, donc, $\gamma \in \{\gamma \in L/\alpha_1 * \gamma \leq \beta_2\}$,

alors $\{\gamma \in L/\ \alpha_1 * \gamma \leq \beta_1\} \subset \{\gamma \in L/\ \alpha_1 * \gamma \leq \beta_2\}$,

alors $\vee \{\gamma \in L/\ \alpha_1 * \gamma \leq \beta_1\} \leq \vee \{\gamma \in L/\ \alpha_1 * \gamma \leq \beta_2\}$.

D'où, $(\alpha_1 \rightarrow \beta_1 \leq \alpha_1 \rightarrow \beta_2)$.

$iii)$ On va montrer que $(\alpha \rightarrow \beta) * \gamma \leq \alpha \rightarrow (\beta * \gamma)\ \forall \alpha, \beta, \gamma \in L$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in L$.

D'après (i) on a : $\alpha * (\alpha \rightarrow \beta) \leq \beta$, alors $(\alpha * (\alpha \rightarrow \beta)) * \gamma \leq \beta * \gamma$,

donc $((\alpha \rightarrow \beta) * \gamma) * \alpha \leq \beta * \gamma$ car($*$ est associative)

D'où, $(\alpha \to \beta) * \gamma \leq \alpha \to (\beta * \gamma)$. (D'après (AD)).

(iv) [11]. ■

3.2 Relations d'équivalence multivalentes

Dans tout ce qui suit, on prend un iccqm-treillis particulier $M = ([0,1], \preceq, *)$ tel que, $\preceq$ est l'ordre usuel dans $\mathbb{R}$ et $*$ une t-norme. Pour un ensemble non vide X, une fonction $\mu : X \longrightarrow L$ est appelé un sous-ensemble flou sur X. L'ensemble de tous les sous-ensembles flous sur X est noté par L^X. La fonction caractéristique $\mathbf{1}_A$ de l'ensemble classique A de X est donnée par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ \text{et} & \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

$\mathbf{1}_A$ est un cas particulier d'un ensemble flou de X. Pour deux ensembles non vides X et Y, un ensemble flou $\rho \in L^{X \times Y}$ est appelé une relation floue de X vers Y ou simplement relation floue. Une application $E : X \times X \longrightarrow L$ (Un L-ensemble flou de $X \times X$) est appelée une relation M-équivalence sur X, [7] si est seulement si les trois axiomes suivants sont vérifiés :

$(E1)$ $E(x,x) = 1$, $\forall x \in X$,

$(E2)$ $E(x,y) = E(y,x)$,$\forall x, y \in X$,

$(E3)$ $E(x,y) * E(y,z) \leq E(x,z)$, $\forall x, y, z \in X$.

Une relation M-équivalence E sur X est dite séparable (c'est à dire M- égalité) si l'implication suivante est vérifiée :

$E(x,y) = 1 \Rightarrow x = y$ pour tout $x, y \in X$.

En particulier, si $M = (L, \leq, *)$ est un iccqm-treillis, une relation M-équivalence sur X est aussi appelée une relation de similarité, M-valente sur X [10],ou une M-équivalence ou une relation d'égalité sur X au sens de la relation$*$. L'égalité classique sur X est caractérisée par la M-égalité $E_X^c : X \times X \longrightarrow \{0,1\}$ donné par,

$$E_X^c(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = y; \\ & \text{et} \\ 0 & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

pour tout $x, y \in X$. Et E_X^c est la plus petite M-égalité. Pour une relation d'équivalence E sur X donnée et $x \in X$, l'ensemble L-flou $[x]_E$ de X défini par, $[x]_E(y) = E(x,y)$ $\forall y \in X$, est appelé hall extensionnel de x au sens de la relation E.

Définition 3.2.1 [7] *Soient E et F deux relations M-équivalence sur X et Y respectivement.*

(i) *Une fonction ordinaire $f : X \longrightarrow Y$ est dite extensionnelle au sens de la relation E et F si et seulement si $E(x,y) \leq F(f(x), f(y))$ $\forall x, y \in X$.*

(ii) *Une relation floue $\rho \in L^{X\times Y}$ est appelée une fonction floue forte de X vers Y au sens de la relation E et F, si et seulement si ρ satisfait les conditions suivantes :*

$(F.1)$ $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$ *tel que* $\rho(x,y) = 1$.

$(F.2)$ $\rho(x,y) * \rho(x',y') * E(x,x') \leq F(y,y')$, $\forall x, x' \in X, \forall y, y' \in Y$.

(iii) *Une relation floue $\rho \in L^{X\times Y}$ est appelée une fonction floue parfaite de X vers Y au sens des relations E et F, si et seulement si ρ vérifie les conditions suivantes :*

$(F.1)$ $\forall x \in X$, $\exists y \in Y$ *tel que* $\rho(x,y) = 1$,

$(EX.1)$ $\rho(x,y) * E(x,x') \leq \rho(x',y)$ (Extensionalité de ρ au sens de la relation E),

$(EX.2)$ $\rho(x,y) * F(y,y') \leq \rho(x,y')$ (Extensionalité de ρ au sens de la relation F),

(PF) $\rho(x,y) * \rho(x,y') \leq F(y,y')$,

pour tout $x, x\prime \in X$ et $\forall y, y' \in Y$.

(iv) *Pour une fonction donnée $f : X \longrightarrow Y$ extensionnel au sens des relations E et F, la fonction floue parfaite $\rho \in L^{X\times Y}$ au sens des relations E et F donnée par la formule, $\rho(x,y) = F(f(x), y)$ $\forall x \in X, \forall y \in Y$, est appelée E-F description vague de f et notée par $vag(f)$.*

(v) *Pour une fonction floue forte donnée $\rho \in L^{X\times Y}$ au sens des relations E et F. La fonction ordinaire $f : X \longrightarrow Y$ est extensionnel au sens des relations E et F, satisfait les conditions suivantes :*

$\rho(f(x), x) = 1$ et $\rho(x, y) \leq F(f(x), y), \forall x \in X, \forall y \in Y$ est appelée une description ordinaire de ρ. L'ensemble de toutes les descriptions ordinaires de ρ est noté par $ORD(\rho)$.

Une fonction floue ρ de X dans Y au sens des relations M-équivalence E sur X et F sur Y, peut être définie comme une relation floue $\rho \in L^{X \times Y}$ satisfaisant $(F.2)$ et $(F.1\prime)$ tel que :
$(F.1\prime)$ Pour tout $x \in X$ $\exists y \in Y : \rho(x, y) > 0$. Puisque la condition $(F.1)$ est plus forte que $(F.1\prime)$. Une fonction floue forte est clairement une fonction floue. Cette réalité justifie le sens de la fonction floue forte, donc la fonction floue forte possède plus de propriétés mathématiques souhaitables que les fonctions floues [7]. Nous nous intéressons aux fonctions floues fortes au lieu des fonctions floues, donc les fonctions floues parfaites forment une sous-classe de fonctions floues fortes et diffèrent de fonctions floues fortes seulement par la condition $(EX.2)$ [7]. Une relation floue ρ de X vers Y associe à tout élément $x \in X$ l'ensemble flou ρ_x de Y définie par : $\rho_x(y) = \rho(x, y), \forall y \in Y$.

Dans la définition 3.2.1, et pour éviter la possibilité de confusion sur les descriptions ordinaires de fonctions floues fortes, de temps en temps, il est utile de mentionner les relations M-équivalence E et F sur la description ordinaire de la fonction floue forte. Pour cette raison une description ordinaire de ρ sera appelée une description ordinaire de ρ au sens des relations E et F et $ORD(\rho)$ sera représentée comme $ORD_{(E,F)}(\rho)$. Parallèlement le E-F description floue ($vag\ (f)$) sera notée par $vag_{(E,F)}(f)$. Une relation floue $\rho \in L^{X \times Y}$ satisfait la condition suivante : Pour tout $x \in X$, $\exists y \in Y$, $\rho(x, y) = 1$, sera appelée une M- fonction de X dans Y. La notation M- fonction $\rho \in L^{X \times Y}$ de X dans Y est un peu faible que F-fonction, (ρ une relation floue de X dans Y vérifie la condition suivante : pour tout $x \in X$, $\exists! y \in Y : \rho(x, y) = 1$). Soit $\rho \in L^{X \times Y}$ une M-fonction de X dans Y et E une relation M-équivalence sur X. Il est facile de trouver une fonction ordinaire $f : X \longrightarrow Y$ avec la propriété suivante, $\rho(x, f(x)) = 1$ pour tout $x \in X$. De plus étant donné la relation M-équivalence $\mathbf{1}_{Y \times Y}$ sur Y et puisque la fonction $f : X \longrightarrow Y$ est extensionnelle au sens des relations E et $\mathbf{1}_{Y \times Y}$ nous tirons directement de $[[7]-$ théorème4.10 $]$ que ρ est une fonction floue forte au sens des relations E et $\mathbf{1}_{Y\times Y}$ et la fonction $f:X\longrightarrow Y$ est une description ordinaire du M-fonction au sens de la relation $\mathbf{1}_{Y\times Y}$ c'est-à -dire $f\in ORD_{(E,\mathbf{1}_{Y\times Y})}(\rho)$. Ainsi tout M-fonction est un genre spécial d'une fonction ordinaire. Pour une fonction ordinaire $f:X\longrightarrow Y$ vérifie la condition $\rho(x,f(x))=1$ pour tout $x\in X$ est appelée la partie classique de ρ, et l'ensemble de toutes les parties classiques de ρ sera noté par $CR(\rho)$.

Remarque 3.2.2

(i) Si une fonction floue forte $\rho\in L^{X\times Y}$ au sens des relations E et F possède une unique description ordinaire on la note simplement par $ord_{(E,F)}(\rho)$ c'est-à-dire $ORD_{(E,F)}(\rho)=\left\{ord_{(E,F)}(\rho)\right\}$. Etant donné une fonction floue forte $\rho\in L^{X\times Y}$au sens des relations E et F, si la relation M-équivalence F sur Y est séparable alors ρ possède une unique description ordinaire $ord_{(E,F)}(\rho)$ au sens des relations E et F , [7].

(ii) Soit la fonction floue forte $\rho\in L^{X\times Y}$ au sens des relations E et F, une fonction extensionnelle $g:X\longrightarrow Y$ au sens des relations E et F telle que $\rho(x,g(x))=1$, $\forall x\in X$, donc g est une description ordinaire de ρ au sens des relations E et F c'est-à-dire $g\in ORD_{(E,F)}(\rho)$ $[[7],$ théorème 4.10$]$. De plus si $\rho\in L^{X\times Y}$ est une fonction floue parfaite au sens des relations E et F, il est facile d'obtenir $\rho=vag_{(E,F)}(g)$ $[[7],$ théorème 4.11$]$.

Définition 3.2.3 [8]

(i) Une M-fonction $\tilde{o}$ de $X\times X$ dans X est appelé une opération binaire sur X.

(ii) Pour une relation M-équivalence p sur $X\times X$, une fonction floue forte (fonction floue parfaite) $\tilde{o}$ de $X\times X$ vers X au sens des relations p et E est appelée une M-opération binaire vague (M-opération binaire vague parfaite) sur X au sens des relations p et E.

Une M-opération binaire $\tilde{o}$ sur X est clairement une M-opération binaire vague sur X, au sens de tout relation M-équivalence p sur $X\times X$ et la relation M-équivalence $\mathbf{1}_{X\times X}$ sur X, c'est-à -dire il existe une opération binaire classique o sur X avec la propriété $o\in ORD_{(p,\mathbf{1}_{X\times X})}(\tilde{o})$, c'est-à -dire $o\in CR(\tilde{o})$. Dans le présent travail, pour une relation floue $\tilde{o}\in L^{(X\times X)\times X}$ sur X et pour tout $x,y,z\in X$, pour simplifier, l'élément $\tilde{o}((x,y),z)$

de L sera noté par $\tilde{o}\,(x,y,z)$.

Définition 3.2.4 [8] *Pour une relation M-équivalence P sur $X \times X$ et E sur X, soit $\tilde{o}$ une M-opération binaire vague sur X au sens des relations p et E. Alors*

i) $\tilde{o}$ est associative si et seulement si $\tilde{o}$ vérifie

(VAS) $(\forall a,b,c,d,m,q;w \in X)$,

$((\tilde{o}\,(b,c,d) * \tilde{o}\,(a,d,m) * \tilde{o}\,(a,b,q) * \tilde{o}\,(q,c,w)) \leq E\,(m,w))$.

ii) $\tilde{o}$ est dite abélienne (commutative) si et seulement si $\tilde{o}$ satisfait,

$(VCM)\,(\forall a,b,m,w \in X)\ \tilde{o}\,(a,b,m) * \tilde{o}\,(a,b,w) \leq E\,(m,w)$.

iii) $\tilde{o}$ est dite abélienne forte (commutative forte) si et seulement si $\tilde{o}$ satisfait l'égalité,

$(SCM)\ \tilde{o}\,(a,b,m) = \tilde{o}\,(b,a,m)\,(\forall a,b,m \in X)$.

Dans le cas classique, l'associativité et la commutativité sont données par les implications suivantes :

$(AS)(\forall a,b,c,d,m,q,w \in X)\,(b \circ c = d$ et $a \circ d = m$ et $a \circ b = q$ et $q \circ c = w) \Rightarrow m = w$.

$(CM)\ \ (\forall a,b,m,w \in X)\ (\ a \circ b = m$ et $b \circ a = w) \Rightarrow m = w$.

La commutativité de $\circ$ peut s'exprimer à l'aid une bi-implication.

$(CM')\ \ (\forall a,b,m,\in X)\ (\ a \circ b = m \Leftrightarrow b \circ a = m)$.

3.3 Relations d'ordre vagues basés sur des relations d'équivalence multivalentes

L'ordre flou -basé sur une similarité et sa représentation est étudié sur la base d'un treillis en particulier (iccqm-treillis), $([0,1], \preceq, *)$. Dans cette section, l'ordre flou et quelques résultats essentiels en [5], [6] sont étendu en un général (iccqm-treillis), $M = (L, \leq, *)$ [8].

Définition 3.3.1 [8] *Soit E une relation M-équivalence.*

i) Une relation floue $\widetilde{\leqslant} \in L^{X\times X}$sur X est dite une relation d'ordre partiel vague sur X, au sens de la relation M-équivalence E (brièvement M-E-ordre partiel sur X) si elle satisfait les conditions suivantes :

$(VP1)$ $E(x,y) \leq \widetilde{\leqslant}(x,y)\, \forall x,y \in X$ *(E-réflexivité),*

$(VP2)$ $\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,x) \leq E(x,y)\, \forall x,y \in X$ *(E-antisymétrie),*

$(VP3)$ $\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) \leq \widetilde{\leqslant}(y,z)\, \forall x,y,z \in X$ *(transitivité).*

ii) Si une relation floue $\widetilde{\leqslant} \in L^{X\times X}$ sur X satisfait seulement les conditions $(VP1)$ et $(VP3)$ elle est dite M-E-préordre sur X.

iii) Un M-E-ordre partiel $\widetilde{\leqslant} \in L^{X\times X}$ sur X est dite ordre linéaire vague sur X, au sens de la relation M-équivalence E (brièvement M-E-ordre linéaire sur X)si et seulement si la condition suivante est satisfaite :

$(VP4)$ $\widetilde{\leqslant}(x,y) = 1$ *ou* $\widetilde{\leqslant}(y,x) = 1\ \forall x,y \in X.$

(iv) Un M-E-ordre partiel (linéaire) sur X donné alors le couple ordonné $(X, \widetilde{\leqslant})$ est dit une ensemble M-E- partiellement (linéairement) ordonné.

Dans le cas particulier $M = ([0,1], \preceq, *)$, un M-E-ordre partiel sur X est appelé une $*$-E-ordre sur X [5],[6]. Si on remplace l'opération monoïdal $*$ sur L par l'opération $\wedge$ sur L dans la condition $(VP2)$, alors on obtient une autre version de la condition de l'antisymétrie appelé la condition de l'antisymétrie forte c'est-à-dire,

(l'antisymétrie forte $\Leftrightarrow \widetilde{\leqslant}(x,y) \wedge \widetilde{\leqslant}(y,x) \leq E(x,y), \forall x,y \in X$).

Si le iccqm-treillis M est entiché est devenu un iccl-monoïde et si la relation M-

équivalence E est une M-égalité sur X alors la relation floue $\widetilde{\leqslant} \in L^{X \times X}$ sur X qui vérifie les conditions $(VP.1), (VP.3)$ et le E-antisymétrie forte est appelé un M-ordre sur X [3]. En réalité La E-antisymétrie forte donne la E-antisymétrie, un M-ordre sur X est un cas particulier de M-E- ordre partiel sur X.

Dans la définition 3.3.1 (ii) la condition $(VP.4)$ implique la condition $(VP.4\prime)$ $\widetilde{\leqslant}(x, y) \vee \widetilde{\leqslant}(y, x) = 1 \ \forall x, y \in X$, mais l'inverse n'est pas vrai en général. Pour $M = ([0,1], \preceq, *)$ la condition $(VP.4')$ implique aussi la condition $(VP.4)$ c'est-à-dire $(VP.4)$ est équivalent à $(VP.4')$. Donc un M-E-ordre linéaire sur X n'est qu'un $*$-E-ordre linéaire fort sur X [5], [6].

Dans le cas bivalent $L = \{0, 1\}$ la relation M-équivalence E sur X et la relation floue $\widetilde{\leqslant}$ sur X correspondent à une relation d'équivalence $\approx$ et une relation binaire classique $\preccurlyeq$ sur X respectivement et les axiomes $(VP.1, VP.2, VP.3, VP.4)$ deviennent respectivement :

$(P.1)$ $x \approx y \Rightarrow x \preccurlyeq y, \forall x, y \in X,$

$(P.2)$ $(x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x) \Rightarrow x \approx y, \forall x, y \in X,$

$(P.3)$ $(x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z) \Rightarrow x \preccurlyeq z, \forall x, y, z \in X,$

$(P.4)$ $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x, \forall x, y \in X.$

Les conditions $(P.3), (P.4)$ sont les propriétés de transitivité et de linéarité de relations binaires classiques respectivement. De plus les propriétés $(P.1), (P.2)$ généralisent les propriétés de la réflexivité et de l'antisymétrie dans la version des relations binaires classiques respectivement, où la relation d'égalité classique "$=$" est remplacé par "$\approx$" . Etant donné une relation d'équivalence $\approx$ sur X, une relation binaire classique $\preccurlyeq$ sur X satisfait les conditions $(P.1)$ et $(P.3)$ (respectivement $(P.1 - P.3)$ et $(P.1 - P.4)$) est appelé un $\approx$-préordre respectivement un $\approx$-ordre partiel et un $\approx$-ordre linéaire) sur X. Pour une relation d'équivalence $\approx$ donnée et une relation binaire classique $\preccurlyeq$ sur X, la condition $(P.1)$ et l'antisymétrie de $\preccurlyeq$ dans le sens classique implique la réflexivité de $\preccurlyeq$ dans le sens classique et la condition $(P.2)$ respectivement, mais l'implication inverse est valable seulement pour le cas où "$\approx$" est "$=$". Donc si "$\approx$" est "$=$" alors un $\approx$-préordre (respectivement un $\approx$-ordre partiel et un $\approx$-ordre linéaire), n'est qu'un préordre classique (respectivement un ordre partiel et un ordre linéaire). Si "$\approx$" n'est pas "$=$" mais seulement une relation d'équivalence sur X, alors un $\approx$-ordre partiel défini un préordre classique mais pas un ordre partiel classique. Un $\approx$-ordre partiel $\preccurlyeq$ donne une relation d'équivalence $\approx_{\preccurlyeq}$sur X définit par :

$(x \approx_{\preccurlyeq} y) \Leftrightarrow (x \preccurlyeq y \text{ et } y \preccurlyeq x), \forall x, y \in X,$

il est clair que $\approx_{\preccurlyeq}$coïncide avec $\approx$. Si $\preccurlyeq$ est un $\approx$-préordre, alors $\approx_{\preccurlyeq}$sera aussi une relation d'équivalence, mais il donne seulement l'inclusion $\approx \subset \approx_{\preccurlyeq}$c'est-à-dire $\approx_{\preccurlyeq}$ n'est pas égale à $\approx$ en général. Un $\approx$-ordre partiel (linéaire) peut être représenté par un ordre partiel (linéaire) classique et la relation d'équivalence $\approx$ (voire le corollaire 3.3.12 et la remarque 3.3.16). Puisque l'$\approx$-ordre partiel (linéaire) correspond à un cas particulier de M-E-ordre partiel (linéaire), premièrement on introduit les propriétés de M-E-ordre partiel (linéaire), et puis appliqué ces résultat sur $\approx$-ordre partiel (linéaire). Pour cet raison il est nécessaire de donner le concept de comparabilité du relation d'équivalence flou avec un ordre partiel classique [5], [6], pour le cas général d'un iccqm-treillis $M = (L, \leq, *)$.

Définition 3.3.2 [8] *Soit E une relation M-équivalence sur X et $\preccurlyeq$ une relation d'ordre partiel classique sur X, la relation E est dite compatible avec $\preccurlyeq$ si est seulement si l'implication suivante :*

(CP) $(\forall x, y, z \in X)\,(x \preccurlyeq y \preccurlyeq z \Rightarrow E\,(x, z) \leq E\,(x, y) \wedge E\,(y, z))$ *est vérifiée.*

Dans le cas bivalente $L = \{0, 1\}$, la compatibilité d'une relation d'équivalence $\approx$ avec un ordre partiel classique, peut être exprimer explicitement comme la satisfaction de l'implication :

$$(\forall x, y, z \in X) \quad (x \preccurlyeq y \ \preccurlyeq z) \quad \Rightarrow \quad [(x \approx z) \Rightarrow ((x \approx y) \text{ et } (y \approx z))] \,.$$

Définition 3.3.3 [Jacas et recasens [12]] *Soit* $M = ([0, 1]\,, \preceq, *)\,.$

i) Un sous-ensemble flou μ de $\mathbb{R}$ est un nombre flou si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\mu\,(a) = 1$ et μ est non décroissante sur $]-\infty, a]$ et non croissante sur $[a, \infty[$.

ii) une relation M-équivalence E sur $\mathbb{R}$ est dite admissible si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, la classe d'équivalence $[x]_E$ de x au sens de la relation E définie par :

$[x]_E(y) = E(x, y), \forall y \in R$, *est un nombre flou.*

Remarque 3.3.4 Soit $M = ([0, 1], \preceq, *)$. Une relation M-équivalence E sur $\mathbb{R}$ est compatible avec l'ordre usuel $\preceq$ sur $\mathbb{R}$ si et seulement si E est une relation M-équivalence admissible sur $\mathbb{R}$.

Théorème 3.3.5 [8] *Soit $\widetilde{\lesseqgtr}$ un M-E-ordre partiel sur X. Le noyau $\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$ de $\widetilde{\lesseqgtr}$ est défini par : $x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} y \Leftrightarrow \widetilde{\lesseqgtr}(x, y) = 1, \forall x, y \in X$, est un préordre classique sur X. De plus, $\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$ est un ordre partiel classique sur X si et seulement si E est séparable. Si E est séparable $\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$ est un ordre linéaire classique sur X si et seulement si $\widetilde{\lesseqgtr}$ est un M-E ordre linéaire sur X.*

Preuve.

$i)$ Montrons que $\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$ est un préordre classique sur X.

Soient $x, y \in X$, $x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} y \Leftrightarrow \widetilde{\lesseqgtr}(x, y) = 1$,on a :

$\widetilde{\lesseqgtr}(x, x) \geq E(x, x) = 1$, donc $\widetilde{\lesseqgtr}(x, x) = 1$, alors $x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} x$, donc $\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$ est réflexive.

Montrons que $\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$ est transitive.

Soient $x, y, z \in X$,

$$\begin{aligned}
x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} y \text{ et } y \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} z \quad &\Rightarrow \quad \widetilde{\lesseqgtr}(x, y) = 1 \text{ et } \widetilde{\lesseqgtr}(y, z) = 1 \\
&\Rightarrow \quad 1 = \widetilde{\lesseqgtr}(x, y) * \widetilde{\lesseqgtr}(y, z) \leq \widetilde{\lesseqgtr}(x, z) \ \ (\text{car} \widetilde{\lesseqgtr} \text{ est transitive}) \\
&\Rightarrow \quad \widetilde{\lesseqgtr}(x, z) = 1 \\
&\Rightarrow \quad x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} z, \text{ donc } \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} \text{ est un préordre.}
\end{aligned}$$

$ii)$ E séparable $\Leftrightarrow$ ($\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$est un ordre partiel).

$(\Rightarrow)$

On suppose que E est séparable, on veut montrer que $\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$est antisymétrique.

Soient $x, y \in X$,

$$\begin{aligned}
x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} y \text{ et } y \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} x \quad &\Rightarrow \quad \widetilde{\lesseqgtr}(x, y) = 1 \text{ et } \widetilde{\lesseqgtr}(y, x) = 1 \\
&\Rightarrow \quad 1 = \widetilde{\lesseqgtr}(x, y) * \widetilde{\lesseqgtr}(y, x) \leq E(x, y) \ \ (\text{car } \widetilde{\lesseqgtr} \text{ est } E\text{-antisymétrique}) \\
&\Rightarrow \quad E(x, y) = 1 \\
&\Rightarrow \quad x = y, \ (\text{car } E \text{ est séparable}).
\end{aligned}$$

Donc, $\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$ est antisymétrique, d'où $\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$ est un ordre partiel.

$(\Leftarrow)$

On va montrer que E est séparable.

E est séparable $\Leftrightarrow [E(x,y)=1 \Rightarrow x=y] \Leftrightarrow [x \neq y \Rightarrow E(x,y) \neq 1]$.

Soient $x,y \in X$, $E(x,y)=1 \Rightarrow x=y$. On a : $1=E(x,y) \leq \widetilde{\leqslant}(x,y)$, donc

$\widetilde{\leqslant}(x,y)=1 \Leftrightarrow x \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} y ......(1)$.

On a : $1=E(y,x) \leq \widetilde{\leqslant}(y,x)$ (Car $E(x,y)=E(y,x)=1$).

Donc, $\widetilde{\leqslant}(y,x)=1 \Leftrightarrow y \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} x .....(2)$.

D'après (1) et (2) on a : $x=y$ (Car $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$ antisymétrique).

Doù, E est séparable.

$iii)$ Si E est séparable, alors ($\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$ est linéaire) $\Leftrightarrow$ ($\widetilde{\leqslant}$ est linéaire).

Soient $x,y \in X$,on suppose que $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$est linéaire.

$$\begin{aligned}
(\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} \text{ est linéaire}) &\Leftrightarrow (x \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} y \text{ ou } y \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} x) \\
&\Leftrightarrow (\widetilde{\leqslant}(x,y)=1 \text{ ou } \widetilde{\leqslant}(y,x)=1) \ . \ \blacksquare \\
&\Leftrightarrow (\widetilde{\leqslant} \text{ est linéaire}).
\end{aligned}$$

Théorème 3.3.6 [8] *Soit $\widetilde{\leqslant}$ un M-E- ordre partiel sur X. Alors il existe un ordre partiel classique $\leqslant$ sur X, tel que E est compatible avec $\leqslant$, et $\leqslant \subseteq \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$. Si $\widetilde{\leqslant}$ est un M-E- ordre linéaire sur X, $\leqslant$ est aussi choisi comme un ordre linéaire classique sur X. De plus $\leqslant$ est maximal au sens qu'il n'existe aucun ordre partiel $\leqslant'$sur X tels que $\leqslant \subseteq \leqslant'$et $\leqslant' \subseteq \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$.*

Preuve.

D'après le théorème 3.3.5 pour tout M-E-ordre $\widetilde{\leqslant}$ sur X, le noyau $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$est un préordre, donc pour tout $x,y \in X$, on définit la relation $\sim$ comme le noyau symétrique de $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$qui est une relation d'équivalence.

$x \sim y \Leftrightarrow \widetilde{\leqslant}(x,y)=1$ et $\widetilde{\leqslant}(y,x)=1 \Leftrightarrow x \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} y \wedge y \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} x$.

En effet :

Pour tout $x \in X$, $\widetilde{\leqslant}(x,x)=1 \Leftrightarrow x \sim x$ donc $\sim$ est réflexive.

Pour tout $x,y \in X$,

$$\begin{aligned}
x \sim y &\Leftrightarrow \widetilde{\leqslant}(x,y)=1 \text{ et } \widetilde{\leqslant}(y,x)=1 \\
&\Leftrightarrow \widetilde{\leqslant}(y,x)=1 \text{ et } \widetilde{\leqslant}(x,y)=1 \\
&\Leftrightarrow y \sim x.\text{d'où } \sim \text{ est symétrique.}
\end{aligned}$$

Pour tout $x,y,z \in X$,

$$\left\{\begin{array}{c} x \sim y \\ \text{et} \\ y \sim z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \widetilde{\leqslant}(x,y)=1 \text{ et } \widetilde{\leqslant}(y,x)=1 \\ \text{et} \\ \widetilde{\leqslant}(y,z)=1 \text{ et } \widetilde{\leqslant}(z,y)=1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \widetilde{\leqslant}(x,y)=1 \text{ et } \widetilde{\leqslant}(y,z)=1 \\ \text{et} \\ \widetilde{\leqslant}(z,y)=1 \text{ et } \widetilde{\leqslant}(y,x)=1 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \widetilde{\leqslant}(x,z)=1 \text{ et } \widetilde{\leqslant}(z,x)=1 \text{ d'après la transitivité de } \widetilde{\leqslant}$$

$$\Rightarrow x \sim z.$$

Donc, $\sim$ est transitive.

D'où $\sim$ est une relation d'équivalence.

Un résultat fondamental qui vient de l'axiome de choix, chaque ensemble peut être ordonné linéairement. De plus il est possible de trouver un ordre linéaire pour tout classe d'équivalence au sens de $\sim$. L'ordre de toute classe d'équivalence $\langle x\rangle$ est noté par $\leqslant_x$. On définit la relation $\leqslant$ comme suit, pour tout $x, y \in X$,

$$x \leqslant y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} x \leqslant_x y & \text{si } x \sim y \\ x \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} y & \text{si } x \nsim y \end{array}\right. \quad \ldots\ldots\ldots\, (*)$$

On va montrer que $\leqslant$ est un ordre.

$i)$ La réflexivité est évidente.

$ii)$ L'antisymétrie.

Soient $x, y \in X$,on va montrer que $(x \leqslant y \; et \; y \leqslant x) \Rightarrow x = y$

1) Si $x \sim y$, donc $(x \leqslant y$ et $y \leqslant x) \Rightarrow (x \leqslant_x y$ et $y \leqslant_x x) \Rightarrow x = y$ (car $\leqslant_x$ est une ordre linéaire).

2) Si $x \nsim y$,

$$\begin{aligned} (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) &\Rightarrow (x \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} y \text{ et } y \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} x) \\ &\Rightarrow (\widetilde{\leqslant}(x,y)=1 \text{ et } \widetilde{\leqslant}(y,x)=1) \\ &\Rightarrow x \sim y \text{ contraction.} \end{aligned}$$

$iii)$ On va montrer que $\leqslant$ est transitive.

Soient $x, y, z \in X$ tel que $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$, il y a 4 possibilités.

$a)$ $x \sim y$ et $y \sim z$, donc x, y, z appartenant a $\langle x\rangle$.

Donc, $(x \leqslant y$ et $y \leqslant z) \Rightarrow (x \leqslant_x y$ et $y \leqslant_x z) \Rightarrow (x \leqslant_x z) \Rightarrow (x \leqslant z)$.

$b)$ $x \sim y$ et $y \nsim z$, donc $x \nsim z$.

Pour montrer que $x \leqslant z$ il suffit de montrer que $\widetilde{\lesseqgtr}(x,z) = 1$(Car $\widetilde{\lesseqgtr}$ est $*$-transitive), on a : $1 = \widetilde{\lesseqgtr}(x,y) * \widetilde{\lesseqgtr}(y,z) \leq \widetilde{\lesseqgtr}(x,z) \leq 1$ (Par définition de $\sim$ et $\leqslant$)

Donc, $\widetilde{\lesseqgtr}(x,z) = 1$, alors $x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} z$.

D'où $x \leqslant z$.

$c)$ $x \nsim y$ et $y \sim z$, donc, $x \nsim z$.

Pour montrer que $x \leqslant z$ il suffit de montrer que $\widetilde{\lesseqgtr}(x,z) = 1$, (Car $\widetilde{\lesseqgtr}$ est $*$-transitive), on a : $1 = \widetilde{\lesseqgtr}(x,y) * \widetilde{\lesseqgtr}(y,z) \leq \widetilde{\lesseqgtr}(x,z) \leq 1$, donc, $\widetilde{\lesseqgtr}(x,z) = 1$, alors $x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} y$.

D'où $x \leqslant z$.

$d)$ $x \nsim y$ et $y \nsim z$, donc on a $x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} y \wedge y \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} z$ et $y \ntrianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} x$ et $z \ntrianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} y$.

On va montrer que $x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} z$ mais $z \ntrianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} x$.

$x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} z$ est claire d'après la transitivité de $\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$.

inversement, on suppose que $z \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} x$ est comme $y \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} z$ d'après la transitivité de $\trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$, on a : $y \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} x$, contradiction, donc $x \leqslant z$.

De plus il est claire d'après la définition de la relation $\leqslant$ que $x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} y$ est une condition nécessaire pour que $x \leqslant y$ donc, $x \leqslant y \Rightarrow \widetilde{\lesseqgtr}(x,y) = 1 \Rightarrow x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} y$, c'est-à-dire $\leqslant \subseteq \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$.

Si $\widetilde{\lesseqgtr}$ est linéaire, on sait que pour tout $x, y \in X$, soit $x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} y$ ou $y \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} x$, donc $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ dans le cas $x \nsim y$.

Dans le cas $x \sim y$ la linéarité est évidente d'après la linéarité de $\leqslant_x$.

On va montrer la maximalité de $\leqslant$. On suppose qu'il existe une relation d'ordre $\leqslant'$tel que $\leqslant \subseteq \leqslant' \subseteq \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$.

Supposons que $\leqslant \subseteq \leqslant'$c'est-à-dire il existe deux éléments défirent x, y tel que $x \leqslant' y$ et $x \nleqslant y$ donc il y a deux cas.

$a)$ Si $x \sim y$ alors la linéarité de $\leqslant_x$ implique $y \leqslant x$ donc $y \leqslant' x$ donc $x = y$, contradiction.

$b)$ Si $x \nsim y$, on a $(x \leqslant' y) \Rightarrow \widetilde{\lesseqgtr}(x,y) = 1 \Rightarrow \left(x \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}} y\right) \Rightarrow (x \leqslant y)$ (contradiction)

D'où il n'est existe aucune relation $\leqslant'$ tel que $\leqslant \subseteq \leqslant' \subseteq \trianglelefteq_{\widetilde{\lesseqgtr}}$.

Il reste à montrer la compatibilité de E avec $\leqslant$.

Soient $x, y, z \in X$, tel que $x \leqslant y \leqslant z$, donc, $\widetilde{\leqslant}(x,y) = \widetilde{\leqslant}(y,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z) = 1$, donc,

$$\begin{aligned} E(x,y) &\geq \widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,x) \\ &= \widetilde{\leqslant}(y,x) \\ &\geq \widetilde{\leqslant}(y,z) * \widetilde{\leqslant}(z,x) \\ &= \widetilde{\leqslant}(z,x) \\ &\geq E(x,z) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} E(y,z) &\geq \widetilde{\leqslant}(y,z) * \widetilde{\leqslant}(z,y) \\ &= \widetilde{\leqslant}(z,y) \\ &\geq \widetilde{\leqslant}(z,x) * \widetilde{\leqslant}(x,y) \\ &= \widetilde{\leqslant}(z,x) \\ &\geq E(x,z) \end{aligned}$$

Donc, $E(x,y) \wedge E(y,z) \geq E(x,z)$.

D'où E est compatible avec $\leqslant$. ■

Remarque 3.3.7 Une conséquence immédiate du théorème 3.3.6. Si $\leqslant$ est un $\approx$-ordre partiel, alors il existe un ordre partiel classique $\precsim$ dont la relation $\approx$ est compatible avec $\precsim$ et $\precsim \subseteq \leqslant$, et il est maximal au sens du théorème 3.3.6. De plus, $\precsim$ peut être choisi comme un ordre linéaire classique, quand $\leqslant$ est un $\approx$-ordre linéaire. De même comme dans l'ordre partiel vague, pour un $\approx$-ordre partiel $\leqslant$ donné, l'ensemble de tous les ordres partiels $\precsim$ avec $\precsim \subseteq \leqslant$ sera noté par $CR(\leqslant)$.

Pour introduire les résultats ultérieurs, d'un ordre partiel classique donné $\leqslant$ sur X, nous avons besoin de considérer la relation $\bowtie$ de l'incomparabilité au sens de la relation $\leqslant$, définie par, $x \bowtie y \Leftrightarrow (x \nleqslant y \text{ et } y \nleqslant x)$, $\forall x, y \in X$.

Théorème 3.3.8 [8] *Soit $\leqslant$ une relation d'ordre partiel classique sur X et E une relation M-équivalence sur X tel que E est compatible avec $\leqslant$. Si E satisfait l'implication*

$$(\forall x, y, z \in X)\left[x \bowtie z \Rightarrow (E(x,y) \vee E(y,z) \leq E(x,z))\right] \tag{3.1}$$

la relation floue $\widetilde{\leqslant} \in L^{X \times X}$ définie par

$$\widetilde{\leqslant}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x\leqslant y\,; \\ E(x,y) & \text{si non.}\end{cases}\ \forall x,y\in X \tag{3.2}$$

est un M-E-ordre partiel sur X.

Preuve. On va montrer que $\widetilde{\leqslant}$ est un M-E-ordre partiel flou sur X

1) La réflexivité.

Par définition $\forall x,y\in X\ E(x,y)\leq\widetilde{\leqslant}(x,y)$, donc $\widetilde{\leqslant}$ est réflexive.

2) L'antisymétrie.

On va montrer que, $\forall x,y\in X\ \widetilde{\leqslant}(x,y)*\widetilde{\leqslant}(x,y)\leq E(x,y)$.

Soient $x,y\in X$,

Si $x\leqslant y$, alors $\widetilde{\leqslant}(x,y)*\widetilde{\leqslant}(x,y)=1*E(y,x)=E(x,y)$ (Car E est symétrique).

Si $y\leqslant x$, alors $\widetilde{\leqslant}(x,y)*\widetilde{\leqslant}(x,y)=E(x,y)*1=E(x,y)$.

Si $x\nleqslant y$ et $y\nleqslant x$, alors, $\widetilde{\leqslant}(x,y)*\widetilde{\leqslant}(x,y)=E(x,y)*E(x,y)\leq E(x,y)$.

D'où, $\widetilde{\leqslant}$ est antisymétrique.

3) La transitivité.

On va montrer que pour tout $x,y,z\in X$, $\widetilde{\leqslant}(x,y)*\widetilde{\leqslant}(y,z)\leq\widetilde{\leqslant}(x,z)$ .... (I)

Soient $x,y,z\in X$,

	$x\leqslant y$	$y\leqslant z$	$x\leqslant z$	(I)
1	1	1	1	1 (ok)
2	1	1	0	cas impossible
3	1	0	1	1 (ok)
(4)	1	0	0	1
5	0	1	1	1 (ok)
(6)	0	1	0	1
7	0	0	1	1 (ok)
(8)	0	0	0	1

On va vérifier la vérité des $4^{ème}$, $6^{ème}$ et $8^{ème}$ cas .

(1) Le $4^{ème}$ cas, $x \leqslant y$ et $y \nleqslant z$ et $x \nleqslant z$.

Si $z \leqslant x \leqslant y$, alors par la compatibilité de E avec $\leqslant$ on a : $E(z,x) \wedge E(x,y) \geq E(z,y)$.

Donc, $E(z,x) \geq E(z,y) \Leftrightarrow E(x,z) \geq E(y,z)$.

D'où, $\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) = 1 * E(y,z) \leq E(x,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z)$.

(2) Si $z \nleqslant x$. On a : $(z \nleqslant x$ et $x \nleqslant z) \Leftrightarrow (x \bowtie z) \Rightarrow [E(x,y) \vee E(y,z) \leq E(x,z)]$.

Donc, $E(x,z) \geq E(y,z)$, donc $\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) = 1 * E(y,z) \leq E(x,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z)$.

Donc le $4^{ème}$ cas est vérifié.

De la même façon, on peut vérifier le $6^{ème}$ cas.

En effet :

1) $x \nleqslant y$ et $y \leqslant z$ et $x \nleqslant z$. On suppose que $z \leqslant x$.

Donc, $y \leqslant z \leqslant x$, alors par la compatibilité de E avec $\leqslant$ on a : $E(y,z) \wedge E(z,x) \geq E(y,x)$, donc $E(z,x) \geq E(y,x) \Leftrightarrow E(x,z) \geq E(x,y)$.

D'où, $\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) = E(x,y) * 1 = E(x,y) \leq E(x,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z)$.

2) Si $z \nleqslant x$. On a : $(z \nleqslant x$ et $x \nleqslant z) \Leftrightarrow (x \bowtie z) \Rightarrow [E(x,y) \vee E(y,z) \leq E(x,z)]$.

Donc, $E(x,z) \geq E(x,y)$,

alors $\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) = E(x,y) * 1 = E(x,y) \leq E(x,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z)$

3) On va verfier le $8^{ème}$cas.

On a : $x \nleqslant y$ et $y \nleqslant z$ et $x \nleqslant z$,alors

$\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) = E(x,y) * E(y,z) \leq E(x,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z)$

Alors $\widetilde{\leqslant}$ est transitive.

D'où, $\widetilde{\leqslant}$ est un M-E- ordre partiel. ■

Remarque 3.3.9

$i)$ Soit E une M-égalité sur X et $\widetilde{\leqslant}$ un M-E-ordre partiel sur X, considérons la construction de la relation d'ordre partiel classique $\leqslant$ dans la preuve du théorème3.3.6 il est facile de montrer que $\leqslant$ coïncide avec la relation $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$ le noyau de la relation $\widetilde{\leqslant}$. Le théorème 3.3.6 montre directement que $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$ est le plus grand ordre partiel classique $\leqslant$ sur X, ce qui prouve que E est compatible avec $\leqslant$ et $\leqslant \subseteq \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$et en plus $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$est le plus grand de $CR(\widetilde{\leqslant})$.

$ii)$ Dans l'implication (3.1), choisissons $x = y$ ou $y = z$, il est facile de voir que (3.1)

donne l'implication

$$(\forall x, z \in X)\, x \bowtie z \Rightarrow E(x, z) = 1. \tag{3.3}$$

De plus (3.3) implique (3.1) en conclut que (3.1) équivalant à (3.3).

Comme nous l'avons constaté dans la remarque 3.3.9 *ii*), l'hypothèse du théorème 3.3.8 est restrictif. Une version améliorer du théorème 3.3.8 est donnée dans le résultat suivent :

Théorème 3.3.10 [8] *Soit $\leqslant$ un ordre partiel classique sur X et E une relation M-équivalence sur X tel que E est compatible avec $\leqslant$, alors E satisfait la condition suivante :*

$$(\forall x, y, z \in X)\left[((x \bowtie z) \text{ et } (x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x)) \Rightarrow (E(y, z) \leq E(x, z))\right] \tag{3.4}$$

si et seulement si la relation floue $\widetilde{\leqslant} \in L^{X\times X}$ définie par (3.2) *dans le théorème 3.3.8 est un M-E-ordre partiel sur X.*

Preuve.

$(\Rightarrow)$

On a : $(\forall x, y, z)\left[((x \bowtie z) \text{ et } (x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x)) \Rightarrow (E(y, z) \leq E(x, z))\right].$

On va montrer que la relation $\widetilde{\leqslant}$ définie par :

$$\widetilde{\leqslant}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant y; \\ E(x, y) & \text{si non} \end{cases}$$

$\forall x, y \in X$, est un M-E-ordre partiel.

En ce qui concerne, la réflexivité, et l'antisymétrie ont suit la même démarche que pour la preuve du théorème 3.3.8.

Il reste à montrer que $\widetilde{\leqslant}$ est transitive.

C'est-à-dire pour tout $x, y, z \in X$, $\widetilde{\leqslant}(x, y) * \widetilde{\leqslant}(y, z) \leq \widetilde{\leqslant}(x, z)$ .... (I)

	$x \leqslant y$	$y \leqslant z$	$x \leqslant z$	(I)
1	1	1	1	1 (ok)
2	1	1	0	cas impossible
3	1	0	1	1 (ok)
(4)	1	0	0	1
5	0	1	1	1 (ok)
(6)	0	1	0	1
7	0	0	1	1 (ok)
(8)	0	0	0	1

On va vérifier le $4^{ème}$cas, $x \leqslant y$ et $y \nleqslant z$ et $x \nleqslant z$.

1) On suppose que $z \leqslant x$, donc $z \leqslant x \leqslant y$ alors par la définition de la compatibilité de E avec $\leqslant$ on a, $E(z,x) \wedge E(x,y) \geq E(z,y)$, donc $E(z,x) \geq E(z,y) \Leftrightarrow E(x,z) \geq E(y,z)$, alors $\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) = 1 * E(y,z) \leq E(x,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z)$

2) Si $z \nleqslant x$.

On a : $[(z \nleqslant x$ et $x \nleqslant z)$ et $x \leqslant y] \Rightarrow (x \bowtie z$ et $x \leqslant y) \Rightarrow E(y,z) \leq E(x,z)$, alors $\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) = 1 * E(y,z) = E(y,z) \leq E(x,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z)$

Donc, le $4^{ème}$ cas est vrai.

On va vérifier le $6^{ème}$cas, $x \nleqslant y$ et $y \leqslant z$ et $x \nleqslant z$.

1) On suppose que $z \leqslant x$, donc $y \leqslant z \leqslant x$, alors par la définition de la compatibilité de E avec $\leqslant$ on a : $E(y,z) \wedge E(z,x) \geq E(y,x)$, donc $E(z,x) \geq E(y,x) \Leftrightarrow E(x,z) \geq E(x,y)$, alors $\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) = E(x,y) * 1 = E(x,y) \leq E(x,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z)$.

2) Si $z \nleqslant x$, on a :

$$\begin{aligned} ((z \nleqslant x \text{ et } x \nleqslant z) \text{ et } y \leqslant z) &\Rightarrow \quad (x \bowtie z \text{ et } y \leqslant z) \\ &\Rightarrow \quad (E(y,x) \leq E(z,x)) \\ &\Rightarrow \quad (E(x,y) \leq E(x,z)) . \end{aligned}$$

Alors $\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) = E(x,y) * 1 = E(x,y) \leq E(x,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z)$.

Donc, le $6^{ème}$ cas est vrai.

3) On va vérifier le $8^{ème}$cas.

On a : $x \nleqslant y$ et $y \nleqslant z$ et $x \nleqslant z$, alors

$\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) = E(x,y) * E(y,z) \leq E(x,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z)$.

Alors $\widetilde{\leqslant}$ est transitive.

$(\Leftarrow)$

On a la relation $\widetilde{\leqslant}$ définie par :

$$\widetilde{\leqslant}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant y; \\ E(x,y) & \text{si non.} \end{cases}$$

$\forall x, y \in X$, est un M-E- ordre partiel.

On veut montrer que, $(\forall x,y,z)\left[((x \bowtie z) \text{ et } (x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x)) \Rightarrow (E(y,z) \leq E(x,z))\right]$.

Soient $x, y, z \in X$,

On suppose que $x \bowtie z$.

1) Si $x \leq y$, alors $\widetilde{\leqslant}(x,y) = 1$, alors

$E(y,z) \leq E(y,z) = \widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) \leq \widetilde{\leqslant}(x,z) = E(x,z)$.

Donc, $E(y,z) \leq E(x,z)$.

2) Si $y \leq x$, alors $\widetilde{\leqslant}(y,x) = 1$, donc

$E(y,z) \leq E(z,y) = \widetilde{\leqslant}(z,y) * \widetilde{\leqslant}(y,x) \leq \widetilde{\leqslant}(z,x) = E(x,z)$.

Donc, $E(y,z) \leq E(x,z)$.

D'où, (3.4) est vérifié. ■

On peut interpréter la relation floue $\widetilde{\leqslant}$ définie par la formule (3.2), comme une fuzzification d'un ordre partiel donné $\leqslant$ sur X par le moyen d'une relation M-équivalence E sur X. Le théorème 3.3.10 donne explicitement les conditions nécessaires et suffisantes sur un ordre partiel $\leqslant$, et la relation M-équivalence E donnés sur X, pour rendre une relation floue $\widetilde{\leqslant}$ un M-E-ordre partiel sur X. Cependant il ne spécifie pas sous quelles conditions nécessaires et suffisantes un M-E-ordre partiel donné $\widetilde{\leqslant}$ sur X, peut être représenté par la formule (3.2).

Théorème 3.3.11 *[8] Soit $\widetilde{\leqslant}$ un M-E-ordre partiel sur X et $\leqslant \in CR(\widetilde{\leqslant})$, alors le M-E-ordre partiel, $\widetilde{\leqslant}$ peut s'écrire sous la forme* (3.2) *si et seulement si $\widetilde{\leqslant}$ vérifie les deux conditions suivantes :*

$$\forall x, y \in X, (\widetilde{\leqslant}(x,y) \neq 1 \text{ et } \widetilde{\leqslant}(y,x) \neq 1) \Rightarrow (\widetilde{\leqslant}(x,y) \vee \widetilde{\leqslant}(y,x) \leq E(x,y)) \tag{3.5}$$

$$\forall x, y \in X, x \bowtie y \Rightarrow (\widetilde{\leqslant}(x,y) = \widetilde{\leqslant}(y,x)) \tag{3.6}$$

Preuve.

$(\Rightarrow)$

Soit $\widetilde{\leqslant}$ un M-E ordre partiel sur X et $\leqslant \in CR(\widetilde{\leqslant})$. On suppose que, $\widetilde{\leqslant}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leqslant y; \\ E(x,y) & \text{si} \quad \text{non.} \end{cases}$

1) On va montrer que pour tout $x, y \in X$,

$(\widetilde{\leqslant}(x,y) \neq 1$ et $\widetilde{\leqslant}(y,x) \neq 1) \Rightarrow (\widetilde{\leqslant}(x,y) \vee \widetilde{\leqslant}(y,x) \leq E(x,y))$ et

$x \bowtie y \Rightarrow (\widetilde{\leqslant}(x,y) = \widetilde{\leqslant}(y,x))$.

Soient $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} \widetilde{\leqslant}(x,y) \neq 1 \text{ et } \widetilde{\leqslant}(y,x) \neq 1 \quad &\Rightarrow \quad E(x,y) = \widetilde{\leqslant}(x,y) \text{ et } E(y,x) = \widetilde{\leqslant}(y,x) \\ &\Rightarrow \quad \widetilde{\leqslant}(x,y) \vee \widetilde{\leqslant}(y,x) \leq E(x,y). \end{aligned}$$

et $x \bowtie y \Leftrightarrow x \nleqslant y$ et $y \nleqslant x$, donc $\widetilde{\leqslant}(x,y) = E(x,y) = E(y,x) = \widetilde{\leqslant}(y,x)$

$(\Leftarrow)$On suppose que pour tout $x, y \in X$,

$(\widetilde{\leqslant}(x,y) \neq 1$ et $\widetilde{\leqslant}(y,x) \neq 1) \Rightarrow \Big((\widetilde{\leqslant}(x,y) \vee \widetilde{\leqslant}(y,x)) \leq E(x,y) \Big)$ et

$x \bowtie y \Rightarrow (\widetilde{\leqslant}(x,y) = \widetilde{\leqslant}(y,x))$.

On va montrer que,

$\widetilde{\leqslant}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leqslant y; \\ E(x,y) & \text{si} \quad \text{non.} \end{cases}$

1) Si $x \leqslant y$ donc $(x,y) \in \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$, (car $\leqslant \subset \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$), donc $\widetilde{\leqslant}(x,y) = 1$.

2) Si $x \nleqslant y$ On a toujours $\widetilde{\leqslant}(y,x) = 1$ ou $\widetilde{\leqslant}(y,x) \neq 1$.

$i)$ Si $\widetilde{\leqslant}(y,x) = 1$, alors

$E(x,y) \leq \widetilde{\leqslant}(x,y) = \widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,x) \leq E(x,y) \Rightarrow \widetilde{\leqslant}(x,y) = E(x,y)$.

$ii)$ Si $\widetilde{\leqslant}(y,x) \neq 1$ il y a deux cas $a)$ $y \leqslant x$ ou bien $b)$ $y \nleqslant x$.

$a)$ si $y \leqslant x \Leftrightarrow \widetilde{\leqslant}(y,x) = 1$ cas impossible.

$b)$ si $y \nleqslant x$ .On a $x \nleqslant y$ et $y \nleqslant x$, donc $x \bowtie y$.

Donc, $\widetilde{\leqslant}(x,y) = \widetilde{\leqslant}(y,x)$ .... (7)

Si $\widetilde{\leqslant}(x,y) = 1$ cas impossible par hypothèse.

Si $\widetilde{\leqslant}(x,y) \neq 1$ et $\widetilde{\leqslant}(y,x) \neq 1$, alors $\widetilde{\leqslant}(x,y) \vee \widetilde{\leqslant}(y,x) \leq E(x,y)$, donc

$E(x,y) \leq \widetilde{\leqslant}(x,y) \leq E(x,y)$, alors $\widetilde{\leqslant}(x,y) = E(x,y)$.

D'où,

$$\widetilde{\leqslant}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leqslant y; \\ E(x,y) & \text{si} \quad \text{non.} \end{cases} \quad \blacksquare$$

Le théorème 3.3.10 et le théorème 3.3.11 peuvent être appliqués pour les $\approx$-ordre partiel et ses deux résultats peut être exprimés pour $\approx$-ordre partiel de la façon suivante :

Corollaire 3.3.12 *[8]*

i) Soit $\leqslant$ un ordre partiel classique sur X et $\approx$ une relation d'équivalence classique sur X tel que $\approx$ compatible avec $\leqslant$. Alors la relation classique $\preceq$ définie par :

$$x \preceq y \Leftrightarrow (x \leqslant y \text{ ou } y \approx x), \forall x,y \in X \tag{3.7}$$

est un $\approx$ -ordre partiel sur X si et seulement si l'implication suivante est satisfaite,

$(\forall x,y,z \in X)\,[(x \bowtie z)$ et $(x \leqslant y$ ou $y \leqslant x)] \Rightarrow [(y \approx z) \Rightarrow (x \approx z)]$.

ii) Etant donné un $\approx$ -ordre partiel $\preceq$ sur X et $\leqslant \in CR(\preceq)$, on note la relation d'incomparabilité au sens de la relation $\preceq$ par $\bowtie_{\preceq}$, alors $\preceq$ est donnée par (3.7) si et seulement si les implications suivantes sont satisfaites :

$\forall x,y, \in X\ (x \bowtie_{\preceq} y) \Rightarrow [(x \preceq y$ ou $y \preceq x) \Rightarrow (x \approx y)]$.

$\forall x,y, \in X\ (x \bowtie y) \Rightarrow [(x \preceq y) \Leftrightarrow (y \preceq x)]$.

Preuve.

$i)$ $(\Leftarrow)$

On veut montrer que $\preceq$ est un $\approx$-ordre partiel.

Montrons que $\preceq$ est $\approx$-réflexive.

Soient $x, y, \in X, x \approx y \Rightarrow x \preceq y$, donc $\preceq$ est $\approx$-réflexive.

Montrons que $\preceq$ est $\approx$-antisymétrique.

Soient $x, y, \in X$,

$$\begin{aligned}(x \preceq y) \text{ et } (y \preceq x) &\Rightarrow (x \leqslant y \text{ ou } x \approx y) \text{ et } (y \leqslant x \text{ ou } x \approx y)\\ &\Rightarrow (x \approx y) \text{ ou } (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x)\\ &\Rightarrow x \approx y \text{ ou } x = y\\ &\Rightarrow x \approx y.\end{aligned}$$

Donc, $\preceq$ est $\approx$-antisymétrique.

Montrons que $\preceq$ est transitive.

Soient $x, y, z \in X$, on veut montrer que, $(x \preceq y)$ et $(y \preceq x) \Rightarrow (x \preceq z)$.

On a :

$$\begin{aligned}\begin{cases}(x \preceq y)\\ \text{et}\\ (y \preceq z)\end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x \leqslant y \text{ ou } x \approx y\\ \text{et}\\ y \leqslant z \text{ ou } y \approx z\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases}(x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \text{ ou } (x \leqslant y \text{ et } y \approx z)\\ \text{ou}\\ (x \approx y \text{ et } y \leqslant z) \text{ ou } (x \approx y \text{ et } y \approx z)\end{cases}\\ &\Rightarrow x \leqslant z \text{ ou } x \approx z \text{ ou } (x \leqslant y \text{ et } y \approx z) \text{ ou } (x \approx y \text{ et } y \leqslant z).\end{aligned}$$

On va montrer que, $(x \leqslant y$ et $y \approx z) \Rightarrow x \preceq z$.

$a)$ Si $x \preceq z$ le problème est résolu.

$b)$ Si $z \preceq x$,

$$\begin{aligned} z \preceq x \preceq y &\Rightarrow [(z \approx y) \Rightarrow (x \approx z \text{ et } x \approx y)]\\ &\Rightarrow (x \approx z \text{ et } x \approx y)\\ &\Rightarrow x \approx z\\ &\Rightarrow x \preceq z \text{ contradiction.}\end{aligned}$$

(c) Si $x \bowtie z$, on a $x \bowtie z$ et $x \leqslant y \Rightarrow (y \approx z \Rightarrow x \approx z) \Rightarrow (x \approx z) \Rightarrow (x \preceq z)$.(Contradiction).

De la même manière on montre que, $x \approx y$ et $y \leqslant z \Rightarrow (x \preceq z)$.

(a) Si $x \preceq z$ le problème est résolu.

(b) Si $z \preceq x$ on a :

$$\begin{aligned} y \preceq z \preceq x \quad &\Rightarrow \quad [(y \approx x) \Rightarrow (y \approx z \text{ et } z \approx x)] \\ &\Rightarrow \quad (y \approx z \text{ et } z \approx x) \\ &\Rightarrow \quad z \approx x \\ &\Rightarrow \quad x \preceq z \text{ (contradiction).} \end{aligned}$$

c) Si $x \bowtie z$,

$$\begin{aligned} x \bowtie z \text{ et } y \leqslant z \quad &\Rightarrow \quad (x \approx y \ \Rightarrow x \approx z) \\ &\Rightarrow \quad (x \approx z) \\ &\Rightarrow \quad x \preceq z \text{ (contradiction).} \end{aligned}$$

($\Rightarrow$)

On a pour tout $x, y \in X$, $x \preceq y \Leftrightarrow (x \leqslant y \text{ ou } x \approx y)$.

On va montrer que,

$(\forall x, y, z \in X)\left[(x \bowtie z) \text{ et } (x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x)\right] \Rightarrow \left[(y \approx z) \Rightarrow (x \approx z)\right].$

Soient $x, y, z \in X$, on suppose que $(x \bowtie z)$ et $(x \leqslant y)$ et $y \approx z$.

$$\begin{aligned} (x \bowtie z) \text{ et } (x \leqslant y) \text{ et } y \approx z \quad &\Rightarrow \quad (x \bowtie z) \text{ et} x \preceq y \text{ et } y \preceq z \\ &\Rightarrow \quad (x \bowtie z) \text{ et} x \preceq z \\ &\Rightarrow \quad x \approx z. \end{aligned}$$

On a : $(x \bowtie z)$ et $y \leqslant x$ et $y \approx z$.

$$\begin{aligned} (x \bowtie z) \text{ et } (y \leqslant x) \text{ et } y \approx z \quad &\Rightarrow \quad (x \bowtie z) \text{ et } y \preceq x \text{ et } z \preceq y \\ &\Rightarrow \quad (x \bowtie z) \text{ et } z \preceq x \\ &\Rightarrow \quad z \approx x. \end{aligned}$$

ii)

a) Montrons que pour tout $x, y \in X$, $(x \bowtie_{\preceq} y) \Rightarrow \left[(x \preceq y \text{ ou } y \preceq x) \Rightarrow (x \approx y)\right].$

On a : $\forall x, y \in X$, $(x \preceq y \text{ ou } y \preceq x) \vee (x \npreceq y \text{ et } y \npreceq x)$ est vraie.

Donc, $(x \preceq y \text{ ou } y \preceq x) \vee (x \npreceq y \text{ et } y \npreceq x) \vee x \approx y$ est vraie$\forall x, y \in X$.

Donc, $(x \npreceq y \text{ et } y \npreceq x) \Rightarrow [(x \preceq y \text{ ou } y \preceq x) \Rightarrow x \approx y]$ est vraie$\forall x, y \in X$.

Donc, $x \bowtie_{\preceq} y \Rightarrow [(x \preceq y \text{ ou } y \preceq x) \Rightarrow x \approx y]$ est vraie$\forall x, y \in X$.

b) On va montrer que, $(\forall x, y \in X)\ \ (x \bowtie y) \Rightarrow (x \preceq y \Leftrightarrow y \preceq x)$, on suppose que pour tout $x, y \in X$, on a $x \bowtie y$ et $x \bowtie y \Leftrightarrow (x \nleqslant y \text{ et } y \nleqslant x)$.

On va montrer que $x \preceq y \Leftrightarrow y \preceq x$.

1) $(x \preceq y \Rightarrow y \preceq x)$, alors $x \preceq y \Leftrightarrow (x \leqslant y \text{ ou } x \approx y) \Rightarrow x \approx y \Rightarrow y \preceq x$ (car $x \nleqslant y$).

De même on peut montrer qu'on a,

$y \preceq x \Leftrightarrow (y \leqslant x \text{ ou } y \approx x) \Rightarrow (y \approx x) \Rightarrow x \preceq y$ (car $y \nleqslant x$).

$(\Leftarrow)$

On suppose que pour tout $x, y \in X$ on a $x \bowtie_{\preceq} y \Rightarrow [(x \preceq y \text{ ou } y \preceq x) \Rightarrow x \approx y]$.

On va montrer que pour tout $x, y \in X, (x \preceq y) \Rightarrow (x \leqslant y \text{ ou } y \approx x)$.

Soient $x, y \in X$

1) On suppose que $x \preceq y$ et $x \nleqslant y$.

a) Si $y \leqslant x \Rightarrow y \preceq x$.

Donc, on a $(x \preceq y \text{ et } y \preceq x) \Rightarrow x \approx y$.

b) Si $y \nleqslant x$.

Donc on a : $x \bowtie y$ et car $[(x \bowtie y) \Rightarrow (x \preceq y \Leftrightarrow y \preceq x)]$.

On a : $x \preceq y$ et $y \preceq x$ ce qui donne $x \approx y$.

2) On suppose que $x \preceq y$ et $x \not\approx y$.

$$\begin{aligned} x \not\approx y \text{ et } x \preceq y &\Rightarrow (x \npreceq y \text{ ou } y \npreceq x) \text{ et } x \preceq y \\ &\Rightarrow y \npreceq x \\ &\Rightarrow y \nleqslant x. \end{aligned}$$

a) Si $x \leqslant y$ le problème est résolu.

b) Si $x \nleqslant y$ c'est-à-dire $x \bowtie y \Rightarrow (x \preceq y \textit{ et } y \preceq x) \Rightarrow x \approx y$.

D'ou, $x \preceq y \Leftrightarrow (x \leqslant y \text{ ou } y \approx x)\ \forall x, y \in X$. ■

Le théorème 3.3.11 indique sous quelle conditions nécessaires et suffisantes un M-E-ordre partiel sur X peut être défini comme une fuzzification d'un ordre partiel classique sur X, dans les termes qu'une relation M-équivalence E sur X (au-dessous). Si on prend en particulier E dans le théorème 3.3.11 comme M-égalité sur X, donc la condition (3.6) du théorème 3.3.11 peut être supprimé complètement et la condition (3.5) est équivalent à la représentation du M-E-ordre partiel $\widetilde{\leqslant}$ par la formule (3.2).

Corollaire 3.3.13 *[8] Soit E un M-égalité sur X et $\widetilde{\leqslant}$ un M-E-ordre partiel sur X. Alors $\widetilde{\leqslant}$ peut s'écrit comme suit :*

$$\widetilde{\leqslant}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} y;\\ E(x,y) & \text{si non.}\end{cases}$$

$\forall x,y\in X$, *si est seulement si* $\widetilde{\leqslant}$ *satisfait l'implication :*

$(\forall x,y\in X)\,(\widetilde{\leqslant}(x,y)\neq 1$ *et* $\widetilde{\leqslant}(y,x)\neq 1)\Rightarrow(\widetilde{\leqslant}(x,y)\vee\widetilde{\leqslant}(y,x)\leq E(x,y))$.

Preuve.

$(\Rightarrow)$

Du théorème 3.3.5 la relation noyau $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$ est un ordre partiel classique sur X c'est-à-dire $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}\in CR(\widetilde{\leqslant})$, de plus prenons $\leqslant\ =\ \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$, dans le théorème 3.3.11 l'implication $(\Rightarrow)$ est obtenue directement du théorème 3.3.11.

$(\Leftarrow)$

Pour vérifier l'implication inverse il suffit de prouver que $(3.5)\Rightarrow(3.6)$, où la notation $\bowtie$ dans (3.6) remplace la relation d'incomparabilité au sens de la relation $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$.

En effet :

On suppose que (3.5) est vraie pour tout $x,y\in X$, on a $x\bowtie y$ tel que

$x\bowtie y\Leftrightarrow(x\ntrianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} y$ et $y\ntrianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} x)$ c'est-à-dire $\widetilde{\leqslant}(x,y)\neq 1$ et $\widetilde{\leqslant}(y,x)\neq 1$,

donc $\widetilde{\leqslant}(x,y)\vee\widetilde{\leqslant}(y,x)\leq E(x,y)$ d'après la E- réflexivité de $\widetilde{\leqslant}$ on a :

$$\left\{\begin{array}{c} E(x,y)\leq\widetilde{\leqslant}(x,y)\leq E(x,y)\\ \text{et}\\ E(x,y)\leq\widetilde{\leqslant}(y,x)\leq E(x,y)\end{array}\right.\quad\Rightarrow\quad\widetilde{\leqslant}(x,y)=E(x,y)=\widetilde{\leqslant}(y,x).$$

D'où (3.6) est satisfaite.

D'après le théorème 3.3.11 $\widetilde{\leqslant}$ peut s'écrire comme suit :

$$\widetilde{\leqslant}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} y;\\ E(x,y) & \text{si non.}\end{cases}$$

$\forall x,y\in X.$ ■

Corollaire 3.3.14 *[8] Soit E un M-égalité sur X. Alors tout M-E-ordre linéaire $\widetilde{\leqslant}$ sur X peut être représenté comme suit :*

$$\widetilde{\leqslant}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si } x \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} y;\\ E(x,y) & \text{si non.}\end{cases}\quad\forall x,y\in X.$$

Preuve.

On a $\widetilde{\leqslant}$ un M-E-ordre linéaire donc $\widetilde{\leqslant}$ est un M-E-ordre partiel et l'implication $(\forall x, y \in X)\,(\widetilde{\leqslant}(x,y) \neq 1$ et $\widetilde{\leqslant}(y,x) \neq 1) \Rightarrow (\widetilde{\leqslant}(x,y) \vee \widetilde{\leqslant}(y,x) \leq E(x,y))$,est satisfaite, donc d'après le corollaire 3.3.13, on a :

$$\widetilde{\leqslant}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} y; \\ E(x,y) & \text{si non.} \end{cases} \forall x, y \in X. \blacksquare$$

Corollaire 3.3.15 *[8] Soit E une relation M -équivalence sur X et $\widetilde{\leqslant} \in L^{X \times X}$ une relation floue sur X. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

i) $\widetilde{\leqslant}$ est un M-ordre linéaire sur X.

ii) Il existe une relation d'ordre classique $\leqslant$ sur X, tel que E soit compatible avec $\leqslant$ et la relation floue est donnée par (3.2).

Preuve.

i) $\Rightarrow$ *ii)*

D'après le théorème 3.3.6, il existe un ordre linéaire classique $\leqslant$ sur X, tel que E est compatible avec $\leqslant$ et $\leqslant \subset \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$, car $\widetilde{\leqslant}$ et $\leqslant$ sont respectivement M-E-ordre linéaire et ordre linéaire classique sur X, il est facile de voir que les implication (3.5) et (3.6) du théorème 3.3.11 sont vérifiés (car $\widetilde{\leqslant}$ et $\leqslant$ sont linéaires). D'après le théorème 3.3.11 $\widetilde{\leqslant}$ peut se représenter sous la forme (3.2).

ii) $\Rightarrow$ *i)*

Puisque $\leqslant$ est un ordre linéaire classique sur X, la relation M- équivalence E sur X satisfait clairement l'implication (3.4) du théorème 3.3.10 (car $(x \bowtie z)$ et $(x \leqslant y$ ou $y \leqslant x)$ est fausse), donc d'après le théorème 3.3.10 la relation floue $\widetilde{\leqslant}$ donnée par (3.2) est un M-E- ordre partiel sur X. D'autre part, avec l'utilisation de la linéarité de $\leqslant$ et la considération de l'expression (3.2), la linéarité de $\widetilde{\leqslant}$ est claire.

En effet :

Pour tout $x, y \in X$,

$$\widetilde{\leqslant}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant y; \\ E(x,y) & \text{si non.} \end{cases}$$

Soit $x, y \in X$, on a : $(x \leqslant y$ ou $y \leqslant x) \Rightarrow (\widetilde{\leqslant}(x,y) = 1$ ou $\widetilde{\leqslant}(y,x) = 1)$.

D'où, $\widetilde{\leqslant}$ est linéaire. $\blacksquare$

Remarque 3.3.16 Comme conséquence directe du corollaire 3.3.15, nous pouvons caractériser les $\approx$- ordres linéaires. D'autre terme $\preceq$ est un $\approx$- ordre linéaire si et seulement si il existe un ordre linéaire classique $\leqslant$ tel que $\approx$ est compatible avec $\leqslant$ et donné par l'équivalence (3.7).

Exemple 3.3.17 Pour $M = ([0,1], \preceq, *)$, en particulier choisissons l'opération monoïdal $*$ sur $[0,1]$, comme la t-norme de Łukasiewicz, $T_L(\alpha, \beta) = \max(\alpha + \beta - 1, 0)$ $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application ni décroissante ni croissante (non monotone sur $\mathbb{R}$) .tel que l'application $E_\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par :

$$\begin{aligned} E_\phi(x,y) &= 1 - \min\{|\phi(x) - \phi(y)|, 1\} \\ &= \max\{1 - |\phi(x) - \phi(y)|, 0\} \ \ \forall x, y \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

est un opérateur de Łukasiewicz-équivalence sur $\mathbb{R}$, par la remarque 3.3.4 on a E_ϕ est compatible avec l'ordre usuel $\preceq$ sur $\mathbb{R}$, par conséquent si nous considérons la relation floue $\widetilde{\preceq}_\phi \in [0,1]^{\mathbb{R}^2}$ définie par :

$$\widetilde{\preceq}_\phi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \preceq y; \\ E_\phi(x,y) & \text{si non.} \end{cases} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Alors d'après le corollaire 3.3.15 on a $(\mathbb{R}, \widetilde{\preceq}_\phi)$ est un ensemble M-E_ϕ-ordonné linéairement.

Chapitre 4

Constructions et caractérisations algébrique des treillis vagues

Résumé

Dans cette section, notre travail sera basé sur l'étude de la notion des treillis vagues comme la théorie requise des treillis classiques, et étudie leurs propriétés élémentaires. Les notions de minorants, majorants, le plus grand des minorants, le plus petit des majorants, le plus grand des éléments et le plus petit des éléments d'un ensemble classique dans la théorie classique des treillis seront prolongées aux approches vagues [8]. Par la suite une étude de représentations et de constructions des treillis vagues sera faite [8].

Contenu

4.1 Treillis vagues

Dans cette partie de ce travail, on suppose que $M = (L, \leq, *)$ comme un iccl- monoïde. Pour motiver la notion de treillis vague et ces concepts liés, considérons le M-E-ordre linéaire $\overset{\sim}{\preceq}$ sur $\mathbb{R}$ définie par

$$\overset{\sim}{\preceq}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \preceq y; \\ E(x,y) & \text{si non.} \end{cases},$$

tel que E est une relation M-équivalence sur $\mathbb{R}$ compatible avec l'ordre usuel $\preceq$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ l'élément $\preceq(x,y)$ de L peut être interprété comme le degré pour le quel x est inférieure ou égale à y, cela signifie que la valeur de vérité $E(x,y)$ de cette phrase "x est inférieur ou égale a y", même si $y \prec x$. Dans un mode semblable, une question naturelle résulter de l'essence du logique multivalente, si nous pouvons parler encore de la vérité de cette phrase un nombre réel z est le minimum (maximum) de $x, y \in \mathbb{R}$, même si $z \neq \min(x,y)$ $(z \neq \max(x,y))$. Cette question peut aussi être un état claire comment le minimum (le maximum) pour deux réel donnés $x, y \in \mathbb{R}$ peut être définir toutefois que la sous relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ qui est vaguement définie, ou simplement un M-E-ordre linéaire $\overset{\sim}{\preceq}$ sur $\mathbb{R}$. D'une façon analogue à cette question, il est aussi naturel de parler d'éléments minimaux (respectivement d'éléments maximaux, le plus petit élément le plus grand élément des minorants et le plus petit élément des majorants), d'un sous ensemble donné de $\mathbb{R}$ par les moyens d'un M-E- ordre linéaire $\overset{\sim}{\preceq}$ sur $\mathbb{R}$. Tous ces questions qui résultent de ce travail et qui manquent de sens en théorie abstraite de treillis flous, qui définit une relation d'ordre, en définissont vaguement les opérateurs sup et inf sur un ensemble usuel non vide. Dans cette section, nous proposons les treillis vagues comme la théorie requise de treillis, et étudier leur propriétés élémentaires. Donc tous les problèmes précédemment énoncé devienent simples. Dans la définition qui suit, de premier lieu nous prolongeons les notations de minorant, de plus grand des minorants et le plus petit des majorants d'un ensemble classique dans la théorie classique des treillis au présent approche.

Définition 4.1.1 [8] *Soit* $(X, \widetilde{\leqslant})$ *un ensemble* M*-*E*-partiellement ordonné.*

(i) *Pour tout* $\mu \in L^X$*, les* L*-ensembles flous* $\widetilde{LB}_\mu$, $\widetilde{UB}_\mu$, $\widetilde{LST}_\mu$, $\widetilde{GTS}_\mu$, $\widetilde{SUP}_\mu$ *et* $\widetilde{INF}_\mu$ *de* X *définis par :*

$$\widetilde{LB}_\mu(z) = \bigwedge_{x\in X} (\mu(x) \to \widetilde{\leqslant}(z,x)), \quad \widetilde{UB}_\mu(z) = \bigwedge_{x\in X} (\mu(x) \to \widetilde{\leqslant}(x,z))$$

$$\widetilde{LST}_\mu(z) = \mu(z) \bigwedge \widetilde{LB}_\mu(z), \qquad \widetilde{GTS}_\mu(z) = \mu(z) \bigwedge \widetilde{UB}_\mu(z)$$

$$\widetilde{SUP}_\mu(z) = \widetilde{LST}_{\widetilde{UB}_\mu}(z), \qquad \widetilde{INF}_\mu(z) = \widetilde{GTS}_{\widetilde{LB}_\mu}(z), \forall z \in X.$$

sont appelés l'ensembles flous des minorants respectivement majorants, les éléments minimaux, les éléments maximaux, l'ensemble flou de tout les plus petit des majorants, l'ensemble flou de tout les plus grand des minorants de μ.

(ii) *Les* L*-ensembles flous* $\widetilde{\perp}_X$ *et* $\widetilde{\top}_X$ *sur* X *définis comme suit,*

$\widetilde{\perp}_X = \widetilde{SUP}_\phi$ *et* $\widetilde{\top}_X = \widetilde{INF}_X$,

sont appelés l'ensemble flou des éléments inférieurs de X *et l'ensemble flou des éléments supérieurs de* X *respectivement.*

Les L-ensembles flous $\widetilde{LB}_\mu$, $\widetilde{UB}_\mu$, $\widetilde{SUP}_\mu$ et $\widetilde{INF}_\mu$ ne sont pas des éléments nouveaux en mathématique, en introduisant la notion d'un (treillis complet M-ensemble ordonné) correspondant a une généralisation d'un treillis complet basé sur une M-égalité.

Pour tout $\mu \in L^X$ et pour tout $z \in X$, l'élément $\widetilde{LB}_\mu(z)$, (respectivement $\widetilde{UB}_\mu(z)$, $\widetilde{LST}_\mu(z)$, $\widetilde{GTS}_\mu(z)$, $\widetilde{SUP}_\mu(z)$ et $\widetilde{INF}_\mu(z)$) de L peut être interprété comme le degré pour que z soit un minorant (respectivement majorant, plus petit élément, plus grand élément, la borne supérieure et la borne inférieure) du L-ensemble flou μ. De la même façon $\widetilde{\perp}_X$ $(\widetilde{\top}_X)$ peut être conçu comme le degré de $z \in X$, pour être le minimum (maximum) de X. Considérons les définitions de $\widetilde{\perp}_X$ et $\widetilde{\top}_X$, nous observons facilement que $\widetilde{\perp}_X$ $(\widetilde{\top}_X)$ sont aussi des ensembles flous $\widetilde{LST}_X$, $(\widetilde{GTS}_X)$ de tout les éléments minimaux (maximaux) de X.

Un élément z de X est appelé minorant (respectivement, majorant, le plus petit élément, le plus grand élément, le plus petit des majorants , le plus grand des minorants) d'un ensemble flou μ de X si et seulement si $\widetilde{LB}_\mu(z) = 1$ (respectivement $\widetilde{UB}_\mu(z) = 1$, $\widetilde{LST}_\mu(z) = 1$, $\widetilde{GTS}_\mu(z) = 1$, $\widetilde{SUP}_\mu(z) = 1$ et $\widetilde{INF}_\mu(z) = 1$). Un élément z de

X est appelé minimum (maximum) de X si et seulement si z le plus petit (plus grand) élément de X ou équivalent a $\widetilde{\perp}_X(z) = 1$ $(\widetilde{\top}_X(z) = 1)$. Dans le contraste de la théorie classique du treillis [3], un L-ensemble flou μ de X, peut avoir plus d'un plus petit élément,(respectivement un plus grand élément, un plus petit des majorants, un plus grand des minorants). Il faut noter que cette situation est aussi valide même si μ est un ensemble classique de X.

Dans la théorie classique des treillis, seulement un élément de X est assigné à un sous ensemble classique A donné, de l'ensemble classique partiellement ordonné $(X, \leqslant)$ comme le plus petit élément (rèsp, le plus grand élément, la borne supérieure, la borne inférieure) de A s'ils existent. Contrairement aux treillis dans le sens classique pour un L-ensemble flou μ d'un ensemble M-E-partiellement ordonné $(X, \widetilde{\leqslant})$, l'ensemble flou $\widetilde{LST}_\mu$, $(resp$, $\widetilde{GTS}_\mu$, $\widetilde{SUP}_\mu$ et $\widetilde{INF}_\mu)$ de X sont nommés le plus petit élément (resp, le plus grand élément, la borne supérieure, la borne inférieure) de μ.
De plus l'ensemble L-flou $\widetilde{LST}_\mu$, $(resp$, $\widetilde{GTS}_\mu$, $\widetilde{SUP}_\mu$ et $\widetilde{INF}_\mu)$ de X peut être conçu comme le plus petit élément vague (resp, le plus grand élément vague, la borne supérieure vague, la borne inférieure vague) de μ dans l'ensemble M-E-partiellement ordonné $(X, \widetilde{\leqslant})$. Il est utile de noter ici que le plus petit élément vague $\widetilde{LST}_A$ (resp, le plus grand élément vague $\widetilde{GTS}_A$, la borne supérieure vague $\widetilde{SUP}_A$, la borne inférieure vague $\widetilde{INF}_A$) d'un sous ensemble classique A de X dans l'ensemble M-E-partiellement ordonné $(X, \widetilde{\leqslant})$ existe toujours même si A n'a pas de plus petit élément (resp, un plus grand élément, une borne supérieure, une borne inférieure) dans l'ensemble classique partiellement ordonné $(X, \leqslant)$ pour toute partie classique $\leqslant$ de $\widetilde{\leqslant}$. Cette propriété est un cas particulier des ensembles M-E-partiellement ordonnés, et ceci signifier qu'on peut toujours parler d'un treillis comme structure d'un ensemble M-E-partiellement ordonné $(X, \widetilde{\leqslant})$ même si $(X, \leqslant)$ n'a pas la forme d'un treillis au sens classique pour toutes les parties classiques $\leqslant$ de $\widetilde{\leqslant}$.

Maintenant nous introduirons la notion des opérations, l'inf vague, et du sup vague dans un ensemble M-E-partiellement ordonné, de même, la notion d'un treillis vague est définie comme suit :

Définition 4.1.2 [8] *Soit* $(X, \widetilde{\leqslant})$ *un ensemble* M*-*E*-partiellement ordonné.*

(i) *La relation floue* $\widetilde{\sqcap}(\widetilde{\sqcup})$ *de* $X \times X$ *dans* X *définie par :*

$\widetilde{\sqcup}\,(x, y, z) = \widetilde{INF}_{\{x,y\}}\,(z)$ $(\widetilde{\sqcap}\,(x, y, z) = \widetilde{SUP}_{\{x,y\}}\,(z))$ $\forall x, y, z \in X$,

est appelée opération inf vague (sup vague) sur X *au sens de la relation* M*-*E*-ordre partiel* $\widetilde{\leqslant}$*, (brièvement* M*-*E*- inf et* M*-*E*- sup) sur* X*, si et seulement si* $\widetilde{\sqcap}(\widetilde{\sqcup})$ *sont des opérations binaire sur* X*.*

(ii) *Le triplet* $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap})((X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcup}))$*est un* inf *vague (sup vague) semi-treillis au sens de le* M*-*E*- ordre partiel* $\widetilde{\leqslant}$*, (brièvement un* M*-*E*- inf (sup) semi-treillis) si et seulement si* $\widetilde{\sqcap}(\widetilde{\sqcup})$ *est l'opération* M*-*E*-inf (sup) sur* X *.*

(iii) *le quadruplet* $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ *est appelé treillis vague au sens de le* M*-*E*-ordre partiel* $\widetilde{\leqslant}$*. Pour simplifier un* M*-*E*-treillis, si et seulement si* $\widetilde{\sqcap}$ *et* $\widetilde{\sqcup}$ *sont les opérations* M*-*E-inf *(respectivement* M*-*E-sup *) sur* X*.*

Dans un ensemble M-E-partiellement ordonné $(X, \widetilde{\leqslant})$, pour tout $x, y \in X$, si on définit les ensembles L-flous $\widetilde{\sqcap}_{(x,y)}, \widetilde{\sqcup}_{(x,y)} \in L^X$ par

$\widetilde{\sqcap}_{(x,y)}\,(z) = \widetilde{\sqcap}\,(x, y, z)$ et $\widetilde{\sqcup}_{(x,y)}\,(z) = \widetilde{\sqcup}\,(x, y, z)$ $\forall z \in X$,

alors $\widetilde{\sqcap}_{(x,y)}$ et $\widetilde{\sqcup}_{(x,y)}$ peuvent être considérées comme le inf-vague de x, y et le sup-vague de x, y, respectivement. De plus, $\widetilde{\sqcap}_{(x,y)}\,(z), \widetilde{\sqcup}_{(x,y)}\,(z)$ peuvent être interprétées comme le degré pour que z être le inf (sup) de x, y. Pour le cas particulier $\widetilde{\sqcap}_{(x,y)}\,(z) = 1$, $(\widetilde{\sqcup}_{(x,y)}\,(z) = 1)$, nous dirons que z soit un inf (sup) de x, y. Si $X = \mathbb{R}$, $\widetilde{\sqcap}_{(x,y)}(\widetilde{\sqcup}_{(x,y)})$ peut être considéré comme minimum vague de x, y (maximum) vague de x, y.

Prenons en considération les définitions 4.1.1 et 4.1.2, les relations floues $\widetilde{\sqcap}(\widetilde{\sqcup})$ peuvent être représentées comme suit :

$$\widetilde{\sqcup}\,(x, y, z) = \widetilde{\leqslant}\,(x, z) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y, z) \wedge \left[\bigwedge_{t \in X} \left(\widetilde{\leqslant}\,(x, t) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y, t) \rightarrow \widetilde{\leqslant}\,(z, t)\right)\right] \tag{4.1}$$

$$\widetilde{\sqcap}\,(x, y, z) = \widetilde{\leqslant}\,(z, x) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(z, y) \wedge \left[\bigwedge_{t \in X} \left(\widetilde{\leqslant}\,(t, x) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(t, y) \rightarrow \widetilde{\leqslant}\,(t, z)\right)\right] \tag{4.2}$$

En effet :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\sqcup}(x,y,z) &= \widetilde{SUP}_{\{x,y\}}(z) \\
&= \widetilde{LST}_{\widetilde{UB}_{\{x,y\}}}(z) \\
&= \widetilde{UB}_{\{x,y\}}(z) \wedge \widetilde{LB}_{\widetilde{UB}_{\{x,y\}}}(z) \\
&= \widetilde{\leqslant}(x,z) \wedge \widetilde{\leqslant}(y,z) \wedge \left[\bigwedge_{\tilde{t}\in x} (\widetilde{UB}_{\{x,y\}}(t) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(z,t))\right] \\
&= \widetilde{\leqslant}(x,z) \wedge \widetilde{\leqslant}(y,z) \wedge \left[\bigwedge_{\tilde{t}\in x} (\widetilde{\leqslant}(x,t) \bigwedge \widetilde{\leqslant}(y,t) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(z,t))\right].
\end{aligned}
$$

De même on peut vérifier l'égalité (4.2).

Due aux égalités (4.1) et (4.2) il est facile de noter cela dans un M-E-treillis $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$, $\widetilde{\sqcap}$ et $\widetilde{\sqcup}$ sont des M-opérations binaires fortement commutatives sur X. Dans quelque situations, il peut être util de maître en action le M-E-ordre partiel $\widetilde{\leqslant}$ dans les définitions de $\widetilde{\sqcap}$ et $\widetilde{\sqcup}$. Dans le cas de ce mémoire, on notera les relations floues $\widetilde{\sqcap}$ et $\widetilde{\sqcup}$ par $\widetilde{\sqcap}_{\widetilde{\leqslant}}$ et $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}}$, respectivement.

Dans la théorie classique des treillis, il est bien connu que les opérateurs sup $(\sqcup)$ et inf $(\sqcap)$ dans un treillis $(X, \leqslant)$ sont non-décroissantes sur X au sens de l'implication

$$(x \leqslant y \text{ et } u \leqslant v) \Rightarrow (x \sqcup u \leqslant y \sqcup v \text{ et } x \sqcap u \leqslant y \sqcap v)$$

est satisfaite pour tout $x, y, u, v \in X$. Dans le résultat suivant, il est indiqué comment ce résultat peut être prolongé au treillis vague.

Proposition 4.1.3 *[8] Dans tout M-E-treillis $(X, \widetilde{\leqslant})$, toute relation floue $\rho \in \left\{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\right\}$ satisfait les inégalités suivantes :*

(i) $\widetilde{\leqslant}(u,v) * \rho(x,u,m) * \rho(x,v,w) \leq \widetilde{\leqslant}(m,w), \forall x,u,v,m,w \in X.$

(ii) $\widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(u,v) * \rho(x,u,m) * \rho(y,v,w) \leq \widetilde{\leqslant}(m,w), \ \forall x,y,u,v,m,w \in X.$

Preuve.

(i)

$a)$ On prend $\rho = \widetilde{\sqcup}$

Soient x, u, v, m et $w \in X$, de l'égalité (4.1) on a :

$\widetilde{\sqcup}(x,v,w) \ \leq \ \widetilde{\leqslant}(v,w) \ \text{ et } \ \widetilde{\sqcup}(x,v,w) \ \leq \ \widetilde{\leqslant}(x,w).$

Donc,

$\widetilde{\leqslant}(u,v) * \widetilde{\sqcup}(x,v,w) \quad \leq \quad \widetilde{\leqslant}(u,v) * \widetilde{\leqslant}(v,w) \quad \leq \quad \widetilde{\leqslant}(u,w)\,. \qquad\qquad (*)$

On a :

$\widetilde{\leqslant}(u,v) \leq 1$ et $\widetilde{\sqcup}(x,v,w) \leq \widetilde{\leqslant}(x,w)\,.$

Donc,

$\widetilde{\leqslant}(u,v) * \widetilde{\sqcup}(x,v,w) \quad \leq \quad \widetilde{\leqslant}(x,w)\,. \qquad\qquad (**)$

D'apres $(*)$ et $(**)$ on a :

$$\widetilde{\leqslant}(u,v) * \widetilde{\sqcup}(x,v,w) \leq \widetilde{\leqslant}(x,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(u,w)\,. \tag{4.3}$$

De plus en utilisant l'égalité (4.1) On a :

$$\widetilde{\sqcup}(x,u,m) \quad \leq \quad \left[\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(x,t) \wedge \widetilde{\leqslant}(u,t)) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(m,t))\right], \text{ donc}$$

$$\widetilde{\sqcup}(x,u,m) \quad \leq \quad (\widetilde{\leqslant}(x,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(u,w)) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(m,w)\,. \tag{4.4}$$

Donc, considérons la proposition 3.1.1.(i) et d'après (4.3) et (4.4), on trouve que,

$\widetilde{\leqslant}(u,v) * \widetilde{\sqcup}(x,u,m) * \widetilde{\sqcup}(x,v,w)$

$\leq \Big(\widetilde{\leqslant}(x,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(u,w)\Big) * \Big[\Big(\widetilde{\leqslant}(x,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(u,w)\Big) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(m,w)\Big]$

$\leq \widetilde{\leqslant}(m,w)\,.$

$b)$ De même si $\rho = \widetilde{\sqcap}$.

Soient x, u, v, m et $w \in X$, de l'égalité (4.2) on a :

$\widetilde{\sqcap}(x,u,m) \quad \leq \quad \widetilde{\leqslant}(m,u) \quad$ et $\quad \widetilde{\sqcap}(x,u,m) \quad \leq \quad \widetilde{\leqslant}(m,x)\,.$

Donc on a : $\widetilde{\leqslant}(u,v) * \widetilde{\sqcap}(x,u,m) \leq \widetilde{\leqslant}(u,v) * \widetilde{\leqslant}(m,u) \leq \widetilde{\leqslant}(m,v)\,.$

Alors on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{\leqslant}(u,v) * \widetilde{\sqcap}(x,u,m) \quad &= \quad (\widetilde{\leqslant}(u,v) * \widetilde{\sqcap}(x,u,m)) \wedge \widetilde{\sqcap}(x,u,m)\\ &\leq \quad \widetilde{\leqslant}(m,v) \wedge \widetilde{\leqslant}(m,x)\,. \qquad\qquad (11)'\end{aligned}$$

De plus en utilisant l'égalité (4.2) On a :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\sqcap}\,(x,v,w) &\leq \left[\bigwedge_{t\in X}\left(\left(\widetilde{\leqslant}\,(t,x)\wedge\widetilde{\leqslant}\,(t,v)\right)\rightarrow\widetilde{\leqslant}\,(t,w)\right)\right]\\
&\leq \left(\widetilde{\leqslant}\,(m,x)\wedge\widetilde{\leqslant}\,(m,v)\right)\rightarrow\widetilde{\leqslant}\,(m,w)\,. \qquad (12)'
\end{aligned}
$$

Donc considérons la proposition 3.1.1.(i) et d'après $(11)'$ et $(12)'$, on trouve que

$\widetilde{\leqslant}\,(u,v)*\widetilde{\sqcap}\,(x,u,m)*\widetilde{\sqcap}\,(x,v,w)$

$\leq (\widetilde{\leqslant}\,(m,v)\wedge\widetilde{\leqslant}\,(m,x))*((\widetilde{\leqslant}\,(m,x)\wedge\widetilde{\leqslant}\,(m,v))\rightarrow\widetilde{\leqslant}\,(m,w))$

$\leq\ \widetilde{\leqslant}\,(m,w)$ ce qu'il faut démontré.

(ii)

$a)$ On prend $\rho=\widetilde{\sqcup}$. Soient x,y,u,v,m et $w\in X$,car $\widetilde{\sqcup}$ est un M-opération binaire sur X, il existe $w\prime\in X$ tel que $\widetilde{\sqcup}\,(x,v,w')=1$, alors nous tirons de (i) et de la commutativité forte de $\widetilde{\sqcup}$ les inégalités suivantes,

$\widetilde{\leqslant}\,(u,v)*\widetilde{\sqcup}\,(x,u,m)=\widetilde{\leqslant}\,(u,v)*\widetilde{\sqcup}\,(x,u,m)*\widetilde{\sqcup}\,(x,v,w')\leq\widetilde{\leqslant}\,(m,w')\,,$

$\widetilde{\leqslant}\,(u,y)*\widetilde{\sqcup}\,(y,v,w)=\widetilde{\leqslant}\,(x,y)*\widetilde{\sqcup}\,(v,x,w')*\widetilde{\sqcup}\,(v,y,w)\leq\widetilde{\leqslant}\,(w',w)\,.$

Donc les deux inégalités donnent l'inégalité suivante,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\leqslant}\,(x,y)*\widetilde{\leqslant}\,(u,v)*\widetilde{\sqcup}\,(x,u,m)*\widetilde{\sqcup}\,(y,v,w) &\leq \widetilde{\leqslant}\,(m,w')*\widetilde{\leqslant}\,(w',w)\\
&\leq \widetilde{\leqslant}\,(m,w)\,.
\end{aligned}
$$

$b)$ De la même façon si $\rho=\widetilde{\sqcap}$.

En effet :

Soient x,y,u,v,m et $w\in X$, car $\widetilde{\sqcap}$ est un M-opération binaire sur X, il existe $w\prime\in X$ tel que $\widetilde{\sqcap}\,(x,v,w')=1$, alors nous tirons de (i) et de la commutativité forte de $\widetilde{\sqcap}$ les inégalités suivantes,

$\widetilde{\leqslant}\,(u,v)*\widetilde{\sqcap}\,(x,u,m)=\widetilde{\leqslant}\,(u,v)*\widetilde{\sqcap}\,(x,u,m)*\widetilde{\sqcap}\,(x,v,w')\leq\widetilde{\leqslant}\,(m,w')\,,$

$\widetilde{\leqslant}\,(u,y)*\widetilde{\sqcap}\,(y,v,w)=\widetilde{\leqslant}\,(x,y)*\widetilde{\sqcap}\,(v,x,w')*\widetilde{\sqcap}\,(v,y,w')\leq\widetilde{\leqslant}\,(w',w)\,.$

Donc les deux inégalités donnent l'inégalité suivante :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\leqslant}\,(x,y)*\widetilde{\leqslant}\,(u,v)*\widetilde{\sqcap}\,(x,u,m)*\widetilde{\sqcap}\,(y,v,w) &\leq \widetilde{\leqslant}\,(m,w')*\widetilde{\leqslant}\,(w',w)\\
&\leq \widetilde{\leqslant}\,(m,w)\,.
\end{aligned}
$$ ■

Proposition 4.1.4 *[8] Soit* $(X,\widetilde{\leqslant})$ *est un* M*-*E*-ensemble partiellement ordonné, et* $\rho\in\left\{\widetilde{\sqcup},\widetilde{\sqcap}\right\}$. *Alors* ρ *satisfait l'inégalité suivante,* $\rho\,(x,y,z)*E\,(z,w)\ \leq\ \rho\,(x,y,w)\,,\ \ \forall x,y,z,w\in X.$

Preuve.

Soit $\rho = \widetilde{\sqcup}$.

Par l'égalité (4.1) et la E-réflexivité de $\widetilde{\leqslant}$, et par la considération de la proposition 3.1.1 $ii)$ et $iii)$ nous observons que,

$$
\begin{aligned}
& \widetilde{\sqcup}\,(x,y,z) * E\,(z,w) \\
& = \left[\widetilde{\leqslant}\,(x,z) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,z) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X} ((\widetilde{\leqslant}\,(x,t) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,t)) \to \widetilde{\leqslant}\,(z,t))\right)\right] * E\,(z,w) \\
& \leq ((\widetilde{\leqslant}\,(x,z) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,z)) * E\,(z,w)) \wedge \left[\left(\bigwedge_{t\in X} ((\widetilde{\leqslant}\,(x,t) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,t)) \to \widetilde{\leqslant}\,(z,t))\right) * E\,(z,w)\right] \\
& \leq ((\widetilde{\leqslant}\,(x,z) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,z)) * E\,(z,w)) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X} (E\,(z,w) * ((\widetilde{\leqslant}\,(x,t) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,t)) \to \widetilde{\leqslant}\,(z,t)))\right) \\
& \leq ((\widetilde{\leqslant}\,(x,z) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,z)) * E\,(z,w)) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X} ((\widetilde{\leqslant}\,(x,t) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,t)) \to \widetilde{\leqslant}\,(z,t)) * E\,(z,w)\right) \\
& \leq ((\widetilde{\leqslant}\,(x,z) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,z)) * E\,(z,w)) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X} ((\widetilde{\leqslant}\,(x,t) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,t)) \to (\widetilde{\leqslant}\,(z,t) * \widetilde{\leqslant}\,(w,z)))\right) \\
& \leq ((\widetilde{\leqslant}\,(x,z) * \widetilde{\leqslant}\,(z,w)) \wedge (\widetilde{\leqslant}\,(y,z) * \widetilde{\leqslant}\,(z,w))) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X} ((\widetilde{\leqslant}\,(x,t) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,t)) \to \widetilde{\leqslant}\,(w,t))\right) \\
& \leq \widetilde{\leqslant}\,(x,w) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,w) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X} ((\widetilde{\leqslant}\,(x,t) \wedge \widetilde{\leqslant}\,(y,t)) \to \widetilde{\leqslant}\,(w,t))\right) \\
& \leq \widetilde{\sqcup}\,(x,y,w).
\end{aligned}
$$

De la même façon, on peut démontrer l'inégalité précédente si on prend $\rho = \widetilde{\sqcap}$.

En effet :

Par l'égalité (4.2) et la E-réflexivité de $\widetilde{\leqslant}$, et par la considération du proposition 3.1.1 (ii) et (iii) nous observons que,

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\sqcap}(x,y,z) * E(z,w) \\
&= \left[\widetilde{\leqslant}(z,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(z,y) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t,y)) \to \widetilde{\leqslant}(t,z))\right)\right] * E(z,w) \\
&\leq ((\widetilde{\leqslant}(z,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(z,y)) * E(z,w)) \wedge \left[\left(\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t,y)) \to \widetilde{\leqslant}(t,z))\right) * E(z,w)\right] \\
&\leq ((\widetilde{\leqslant}(z,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(z,y)) * E(z,w)) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X}(E(z,w) * (((\widetilde{\leqslant}(t,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t,y)) \to \widetilde{\leqslant}(t,z))))\right) \\
&\leq ((\widetilde{\leqslant}(z,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(z,y)) * E(z,w)) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t,y)) \to (\widetilde{\leqslant}(t,z) * E(z,w)))\right) \\
&\leq ((\widetilde{\leqslant}(z,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(z,y)) * E(z,w)) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t,y)) \to (\widetilde{\leqslant}(t,z) * \widetilde{\leqslant}(z,w)))\right) \\
&\leq ((\widetilde{\leqslant}(z,x) * \widetilde{\leqslant}(w,z)) \wedge (\widetilde{\leqslant}(z,y) * \widetilde{\leqslant}(w,z)) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t,y)) \to \widetilde{\leqslant}(t,w))\right) \\
&\leq \widetilde{\leqslant}(w,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,y) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t,y)) \to \widetilde{\leqslant}(t,w))\right) \\
&\leq \widetilde{\sqcap}(x,y,w).
\end{aligned}
$$

■

Soit $(X, \leqslant, \sqcup, \sqcap)$ un treillis dans le sens classique, il est bien connu que les opérations (sup $\sqcup$) et le (inf $\sqcap$) peuvent être conçues comme deux opérations binaires sur X. Dans le théorème suivant, pour un M-E-treillis donné $(X, \widetilde{\leqslant})$ nous cherchons sous quelle conditions nécessaires les relations floues $\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup} \in L^{(X\times X)\times X}$ peuvent être introduites comme deux opérations binaires vagues sur X.

Proposition 4.1.5 *[8] Etant donné une relation M-équivalence E sur X, soit $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ un M-E-treillis, supposons que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

(a) $M = (L, \leq, \wedge)$.

(b) Il existe un ordre partiel classique $\leqslant$ sur X tel que $\widetilde{\leqslant}$ peut être représentée sous la forme (3.2).

Alors pour tout $\rho \in \{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\}$, ρ est une M-opération binaire vague parfaite sur X au sens des relations $E^C_{X\times X}$ et E, c'est-à-dire, il existe une opération binaire classique θ sur X tel que

$$\rho(x,y,z) = vag_{\left(E^C_{X\times X}, E\right)}(\theta) = E(x\theta y, z), \forall x, y, z \in X.$$

Preuve.

On prend $\rho = \widetilde{\sqcup}$.

Puisque la relation floue $\widetilde{\sqcup}$ est clairement extensionnelle au sens de la relation M-égalité $E^C_{X\times X}$ sur $X\times X$, c'est-à-dire $\widetilde{\sqcup}$ est extensionnelle au sens de la relation $E^C_{X\times X}$ et comme $(X,\widetilde{\leqslant})$ est un treillis vague alors ρ est une M-fonction, donc $(F.1)$ est satisfaite. Il reste a montrer $(EX.2)$ c'est-à-dire,

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z) * E(z,w) \quad \leq \quad \widetilde{\sqcup}(x,y,w) \ \ \forall x,y,z,w\in X.$

D'après la proposition 4.1.4 $(EX.2)$ est satisfaite. Il reste à montrer que (PF) est satisfaite.

D'après la définition 3.2.1.$iii)$ et la proposition 4.1.4 on a $\widetilde{\sqcup}$ est une M-opération binaire vague parfaite sur X au sens des relations $E^C_{X\times X}$ et E.

En effet :

Soient $x,y,z,w\in X$, d'après la proposition 4.1.3.$i)$, on a :

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(x,y,w) = \widetilde{\leqslant}(y,y) * \widetilde{\sqcup}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(x,y,w) \leq \widetilde{\leqslant}(z,w)\,.$

On peut donc avoir,

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(x,y,w) = \widetilde{\leqslant}(y,y) * \widetilde{\sqcup}(x,y,w) * \widetilde{\sqcup}(x,y,z) \leq \widetilde{\leqslant}(w,z)\,.$

C'est-à-dire $\widetilde{\sqcup}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(x,y,w) \leq \widetilde{\leqslant}(w,z)\,.$

Alors on peut l'écrire,

$$\widetilde{\sqcup}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(x,y,w) \leq \widetilde{\leqslant}(z,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,z) \tag{4.5}$$

Dans l'hypothèse du théorème, si la condition (a) est satisfaite, alors on peut directement d'après la E-antisymétrie de $\widetilde{\leqslant}$, on a l'inégalité $\widetilde{\leqslant}(z,w)\wedge\widetilde{\leqslant}(w,z) \leq E(z,w)\,,$ alors d'après le E- réflexivité de $\widetilde{\leqslant}$ on a :

$$\widetilde{\leqslant}(z,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,z) = E(z,w) \tag{4.6}$$

Si la condition (b) est satisfaite alors on considère l'expression (3.2) c'est-à-dire,

$$\widetilde{\leqslant}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant y; \\ E(x,y) & \text{si non.} \end{cases}$$
il est facile de voire que (4.6) est satisfait.

En effet :

Si $z \leq w$, on a : $\widetilde{\leqslant}(z,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,z) = E(z,w)$.

Si $w \leq z$, on a : $\widetilde{\leqslant}(z,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,z) = E(z,w)$.

Si $z \bowtie w$, on a : $\widetilde{\leqslant}(z,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,z) = E(z,w)$.

Alors (4.5) et (4.6) implique l'inégalité, $\widetilde{\sqcup}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(x,y,w) \leq E(z,w)$.

D'où, la condition (PF) est satisfaite. ■

Remarque 4.1.6 Si E est restreint à une M-égalité sur X du théorème 4.1.5, alors d'après le corollaire 3.3.13 la condition (b) du théorème 4.1.5 est équivalente à la représentation de $\widetilde{\leqslant}$ sous la forme suivante : $\widetilde{\leqslant}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} y; \\ E(x,y) & \text{si} \quad \text{non,} \end{cases} \forall x,y \in X.$

ou simplement équivalent à l'implication (3.5) dans le théorème 3.3.11 de plus si $\widetilde{\leqslant}$ est un M-E-ordre linéaire sur X, alors le corollaire 3.3.15 est facilement note que les deux condition (a-b) dans le théorème 4.1.5 peut complètement rejeter du théorème 4.1.5.

4.2 Constructions des treillis vagues

Pour une réalisation pratique des treillis vagues, l'établissement des treillis vagues au moyen des treillis classiques et des relations d'équivalences multivalentes est une issue qui mérite un intérêt spécial. Pour cette raison, nous étudions les représentations et les constructions du treillis vagues dans cette section. Pour un M-E-treillis donné $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ soient $\leqslant, \sqcap, \sqcup$ les parties classiques de M-E-ordre partiel $\widetilde{\leqslant}$,($\widetilde{\sqcap}$, $\widetilde{\sqcup}$, respectivement), nous discutons la question suivante : est-ce que le quadruple $(X, \leqslant, \sqcap, \sqcup)$ définit un treillis au sens classique.

Théorème 4.2.1 *[8] Etant donné une M-égalité E sur X, soit $\widetilde{\leqslant}$ un M-E-ordre partiel sur X, et $\leqslant\ =\ \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$. Soit $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ un M-E-treillis. Alors il existe deux opérateurs binaires classique $\sqcap, \sqcup$ sur X, tel que $\sqcap \in CR(\widetilde{\sqcap})$ et $\sqcup \in CR(\widetilde{\sqcup})$ et $(X, \leqslant, \sqcap, \sqcup)$ forment un treillis au sens classique. De plus $\sqcap$ et $\sqcup$ sont les uniques parties classiques de $\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}$, respectivement, c'est-à-dire $CR(\widetilde{\sqcap}) = \{\sqcap\}, CR(\widetilde{\sqcup}) = \{\sqcup\}$, de plus si $\widetilde{\leqslant}$ satisfait l'implication* (3.5) *dans le théorème3.3.11 (qui équivalent à, $\widetilde{\leqslant}$ peut représenter sous la forme* (3.2)*), alors les implications suivantes sont vraies ;*

(i) $(x \bowtie t \text{ et } y \leqslant t) \Longrightarrow (E(x,t) \leq E(x \sqcup y, t))$,

(ii) $(x \bowtie y \text{ et } x \nleqslant t \text{ et } y \nleqslant t) \Longrightarrow (E(x,t) \wedge E(y,t) \leq E(x \sqcup y, t))$,

(iii) $(x \bowtie t \text{ et } t \leqslant y) \Longrightarrow (E(x,t) \leq E(x \sqcap y, t))$,

(iv) $(x \bowtie y \text{ et } t \nleqslant x \text{ et } t \nleqslant y) \Longrightarrow (E(x,t) \wedge E(y,t) \leq E(x \sqcap y, t))$, *pour tout* $x, y, t \in X$.

Preuve.

Puisque $\widetilde{\sqcap}$ et $\widetilde{\sqcup}$ sont les M- fonctions de $X \times X$ dans X, il est claire que $CR(\widetilde{\sqcap}) \neq \phi$ et $CR(\widetilde{\sqcup}) \neq \phi$. Alors il existe deux opérations binaires classiques $\sqcap, \sqcup$, tels que $\sqcap \in CR(\widetilde{\sqcap})$ et $\sqcup \in CR(\widetilde{\sqcup})$.

On a pour tout $x, y \in X$, $x \sqcup y$ est le plus petit *des* majorants de x, y au sens des relations

$\leqslant$. Car $\sqcup \in CR(\widetilde{\sqcup})$, c'est-à-dire $\widetilde{\sqcup}(x, y, x \sqcup y) = 1$, et par l'égalité (4.1) on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{\sqcup}(x, y, x \sqcup y) &= (\widetilde{\leqslant}(x, x \sqcup y) \wedge \widetilde{\leqslant}(y, x \sqcup y) \\ \wedge\left(\bigwedge_{t \in X}((\widetilde{\leqslant}(x, t) \wedge \widetilde{\leqslant}(y, t)) \right. &\rightarrow \left. \widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t))\right) = 1. \end{aligned} \tag{4.7}$$

D'après (4.7) il est claire que $\widetilde{\leqslant}(x, x \sqcup y) = \widetilde{\leqslant}(y, x \sqcup y) = 1$, c'est-à-dire $x \leq x \sqcup y$ et $y \leq x \sqcup y$, c'est-à-dire $x \sqcup y$ est un majorant de $\{x, y\}$ au sens de la relation $\leqslant$.
Soit v un majorant de $\{x, y\}$ au sens de la relation $\leqslant$, c'est-à-dire $x \leqslant v$ et $y \leqslant v$, c'est-à-dire $\widetilde{\leqslant}(x, v) = \widetilde{\leqslant}(x, v) = 1$ c'est-à-dire $\widetilde{\leqslant}(x, v) \wedge \widetilde{\leqslant}(x, v) = 1$.
D'autre part l'égalité (4.7) implique que, $\bigwedge_{t \in X}((\widetilde{\leqslant}(x, t) \wedge \widetilde{\leqslant}(y, t)) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t)) = 1$, c'est-à-dire

$$(\widetilde{\leqslant}(x, t) \wedge \widetilde{\leqslant}(y, t)) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t) = 1 \forall t \in X \tag{4.8}$$

de plus d'après (4.8) on a, $\widetilde{\leqslant}(x, v) \wedge \widetilde{\leqslant}(y, v) = 1 \leq \widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, v)$,
c'est-à-dire $\widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, v) = 1 \Longrightarrow x \sqcup y \leqslant v$.
Donc, $x \sqcup y$ est le plus petit des majorants de $\{x, y\}$ au sens de la relation $\leqslant$.
De la même façon on montre que $\sqcap$ est le plus grand des minorants. On a pour tout $x, y \in X$, $x \sqcap y$ est le plus grand des minorants de x, y au sens de la relation $\leqslant$, car $\sqcap \in CR(\widetilde{\sqcap})$, c'est-à-dire $\widetilde{\sqcap}(x, y, x \sqcap y) = 1$, et par égalité (4.2) on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{\sqcup}(x, y, x \sqcap y) &= \widetilde{\leqslant}(x \sqcap y, x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x \sqcap y, y) \\ &\wedge \left[\bigwedge_{t \in X}((\widetilde{\leqslant}(t, x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t, y)) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(t, x \sqcap y))\right] = 1. \qquad (15)' \end{aligned}$$

D'après $(15)'$ il est claire que $\widetilde{\leqslant}(x \sqcap y, x) = \widetilde{\leqslant}(x \sqcap y, y) = 1$, c'est-à-dire $x \sqcap y \leq x$ et $x \sqcap y \leq y$, c'est-à-dire $x \sqcap y$ est un minorant de $\{x, y\}$ au sens de la relation $\leqslant$. Soit v un minorant de $\{x, y\}$ au sens de la relation $\leqslant$, c'est-à-dire $v \leqslant x$ et $v \leqslant y$, c'est-à-dire $\widetilde{\leqslant}(v, x) = \widetilde{\leqslant}(v, y) = 1$, c'est-à-dire $\widetilde{\leqslant}(v, x) \wedge \widetilde{\leqslant}(v, y) = 1$.

D'autre part l'égalité $(15)'$ implique que, $\bigwedge\limits_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(t,y))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(t,x\sqcap y))=1$,
alors
$(\widetilde{\leqslant}(t,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(t,y))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(t,x\sqcap y)=1\forall t\in X$ $\qquad (16)'$
de plus d'après $(16)'$ on a, $\widetilde{\leqslant}(t,x)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(t,y)=1\leq\widetilde{\leqslant}(v,x\sqcap y)$,
donc $\widetilde{\leqslant}(v,x\sqcap y)=1\Longrightarrow v\leqslant x\sqcap y$.
Donc $x\sqcap y$ est le plus grand des minorants de $\{x,y\}$ au sens de la relation $\leqslant$.

$$(\widetilde{\leqslant}(t,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(t,y))\leq\widetilde{\leqslant}(t,x\sqcap y),\forall t\in X. \tag{4.9}$$

Donc $(X,\leqslant,\sqcap,\sqcup)$ forme un treillis. On suppose que $\sqcap'$et $\sqcup'$ soient deux opérations binaires sur X, tel que $\sqcap'\in CR(\widetilde{\sqcap})$ et $\sqcup'\in CR(\widetilde{\sqcup})$. Alors pour tout $x,y\in X$, et comme $\{x,y\}$ ne peut avoir qu' un seul sup (supremum) et un seul inf (infimum) au sens de la relation $\leqslant$, alors on a $x\sqcup y=x\sqcup' y$ et $x\sqcap y=x\sqcap' y$, c'est-à-dire $\sqcup=\sqcup'$ et $\sqcap=\sqcap'$ donc $\sqcup$ et $\sqcap$ sont les uniques opérations binaires sur X, ce qui prouve que $\sqcap\in CR(\widetilde{\sqcap})$ et $\sqcup\in CR(\widetilde{\sqcup})$, donc $CR(\widetilde{\sqcap})=\{\sqcap\}$ et $CR(\widetilde{\sqcup})=\{\sqcup\}$. Afin de prouver la deuxième partie du théorème, supposons que $\widetilde{\leqslant}$ peut être représenté de la forme (3.2) . Considérons l'égalité (3.2), il est facile de voir que l'inégalité (4.8) donne directement les implications (i) et (ii).
En effet :
Soient $x,y\in X$, on a $(\widetilde{\leqslant}(x,t)\wedge\widetilde{\leqslant}(y,t))\leq\widetilde{\leqslant}(x\sqcup y,t)$ $\forall t\in X$.
1) On suppose que, $x\bowtie t$ et $y\leqslant t$, alors $\widetilde{\leqslant}(x,t)=E(x,t)$ et $E(y,t)=1$, donc
$(\widetilde{\leqslant}(x,t)\wedge\widetilde{\leqslant}(y,t))=E(x,t)\leq E(x\sqcup y,t)=\widetilde{\leqslant}(x\sqcup y,t)$ $\forall x,y,t\in X$ (car $\widetilde{\leqslant}(x\sqcup y,t)\neq 1$).
Alors (i) est satisfaite.
2) On suppose que, ($x\bowtie y$ et $x\nleqslant t$ et $y\nleqslant t$). Alors
$\widetilde{\leqslant}(x,y)=E(x,y)=\widetilde{\leqslant}(y,x)$ et $\widetilde{\leqslant}(y,t)=E(y,t)$.
Donc,
$\widetilde{\leqslant}(x,t)\wedge\widetilde{\leqslant}(y,t)=E(x,t)\wedge E(y,t)\leq\widetilde{\leqslant}(x\sqcup y,t)=E(x\sqcup y,t)$ (car$\widetilde{\leqslant}(x\sqcup y,t)\neq 1$).
D'où, (ii) est satisfaite.
De la même façon l'inégalité (4.9) donne les implications (iii) et (iv).

En effet :

Soient $x, y \in X$, On a, $(\widetilde{\leqslant}(t,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t,y)) \leq \widetilde{\leqslant}(t, x \sqcap y)$ $\forall t \in X$.

3) On suppose que, ($x \bowtie t$ et $t \leqslant y$), alors $\widetilde{\leqslant}(t,x) = E(x,y)$ et $\widetilde{\leqslant}(t,y) = 1$.

Donc,

$\widetilde{\leqslant}(t,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t,y) = E(x,y) \leq \widetilde{\leqslant}(t, x \sqcap y) = E(x \sqcap y, t)$ (car $\widetilde{\leqslant}(t, x \sqcap y) \neq 1$).

Alors (iii) est satisfaite.

4) On suppose que, (iv) $(x \bowtie y$ et $t \nleqslant x$ et $t \nleqslant y) \Longrightarrow (E(x,t) \wedge E(y,t) \leq E(x \sqcap y, t))$.

$x \bowtie y$ et $t \nleqslant x$ et $t \nleqslant y$, alors $\widetilde{\leqslant}(t,x) = E(x,t)$ et $\widetilde{\leqslant}(t,y) = E(y,t)$.

Donc,

$\widetilde{\leqslant}(t,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t,y) = E(x,t) \wedge E(y,t) \leq \widetilde{\leqslant}(t, x \sqcap y) = E(x \sqcap y, t)$ (car $\widetilde{\leqslant}(t, x \sqcap y) \neq 1$).

D'où, (iv) est satisfaite. ■

Théorème 4.2.2 *[8] Etant donné une M-égalité E sur X, soit $\widetilde{\leqslant}$ un M-E-ordre partiel sur X et $\leqslant = \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$. Supposons que l'une des deux conditions (a) ou (b) du théorème 4.1.4 soit satisfaite. Soit $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ un M-E-treillis. Alors $\widetilde{\sqcap}$ et $\widetilde{\sqcup}$ sont des M-opérations binaires vagues parfaites sur X au sens des relations M-égalité classique $E^c_{X \times X}$ sur $X \times X$ et E, c'est-à-dire il existe des opérations binaires classiques $\sqcup$ et $\sqcap$ sur X tels que $\widetilde{\sqcup} = vag_{\left(E^c_{X \times X}, E\right)}(\sqcup)$, et $\widetilde{\sqcap} = vag_{\left(E^c_{X \times X}, E\right)}(\sqcap)$. De plus $\sqcup$ $(\sqcap)$est l'unique description binaire de $\widetilde{\sqcup}$ $\left(\widetilde{\sqcap}\right)$ au sens des relations $E^c_{X \times X}$ et E, et $(X, \leqslant, \sqcap, \sqcup)$ forme un treillis au sens classique. Si $\widetilde{\leqslant}$ peut représente par la forme (3.2), alors les conditions $(i - iv)$ dans le théorème 4.2.1 sont satisfaites.*

Preuve. D'après le théorème 4.1.5 $\widetilde{\sqcap}$ et $\widetilde{\sqcup}$ sont des M- opérations binaires vagues parfaites sur X au sens des relations $E^c_{X \times X}$ et E, ainsi il existe des opérations binaires classiques $\sqcup$ et $\sqcap$ sur X telles que $\widetilde{\sqcup} = vag_{\left(E^c_{X \times X}, E\right)}(\sqcup)$ et $\widetilde{\sqcap} = vag_{\left(E^c_{X \times X}, E\right)}(\sqcap)$, alors nous obtenons d'après la remarque 3.2.2. (i) $\sqcup$ est l'unique description binaire de $\widetilde{\sqcup}$ au sens des relations $E^c_{X \times X}$ et E et $\sqcap$ est l'unique description binaire de $\widetilde{\sqcap}$ au sens des relations $E^c_{X \times X}$ et E. La preuve de la dernière partie du théorème est analogue à celui du théorème 4.2.1. ■

Dans la suite, commençant d'un treillis $(X, \leqslant, \sqcap, \sqcup)$ dans le sens classique, on s'intéresse à la construction d'un M-E-treillis $(X, \widetilde{\leqslant})$ tels que $\leqslant, \sqcap, \sqcup$, sont des parties classiques de M-E-ordre partiel $\widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}$ et $\widetilde{\sqcup}$ respectivement.

Théorème 4.2.3 *[8] Pour une relation M-équivalence E sur X, soit $(X, \leqslant, \sqcap, \sqcup)$ un treillis au sens classique qui satisfait les conditions $(i - iv)$ du théorème 4.2.1, et soit $\widetilde{\leqslant}$ un M-E-ordre partiel sur X tel que l'ordre $\widetilde{\leqslant}$ peut être représenté sous la forme (3.2). Alors $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ forme un M-E-treillis. De plus, $\widetilde{\sqcap}$ et $\widetilde{\sqcup}$ sont des M-opérations binaires vagues parfaites sur X au sens des relations $E^c_{X\times X}$ et E, données par $\widetilde{\sqcup} = vag_{\left(E^c_{X\times X}, E\right)}(\sqcup)$ et $\widetilde{\sqcap} = vag_{\left(E^c_{X\times X}, E\right)}(\sqcap)$. De plus, si E est séparable, $\sqcup$ est l'unique description ordinaire de $\widetilde{\sqcup}$ au sens des relations $E^c_{X\times X}$ et E et $\sqcap$ est l'unique description ordinaire de $\widetilde{\sqcap}$ au sens des relations $E^c_{X\times X}$ et E.*

Preuve. On va montrer tout d'abord que $\widetilde{\sqcup}(x, y, x \sqcup y) = 1\ \forall x, y \in X$. On a $x \leqslant x \sqcup y$ et $y \leqslant x \sqcup y$, donc $\leqslant (x, x \sqcup y) = 1$ et $\leqslant (y, x \sqcup y) = 1$, donc par la considération de l'égalité (4.1), pour vérifier que $\widetilde{\sqcup}(x, y, x \sqcup y) = 1$ il suffit de montrer l'inégalité (4.8). Soit t un élément arbitraire fixé de X, si $x \sqcup y \leqslant t$, et comme $\widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t) = 1$ donc l'inégalité (4.8) est vérifiée. Supposons que $x \sqcup y \nleqslant t$ c'est-à-dire $[x \nleqslant t$ ou $y \nleqslant t]$. Alors on a les cas suivants,

$a)$ $x \nleqslant t$ et $y \leqslant t$ dans ce cas il ya deux possibilités $t \leqslant x$ ou $t \nleqslant x$.

1) Si $t \leqslant x$, comme $y \leqslant t \leqslant x$, on a : $x \sqcup y = x$, c'est-à-dire

$\widetilde{\leqslant}(x, t) \wedge \widetilde{\leqslant}(y, t) = \widetilde{\leqslant}(x, t) \wedge 1 = \widetilde{\leqslant}(x, t) = \widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t)$.

Donc l'inégalité (4.8) est vérifiée.

2) $t \nleqslant x$, c'est-à-dire $x \bowtie t$, comme $x \bowtie t$ et $y \leqslant t$, donc d'après la condition (i) dans le théorème 4.2.1 on a, $\widetilde{\leqslant}(x, t) \wedge \widetilde{\leqslant}(y, t) = \widetilde{\leqslant}(x, t) = E(x, t) \leq E(x \sqcup y, t) = \widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t)$.

Donc l'inégalité (4.8) est vérifiée.

$b)$ Si $x \leqslant t$ et $y \nleqslant t$ dans ce cas il y a deux possibilités $t \leqslant y$ ou $t \nleqslant y$.

1) Si $t \leqslant y$, comme $x \leqslant t \leqslant y$, on a $x \sqcup y = y$, c'est-à-dire

$\widetilde{\leqslant}(x, t) \wedge \widetilde{\leqslant}(y, t) = 1 \wedge \widetilde{\leqslant}(y, t) = \widetilde{\leqslant}(y, t) = \widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t)$.

Donc l'inégalité (4.8) est vérifiée.

2) $t \nleqslant y$ c'est-à-dire $y \bowtie t$ comme $y \bowtie t$ et $x \leqslant t$, donc d'après la condition (i) dans le théorème 4.2.1 on a, $\widetilde{\leqslant}(x, t) \wedge \widetilde{\leqslant}(y, t) = \widetilde{\leqslant}(y, t) = E(y, t) \leq E(x \sqcup y, t) = \widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t)$.

Donc l'inégalité (4.8) est vérifiée.

$c)$ Si $x \nleqslant t$ et $y \nleqslant t$.

1) Si $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$, alors $x \sqcup y = x$ ou $x \sqcup y = y$.

Donc, on a, $\widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t) = \widetilde{\leqslant}(y, t)$ ou $\widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t) = \widetilde{\leqslant}(x, t)$,alors

$\widetilde{\leqslant}(y, t) \wedge \widetilde{\leqslant}(x, t) \leq \widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t)$.

Donc l'inégalité (4.8) est vérifiée.

2) Si $x \nleqslant y$ et $y \nleqslant x$ c'est-à-dire $x \bowtie y$ alors comme $x \bowtie y$ et $x \nleqslant t$ et $y \nleqslant t$ on a directement d'après la condition (ii) dans le théorème 4.2.1 que

$\widetilde{\leqslant}(y, t) \wedge \widetilde{\leqslant}(x, t) = E(x, t) \wedge E(y, t) \leq E(x \sqcup y, t) = \widetilde{\leqslant}(x \sqcup y, t)$.

Donc l'inégalité (4.8) est vérifiée.

D'une façon analogue on peut prouver que $\widetilde{\sqcap}(x, y, x \sqcap y) = 1 \; \forall x, y \in X$.

Soient $x, y \in X$, on a $x \sqcap y \leqslant x$ et $x \sqcap y \leqslant y$, donc $\leqslant (x \sqcap y, x) = 1$ et $\leqslant (x \sqcap y, y) = 1$, donc par la considération de l'égalité (4.2), pour vérifier que $\widetilde{\sqcap}(x, y, x \sqcap y) = 1$ il suffit de montrer l'inégalité (4.9). Soit t un élément arbitraire fixé de X, si $t \leqslant x \sqcap y$, comme $\widetilde{\leqslant}(t, x \sqcup y) = 1$, donc l'inégalité (4.9) est vérifiée. Supposons que $t \nleqslant x \sqcap y$ c'est-à-dire ($t \nleqslant x$ ou $t \nleqslant y$). Alors on a les cas suivants :

$a')$ $t \nleqslant x$ et $t \leqslant y$ dans ce cas il y a deux possibilités, $x \leqslant t$ ou $x \nleqslant t$.

1) Si $x \leqslant t$, comme $x \leqslant t \leqslant y$, on a $x \sqcap y = x$, c'est-à-dire

$\widetilde{\leqslant}(t, x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t, y) = \widetilde{\leqslant}(t, x) \wedge 1 = \widetilde{\leqslant}(t, x) = \widetilde{\leqslant}(t, x \sqcap y)$.

Donc l'inégalité (4.9) est vérifiée.

2) $x \nleqslant t$ c'est-à-dire $x \bowtie t$, comme $x \bowtie t$ et $t \leqslant y$, donc d'après la condition (iii) dans le théorème 4.2.1 on a : $\widetilde{\leqslant}(t, x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t, y) = \widetilde{\leqslant}(t, x) = E(x, t) \leq E(t, x \sqcap y) = \widetilde{\leqslant}(t, x \sqcap y)$.

Donc l'inégalité (4.9) est vérifiée.

$b')$ $t \nleqslant y$ et $t \leqslant x$ dans ce cas il ya deux possibilités $y \leqslant t$ ou $y \nleqslant t$.

1) si $y \leqslant t$, comme $y \leqslant t \leqslant x$, on a $x \sqcap y = y$, c'est-à-dire

$\widetilde{\leqslant}(t, x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t, y) = 1 \wedge \widetilde{\leqslant}(t, y) = \widetilde{\leqslant}(t, y) = \widetilde{\leqslant}(t, x \sqcap y)$.

Donc l'inégalité (4.9) est vérifiée.

2) $y \nleqslant t$ c'est-à-dire $y \bowtie t$, comme $x \bowtie y$ et $t \leqslant x$, donc d'après la condition (iii) dans le

théorème 4.2.1 on a, $\widetilde{\leqslant}(t,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(t,y)=\widetilde{\leqslant}(t,y)=E(y,t)\leq E(t,x\sqcap y)=\widetilde{\leqslant}(t,x\sqcap y)$.
Donc l'inégalité (4.9) est vérifiée.

c') Si $t\nleqslant x$ et $t\nleqslant y$

1) Si $x\leqslant y$ ou $y\leqslant x$, alors $x\sqcap y=x$ ou $x\sqcap y=y$

Donc on a : $\widetilde{\leqslant}(t,x\sqcap y)=\widetilde{\leqslant}(t,x)$ ou $\widetilde{\leqslant}(t,x\sqcap y)=\widetilde{\leqslant}(t,y)$, alors
$\widetilde{\leqslant}(t,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(t,y)\leq\widetilde{\leqslant}(t,x\sqcap y)$..
Donc l'inégalité (4.9) est vérifiée.

2) Si $x\nleqslant y$ et $y\nleqslant x$ c'est-à-dire $x\bowtie y$ alors comme $x\bowtie y$ et $t\nleqslant x$ et $t\nleqslant y$ on a directement d'après la condition (iv) du théorème 4.2.1 que,
$\widetilde{\leqslant}(t,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(t,y)=E(x,t)\wedge E(y,t)\leq E(t,x\sqcap y)=\widetilde{\leqslant}(t,x\sqcap y)$.
Donc l'inégalité (4.9) est vérifiée.

Donc $(X,\widetilde{\leqslant})$ forme un M-E-treillis. D'après le théorème 4.1.5 il est claire que $\widetilde{\sqcup}$ est un M-opération binaire vague parfaite sur X au sens des relations $E^{c}_{X\times X}$ et E, et $\widetilde{\sqcap}$ est un M-opération binaire vague parfaite sur X au sens des relations $E^{c}_{X\times X}$ et E. De plus, comme $\sqcap$ et $\sqcup$ sont des fonctions extensionnelles de $X\times X$ dans X au sens des relations $E^{c}_{X\times X}$ et E, donc par la considération de $\widetilde{\sqcap}(x,y,x\sqcap y)=1$, $\widetilde{\sqcup}(x,y,x\sqcup y)=1$ $\forall x,y\in X$, il est claire d'après la remarque 3.2.2 (ii) que $\widetilde{\sqcup}=vag_{\left(E^{c}_{X\times X},E\right)}(\sqcup)$ et $\widetilde{\sqcap}=vag_{\left(E^{c}_{X\times X},E\right)}(\sqcap)$, finalement si E est séparable alors d'après la remarque 3.2.2 (i) on obtient directement que $\sqcup=ord_{\left(E^{c}_{X\times X},E\right)}(\widetilde{\sqcup})$ et $\sqcap=ord_{\left(E^{c}_{X\times X},E\right)}(\widetilde{\sqcap})$. ■

Remarque 4.2.4 Dans l'hypothèse du théorème 4.2.3 on suppose que les deux assertions "$\leqslant$ est un ordre linéaire classique sur X et E compatible avec $\leqslant$" ou "E est compatible avec $\leqslant$ est l'implication (3.4) dans le théorème 3.3.10 est satisfait " est vraie, alors par la considération du théorème 3.3.10 et le corollaire 3.3.15 nous observons facilement que la phrase ".et soit $\widetilde{\leqslant}$ un M-E-ordre partiel tel que peut être représenté sous la forme (3.2)" dans le théorème 4.2.3 peut être substituer par ".et soit $\widetilde{\leqslant}\in L^{X\times X}$ une relation floue donne par (3.2)".

Exemple 4.2.5 Pour un iccl-monoïde, $M=([0;1],\leq,\text{Łck})$ et pour une application monotone φ donnée sur $\mathbb{R}$, considérons l'opérateur Lck- équivalence E_{φ} et l'ensemble

M-E_φ-ordonné linéairement $\left(\mathbb{R}, \widetilde{\leqslant}_\varphi\right)$ introduit dans l'exemple 3.3.17. Soient les relations $\widetilde{\max}_\varphi$, $\widetilde{\min}_\varphi \in [0;1]^{\mathbb{R}^3}$ définies par

$$\begin{aligned} \widetilde{\max}_\varphi (x, y, z) &= E_\varphi (\max \{x, y\}, z) \text{ et} \\ \widetilde{\min}_\varphi (x, y, z) &= E_\varphi (\min \{x, y\}, z) \ \forall x, y, z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

En prenons en considération la remarque 4.2.4, théorème 4.2.3 il en résulte que le quadruplé $(\mathbb{R}, \widetilde{\leqslant}_\varphi, \widetilde{\min}_\varphi, \widetilde{\max}_\varphi)$ forme un M-E_φ-treillis. Nous voulons noté ici que si nous choisissons en particulier l'application monotone φ comme une fonction constante sur $\mathbb{R}$, alors, puisque $E_\varphi (x, y) = 1$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, tout nombre réel pourra être en même temps un plus petit des majorants et un plus grand des minorants de l'ensemble $\{x, y\}$.

4.3 Caractérisations algébrique des treillis vagues

Dans la théorie classique des treillis [4], il est bien connu que pour un treillis $(X, \leqslant, \sqcap, \sqcup)$ donné, l'opération sup $(\sqcup)$ et l'opération inf $(\sqcap)$ sur X satisfont les propriétés suivantes :

$(L.1)$ $x \sqcup x = x.$

$(L.2)$ $x \sqcup y = y \sqcup x.$

$(L.3)$ $(x \sqcup y) \sqcup z = x \sqcup (y \sqcup z)\,.$

$(L.4)$ $(x \sqcup y) \sqcap x = x.$

$(L'.1)$ $x \sqcap x = x.$

$(L'.2)$ $x \sqcap y = y \sqcap x.$

$(L'.3)$ $(x \sqcap y) \sqcap z = x \sqcap (y \sqcap z)\,.$

$(L'.4)$ $(x \sqcap y) \sqcup x = x.$

pour tout $x, y, z \in X.$

Inversement, si $\sqcap$ et $\sqcup$ sont deux opérations binaires sur X satisfaisant les conditions suivantes $(L.1 - L.4)$ et $(L'.1 - L'.4)$, alors la relation binaire classique $\leqslant$ sur X, définie par, $x \leqslant y \ \Leftrightarrow x \sqcup y = y,$

est un ordre partiel classique sur X donné aussi par

$x \leqslant y \ \Leftrightarrow x \sqcap y = x.$

De plus, pour tout $x, y \in X$, $x \sqcup y$ et $x \sqcap y$ coïncident avec le plus petit des majorants de x et y au sens de la relation $\leqslant$ et le plus grand des minorants de x et y au sens de la relation $\leqslant$ respectivement, c'est-à-dire $(X, \leqslant, \sqcap, \sqcup)$ forme un treillis. La connexion entre les treillis et les opérations binaires qui satisfait $(L.1 - L.4)$ et $(L'.1 - L'.4)$ il est connu de cette manière, comme caractérisation algébrique des treillis. Dans cette section nous allons montrer comment cette caractérisation des treillis au sens classique peut se prolonger en une caractérisation des treillis vagues.

De la même façon qu'aux conditions $(L.1 - L.4)$ et $(L'.1 - L'.4)\,$, nous cherchons tout d'abord les conditions nécessaires pour rendre un ensemble M-E-ordonné partiellement $(X, \widetilde{\leqslant})$ un M-E-treillis.

Théorème 4.3.1 *[8] Soit* $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ *un* M*-*E*-treillis, vérifiant l'une des deux conditions* $(a-b)$ *du théorème4.1.5. Alors pour tout* $p, v \in \{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\}$ *avec* $p \neq v$*,* p *et* v *sont des* M*-opérations binaires vagues parfaites sur* X *au sens des relations* $E^c_{X\times X}$ *et* E*, et satisfont les propriétés suivantes :*

(VL.1) $E(x,y) \leq p(x,y,y)\ \forall x, y \in X.$

(VL.2) p *est commutative forte (ou équivalent* $p(x,y,z) = p(y,x,z)\,\forall x,y,z \in X$*).*

(VL.3) $p(x,y,y) * p(y,z,z) \leq p(x,z,z)\ \forall x,y,z \in X.$

(VL.4) $p(x,y,z) \leq p(x,z,z)\ \forall x,y,z \in X.$

(VL.5) $p(x,y,z) \leq \bigwedge\limits_{t\in X} [(p(x,t,t) \wedge p(y,t,t)) \rightarrow p(z,t,t)]\ \forall x,y,z \in X.$

(VL.6) $p(x,y,z) * v(z,x,w) \leq E(x,w)\,\forall x,y,z,w \in X.$

Preuve.

D'après le théorème 4.1.5 pour tout $p, v \in \{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\}$ avec $p \neq v, p$ est v sont des M-opérations binaires vagues parfaites sur X au sens des relations $E^c_{X\times X}$ et E,

(1) D'après la définition de $\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}$ la propriété (VL.2) est évidante.

(2) On a pour tout $x, y \in X$, $\widetilde{\leqslant}(x,y) = \widetilde{\sqcup}(x,y,y) = \widetilde{\sqcap}(x,y,x)$, donc

$$E(x,y) \leq \ \widetilde{\leqslant}(x,y) = \widetilde{\sqcup}(x,y,y) \quad \text{et} \quad E(x,y) \leq \ \widetilde{\leqslant}(y,x) = \widetilde{\sqcap}(x,y,y).$$

Donc (VL.1) est satisfaite.

(3) On a $\forall x,y,z \in X, \widetilde{\sqcup}(x,y,y) * \widetilde{\sqcup}(y,z,z) = \widetilde{\leqslant}(x,y) * \widetilde{\leqslant}(y,z) \leq \widetilde{\leqslant}(x,z) = \widetilde{\sqcup}(x,z,z).$

et $\widetilde{\sqcap}(x,y,y) * \widetilde{\sqcap}(y,z,z) = \widetilde{\leqslant}(y,x) * \widetilde{\leqslant}(z,y) \leq \widetilde{\leqslant}(z,x) = \widetilde{\sqcap}(x,z,z).$

Donc (VL.3) est vérifiée.

(4) On a pour tout $x,y,z \in X$,

$$\widetilde{\sqcup}(x,y,z) = \widetilde{\leqslant}(x,z) \wedge \widetilde{\leqslant}(y,z) \wedge \left(\bigwedge_{t\in X} ((\widetilde{\leqslant}(x,t) \wedge \widetilde{\leqslant}(y,t)) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(z,t))\right) \leq \widetilde{\leqslant}(x,z) = \widetilde{\sqcup}(x,z,z)$$

et $\widetilde{\sqcap}(x,y,z) = \widetilde{\leqslant}(z,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(z,y) \wedge \left(\bigwedge\limits_{t\in X} ((\widetilde{\leqslant}(t,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(t,y)) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(t,z))\right) \leq \widetilde{\leqslant}(z,x) = \widetilde{\sqcap}(x,z,z)$

Donc (VL.4) est vérifiée.

(5) Pour tout $x,y,z \in X$, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sqcup}(x,y,z) &= \widetilde{\leqslant}(x,z)\wedge\widetilde{\leqslant}(y,z)\wedge\left(\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(x,t)\wedge\widetilde{\leqslant}(y,t))\to\widetilde{\leqslant}(z,t))\right)\\
&\leq \bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(x,t)\wedge\widetilde{\leqslant}(y,t))\to\widetilde{\leqslant}(z,t))\\
&= \bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\sqcup}(x,t,t)\wedge\widetilde{\sqcup}(y,t,t))\to\widetilde{\sqcup}(z,t,t)).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sqcap}(x,y,z) &= \widetilde{\leqslant}(z,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(z,y)\wedge\left(\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(t,y))\to\widetilde{\leqslant}(t,z))\right)\\
&\leq \bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(t,y))\to\widetilde{\leqslant}(t,z))\\
&= \bigwedge_{t\in X}\left[(\widetilde{\sqcap}(x,t,t)\wedge\widetilde{\sqcap}(y,t,t))\to\widetilde{\sqcap}(z,t,t)\right].
\end{aligned}$$

Donc (VL.5) est vérifiée.

(6) On va montrer que, $\widetilde{\sqcup}(x,y,z)*\widetilde{\sqcap}(z,x,w)\leq E(x,w)\ \forall x,y,z,w\in X$.

Pour tout $x,y,z,w\in X$ on a, $\widetilde{\sqcup}(x,y,z)\leq\widetilde{\leqslant}(x,z)$ et on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sqcap}(z,x,w) &\leq \bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,z)\wedge\widetilde{\leqslant}(t,x))\to\widetilde{\leqslant}(t,w))\\
&\leq (\widetilde{\leqslant}(x,z)\wedge\widetilde{\leqslant}(x,x))\to\widetilde{\leqslant}(x,w)\\
&= \widetilde{\leqslant}(x,z)\to\widetilde{\leqslant}(x,w).
\end{aligned}$$

Donc,

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z)*\widetilde{\sqcap}(z,x,w)\leq\widetilde{\leqslant}(x,z)*(\widetilde{\leqslant}(x,z)\to\widetilde{\leqslant}(x,w))\leq\widetilde{\leqslant}(x,w)\,..........\,(a')$

et on a $\widetilde{\sqcup}(x,y,z)\leq 1$ et $\widetilde{\sqcap}(z,x,w)\leq\widetilde{\leqslant}(w,x)$, alors,

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z)*\widetilde{\sqcap}(z,x,w)\leq\widetilde{\leqslant}(w,x)\,..........\,(a'')$

D'après (a') et (a''), on a :

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z)*\widetilde{\sqcap}(z,x,w)\leq\widetilde{\leqslant}(w,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(x,w)$.

Si (a) est satisfaite c'est-à-dire $*=\wedge$. Donc d'après la E- antisymétrie de $\widetilde{\leqslant}$ on a :

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z)*\widetilde{\sqcap}(z,x,w)\leq\widetilde{\leqslant}(w,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(x,w)\leq E(x,w)$.

Si (b)est satisfaite, on a : $\widetilde{\sqcup}(x,y,z)*\widetilde{\sqcap}(z,x,w)\leq\widetilde{\leqslant}(w,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(x,w)$.

Considérons l'expression (3.2)

$$\widetilde{\leqslant}(x,w)=\begin{cases}1 & \text{si } x\leqslant w;\\ & \text{et}\\ E(x,w) & \text{si non.}\end{cases}$$

Il est facile de voire que, $\widetilde{\leqslant}(w,x)\wedge\widetilde{\leqslant}(x,w)=E(x,w)$.

En effet :

Si $x \leqslant w$ on a : $\widetilde{\leqslant}(w,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,w) = E(x,w) \wedge 1 = E(x,w)$.

Si $w \leqslant x$ on a : $\widetilde{\leqslant}(w,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,w) = 1 \wedge E(x,w) = E(x,w)$.

Si $x \nleqslant w$ et $w \nleqslant x$ on a : $\widetilde{\leqslant}(w,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,w) = E(w,x) \wedge E(x,w) = E(x,w)$.

Donc,

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z) * \widetilde{\sqcap}(z,x,w) \leq E(x,w)\ \forall x,y,z,w \in X.$

(2) On va montrer que $\widetilde{\sqcap}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(z,x,w) \leq E(x,w)\ \forall x,y,z,w \in X.$

Pour tout $x,y,z,w \in X$ on a : $\widetilde{\sqcap}(x,y,z) \leq \widetilde{\leqslant}(z,x)$ et on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sqcup}(z,x,w) &\leq \bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(z,t) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,t)) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(w,t)) \\
&\leq (\widetilde{\leqslant}(z,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,x)) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(w,x) \\
&= \widetilde{\leqslant}(z,x) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(w,x).
\end{aligned}$$

Donc,

$\widetilde{\sqcap}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(z,x,w) \leq \widetilde{\leqslant}(z,x) * (\widetilde{\leqslant}(z,x) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(w,x)) \leq \widetilde{\leqslant}(w,x) \ldots\ldots\ldots. (b')$

et on a : $\widetilde{\sqcup}(z,x,w) \leq \widetilde{\leqslant}(x,w)$ et $\widetilde{\sqcap}(z,x,w) \leq 1$, alors,

$\widetilde{\sqcap}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(z,x,w) \leq \widetilde{\leqslant}(x,w) \ldots\ldots\ldots. (b'')$

D'après (b') et (b''), on a :

$\widetilde{\sqcap}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(z,x,w) \leq \widetilde{\leqslant}(w,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,w)$.

Si (a) est satisfaite c'est-à-dire $* = \wedge$. Donc d'après la E- antisymétrie de $\widetilde{\leqslant}$ on a :

$\widetilde{\sqcap}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(z,x,w) \leq \widetilde{\leqslant}(w,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,w) \leq E(x,w)$.

Si (b) est satisfaite on a : $\widetilde{\sqcap}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(z,x,w) \leq \widetilde{\leqslant}(w,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,w)$.

Considérons l'expression (3.2)

$$\widetilde{\leqslant}(x,w) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant w; \\ & \text{et} \\ E(x,w) & \text{si non.} \end{cases}$$

Il est facile de voire que, $\widetilde{\leqslant}(w,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,w) = E(x,w)$.

En effet :

Si $x \leqslant y$ on a : $\widetilde{\leqslant}(w,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,w) = E(x,w) \wedge 1 = E(x,w)$.

Si $y \leqslant x$ on a : $\widetilde{\leqslant}(w,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,w) = 1 \wedge E(x,w) = E(x,w)$.

Si $\nleqslant w$ et $w \nleqslant x$ on a :$\widetilde{\leqslant}(w,x) \wedge \widetilde{\leqslant}(x,w) = E(w,x) \wedge E(x,w) = E(x,w)$.

Donc,

$\widetilde{\sqcap}(x, y, z) * \widetilde{\sqcup}(z, x, w) \leq E(x, w)\ \forall x, y, z, w \in X.$

D'où, (VL.6) est vérifiée. ■

Afin de démontrer que les conditions ($VL.1$-$VL.7$) du théorème 4.3.1 sont vraiment des conditions nécessaires pour qu'un ensemble $(X, \widetilde{\leqslant})$ M-E-partiellement ordonné devient un M-E- treillis, nous avons besoin du lemme suivant :

lemme 4.3.2 *[8] Pour une relation M-équivalence E sur X, soit $\rho \in L^{(X\times X)\times X}$ une relation floue satisfaisant les conditions (VL.1),(VL.3) du le théorème 4.3.1 et la condition suivante :*

$(VL.2')$ $\rho(x, y, y) * \rho(y, x, x) \leq E(x, y)\ \forall x, y \in X.$

Alors il existe un ordre partiel classique $\leqslant$ sur X tel que la relation E est compatible avec $\leqslant$, et que l'implication suivante soit satisfaite

$$x \leqslant y \Rightarrow \rho(x, y, y) = 1 \forall x, y \in X. \tag{4.10}$$

De plus les propriétés suivantes sont valides

(i) Si ρ satisfait en outre la condition de la linéarité

(VL.7) $\rho(x, y, y) = 1$ ou $\rho(y, x, x) = 1\ \forall x, y \in X$, alors $\leqslant$ peut être choisie comme un ordre linéaire classique sur X.

(ii) Soit $\leqslant$ un ordre partiel classique sur X tel que l'implication (4.10) soit satisfaite. Alors pour tout $x, y \in X$, $\rho(x, y, y)$ est donné par,

$$\rho(x, y, y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leqslant y; \\ E(x, y) & \text{si non.} \end{cases}, \tag{4.11}$$

Si est seulement si ρ satisfait les conditions suivantes :

$$\rho(x, y, y) \neq 1 \text{ et } \rho(y, x, x) \neq 1 \Rightarrow \rho(x, y, y) \vee \rho(y, x, x) \leq E(x, y). \tag{4.12}$$

$$x \bowtie y \Rightarrow \rho(x,y,y) = \rho(y,x,x)\,. \tag{4.13}$$

pour tout $x, y \in X$.

(iii) *Soit* $\varphi \in L^{(X\times X)\times X}$ *une relation floue.* φ *satisfait les conditions* $(VL.1), (VL.2'), (VL.3)$ *et* $(VL.7)$ *si est seulement si il existe une relation d'ordre linéaire classique* $\leqslant$ *sur* X *telle que* E *soit compatible avec* $\leqslant$ *et* $\varphi(x,y,y)$ *peut s'écrire sous la forme* (4.11)*, pour tout* $x, y \in X$.

Si E *est séparable alors on peut avoir :*

(iv) *La relation binaire classique* $\trianglelefteq_\rho$*, définie par :*

$x \trianglelefteq_\rho y \Leftrightarrow \rho(x,y,y) = 1 \ \forall x, y \in X,$

est le plus grand ordre partiel classique $\leqslant$ *sur* X *telle que* $\leqslant$ *satisfait l'implication* (4.10) *et la propriété* E *est compatible avec* $\leqslant$.

(v) *Pour tout* $x, y \in X$, $\rho(x,y,y)$ *est donnée par*

$$\rho(x,y,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \trianglelefteq_\rho y; \\ E(x,y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si est seulement si $\rho(x,y,y)$ *satisfait l'implication* (4.12).

Preuve.

On définit la relation floue $\widetilde{\leqslant}_\rho \in L^{X\times X}$ comme suit :

$\widetilde{\leqslant}_\rho(x,y) = \rho(x,y,y) \ \forall x, y \in X,$

il est claire que les conditions $(VL.1), (VL.2'), (VL.3)$ et $(VL.7)$ sont équivalentes à $(VP.1 - VP.4)$ respectivement c'est-à-dire $\widetilde{\leqslant}_\rho$ est un M-E-ordre partiel, d'après le théorème 3.3.6 il existe un ordre partiel classique $\leqslant$ sur X tel que E soit compatible avec $\leqslant$ et $\leqslant \subseteq \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_\rho}$.

Donc, $x \leqslant y \Rightarrow x \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_\rho} y \Rightarrow \widetilde{\leqslant}_\rho(x,y) = 1 \Rightarrow \rho(x,y,y) = 1.$

(i) Si ρ satisfaite la condition $(VL.7)$, alors $\widetilde{\leqslant}_\rho$ est linéaire donc $\leqslant$ peut être choisie comme un ordre linéaire classique sur X d'après le théorème 3.3.6.

(ii) D'après le théorème 3.3.11 la condition (ii) est facilement vérifiable.

(iii) Puisque φ est un M-E- ordre linéaire donc d'après le corollaire 3.3.15, il est claire que la condition (iii) est satisfaite.

(iv) D'après le théorème 3.3.5 et le théorème 3.3.6 et la remarque 3.3.9 on a : $\trianglelefteq_\rho$ $(\leqslant = \trianglelefteq_\rho)$ est le plus grand ordre partiel classique sur X satisfait l'implication (4.10) et E compatible avec $\trianglelefteq_\rho$.

(v) D'après le corollaire 3.3.13 la condition (v) est satisfaite. ■

Théorème 4.3.3 *[8] Soit E une relation M-équivalence sur X et soient $\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup} \in L^{(X\times X)\times X}$ deux M-opérations binaires vagues parfaites sur X au sens des relations $E^{c}_{X\times X}$ et E. Pour tout $\rho, \upsilon \in \left\{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\right\}$ avec $\rho \neq \upsilon$ et les axiomes $(VL.1 - VL.6)$ du théorème 4.3.1 sont vérifiés. On suppose que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :*

(a) $M = (L, \leq, \wedge)$.

(b) Pour tout $\rho \in \left\{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\right\}$, il existe un ordre partiel classique $\leqslant_\rho$sur X tel que ρ satisfait les implications (4.12), (4.13) du lemme 4.3.2 pour tout $x, y \in X$, ou équivalent à $\rho\,(x, y, y)$ est donné par l'égalité (4.11) du lemme 4.3.2 pour tout $x, y \in X$.

Alors la relation floue $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}} \in L^{X\times X}$ définie par :

$\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}\,(x, y) = \widetilde{\sqcup}\,(x, y, y)\ \forall x, y \in X,$

est un M-E-ordre partiel sur X, et donnée par :

$\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}\,(x, y) = \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}\,(x, y) = \widetilde{\sqcap}\,(x, y, x)\ \forall x, y \in X.$

De plus $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}} = \widetilde{\sqcup}$ et $\widetilde{\sqcap}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}} = \widetilde{\sqcap}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}} = \widetilde{\sqcap}$, c'est-à-dire $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ forme un M-E-treillis.

Preuve.

On va montrer que $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$ est un M-E- ordre partiel sur X. La E- réflexivité et la transitivité sont évidentes d'après $(VL.1, VL.3)$. Puisque $\widetilde{\sqcup}$ est une M-opération binaire vague parfaite sur X au sens des relations $E^{C}_{X\times X}$ et E, on a :

$\widetilde{\sqcup}\,(x, y, y) * \widetilde{\sqcup}\,(x, y, x) \leq E\,(x, y), \forall x, y \in X.$

Alors d'après $(VL.2)$ on a :

$\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}\,(x, y) * \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}\,(y, x) = \widetilde{\sqcup}\,(x, y, y) * \widetilde{\sqcup}\,(y, x, x) = \widetilde{\sqcup}\,(x, y, y) * \widetilde{\sqcup}\,(x, y, x) \leq E\,(x, y), \forall x, y \in X.$

Donc, $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$ est E-antisymétrique.

Alors $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$ est un M-E-ordre partiel .

On va montrer que $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$ peut s'écrire comme suit :

$\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(x,y) = \widetilde{\sqcap}(x,y,x) \ \forall x,y \in X$.

On prend deux éléments arbitraires $x, y \in X$, puisque $\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}$ sont M-fonctions de $X \times X$ dans X. $\exists u \in X$, $\exists v \in X$ tel que $\widetilde{\sqcap}(y,x,u) = \widetilde{\sqcup}(x,y,v) = 1$, alors d'après $(VL.2, VL.6)$ et en utilisant le fait que $\widetilde{\sqcap} \in L^{(X\times X)\times X}$ est une relation floue extensionnelle au sens de la relation E, on a :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(x,y) = \widetilde{\sqcup}(x,y,y) &= \widetilde{\sqcup}(x,y,y) * \widetilde{\sqcap}(y,x,u) \\
&\leq E(x,u) \\
&= E(x,u) * \widetilde{\sqcap}(y,x,u) \\
&\leq \widetilde{\sqcap}(y,x,x) \\
&= \widetilde{\sqcap}(x,y,x) \ . \qquad (A.1)\,.
\end{aligned}$$

De même et d'après $(VL.2, VL.6)$ et d'après l'extensionabililité de la relation $\widetilde{\sqcup} \in L^{(X\times X)\times X}$ au sens de la relation E, on peut avoir

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sqcap}(x,y,x) = \widetilde{\sqcap}(y,x,x) &= \widetilde{\sqcap}(y,x,x) * \widetilde{\sqcup}(x,y,v) \\
&\leq E(y,v) \\
&= E(y,v) * \widetilde{\sqcup}(x,y,v) \\
&\leq \widetilde{\sqcup}(x,y,y) \\
&= \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(x,y)\,. \qquad (A.2)
\end{aligned}$$

D'après $(A.1)$ et $(A.2)$ on a : $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(x,y) = \widetilde{\sqcap}(x,y,x)$.

Maintenant on va vérifier que $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}} = \widetilde{\sqcup}$.

D'après $(VL.4)$ on a : $\widetilde{\sqcup}(x,y,z) \leq \widetilde{\sqcup}(x,z,z), \forall x,y,z \in X$.

D'après $(VL.4)$ et $(VL.2)$ on a aussi, $\widetilde{\sqcup}(x,y,z) = \widetilde{\sqcup}(y,x,z) \leq \widetilde{\sqcup}(y,z,z)$.

Donc,

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z) \leq \widetilde{\sqcup}(x,z,z) \wedge \widetilde{\sqcup}(y,z,z) = \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(x,z) \wedge \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(y,z), \forall x,y,z \in X$.

D'autre part d'après $(VL.5)$ on a l'inégalité

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sqcup}(x,y,z) &\leq \bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\sqcup}(x,t,t) \wedge \widetilde{\sqcup}(y,t,t)) \to \widetilde{\sqcup}(z,t,t)) \\
&= \bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(x,t) \wedge \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(y,t)) \to \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(z,t)).
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}\widetilde{\sqcup}(x,y,z) &\leq \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(x,z)\wedge\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(y,z)\wedge\left[\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(x,t)\wedge\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(y,t))\rightarrow\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(z,t))\right]\\ &= \widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}(x,y,z)\,.................\,(A.3)\end{aligned}$$

et du fait que $\widetilde{\sqcup}$ est une M-opération binaire vague parfaite, et par l'utilisation de l'inégalité $(A.3)$ nous observons que pour tout $x,y\in X$, $\exists w\in X$ tel que $\widetilde{\sqcup}(x,y,w)=1$, c'est-à-dire

$\widetilde{\sqcup}(x,y,w)=1\leq\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}(x,y,w)$, donc, $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}(x,y,w)=1$.

D'où, $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}$ est une M-opération binaire.

(1) Si la condition (a) est vérifiée d'après le théorème 4.1.5 $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}$ est une M- opération binaire vague parfaite sur X au sens des relations $E^C_{X\times X}$ et E.

(2) On suppose que la condition (b) est satisfaite dans ce cas il existe un ordre partiel classique $\leqslant_{\widetilde{\sqcup}}$ sur X tel que le M-E-ordre partiel $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$ peut être représenté comme suit :

$$\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(x,y)=\begin{cases}1 & \text{si}\quad x\leqslant_{\widetilde{\sqcup}}\ y;\\ & \quad et\\ E(x,y) & \text{si non.}\end{cases}$$

$\forall x,y\in X$, c'est-à-dire la condition (b) du théorème 4.1.5 est satisfaite pour $\leqslant\ =\ \leqslant_{\widetilde{\sqcup}}$ et $\widetilde{\leqslant}\ =\ \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$. Donc il est immédiatement d'après le théorème 4.1.5 que $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$ est une M-opération binaire vague parfaite sur X, au sens des relations $E^C_{X\times X}$ et E.

Dans l'ordre de voir l'inégalité,

$\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}(x,y,z)\leq\widetilde{\sqcup}(x,y,z)\ \forall x,y,z\in X$. $\qquad\qquad (A.4)$

On prend trois éléments arbitraires fixes $x,y,z\in X$, puisque $\widetilde{\sqcup}$ est une M-opération binaire sur X et par l'inégalité $(A.3)$, il existe $w\in X$ tel que $\widetilde{\sqcup}(x,y,w)=1$ c'est-à-dire $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}(x,y,w)=1$. Alors nous utilisons le fait que $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}$ et $\widetilde{\sqcup}$ sont des M-opérations binaires vagues parfaites sur X au sens des relations $E^C_{X\times X}$ et E. On écrit

$\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}(x,y,z)=\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}(x,y,z)*\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}(x,y,w)\leq E(z,w)=E(z,w)*\widetilde{\sqcup}(x,y,w)\leq\widetilde{\sqcup}(x,y,z)$.

Les inégalité $(A.3)$ et $(A.4)$ justifier l'égalité $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}=\widetilde{\sqcup}$.

D'une façon analogue on montre que $\widetilde{\sqcap}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}=\widetilde{\sqcap}$. ■

Les théorèmes 4.3.1 et 4.3.3 établissent la caractérisation algébrique du treillis vague dans la plus part des cas généraux, ce pondant, pour quelque cas spécial la caractérisation du treillis vague peut être donné par une façon simple , par utilisation des assumptions moins restrictive que dans les théorèmes 4.3.1et 4.3.3. Par exemple, si les ordres linéaires vagues et les M-égalités sont particulièrement considérés au lieu des ordres vagues est relations M-équivalence respectivement. On voit dans les deux résultats qui suivent que la caractérisation algébrique des treillis vagues présentent dans les théorèmes 4.3.1et 4.3.3 peut être simplifié pour ces deux cas spéciales.

Corollaire 4.3.4 *[8] Soit $\widetilde{\leqslant}$ un M-E-ordre linéaire sur X, et $(X, \widetilde{\leqslant})$ un M-E- treillis. Alors pour tout $\rho, \nu \in \left\{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\right\}$ avec $\rho \neq \nu$, et ρ, ν deux M-opérations binaires vagues parfaites sur X au sens des relations $E^{C}_{X\times X}$ et E satisfont les conditions $(VL.1 - VL.7)$. Inversement soient $\widetilde{\sqcap}$ et $\widetilde{\sqcup}$ deux M-opérations binaires vagues parfaites sur X au sens des relations $E^{C}_{X\times X}$ et E et pour tout pair (ρ, ν) avec les propriétés $\rho, \nu \in \left\{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\right\}$ et $\rho \neq \nu$,on suppose que les conditions $(VL.1 - VL.7)$ soient satisfées, alors la relation floue $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}} \in L^{X\times X}$ définie dans le théorème 4.3.3 est un M-E-ordre linéaire sur X, satisfaisant les égalité $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}} = \widetilde{\sqcup}$ et $\widetilde{\sqcap}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}} = \widetilde{\sqcap}$ c'est-à-dire $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ forme un M-E-treillis.*

Preuve.

(i) La linéarité de $\widetilde{\leqslant}$ preuve $(VL.7)$.

On montre la propriété $(VL.1)$.

Soient $x, y \in X$ d'après la E- réflexivité de $\widetilde{\leqslant}$, on a :

$E(x,y) \leq \widetilde{\leqslant}(x,y) = \widetilde{\sqcup}(x,y,y)$ et $E(x,y) \leq \widetilde{\leqslant}(y,x) = \widetilde{\sqcap}(x,y,y)$,

donc la propriété $(VL.1)$ est satisfaite.

On va montrer la propriété $(VL.2)$,on a :

pour tout $x, y, z \in X$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sqcup}(x,y,z) &= \widetilde{\leqslant}(x,z) \bigwedge \widetilde{\leqslant}(y,z) \bigwedge \left[\bigwedge_{t\in X} ((\widetilde{\leqslant}(x,t) \bigwedge \widetilde{\leqslant}(y,t)) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(z,t))\right] \\
&= \widetilde{\leqslant}(y,z) \bigwedge \widetilde{\leqslant}(y,x) \bigwedge \left[\bigwedge_{t\in X} ((\widetilde{\leqslant}(y,t) \bigwedge \widetilde{\leqslant}(x,t)) \rightarrow \widetilde{\leqslant}(z,t))\right] \\
&= \widetilde{\sqcup}(y,x,z).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{\sqcap}(x,y,z) &= \widetilde{\leqslant}(z,x)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(z,y)\bigwedge\left[\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,x)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(t,y))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(t,z))\right]\\ &= \widetilde{\leqslant}(z,y)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(z,x)\bigwedge\left[\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,y)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(t,x))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(t,z))\right]\\ &= \widetilde{\sqcap}(y,x,z)\,.\end{aligned}$$

Donc la propriété $(VL.2)$ est vérifiée.

On va montrer que la propriété $(VL.3)$ soit satisfaite.

$\widetilde{\sqcup}(x,y,y)*\widetilde{\sqcup}(y,z,z)=\widetilde{\leqslant}(x,y)*\widetilde{\leqslant}(y,z)\leq\widetilde{\leqslant}(x,z)=\widetilde{\sqcup}(x,z,z)$ et

$\widetilde{\sqcap}(x,y,y)*\widetilde{\sqcap}(y,z,z)=\widetilde{\leqslant}(y,x)*\widetilde{\leqslant}(y,z)=\widetilde{\leqslant}(y,z)*\widetilde{\leqslant}(y,x)\leq\widetilde{\leqslant}(z,x)=\widetilde{\sqcap}(x,z,z)\,.$

Donc, $(VL.3)$ est vérifiée.

On va montrer que la propriété $(VL.4)$ soit satisfaite.

Soient $x,y,z\in X$.

On a : $\widetilde{\sqcup}(x,y,z)\leq\widetilde{\leqslant}(x,z)=\widetilde{\sqcup}(x,z,z)$ et $\widetilde{\sqcap}(x,y,z)\leq\widetilde{\leqslant}(z,x)=\widetilde{\sqcap}(x,z,z)\,.$

Donc, $(VL.4)$ est vérifiée.

On va montrer que $(VL.5)$ soit satisfaite.

On a :

$$\widetilde{\sqcup}(x,y,z)\leq\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(x,t)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(y,t))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(z,t))=\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\sqcup}(x,t,t)\bigwedge\widetilde{\sqcup}(y,t,t))\rightarrow\widetilde{\sqcup}(z,t,t)),$$

et

$$\widetilde{\sqcap}(x,y,z)\leq\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,x)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(t,y))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(t,z))=\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\sqcap}(x,t,t)\bigwedge\widetilde{\sqcap}(y,t,t))\rightarrow\widetilde{\sqcap}(z,t,t)).$$

Donc, $(VL.5)$ est vérifiée.

On va montrer que $(VL.6)$ soit satisfaite.

Pour le cas $\rho=\widetilde{\sqcup}$ et $\upsilon=\widetilde{\sqcap}$, on a pour tout $x,y,z,w\in X;\widetilde{\sqcup}(x,y,z)\leq\widetilde{\leqslant}(x,z)$ et

$$\begin{aligned}\widetilde{\sqcap}(z,x,w) &\leq \bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,z)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(t,x))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(t,w))\\ &\leq (\widetilde{\leqslant}(t,z)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(t,x))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(t,w)\,,\ \forall t\in X\\ &\leq (\widetilde{\leqslant}(x,z)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(x,x))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(x,w)\\ &= \widetilde{\leqslant}(x,z)\rightarrow\widetilde{\leqslant}(x,w)\,.\end{aligned}$$

Alors,

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z)*\widetilde{\sqcap}(z,x,w)\leq\widetilde{\leqslant}(x,z)*(\widetilde{\leqslant}(x,z)\rightarrow\widetilde{\leqslant}(x,w))\leq\widetilde{\leqslant}(x,w)$ ....(*)

et on a : $\widetilde{\sqcup}(x,y,z)\leq 1$ et $\widetilde{\sqcap}(z,x,w)\leq\widetilde{\leqslant}(w,x)$, alors

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z)*\widetilde{\sqcap}(z,x,w)\leq\widetilde{\leqslant}(w,x)$ ....(**)

D'après (*) et (**) on a :

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z) * \widetilde{\sqcap}(z,x,w) \leq \widetilde{\lesseqgtr}(x,w) \wedge \widetilde{\lesseqgtr}(w,x)$.

D'après le corollaire 3.3.15 on a $\widetilde{\lesseqgtr}$ représenté par la forme (3.2), c'est-à-dire

$$\widetilde{\lesseqgtr}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant y; \\ E(x,y) & \text{si non.} \end{cases} \quad \forall x,y \in X,$$

tel que $\leqslant$ est une relation linéaire classique sur X.

Si $x \leqslant w$ on a : $\widetilde{\lesseqgtr}(x,w) \wedge \widetilde{\lesseqgtr}(w,x) = 1 \wedge E(w,x) = E(w,x)$.

Si $w \leqslant x$ on a : $\widetilde{\lesseqgtr}(x,w) \wedge \widetilde{\lesseqgtr}(w,x) = E(x,w) \wedge 1 = E(x,w)$.

Donc,

$\widetilde{\lesseqgtr}(x,w) \wedge \widetilde{\lesseqgtr}(w,x) = E(x,w)$.

Alors,

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z) * \widetilde{\sqcap}(z,x,w) \leq \widetilde{\lesseqgtr}(x,w) \wedge \widetilde{\lesseqgtr}(w,x) = E(x,w)$, pour tout $x,y,z,w \in X$.

Pour le cas $\rho = \widetilde{\sqcap}$ et $\upsilon = \widetilde{\sqcup}$, on a pour tout $x,y,z,w \in X, \widetilde{\sqcap}(x,y,z) \leq \widetilde{\lesseqgtr}(z,x)$ et

$$\begin{aligned} \widetilde{\sqcup}(z,x,w) &\leq \bigwedge_{t \in X}((\widetilde{\lesseqgtr}(z,t) \bigwedge \widetilde{\lesseqgtr}(x,t)) \rightarrow \widetilde{\lesseqgtr}(w,t)) \\ &\leq (\widetilde{\lesseqgtr}(z,t) \bigwedge \widetilde{\lesseqgtr}(x,t)) \rightarrow \widetilde{\lesseqgtr}(w,t) \quad \forall t \in X \\ &\leq (\widetilde{\lesseqgtr}(z,x) \bigwedge \widetilde{\lesseqgtr}(x,x)) \rightarrow \widetilde{\lesseqgtr}(w,x) \\ &= \widetilde{\lesseqgtr}(z,x) \rightarrow \widetilde{\lesseqgtr}(w,x). \end{aligned}$$

Alors,

$\widetilde{\sqcap}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(z,x,w) \leq \widetilde{\lesseqgtr}(z,x) * (\widetilde{\lesseqgtr}(z,x) \rightarrow \widetilde{\lesseqgtr}(w,x)) \leq \widetilde{\lesseqgtr}(w,x)$ ....$(*)'$

et on a : $\widetilde{\sqcap}(x,y,z) \leq 1$ et $\widetilde{\sqcup}(z,x,w) = \widetilde{\sqcup}(x,z,w) \leq \widetilde{\lesseqgtr}(x,w)$.

Donc,

$\widetilde{\sqcap}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(z,x,w) \leq \widetilde{\lesseqgtr}(x,w)$ .... $(**)'$

D'après $(*)'$ et $(**)'$ on a :

$\widetilde{\sqcap}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(z,x,w) \leq \widetilde{\lesseqgtr}(x,w) \wedge \widetilde{\lesseqgtr}(w,x)$.

D'après le corollaire 3.3.15 on a $\widetilde{\lesseqgtr}$ est représenté sous la forme (3.2), c'est-à-dire

$$\widetilde{\lesseqgtr}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant y; \\ E(x,y) & \text{si non.} \end{cases} \quad \forall x,y \in X,$$

tel que $\leqslant$ est une relation linéaire classique sur X.

Si $x \leqslant w$ on a : $\widetilde{\lesseqgtr}(x,w) \wedge \widetilde{\lesseqgtr}(w,x) = 1 \wedge E(w,x) = E(w,x)$.

Si $w \leqslant x$ on a : $\widetilde{\leqslant}(x,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,x) = E(x,w) \wedge 1 = E(x,w)$.

Donc,

$\widetilde{\leqslant}(x,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,x) = E(x,w)$.

Alors,

$\widetilde{\sqcap}(x,y,z) * \widetilde{\sqcup}(z,x,w) \leq \widetilde{\leqslant}(x,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,x) = E(x,w)$, pour tout $x,y,z,w \in X$.

Donc, $(VL.6)$ est vérifiée.

(ii) Inversement.

D'après le théorème 4.3.3 on a, $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$ est un M-E-ordre partiel sur X et même la relation $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}} \in L^{X\times X}$ donner par :

$\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}(x,y) = \widetilde{\sqcap}(x,y,x), \forall x,y \in X.$

La condition $(VL.7)$ implique la la linéarité de $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$ c'est-à-dire $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$est un M-E-ordre linéaire sur X. D'après $(VL.2)$ et la E-antisymétrie de $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$ et $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}$ il est facile de déduire que pour tout $\rho \in \left\{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\right\}$, que ρ satisfait $(VL.2')$.

Donc, puisque ρ satisfait $(VL.1)$,$(VL.2')$,$(VL.3)$ et$(VL.7)$, il s'ensuit du lemme 4.3.2 (iii) que la condition (b) dans le théorème 4.3.3 est satisfaite. Donc l'assertion peut être vérifie directement. ■

Corollaire 4.3.5 *[8] Soit E une M-égalité sur X et soit $\widetilde{\leqslant}$ un M-E-ordre partiel sur X tel que l'implication* (3.5) *dans le théorème 3.3.11 soit satisfaite, et soit* $(X, \widetilde{\leqslant})$ *un M-E-treillis. Alors pour tout $\rho, \upsilon \in \left\{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\right\}$ tells que $\rho \neq \upsilon$, ρ et υ sont des M-opérations binaires vagues parfaites sur X au sens des relations $E^{C}_{X\times X}$ et E et satisfont les axiomes* $(VL.1 - VL.6)$ *et l'implication* (4.12). *De plus, $\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcup}} = \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$ et $\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcap}} = \left(\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}\right)^{-1}$, où $\left(\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}\right)^{-1}$ est l'ordre partiel inverse sur X au sens de la relation $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$ c'est-à-dire*

$(x,y) \in \left(\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}\right)^{-1} \Leftrightarrow (y,x) \in \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}, \forall x,y \in X.$

Inversement, soient $\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}$ deux M-opérations binaires vagues parfaites sur X, au sens des relations $E^{C}_{X\times X}$ et E et E une M-égalité sur X, et pour tout pair (ρ, υ) avec $\rho, \upsilon \in \left\{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\right\}$ et $\rho \neq \upsilon$ satisfaites les axiomes $(VL.1 - VL.6)$ *et l'implication* (4.12).

alors la relation floue $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}} \in L^{X\times X}$ définie dans le théorème 4.3.3 est un M-E-ordre partiel sur X tel que l'implication (3.5) *du théorème 3.3.11 est satisfaite. De plus, $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}$ coïncide* *avec la relation floue* $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}} \in L^{X\times X}$ *définie dans le théorème 4.3.3. De plus,* $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}} = \widetilde{\sqcup}$ *,* $\widetilde{\sqcap}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}} = \widetilde{\sqcap}$ *et* $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}} = \trianglelefteq_{\widetilde{\sqcup}} = \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}} = (\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcap}})^{-1}$ *.*

c'est-à-dire $(X, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ *est un* M*-*E*-treillis.*

Preuve.

D'une même façon du remarque 4.1.6 on peut simplement déduire du Lemme 4.3.2 (v) la condition (b) dans le théorème 4.3.3 est équivalent a l'implication (4.12). En appliquant la remarque 4.1.6 et le lemme 4.3.2 (iv) les assertions sont facilement acquises d'après le théorème 4.3.1 et 4.3.3

On va montrer que $\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcup}} = \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$,

pour tout $x, y \in X$, on a :

$(x,y) \in \trianglelefteq_{\widetilde{\sqcup}} \Leftrightarrow \widetilde{\sqcup}(x,y,y) = 1 \Leftrightarrow \widetilde{\leqslant}(x,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) \in \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$.

Donc, $\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcup}} = \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}$.

de même, on a :

$(x,y) \in \trianglelefteq_{\widetilde{\sqcap}} \Leftrightarrow \widetilde{\sqcap}(x,y,x) = 1 \Leftrightarrow \widetilde{\leqslant}(y,x) = 1 \Leftrightarrow (y,x) \in \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}} \Leftrightarrow (x,y) \in \left(\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}\right)^{-1}$.

Donc, $\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcap}} = \left(\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}}\right)^{-1}$.

Inversement, d'après le lemme 4.3.2 (v) la condition (b) dans le théorème 4.3.3 est satisfaite, donc $\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcup}}$définie dans le théorème 4.3.3 est un M-E-ordre partiel qui satisfait la condition (3.5) du théorème 3.3.11.

D'après le théorème 4.3.3 $\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcup}} = \trianglelefteq_{\widetilde{\sqcap}}$ et $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}} = \widetilde{\sqcup}$ et $\widetilde{\sqcap}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}} = \widetilde{\sqcap}$.

Soient $x, y \in X$,on a :

$(x,y) \in \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}} \Leftrightarrow \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}(x,y) = 1 \Leftrightarrow \widetilde{\sqcup}(x,y,y) = 1 \Leftrightarrow (x,y) \in \trianglelefteq_{\widetilde{\sqcup}}$.

Donc, $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}} = \trianglelefteq_{\widetilde{\sqcup}}$ .... (01)

et on a, $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}} = \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}} \Rightarrow \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}} = \trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}}$ .... (02)

et

$$
\begin{aligned}
(x,y)\in\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}} &\Leftrightarrow \widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}(x,y)=1\\
&\Leftrightarrow \widetilde{\sqcap}(x,y,y)=1\\
&\Leftrightarrow \widetilde{\sqcap}(y,x,y)=1\\
&\Leftrightarrow (y,x)\in\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcap}}\\
&\Leftrightarrow (x,y)\in(\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcap}})^{-1}.
\end{aligned}
$$

Donc, $\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}}=(\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcap}})^{-1}$ .... (03)

D'après (01) et (02) et (03) on a :

$\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}=\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcup}}=\trianglelefteq_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}}=(\trianglelefteq_{\widetilde{\sqcap}})^{-1}$. ■

Dans les deux théorèmes 4.3.1 et 4.3.3, bien que les conditions $(VL.3-VL.5)$ ne correspondent pas directement au contre part de $(L.3-L.3')$ dans la présente approche en général, les conditions $(VL.1)$, $(VL.2)$ et $(VL6)$ ne sont qu'une généralisation multivalente de $(L.1-L.1')$, $(L.2-L.2')$ et $(L.4-L.4')$ respectivement. Il est intéressant d'investiguer sur la structure du iccl-monoïde $M=(L,\leq,*)$ sous-jacente c'est-à-dire le rôle de $*$ opération monoïdal, pour qui $(VL.3-VL.5)$ deviennent une généralisation multivalente de $(L.3-L.3')$. [8]

Théorème 4.3.6 *[8] Soit $M=(L,\leq,*)$ un iccl-monoïde satisfait la loi forte de l'algèbre de De Morgan, dans le sens [11]. Soit $(X,\widetilde{\leqslant},\widetilde{\sqcap},\widetilde{\sqcup})$ un M-E-treillis et supposons que l'une des conditions (a) ou (b) du théorème 4.1.5 est satisfaite. Alors pour tout $\rho,\nu\in\{\widetilde{\sqcap},\widetilde{\sqcup}\}$ avec $\rho\neq\nu$, ρ et ν sont des M-opérations binaires vagues parfaites associatives sur X au sens des relations $E^C_{X\times X}$ et E satisfaisant les conditions $(VL.1)$, $(VL.2)$ et $(VL6)$. Inversement, soit $M=(L,\leq,\wedge)$ et pour une relation M-équivalence E sur X, soient $\widetilde{\sqcap},\widetilde{\sqcup}\in L^{(X\times X)\times X}$ deux M-opérations binaires vagues parfaites associatives sur X au sens des relations $E^C_{X\times X}$ et E et satisfont les conditions $(VL.1)$, $(VL.2)$ et $(VL6)$. Alors la relation floue $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}\in L^{(X\times X)}$ définie dans le théorème 4.3.3 est un M-E-ordre partiel sur X, et égale au relation floue $\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}\in L^{(X\times X)}$ donnée dans le théorème 4.3.3. De plus, $\widetilde{\sqcup}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcup}}}=\widetilde{\sqcup}$ et $\widetilde{\sqcap}_{\widetilde{\leqslant}_{\widetilde{\sqcap}}}=\widetilde{\sqcap}$ c'est-à-dire $(X,\widetilde{\leqslant},\widetilde{\sqcap},\widetilde{\sqcup})$ est un M-E-treillis.*

Preuve. Dans la première partie et du théorème 4.3.1, il suffit de montrer l'associativité de $\widetilde{\sqcup}$ et $\widetilde{\sqcap}$. Ici nous prouvons l'associativité de $\widetilde{\sqcup}$ et $\widetilde{\sqcap}$.

Soient $a, b, c, d, m, q, w \in X$ des éléments arbitraires fixes, nous voulons prouver que,

$$\widetilde{\sqcup}(b,c,d) * \widetilde{\sqcup}(a,d,m) * \widetilde{\sqcup}(a,b,q) * \widetilde{\sqcup}(q,c,w) \quad \leq \quad E(m,w) \ldots\ldots (B.1)$$

D'après (4.1) on a :

$$\begin{aligned} \widetilde{\sqcup}(a,c,w) &\leq \bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(a,t) \bigwedge \widetilde{\leqslant}(c,t)) \to \widetilde{\leqslant}(w,t)) \ \forall a,c,w \in X \\ &\leq (\widetilde{\leqslant}(a,m) \bigwedge \widetilde{\leqslant}(c,m)) \to \widetilde{\leqslant}(w,m) \ldots\ldots\ldots\ldots (B.2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widetilde{\sqcup}(a,d,m) &\leq \bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(a,t) \bigwedge \widetilde{\leqslant}(d,t)) \to \widetilde{\leqslant}(m,t)) \ \forall a,d,m \in X \\ &\leq (\widetilde{\leqslant}(a,w) \bigwedge \widetilde{\leqslant}(d,w)) \to \widetilde{\leqslant}(m,w) \ldots\ldots\ldots\ldots (B.3) \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 4.1.3 (i) , nous obtenons

$$\widetilde{\leqslant}(b,d) * \widetilde{\sqcup}(a,b,q) * \widetilde{\sqcup}(a,d,m) \leq \widetilde{\leqslant}(q,m) \ldots\ldots\ldots\ldots (B.4)$$

D'autre part d'après (4.1) et comme $\widetilde{\sqcup}(a,d,m) \leq \widetilde{\leqslant}(d,m)$ et $\widetilde{\sqcup}(b,c,d) \leq \widetilde{\leqslant}(c,d)$

Nous obtenons

$$\widetilde{\sqcup}(a,d,m) * \widetilde{\sqcup}(b,c,d) \leq \widetilde{\leqslant}(c,d) * \widetilde{\leqslant}(d,m) \leq \widetilde{\leqslant}(c,m) \ldots\ldots (B.5)$$

La combinaison de l'inégalité $(B.4)$ et $(B.5)$ et d'après la proposition 3.1.1 (iv) on a :

$$\begin{aligned} &\left[\widetilde{\sqcup}(a,d,m) * \widetilde{\leqslant}(b,d) * \widetilde{\sqcup}(a,b,q)\right] \wedge \left[\widetilde{\sqcup}(a,d,m) * \widetilde{\sqcup}(b,c,d)\right] \\ &= \widetilde{\sqcup}(a,d,m) * ((\widetilde{\leqslant}(b,d) * \widetilde{\sqcup}(a,b,q)) \wedge \widetilde{\sqcup}(b,c,d)) \\ &\leq \ \widetilde{\leqslant}(q,m) \wedge \widetilde{\leqslant}(c,m) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.6) \end{aligned}$$

Comme l'inégalité $(B.6)$ est valide pour tout $a, b, c, d, m, q, w \in X$, et en utilisant la commutativité forte de $\widetilde{\sqcup}$ il est facile de voire que l'inégalité $(B.6\ )$ donne

$$\left[(\widetilde{\leqslant}(b,q) * \widetilde{\sqcup}(b,c,d)) \wedge \widetilde{\sqcup}(a,b,q)\right] * \widetilde{\sqcup}(q,c,w) \leq \ \widetilde{\leqslant}(a,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(d,w) \ldots. (B.7)$$

Alors il est facile de obtenir de $(B.2)$ et $(B.6)$ que

$$\begin{aligned} &\left[(\widetilde{\leqslant}(b,d) * \widetilde{\sqcup}(a,b,q)) \wedge \widetilde{\sqcup}(b,c,d)\right] * \widetilde{\sqcup}(a,d,m) * \widetilde{\sqcup}(q,c,w) \\ &\leq \ \left(\widetilde{\leqslant}(q,m) \wedge \widetilde{\leqslant}(c,m)\right) * \left[(\widetilde{\leqslant}(q,m) \wedge \widetilde{\leqslant}(c,m)) \to \widetilde{\leqslant}(w,m)\right] \\ &\leq \ \widetilde{\leqslant}(w,m) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.8) \end{aligned}$$

De la même façon nous obtenons de $(B.3)$ et $(B.7)$ que

$$\begin{aligned} &\left[(\widetilde{\leqslant}(b,q) * \widetilde{\sqcup}(b,c,d)) \wedge \widetilde{\sqcup}(a,b,q)\right] * \widetilde{\sqcup}(q,c,w) * \widetilde{\sqcup}(a,d,m) \\ &\leq (\widetilde{\leqslant}(a,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(d,w)) * \left[(\widetilde{\leqslant}(a,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(d,w)) \to \widetilde{\leqslant}(m,w)\right] \\ &\leq \ \widetilde{\leqslant}(m,w) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.9) \end{aligned}$$

Alors en utilisant l'inégalités $(B.8)$ et $(B.9)$ et d'après la proposition 3.1.1 (vi) nous obtenons que

$$\left[(\widetilde{\leqslant}(b,d)*\widetilde{\sqcup}(a,b,q))\wedge(\widetilde{\leqslant}(b,q)*\widetilde{\sqcup}(b,c,d))\right]*\widetilde{\sqcup}(a,d,m)*\widetilde{\sqcup}(q,c,w)$$
$$=(\left[(\widetilde{\leqslant}(b,d)*\widetilde{\sqcup}(a,b,q))\wedge\widetilde{\sqcup}(a,b,q)\right]\wedge\left[(\widetilde{\leqslant}(b,q)*\widetilde{\sqcup}(b,c,d))\wedge\widetilde{\sqcup}(b,c,d)\right])$$
$$*\widetilde{\sqcup}(a,d,m)*\widetilde{\sqcup}(q,c,w)$$
$$=(\left[(\widetilde{\leqslant}(b,d)*\widetilde{\sqcup}(a,b,q))\wedge\widetilde{\sqcup}(b,c,d)\right]\wedge\left[(\widetilde{\leqslant}(b,q)*\widetilde{\sqcup}(b,c,d))\wedge\widetilde{\sqcup}(a,b,q)\right])$$
$$*\widetilde{\sqcup}(a,d,m)*\widetilde{\sqcup}(q,c,w)$$
$$=(\left[(\widetilde{\leqslant}(b,d)*\widetilde{\sqcup}(a,b,q))\wedge\widetilde{\sqcup}(b,c,d)\right]*\widetilde{\sqcup}(a,d,m)*\widetilde{\sqcup}(q,c,w))\wedge$$
$$(\left[(\widetilde{\leqslant}(b,q)*\widetilde{\sqcup}(b,c,d))\wedge\widetilde{\sqcup}(a,b,q)\right]*\widetilde{\sqcup}(a,d,m)*\widetilde{\sqcup}(q,c,w))$$
$$\leq\ \widetilde{\leqslant}(w,m)\wedge\widetilde{\leqslant}(m,w)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (B.10)$$

De plus, de (4.1), puisque nous avons, $\widetilde{\sqcup}(a,b,q)\leq\widetilde{\leqslant}(b,q)$ et $\widetilde{\sqcup}(b,c,d)\leq\widetilde{\leqslant}(b,d)$ et en utilusant $(B.10)$ nous obtenons

$$\widetilde{\sqcup}(b,c,d)*\widetilde{\sqcup}(a,d,m)*\widetilde{\sqcup}(a,d,q)*\widetilde{\sqcup}(q,c,w)$$
$$=\left[\left(\widetilde{\sqcup}(b,c,d)*\widetilde{\sqcup}(a,b,q)\right)\wedge\left(\widetilde{\sqcup}(a,b,q)*\widetilde{\sqcup}(b,c,d)\right)\right]*\widetilde{\sqcup}(a,d,m)*\widetilde{\sqcup}(q,c,w)$$
$$\leq\left[\left(\widetilde{\leqslant}(b,d)*\widetilde{\sqcup}(a,b,q)\right)\wedge\left(\widetilde{\leqslant}(b,q)*\widetilde{\sqcup}(b,c,d)\right)\right]*\widetilde{\sqcup}(a,d,m)*\widetilde{\sqcup}(q,c,w)$$
$$\leq\ \widetilde{\leqslant}(w,m)\wedge\widetilde{\leqslant}(m,w)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (B.11)$$

D'autre part l'hypothèse du théorème implique directement l'égalité

$\widetilde{\leqslant}(w,m)\wedge\widetilde{\leqslant}(m,w)=E(m,w)$ (voir la confirmation de l'égalité (14) dans le théorème 4.1.5), et donc, l'inégalité $(B.1)$ requis en suivent $(B.11)$, d'une part.

D'autre part,

soient $a,b,c,d,m,q,w\in X$ des éléments arbitraires fixes, nous voulons prouver que

$$\widetilde{\sqcap}(b,c,d)*\widetilde{\sqcap}(a,d,m)*\widetilde{\sqcap}(a,b,q)*\widetilde{\sqcap}(q,c,w)\quad\leq\quad E(m,w)\ldots..(B.1')$$

D'après (10) on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{\sqcap}(q,c,w)&\leq\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,q)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(t,c))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(t,w))\ \forall q,c,w\in X\\&\leq(\widetilde{\leqslant}(m,q)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(m,c))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(m,w)\ldots\ldots\ldots(B.2')\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\widetilde{\sqcap}(a,d,m)&\leq\bigwedge_{t\in X}((\widetilde{\leqslant}(t,a)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(t,d))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(t,m))\ \forall a,d,m\in X\\&\leq(\widetilde{\leqslant}(w,a)\bigwedge\widetilde{\leqslant}(w,d))\rightarrow\widetilde{\leqslant}(w,m)\ldots\ldots\ldots(B.3')\end{aligned}$$

En utilisant la proposition 4.1.3 (i), nous obtenons,

$$\widetilde{\leqslant}(d,b)*\widetilde{\sqcap}(a,b,q)*\widetilde{\sqcap}(a,d,m)\leq\widetilde{\leqslant}(m,q)\ldots\ldots\ldots(B.4')$$

D'autre part d'après (4.2) et comme $\widetilde{\sqcap}(a,d,m) \leq \widetilde{\leqslant}(m,d)$ et $\widetilde{\sqcap}(b,c,d) \leq \widetilde{\leqslant}(d,c)$

Nous obtenons

$\widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\sqcap}(b,c,d) \leq \widetilde{\leqslant}(m,d) * \widetilde{\leqslant}(d,c) \leq \widetilde{\leqslant}(m,c)$.....$(B.5')$

La combinaison de l'inégalité $(B.4')$ et $(B.5')$ et d'après la proposition 3.1.1 (iv) on a :

$$\left[\widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\leqslant}(d,b) * \widetilde{\sqcap}(a,b,q)\right] \wedge \left[\widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\sqcap}(b,c,d)\right]$$
$$= \widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \left[(\widetilde{\leqslant}(d,b) * \widetilde{\sqcap}(a,b,q)) \wedge \widetilde{\sqcap}(b,c,d)\right]$$
$$\leq \widetilde{\leqslant}(m,q) \wedge \widetilde{\leqslant}(m,c) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.6')$$

Puisque l'inégalité $(B.6')$ est valide pour tout $a,b,c,d,m,q,w \in X$, et en utilisant la commutativité forte de $\widetilde{\sqcup}$ il est facile de voire que l'inégalité $(B.6'\ )$ donne

$$\left[(\widetilde{\leqslant}(q,b) * \widetilde{\sqcap}(b,c,d)) \wedge \widetilde{\sqcap}(a,b,q)\right] * \widetilde{\sqcap}(q,c,w) \leq \ \widetilde{\leqslant}(w,d) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,a) \ldots\ldots (B.7')$$

Alors il est facile de obtenir de $(B.2')$ et $(B.6')$ que

$$\left[(\widetilde{\leqslant}(d,b) * \widetilde{\sqcap}(a,b,q)) \wedge \widetilde{\sqcap}(b,c,d)\right] * \widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\sqcap}(q,c,w)$$
$$\leq (\widetilde{\leqslant}(m,q) \wedge \widetilde{\leqslant}(m,c)) * \left[(\widetilde{\leqslant}(m,q) \wedge \widetilde{\leqslant}(m,c)) \to \widetilde{\leqslant}(m,w)\right]$$
$$\leq \widetilde{\leqslant}(m,w) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.8')$$

De même façon nous obtenons de $(B.3')$ et $(B.7')$ que

$$\left[(\widetilde{\leqslant}(q,b) * \widetilde{\sqcap}(b,c,d)) \wedge \widetilde{\sqcap}(a,b,q)\right] * \widetilde{\sqcap}(q,c,w) * \widetilde{\sqcap}(a,d,m)$$
$$\leq (\widetilde{\leqslant}(w,d) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,a)) * \left[(\widetilde{\leqslant}(w,d) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,a)) \to \widetilde{\leqslant}(w,m)\right]$$
$$\leq \widetilde{\leqslant}(w,m) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.9')$$

Alors en utilisant l'inégalités $(B.8')$ et $(B.9')$ et d'après la proposition 3.1.1 (vi) nous obtenons que

$$\left[(\widetilde{\leqslant}(d,b) * \widetilde{\sqcap}(a,b,q)) \wedge (\widetilde{\leqslant}(b,q) * \widetilde{\sqcap}(b,c,d))\right] * \widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\sqcap}(q,c,w)$$
$$= (\left[(\widetilde{\leqslant}(d,b) * \widetilde{\sqcap}(a,b,q)) \wedge \widetilde{\sqcap}(a,b,q)\right] \wedge \left[(\widetilde{\leqslant}(q,b) * \widetilde{\sqcap}(b,c,d)) \wedge \widetilde{\sqcap}(b,c,d)\right])$$
$$* \widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\sqcap}(q,c,w)$$
$$= (\left[(\widetilde{\leqslant}(d,b) * \widetilde{\sqcap}(a,b,q)) \wedge \widetilde{\sqcap}(b,c,d)\right] \wedge \left[(\widetilde{\leqslant}(q,b) * \widetilde{\sqcap}(b,c,d)) \wedge \widetilde{\sqcap}(a,b,q)\right])$$
$$* \widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\sqcap}(q,c,w)$$
$$= (\left[(\widetilde{\leqslant}(d,b) * \widetilde{\sqcap}(a,b,q)) \wedge \widetilde{\sqcap}(b,c,d)\right] * \widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\sqcap}(q,c,w)) \wedge$$
$$(\left[(\widetilde{\leqslant}(q,b) * \widetilde{\sqcap}(b,c,d)) \wedge \widetilde{\sqcap}(a,b,q)\right] * \widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\sqcap}(q,c,w))$$
$$\leq \widetilde{\leqslant}(m,w) \wedge \widetilde{\leqslant}(w,m) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.10')$$

De plus de (4.2) et car nous avons, $\widetilde{\sqcap}(a,b,q) \leq \widetilde{\leqslant}(q,b)$ et $\widetilde{\sqcap}(b,c,d) \leq \widetilde{\leqslant}(d,b)$ et en utilisant $(B.10')$ nous obtenons

$$\widetilde{\sqcap}(b,c,d) * \widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\sqcap}(a,d,q) * \widetilde{\sqcap}(q,c,w)$$
$$= \left[(\widetilde{\sqcap}(b,c,d) * \widetilde{\sqcap}(a,b,q)) \wedge (\widetilde{\sqcap}(a,b,q) * \widetilde{\sqcap}(b,c,d))\right] * \widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\sqcap}(q,c,w)$$
$$\leq \left[(\widetilde{\lesseqgtr}(d,b) * \widetilde{\sqcap}(a,b,q)) \wedge (\widetilde{\lesseqgtr}(q,b) * \widetilde{\sqcap}(b,c,d))\right] * \widetilde{\sqcap}(a,d,m) * \widetilde{\sqcap}(q,c,w)$$
$$\leq \widetilde{\lesseqgtr}(w,m) \wedge \widetilde{\lesseqgtr}(m,w) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (B.11')$$

D'autre part l'hypothèse du théorème directement implique l'égalité

$\widetilde{\lesseqgtr}(w,m) \wedge \widetilde{\lesseqgtr}(m,w) = E(m,w)$ (voir la confirmation de l'égalité (14) dans le théorème 4.1.5), et donc l'inégalité $(B.1')$ requise en suivent $(B.11')$ d'une part.

Dans le but de vérifier l'inverse du théorème nous utilisons le théorème 4.3.3 il est indiqué de montrer que pour tout $\rho \in \left\{\widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup}\right\}$ satisfait les conditions $(VL.3 - VL.5)$. Ici nous établissons la preuve de ses condition seulement pour $\rho = \widetilde{\sqcup}$. L'autre cas est de la même façon. Soient x, y, z trois éléments arbitraires fixes de X, puisque $\widetilde{\sqcup}$ est une opération binaire M-vague au sens des relations $E^C_{X\times X}$ et E, il est claire qu'il

$\exists u \in X$ tel que $\widetilde{\sqcup}(x,y,z) = 1$ ....$(B.12)$

De plus on a :

$E(u,z) = E(u,z) \wedge \widetilde{\sqcup}(x,z,u) \leq \widetilde{\sqcup}(x,z,z)$ ....$(B.13)$

$(VL.3)$ donne l'associativité de $\widetilde{\sqcup}$, et la considération de l'expressions $(B.12), (B.13)$ on a :

$$\begin{aligned}\widetilde{\sqcup}(x,y,y) \wedge \widetilde{\sqcup}(y,z,z) &= \widetilde{\sqcup}(y,z,z) \wedge \widetilde{\sqcup}(x,z,u) \wedge \widetilde{\sqcup}(x,y,y) \wedge \widetilde{\sqcup}(y,z,z)\\ &\leq E(u,z)\\ &\leq \widetilde{\sqcup}(x,z,z),\end{aligned}$$

et donc $(VL.3)$ est satisfaite

$(VL.4)$ de $(VL.1)$ nous avons, $E(x,x) = 1 \leq \widetilde{\sqcup}(x,x,x)$ c'est-à-dire $\widetilde{\sqcup}(x,x,x) = 1$, alors par l'associativité de $\widetilde{\sqcup}$ et par $(B.12)$ et $(B.13)$ on peut ecrire facilement

$$\begin{aligned}\widetilde{\sqcup}(x,y,z) &= \widetilde{\sqcup}(x,y,z) \wedge \widetilde{\sqcup}(x,z,u) \wedge \widetilde{\sqcup}(x,x,x) \wedge \widetilde{\sqcup}(x,y,z)\\ &\leq E(u,z)\\ &\leq \widetilde{\sqcup}(x,z,z),\end{aligned}$$

donc $(VL.4)$ est satisfaite.

$(VL.5)$ Soit $t \in X$ un élément arbitraire fixe. Alors

$\exists v \in X$ tel que $\widetilde{\sqcup}(z,t,v) = 1$.

Comme $(B.13)$ dans nous avons évidemment $E(v,t) = E(v,t) \wedge \widetilde{\sqcup}(z,t,v) \leq \widetilde{\sqcup}(z,t,t)$,

et par l'associativité de $\widetilde{\sqcup}$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\widetilde{\sqcup}(x,t,t) \wedge \widetilde{\sqcup}(y,t,t) \wedge \widetilde{\sqcup}(x,y,z) &= \widetilde{\sqcup}(y,t,t) \wedge \widetilde{\sqcup}(x,t,t) \wedge \widetilde{\sqcup}(x,y,z) \wedge \widetilde{\sqcup}(z,t,v) \\
&\leq E(v,t) \\
&\leq \widetilde{\sqcup}(z,t,t).
\end{aligned}$$

Alors, en appliquant la propriété d'adjonction (AD) sur l'inégalité

$\widetilde{\sqcup}(x,t,t) \wedge \widetilde{\sqcup}(y,t,t) \wedge \widetilde{\sqcup}(x,y,z) \leq \widetilde{\sqcup}(z,t,t)$.

D'où,

$\widetilde{\sqcup}(x,y,z) \leq \bigwedge\limits_{t \in X} \left[(\widetilde{\sqcup}(x,t,t) \wedge \widetilde{\sqcup}(y,t,t)) \to \widetilde{\sqcup}(z,t,t) \right]$. ■

Conclusion

Dans ce mémoire, on introduit la notion d'un système de clôture fuzzifier comme un ensemble flou sur la collection des sous ensembles d'un ensemble non vide. Il est prouvé que cette structure est un L-treillis. Inversement, tout treillis flou est isomorphe à un système de clôture fuzzifier. En particulier tout treillis flou complet est représentable par un système de clôture. De plus on présente une théorie générale des relations d'ordres, et treillis basée sur des relations d'équivalences multivalentes, sous le nom relations d'ordre vagues et treillis vagues respectivement. Les représentations et les constructions des relations d'ordre vagues et des treillis vagues sont les sujets principaux de ce travail.

Nous concluons avec quelques commentaires concernant les futures recherches dans ce domaine.

Ce travail donne une très grande possibilité de généraliser quelques concepts classiques notamment la propriété du cutworthy[1] qui translate les propriétés de l'ordre flou sur ses coupes (qui sont des ordre classiques), et inversement.

[1] cutworthy = avoir la propriété des coupes

Bibliographie

[1] A. Achache, *How to Fuzify a Closure Space*, Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 130 No.2 (1988) 538-544.

[2] N. Ajmal, K. V. Thomas, *Fuzzy lattices*, Inform. Sci. 79 (1994) 271–291.

[3] R. Bělohlávek, *Fuzzy Relational Systems : Foundations and Principles*, Kluwer Academic/Plenum Press, NewYork, 2002.

[4] G. Birkhoff, *lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publications, third ed., Amer Math. Soc., RI, 1967.

[5] U. Bodenhofer, *Similarity-based generalization of fuzzy orderings preserving the classical axioms*, Internat. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge Based Systems (3) (2000) 593–610.

[6] U. Bodenhofer, *Representations and constructions of similarity-based fuzzy orderings*, Fuzzy Sets and Systems 137 (2003) 113–136.

[7] M. Demirci, *Foundations of fuzzy functions and vague algebra based on many-valued equivalence relations, Part I : fuzzy functions and their applications*, Internat. J. General Systems 32 (2) (2003) 123–155.

[8] M. Demirci, *A theory of vague lattices based on many-valued equivalence relations—I* : Fuzzy Sets and Systems 151(2005) 437-472.

[9] M. Demirci, *A theory of vague lattices based on many-valued equivalence relations—II : complete lattices*, Fuzzy Sets and Systems, 151(2005) 473-489.

[10] U. Höhle, *Quotients with respect to similarity relations*, Fuzzy Sets and Systems 27 (1988) 31–44.

[11] U. Höhle, *Commutative residuated l-monoïdes*, in : U. Höhle, E.P. Klement (Eds.), Non-Classical Logics and their Applications to Fuzzy Subsets, Kluwer Academic Publishers, Boston, Dordrecht, 1995, pp. 53–106.

[12] J. Jacas, J. Recasens, *Fuzzy numbers and equality relations*, in : Proc. FUZZ'IEEE 93, San, Francisco, 1993, pp. 1298–130.

[13] B. Šeselja, Tepavčević, A., *Completion of Ordered Structures by Cuts of Fuzzy Sets, An Overview*, Fuzzy Sets and Systems 136 (2003) 1-19.

[14] B. Šeselja, Tepavčević, A., *Representing Ordered Structures by Fuzzy Sets, An Overview*, Fuzzy Sets and Systems 136 (2003).

[15] B. Šeselja, Tepavčević, A., *Fuzzifying Closure Systems and Fuzzy lattices*,A. An et al. (Eds.) : RSFDGrC 2007, LNAI 4482, pp. 111–118, 2007 Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007.

[16] L.A. Zadeh, *Similarity relations and fuzzy orderings*, Inform. Sci. 3 (1971) 177–200.

[17] L.A. Zadeh, *Towards a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic*, Fuzzy Sets and Systems 90 (1997) 111–127.

الخلاصة باللغة العربية

في هذه المذكرة قدمنا نظام الإغلاق كمجموعة ضبابية على مجموعة من المجموعات الجزئية من مجموعة غير خالية. سنبين أن هذه البنية هي شبكة ضبابية و بالعكس كل شبكة ضبابية تشاكل تقابليا نظام إغلاق مضبب و على وجه الخصوص كل شبكة ضبابية تامة قابلة للتمثيل بنظام إغلاق مضبب. كما تطرقنا إلى نظرية جديدة وعامة حول علاقات الترتيب والشبكات المبنية على علاقات التكافؤ المتعددة القيم، تحت اسم علاقات الترتيب الغامضة (vague) والشبكات الغامضة. تمثيلات و إنشاءات علاقات الترتيب الغامضة و الشبكات الغامضة هي المحور الرئيسي لهذا الجزء. وعلاوة على ذلك درسنا الخصائص الجبرية للشبكات الغامضة

Abstract

In this work we introduced the notion of fuzzifying closure system as a fuzzy set on the collection of subsets of a nonempty set. It is proved that this structure is a particular fuzzy lattice ordered poset. Conversely, every lattice ordered poset is isomorphic to a fuzzifying closure system. In particular, each complete fuzzy lattice is representable by a fuzzifying closure system. In addition we present a new general theory of ordering relations and lattices based on many-valued equivalence relations under the name vague ordering relations and vague lattices, respectively. Representations and constructions of vague ordering relations and vague lattices are the main subjects of this work.

Résumé du mémoire

Dans ce mémoire, on introduit la notion d'un système de clôture fuzzifier comme un ensemble flou sur la collection des sous ensembles d'un ensemble non vide. Il est prouvé que cette structure est un L-treillis. Inversement, tout treillis flou est isomorphe à un système de clôture fuzzifier. En particulier tout treillis flou complet est représentable par un système de clôture. De plus on présente une nouvelle théorie générale des relations d'ordres, et treillis basée sur des relations d'équivalences multivalentes, sous le nom relations d'ordre vagues et treillis vagues respectivement. Les représentations et les constructions des relations d'ordre vagues et des treillis vagues sont les sujets principaux de ce travail.