N° d'ordre : ....

UNIVERSITE DE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magistère

Option : Mathématiques appliquées

Par :

MELIANI Saliha

SUJET

La composition à gauche par les opérateurs du para produit

Soutenu publiquement le 22 -11 -2010 devant le jury composé de :

Mr. BOUDERAH Brahim	Prof.Université de M'sila	Président
Mr. MOUSSAI Madani	Prof .Université de M'sila	Rapporteur
Mr. BENSALEM Naceur eddine	Prof .Université de Sétif	Examinateur
Mr. LEMNAOUR Zadam	M.C. Université de M'sila	Examinateur

Promotion : 2006/2007

Remerciement

Je tiens à remercier vivement le professeur M.Moussai qui m'a proposé le sujet , pour avoir accepté de diriger ce travail , pour sa gentillesse son dévouement et ses conseils précieux.

Je remercie le professeur B.Bouderah d'avoir accepté la présidence du jury et pour ses conseils qui m'ont été très utiles .

Je remercie aussi les professeurs N.Ben salem et L.Zedam pour avoir accepté de faire partie du jury .

Aussi mon remerciement à tous les amis qui m'ont aidé dans l'élaboration de cette thèse.

Je remercie particulièrement mes parents, mes frères et mon marie, je remercie tous mes amis.

SOMMAIRE

ملخص الرسالة

ليكن التطبيق T: g→fog المعرف بالتركيب من اليسار
في هذه المذكرة ندرس الدالة f المعرفة على محور الأعداد الحقيقية من اجل أن يكون T **محدود على فضاءات من نوع** Sobolev، Besov **و**Lizorkin-Triebel ، وهذا باستعمال المؤثرات الشبه جدائية المعرفة من قبل J.M Bonyوالشبه الخطية لY.Meyer .

الكلمات المفتاحية

فضاء Lizorkin-Triebel**، فضاء** Besov**، فضاء** Sobolev**، مؤثر**para-produit ، **مؤثر** Pseudo-différentiels، مؤثرالتركيب.

Abstract

Let T: g→fog the composition operator. This is to characterize the real function f such that T acts on some fonctionnal spaces, like Sobolev, Besov and Lizorkin-Triebel. For the paralineatization of Y.Meyer , we will use the paraproduct of J.M Bony in particular the Littlweood-Paley theory .

Key word

Lizorkin-Triebel spaces, Besov spaces, Sobolev spaces paraproduct operator, Pseudo-differential operator, Composition.

Résumé

Soit l'opérateur de composition à gauche définie par T: g→fog. Il s'agit de caractériser la fonction réelle f définie sur l'axe réel R, tel que T soit borné sur certains espaces fonctionnels de type de Sobolev, de Besov et de Lizorkin-Triebel. En utilisant les opérateurs du par-produit, définis par J.M Bony à partir de la théorie de Littlweood-Paley et développés par Y.Meyer, pour la paralinéarisation.

Mot-clés

Espaces de Lizorkin-Triebel, Espace de Besov, Espace de Sobolev Opérateurs du para-produit, opérateurs Pseudo-différentiels, Composition.

Notations

Les notations suivantes seront utilisées le long de ce mémoire:
• Toute les fonctions sont définies sur l'espace Euclidien $\mathbb{R}^n$.
• $C^r = C\ (\mathbb{R}^n)$ espaces des fonction continues
• $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ la classe des fonctions indéfiniument différentiebles.
• $S(\mathbb{R}^n)$ est la classe de Schwartz, et $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ son dual l'espace des disrtibutions tempérées
• $D\,(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions C^∞ à support compact, $D'(\mathbb{R}^n)$ son dual.
• Avec $\|f\|_p$ on désigne la norme d'une fonction f apprtient à l'espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^n)$.
• Si $p \in [1, +\infty]$ alors p' désigne l'expsant conjugué donné par la formule suivante:$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.
• Pour $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ soit $\hat{f} = \mathcal{F}f$ désigne sa transformée de Fourier, et $\mathcal{F}^{-1}f$ sa transformée de Fourier inverse. Il découle alors que si $\psi \in S(\mathbb{R}^n)$
on a

$$\overset{\wedge}{\psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\psi\,(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}\psi(\xi) = (2\pi)^{-n}\overset{\wedge}{\psi}(-\xi),\ (\forall \xi \in \mathbb{R}^n)\,.$$

• Pour une fonction f différentiable d'ordre $m \in \mathbb{N}$, on écrit

$$f^{(\alpha)} = D_x^\alpha f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}, \qquad x^\alpha = x^{\alpha_1}...x^{\alpha_n}, \qquad |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \leq m.$$

• Soit $r \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $C^r\,(\mathbb{R}^n)$ est l'espace de Hölder des fonctions bornées muni de la norme

$$\|f\|_{C^r} = \|f\|_\infty + \sup_{x \neq y} \frac{|f\,(x) - f\,(y)|}{|x-y|^r}, \quad 0 < r < 1$$

• H_p^s (Espace de Bessel) : est l'espace des fonctions $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ où

$$\|f\|_{H_p^s} = \left\| \left(\left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{s}{2}} \hat{f}\,(\xi) \right)^{\vee} (x) \right\|_p < \infty \qquad (s \in \mathbb{R}, 1 < p < \infty)\,.$$

Introduction

Dans la théorie des opérateurs pseudo-différentiels (O.P.D), l'utilisation des espaces fonctionnels est importante, car la difficulté peut-être minimiseé si l'espace rentre dans l'étude, aussi pour généraliser certains résultats,(de L. Hormander par exemple), il faut introduire des espaces qui généralisent les Sobolev, en l'occurrence les espaces de Besov, de Triebel et de potentiel de Bessel.Ces espaces eux même demandent des investigations, en particulier la composition dite à gauche, défini par

$$f \ o \ g \in E \quad \text{avec} \quad f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad g \in E.$$

(l'espace E est de besov ou de triebel sur $\mathbb{R}^n$). Alors il faut chercher à caractériser f .

Dans ce cadre ce mémoir est ridigé, il comporte les points suivantes:

- Le premier est l'étude des O.P.D, les opérateurs paradifférentiels, le para-produit et la paralinearisation d'apres Y. Meyer nécessaire pour la composition
- Le deuxième est l'étude de la composition en utilisant la continuité des O.P.D dans les espaces de Besov et les espaces de Lizorkin-Triebel.

Le travail est organisé en cinq chapitres :

• Dans le premier, chapitre on va rappeler les notions essentielles à savoir les inégalités de Hölder,Young et de Bernstien, les séries de Littlewood-Paley, les espaces de Besov de Lizorkin-Triebel et quelques propriétés principales de ces espaces fonctionnels.

• Dans le deuxième, et le troisième chapitre, on va étudier des généralités sur les Opérateurs pseudo-différentiels, les Opérateurs paradifférentiels, le para-produit et paralinérisation d'apres Y.Meyer nécessaire pour la composition.

• Dans le quatrième chapitre, on va étudier la composition en utilisant la continuité des opérateurs pseudo-différentiels dans l'espace de Besov et de Lizorkin-Triebel ,

• Le dernier chapitre , contient un résultat pour les opérateurs pseudo-différentiels sur les espaces homogènes.

Enfin, notons que ce travail est dans l'espaces euclidien $\mathbb{R}^n$ $(n = 1, 2, ...)$.

CHAPITRE 1

ESPACES DE BESOV ET DE LIZORKIN-TRIEBEL

1.1 Préparations

Dans ce chapitre on va rappeler les notions essentielles à savoir les inégalités de Hölder,Young et de Bernstien, les séries de Littlewood-Paley, les espaces de Besov de Lizorkin-Triebel et quelques propriétés principales de ces espaces fonctionnels.

1.1.1 Inégalités principales

Nous allons faire usage répété des inégalités de Hölder,Young et Bernstien,dont nous ferons un rappel.

Théorème 1 *(Inégalité de Hölder)*
Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ *avec* $1 \leq p, q \leq +\infty$, *alors* $f.g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ *et de plus*

$$\|f.g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Preuve: La démonstration est vraiment classique, elle est basée sur les fonctions convexes.

Théorème 2 *(Inégalité de Young)*
Soient p, q, r *dans* $[1, \infty]$ *tel que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Alors pour toute $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *et toute* $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *on a*

$$f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$$

et

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

Preuve: On fixe $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et on considère l'opérateur $Tf = f * g$. On a

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (f(y))^{\frac{1}{q}} g(x-y) (f(y))^{\frac{1}{q'}} dy. \end{aligned}$$

Alors
$$|Tf\,(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^{\frac{1}{q}} \, |g(x-y)| \, |f(y)|^{\frac{1}{q'}} \, dy.$$
par l'inégalité de Hölder, on obtient
$$|Tf\,(x)|^q \leq \|f\|^{\frac{q}{q'}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \, |g(x-y)|^q \, dy$$
donc
$$|Tf\,(x)|_q \leq \|g\|_q \, \|f\|_1 \, .$$
D'autre part l'inégalité de Hölder donne
$$|Tf\,(x)| \leq \|g\|_q \, \|f\|_{q'} .$$
Alors on applique le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin, voir [BeL]:
$$\begin{array}{rcl} T & : & L^1\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^n\right) \\ T & : & L^1\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^n\right) \end{array}$$
il vient
$$T : L^q\left(\mathbb{R}^n\right) \longrightarrow L^r\left(\mathbb{R}^n\right),$$
avec
$$\frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}, \qquad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{q}, \qquad \theta \in \left]0, 1\right[.$$
On a
$$\frac{1}{p} = \theta + \frac{1-\theta}{q'}$$
entraîne
$$\begin{aligned} \frac{1}{p} &= \theta + 1 - \frac{1}{q} - \theta + \frac{\theta}{q} \\ &= \theta + (1-\theta)\left(1 - \frac{1}{q}\right) = 1 - \frac{1}{q} + \frac{\theta}{q}. \end{aligned}$$
Ce calcul facile donne la relation demandée, i.e.
$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}.$$
■

Théorème 3 *(Inégalité de Bernstein) Soient* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *et* $\alpha \in \mathbb{N}^n$. *Il existe* $c_0 = c(\alpha, p, q, n) > 0$, *telle que pour tout* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *avec* $\operatorname{supp}\hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n : |\xi| \leq R\}$ *on a*

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_q \leq c_0 R^{|\alpha|+n\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)} \left\|f^{(\alpha)}\right\|_p .$$

Preuve: Soit $\phi \in S(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$. On pose

$$\phi_R(\xi) = \phi\left(\frac{\xi}{R}\right).$$

Alors

$$\hat{f} = \phi_R \hat{f}$$

et par conséquent

$$f^{(\alpha)} = \left(\mathcal{F}^{-1}\phi_R\right)^{(\alpha)} * f.$$

Par l'inégalité de Young, on obtient

$$\left\|f^{(\alpha)}\right\|_q \leq \left\|\left(\mathcal{F}^{-1}\phi_R\right)^{\alpha}\right\|_r \|f\|_p$$

avec

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}.$$

D'autre part, comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\phi_R\right)^{\alpha}(x) = R^n \left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)^{(\alpha)}(Rx)$$

il vient

$$\left\|\left(\mathcal{F}^{-1}\phi_R\right)^{\alpha}\right\| = R^{n+|\alpha|-\frac{n}{r}} \left\|\left(\mathcal{F}^{-1}\phi\right)^{(\alpha)}\right\|_r .$$

Ce qui donne le résultat. $\blacksquare$

Remarque 4 *L'inégalité de Bernstein est encore vraie pour* $0 < p \leq q < 1$, *voir [Ym] ou [DMo].*

1.1.2 La décomposition de Littlewood-Paley

Soit φ une fonction dans $D\left(\mathbb{R}^n\right)$, positive, radiale et à support dans la couronne $1/2 \leq |\xi| \leq 2$ telle que:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi\left(2^{-j}\xi\right) = 1 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \diagdown \{0\}. \tag{1}$$

On a la fonction

$$\psi(\xi) = 1 - \sum_{j>0} \varphi\left(2^{j}\xi\right)$$

est de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et à support dans la boule $|\xi| \leq 2$, il vient alors la partition non homogène de l'unité suivante

$$\psi(\xi) + \sum_{j\geq 1} \varphi\left(2^{-j}\xi\right) = 1 \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

A cette partition (1) on associe les opérateurs pseudo-différentiels

$$Q_j f = \varphi\left(2^{-j}D\right) f, \qquad S_k f = \psi\left(2^{-k}D\right) f$$

pour $j = 1, 2, ...$ et $k = 0, 1, ...$, avec la notation $Q_0 = S_0$. A noté aussi que Q_j et S_k sont à symbols respectifs

$$\varphi\left(2^{-j}\xi\right) \qquad et \qquad \psi\left(2^{-k}\xi\right).$$

Définition 5 *Si $f \in S(\mathbb{R}^n)$ alors la série de Littlewood-Paley est donnée par la formule suivante*

$$f = S_0 f + \sum_{j\geq 1} Q_j f. \tag{3}$$

Remarque 6 *La formule (3) implique que pour tout $k \geq 0$ on a*

$$S_k f = \sum_{j=0}^{k} Q_j f.$$

Proposition 7 *Pour toute fonction $f \in S(\mathbb{R}^n)$ et pour tout polynôme P on a*

$$Q_j f = Q_j(f + P).$$

Preuve: Compte tenu du supports, on a le support de la distribution T_P est le singleton 0, i.e.

$$\sup p\ T_P = \{0\}$$

le résultat découle alors du fait que $\varphi(0) = 0$. ■

Proposition 8 *Les familles d'operateurs $\{S_j\}_{j\geq 0}$ et $\{Q_j\}_{j\geq 0}$ constituent des sous ensembles bornés dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p \in [1, +\infty]$.*

Preuve: On relation avec l'inégalité de Young, théorème 2, il vient qu'on a sans difficulté l'inégalité suivante:

$$\|S_j f\|_p \leq \|\psi\|_1 \|f\|_p ,$$

et de même pour $\|Q_j f\|_p$. D'où le résultat. ■

1.2 Les espaces de Besov

Dans ce paragraphe on donne la définition des espaces de Besov et de Lizorkin-Triebel. Il sera suivie d'un exemple et quelques propriétés principales.

Définition 9 *Soient les paramètres s, p, q,vérifiant $s \in \mathbb{R}, p, q \in [1, +\infty]$. L'espace de Besov $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions tempérées $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \sum_{j\geq 0} \left(2^{sj} \|Q_j * f\|_p\right)^{1/q} < +\infty, & \textit{pour } 1 \leq q < \infty \\ \sup\limits_{j\geq 0} 2^{sj} \|Q_j * f\|_p < +\infty, & \textit{pour } q = +\infty. \end{cases} \tag{4}$$

Lemme 10 *soient a,b des réels tq: $0 < a < b$, soit $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite dans $\acute{S}(\mathbb{R}^n)$ tq:*

- $\hat{u}$ est portée par la corounne $a2^j \leq |\zeta| \leq b2^j$
- $\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{js} \|u_j\|_p\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty$ alors la série$\sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} u_j$ converge dans $\acute{S}(\mathbb{R}^n)$ et on a:

$$\left\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j \right\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(2^{js} \|u_j\|_p\right)^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

Théorème 11 *L'ensemble* $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *est un espace de Banach pour la norme définie par (4). De plus*

$$S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow S'(\mathbb{R}^n).$$

Preuve: On suppose l'application linéaire

$$\Phi : B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \ \to l^q\left(\mathbb{N}, L^P(\mathbb{R}^n)\right)$$

qui à tout f associe la suite $(2^{js}Q_jf)_{j\in\mathbb{N}}$. Par définition de la norme l'application Φ est isométrie. On considère ensuite l'application linéaire

$$\Psi : l^q\left(\mathbb{N}, L^P(\mathbb{R}^n)\right) \to B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$$

définie par

$$\Psi\left((u_j)_{j\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-js}Q_ju.$$

D'après le Lemme 10 il résulte que ψ est continue car $\Psi o\Phi = Id$ et de plus l'image de Φ n'est que le noyou de $\Phi o\Psi$. L'imge de Φ est un sous espace fermé de $l^q\left(\mathbb{N}, L^P(\mathbb{R}^n)\right)$. Il en résulte que $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach. Voir aussi le livre de Triebel [T1]. ■

Proposition 12 *Une fonction* $f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *si et seulement si ses dérivées partielles* $\partial_k f$ *appartiennent à* $B_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)$. *De plus l'expresion suivante est norme equivalente*

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \sum_{k=1}^{n} \|\partial_k f\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve:
Etape 1 *:* On définie les fonctions suivantes $\varphi_k \in D(\mathbb{R}^n \diagdown \{0\})$ par

$$\varphi_k(\zeta) = i\zeta_k\varphi(\zeta)$$

où φ est donnée par (1). Par les propriétés de la transformation de Fourier on a l'égalité suivante

$$Q_j(\partial_k f) = 2^k\varphi_k\left(2^{-j}D\right)f.$$

D'après le Lemme (10) on obtient aussitot

$$\|\partial_k f\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

Etape 2 *:* Pour l'autre sens, on utilise une paration C^∞ de l'unité de fonctions $(w_k)_{k=1,\ldots,n}$ sur de la sphère unité

$$\sum_{k=1}^{n} w_k \left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) = 1.$$

On pose

$$v_k(\xi) = \frac{-i}{\xi_k} \varphi(\xi) w_k \left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$$

on a alors

$$Q_j = 2^{-j} \sum_{k=1}^{n} v_k \left(2^{-j} D\right) o \partial_k.$$

D'après le Lemme (10) il résulte

$$\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \sum_{k=1}^{n} \|\partial_k f\|_{B_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)} .$$

D'où le résultat. ■

Lemme 13 *Soit $v \in D(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ une fonction satisfaisante l'une des deux conditions suivantes:*

1. $\sum_{j \in N} v(2^{-j}\xi) = 1$, pour tout $\xi \neq 0$;

2. v est positive et il existe deux réels $b > 2a > 0$ tels que v ne s'annule pas sur la couronne $a \leq |\xi| \leq b$.

Alors

$$f \in B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \ \ ssi \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} \left(2^{-js} \left\|v\left(2^{-j} D\right) f\right\|_p\right)^q\right)^{1/q} < +\infty.$$

De plus l'expression ci-dessus est une norme équivalante à la norme $\|f\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$.

Proposition 14 *(i)Pour* $1 \leq r \leq q \leq \infty$*, on a* $B_p^{s,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$

(ii) Pour tout $m \in \mathbb{N}$*, on a* $B_1^{m,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_p^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_p^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$

(iii) Pour tout $m \in \mathbb{N}$*,on a* $W_2^m(\mathbb{R}^n) = B_2^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ *,avec des normes equivalantes.*

(iv) Pour $p_1 \geq p$ *et* $s_1 - (n/p)$*, on a* $B_p^{s,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_{p_1}^{s_1,q}(\mathbb{R}^n)$

Preuve: Le plongement (i) résulte ausitôt du plongement $l^r(\mathbb{N}) \hookrightarrow l^q(\mathbb{N})$ car $r < q$. Pour démontrer les plongements (ii); d'après la proposition 12 , on peut se limiter au cas $m = 0$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ on a

$$\|Q_j f\|_p \leq \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\right\|_1 \|f\|_p$$

d'où

$$\|f\|_{B_p^{0,\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,\|f\|_p\,.$$

Si $f \in B_p^{0,1}(\mathbb{R}^n)$,la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} Q_j f$ converge normalement dans $L^p(\mathbb{R}^n)$,ce qui nous donne $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{B_p^{0,1}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Pour établir (iii) grâce au lemme 10, dans le cas $m = 0$ on peut choisir la fonction v de telle sorte que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \left|v\left(2^j\xi\right)\right|^2 = 1, \qquad \forall \xi \neq 0.$$

Du théorème de Plancherel, on déduit que

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= (2\pi)^{-n} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\|v\left(2^{-j}D\right) f\right\|_2^2 \end{aligned}$$

et cette dernière expression est équivalente à $\|f\|_{B_2^{0,2}(\mathbb{R}^n)}^2$. ■

Pour démontrer le plonogement (iv) nous allons utiliser l'inégalité de Bernstein, il vient que :

$$\begin{aligned} \|Q_j f\|\,p_1 &\leq c 2^{jn\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}\right)} \|Q_j f\|_p \\ &= c 2^{jn\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p_1}-\frac{s}{n}\right)} 2^{js} \|Q_j f\|_p \\ &= c 2^{-js_1} 2^{js} \|Q_j f\|_p\,. \end{aligned}$$

D'où il suffit de passer à la norme dans $l^q(\mathbb{N})$, on obtient le plonogement souhaité.

1.3 Les espaces de Lizorkin-Triebel

Définition 15 *Soient les paramètres s, p, q, vérifiant $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty]$. L'espace de Lizorkin-Triebel noté $F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions tempérées $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ telles que*

$$\|f\|_{F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \begin{cases} \left\| \sum_{j\geq 0} (2^{sj} \ |Q_j * f| \ )^{1/q} \right\|_p < +\infty, & \text{pour } 1 \leq q < \infty \\ \left\| \sup_{j\geq 0} 2^{sj} \, |Q_j * f| \ \right\|_p < +\infty, & \text{pour } q = +\infty. \end{cases} \tag{5}$$

Remarque 16 *L'espace de Lizorkin-Triebel est une généralisation des espaces de potentiel de Bessel $H_p^s(\mathbb{R}^n)$ défini par*

$$\|f\|_{H_p^s(\mathbb{R}^n)} = \left\| \mathcal{F}^{-1}((1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi)) \right\|_p < \infty \qquad (\forall f \in S'(\mathbb{R}^n)),$$

de plus $H_p^s(\mathbb{R}^n) = F_p^{s,2}(\mathbb{R}^n)$ pour $1 < p < +\infty$. voir [BeL] et [T1].

Nous donnons un rappel sur que quelques propriétés de ces espaces en connextion avec les espaces de Besov. Compte tenue de l'inclusion suivante

$$l_{\min(p,q)}(L^p) \hookrightarrow L^p(l^q) \hookrightarrow l_{\max(p,q)}(L^p)$$

on a le résultat suivant:

Proposition 17 *Pour tout s, p, q, vérifiant $s \in \mathbb{R}$, $p \in [1, +\infty[$ et $q \in [1, +\infty]$, l'inclusion suivante est satisfaite*

$$B_p^{s,u}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow B_p^{s,r}(\mathbb{R}^n)$$

pour tout u et r, tels que

$$1 \leq u \leq \min(p,q), \qquad \max(p,q) \leq r \leq +\infty.$$

Proposition 18

(i)Pour $1 \leq r \leq q \leq \infty$, on a $F_p^{s,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$

(ii) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $F_1^{m,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow W_p^m(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_p^{m,\infty}(\mathbb{R}^n)$

(iii) Pour tout $m \in \mathbb{N}$,on a $W_2^m(\mathbb{R}^n) = F_2^{m,2}(\mathbb{R}^n)$,avec des normes equivalantes.

(iv) Pour $p_1 \geq p$ et $s_1 - (n/p)$, on a $F_p^{s,r}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow F_{p_1}^{s_1,q}(\mathbb{R}^n)$.

Remarque 19 *La preuve de la proposition 17, comme celle du 18, peut être trouvée dans les livres [RSi], [T1] .*

CHAPITRE 2

OPERATEURS

PSEUDO-DIFFERENTIELS

2.1 Généralités sur les O.P.D

2.1.1 La classe de Hörmander

Pour faire une étude des O.P.D, nous allons définir une classe des symboles de type Hörmander.

Définition 20 *Pour $m \in \mathbb{R}$ et $0 \leq \rho, \delta \leq 1$ on désigne par $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$, (de même $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$, pour un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$), La classe des symboles $\sigma(x,\xi)$ verifiant*

1. $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$

2. pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$ et tous multiindices α et $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $c > 0$ telle que pour tout $(x,\xi) \in K \times \mathbb{R}^n$ on ait

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq c\,(1+|\xi|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|}. \tag{6}$$

Définition 21 *Les éléments de la classe $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ sont appelé symboles de degré m et de type (ρ,δ).*

Exemples: 1- Le symbole principale d'un opérateur différentiel linéaire d'ordre m est un élément de $S^m_{\rho,\delta}$. En effet, soit

$$\sigma_m(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\xi^\alpha, \qquad a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ une fonction bornée.}$$

Si $a_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ alors $\sigma_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$, de plus on a

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta \sigma_m(x,\xi)\right| &= \left|\sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (a_\alpha(x)) \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^\beta \xi^\alpha\right| \\
&= \left|\sum_{|\alpha|=m} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (a_\alpha(x)) \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}\xi^{\alpha-\beta}\right| \\
&\leq \sum_{|\alpha|=m} \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (a_\alpha(x))\right| |\xi|^{|\alpha|-|\beta|} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} \\
&\leq |\xi|^{m-|\beta|} \sum_{|\alpha|=m} \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha (a_\alpha(x))\right| \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}
\end{aligned}$$

comme pour $m \in \mathbb{N}, m-|\beta| \geq 0$ on a

$$(1+|\xi|)^{m-\beta} \geq |\xi|^{m-|\beta|},$$

alors si $|\beta| > m$ on a $|\beta| > |\alpha|$ et par suite

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\beta} \xi^{\alpha} = 0$$

par conséquent puisque a_α est bornée, alors

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{\beta} \sigma_m(x,\xi)\right| \leq (1+|\xi|)^{m-|\beta|} \underbrace{\sum \left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} a_\alpha(x)\right| \times \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}}_{=c_{\alpha,\beta}}$$

Cet exemple est encore vrai, si on travaille sur un compact Ω de $\mathbb{R}^n$.

2- Les opérateurs différentiels sont des éléments de $S^m_{\rho\,\delta}(\Omega)$ pour un compact Ω de $\mathbb{R}^n$.

3- Les symboles d'ordre négatif: soit $\sigma(x,\xi) = \sum a_\alpha(x)\xi^\alpha$ tel que $\sigma_m(x,\xi) \neq 0, \xi \neq 0$, alors il existe $q \in S^{-m}_{\rho\,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ tel que $pq - 1 \in S^{-\infty}_{\rho\,\delta}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$, avec q est alors symbole d'ordre négatif.

4- Si $\sigma(\xi)$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \diagdown \{0\}$ homogène de degré m et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 autour de 0, $(1-\varphi(\xi))\sigma(\xi)$ est un symbole de degré m $(type(1.0))$.

2.1.2 Définition et premières propriétés des O.P.D

Définition 22 *Soit $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$. L'opérateur linéaire continu*

$$T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

défini par

$$Tu(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \sigma(x,\xi) \hat{u}(\xi)\, d\xi \quad , \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{7}$$

est appellé opérateur pseudo-différentiel d'ordre m associe au symbole $\sigma(x,\xi)$. On note par $\Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $\Psi^m_{\rho,\delta}(\Omega)$) l'ensemble des o.p.d sur $\mathbb{R}^n$ (resp. Ω).

Remarque 23 *Un o.p.d est un opérateur de Fourier.*

En effet, on a trivialement l'égalité suivante: $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} Tu(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \sigma(x,\xi) \hat{u}(\xi) \, \mathrm{d}\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y)\xi} \sigma(x,\xi) \, \mathrm{d}\xi \right) u(y) \, \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Remarque 24 *Si $T(x, D_x) = \sum a_\alpha(x) D_x^\alpha$ est un opérateur différentiel à coefficients $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$, alors T est aussi un o.p.d.*

En effet, le symbole $\sigma(x,\xi) = \sum\limits_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ est de classe $S_{1.0}^m(\Omega)$ et on a bien

$$\begin{aligned} T(x, D_x) u(x) &= \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) (D^\alpha u)(x) \\ &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} \sigma(x,\xi) \hat{u}(\xi) \, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

pour tout $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Proposition 25 *Soient U un ouvert dans $\mathbb{R}^n$, $K \in C^\infty(U \times U)$ tel que la condition suivante est vérifiée : pour tout compact $F \subseteq U$ il existe un compact $G \subseteq U$ tel que*

$$K(x,y) = 0 \qquad (\forall x \in F, \quad \forall y \in U \diagdown G). \tag{8}$$

Alors l'opérateur $T : D(U) \longrightarrow \mathcal{E}(U)$ défini par

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) u(y) \, dy$$

est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $-\infty$ sur U

Preuve: On pose $\varkappa_x(\xi) = (2\pi)^{-n} e^{ix\xi}$ et on commence par introduire la formule d'inversion de Fourier, et on permute les intégrales, ce qui donne

$$\begin{aligned} Tu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)u(y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y) \int_{\mathbb{R}^n} \varkappa_y(\xi) \hat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varkappa_y(\xi) K(x,y)\mathrm{d}y \hat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Cette permutation est légitime, vu que $\hat{u} \in S(U)$ et vu que $K(x,y)$ est à support campact par rapport à la variable y. On poursuit le calcul:

$$\begin{aligned} Tu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varkappa_y(\xi) K(x,y)\mathrm{d}y \right) \hat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varkappa_x(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varkappa_\xi(y-x) K(x,y)\mathrm{d}y \right) \hat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varkappa_x(\xi) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varkappa_\xi(y) K(x,y+x)\mathrm{d}y \right) \hat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varkappa_x(\xi)\, \sigma(x,\xi) \hat{u}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

où

$$\sigma(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varkappa_\xi(y) K(x,y+x)\mathrm{d}y.$$

Il reste à verifier que $\sigma(x,\xi)$ est de classe m, pour n'importe quel m. En effet, pour tout multi-indices α, β, γ on a

$$\begin{aligned} \left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\xi^\gamma \sigma(x,\xi) \right) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \varkappa_\xi(y)\, \partial_y^\gamma K(x,y+x)\mathrm{d}y \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| y^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\gamma K(x,y+x) \right| \mathrm{d}y. \end{aligned}$$

La fonction $(x,y) \longrightarrow y^\alpha \partial_x^\beta \partial_y^\gamma K(x,y+x)$ satisfait aussi la condition (8). Par le théorème de la convergence dominée, la dernière integrale est une fonction continue en x. Pour tout compact $\Omega \subseteq U$, et tout multi-indice α, β et γ on a donc

$$\sup_{x\in\Omega} \left| \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \left(\xi^\gamma \sigma(x,\xi) \right) \right| < +\infty.$$

En d'autres mots, la fonction

$$\xi \longrightarrow \sup_{x\in\Omega} \left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right|$$

décroit plus vite que n'importe quelle fonction rationelle, ce qui montre qu'il existe pour n'importe quel $m \in \mathbb{R}$ une constante $c > 0$ telle que

$$\left|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq c\,(1+|\xi|)^m$$

pour tout $x \in \Omega$. Ainsi σ est de classe $-\infty$ et $T \in \Psi^{-\infty}(U)$. ■

Proposition 26 *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\sigma \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$, $\mu \in S^{m'}_{\rho',\delta'}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *valant* 1 *sur* Ω. *On pose* T *et* Q *les o.p.d associés à* σ *et* μ *respectivement. Alors l'opérateur* $R = Q(x,D_X)\varphi T(x,D_X)$ *est bien défini de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $C^\infty(\mathbb{R}^n)$*; de plus le symbole de* R *est donné par la formule suivante*

$$r(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(x,\xi+\eta)\,\overset{\wedge}{\sigma_1}(\eta,\xi)\,d\eta \tag{9}$$

où $\sigma_1(x,\eta) = \varphi(x)\sigma(x,\eta)$.

Preuve:
Etape 1*:* Par la transformation de Fourier en x on a

$$\overset{\wedge}{\sigma_1}(\xi,\eta) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi}\sigma_1(x,\eta)\mathrm{d}x.$$

Comme est à support compact, il existe $M > 0$ telle que l'égalité suivante est satisfaite

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{F}\left(\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta \sigma_1(x,\eta)\right)\right| &= \left|\xi^\alpha \partial_\eta^\beta \overset{\wedge}{\sigma_1}(\xi,\eta)\right| \\ &= \int_{|x|\leq M} \left|e^{-ix\xi}\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta \sigma_1(x,\eta)\right| \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'après la formule de Leibniz on a:

$$\left|\mathcal{F}\left(\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta \sigma_1(x,\eta)\right)\right| \leq C_1 \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \binom{\gamma}{\alpha} \int_{|x|\leq M} \left|\varphi(x)^{(\gamma)}\,\partial_x^{\alpha-\gamma}\partial_\eta^\beta \sigma(x,\eta)\right| \mathrm{d}x.$$

D'après la formule (6) on a:

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{F}\left(\partial_x^\alpha \partial_\eta^\beta \sigma_1(x,\eta)\right)\right| &\leq C_2 \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} (1+|\eta|)^{m+\delta|\alpha-\gamma|-\rho|\beta|} \int_{|x|\leq M} \left|\varphi(x)^{(\gamma)}\right| \mathrm{d}x \\
&\leq C_3 \sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \left\|\varphi^{(\gamma)}\right\|_\infty (1+|\eta|)^{m+\delta|\alpha-\gamma|-\rho|\beta|} \\
&\leq C_4 \frac{(1+|\eta|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|}}{(1+|\eta|)^{\delta|\gamma|}} \\
&\leq C_5 (1+|\eta|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|}.
\end{aligned}$$

Etape 2*:* Pour $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ on a:

$$\mathcal{F}(\varphi P u)(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\sigma}_1(\xi-\eta,\eta)\, \hat{u}(\eta)\, \mathrm{d}\eta.$$

En effet, on déduit de (7) que l'on a:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\varphi P u)(\xi) &= \hat{\varphi} * \widehat{Pu}(\xi) \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(z-y)\, \widehat{Pu}(y)\, \mathrm{d}y \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi-y) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\eta)\, \hat{\sigma}(y-\eta,\eta)\, \mathrm{d}\eta \mathrm{d}y \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\eta) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(\xi-y)\, \hat{\sigma}(y-\eta,\eta) \right) \mathrm{d}y \mathrm{d}\eta.
\end{aligned}$$

On fait le changement de variable suivant: $\xi - y = h$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\varphi T u)(\xi) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\eta) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(h)\, \hat{\sigma}_1(\xi-\eta-h,\eta)\, \mathrm{d}h \right) \mathrm{d}\eta \\
&= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\eta) \left\{ \left(\hat{\varphi} * \hat{\sigma}(\xi-\eta+.,\eta) \right)(\xi-\eta) \right\} \mathrm{d}\eta.
\end{aligned}$$

Or on a:

$$\hat{\sigma}_1(\xi-\eta,\eta) = \left(\hat{\varphi} * \hat{\sigma}(\xi-\eta+.,\eta) \right)(\xi-\eta)$$

par conséquent on aura la formule

$$\mathcal{F}(\varphi T)\, u(\xi) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \overset{\wedge}{\sigma}_1(\xi-\eta,\eta)\, \hat{u}(\eta)\, \mathrm{d}\eta;$$

cette dernière Intégrale est absolument convergente. On a donc

$$Ru(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} \mu(x,\xi)\, \overset{\wedge}{\sigma}_1(\xi-\eta,\eta)\, \hat{u}(\eta)\, \mathrm{d}\eta.$$

On introduit alors la fonction (voir (9))

$$r(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mu(x,\xi+\eta)\, \overset{\wedge}{\sigma}_1(\eta,\xi)\, \mathrm{d}\eta$$

ce qui donne

$$(Ru)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} r(x,\xi)\, \hat{u}(\xi)\, d\xi$$

de sorte que l'o.p.d R est de symbole r. $\blacksquare$

2.2 Opérateurs de type (1.1)

Le paragraphe suivant est classique dans la théorie de la classe de Hörmander $S^0_{1,1}$. Nous l'inspirons du livre de Mitivier [Met]. Après la définition de la classe $S^0_{1,1}$, Nous donnons trois lemmes de préparations.

Définition 27 *Tout o.p.d de symbole dans la classe $S^0_{1,1}$ est appellé de type(1,1).*

Lemme 28 *Il existe deux fonctions $\chi_{0,}\chi$,C^∞ sur $\mathbb{R}^n$,à support respectivement dans la boule $\{|\xi| \leq 1\}$ et dans la coroonne $\{1/3 \leq |\xi| \leq 3\}$ et telles que:*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \chi_0(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = 1.$$

Preuve du lemme (28) On choisit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à valeur dans $[0,1]$, portée dans la couronne $\{1/3 \leq |\xi| \leq 3\}$,et valant 1 pour $1/2 \leq |\xi| \leq 2$. La fonction $h(x) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, est ≥ 1 et vvérifie $h(\xi/2^j) = h(\xi)$ pour tout ξ et tout j.On pose $\chi = \psi/h$, alors la fonction $\chi_0(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right)$est C^∞ et à support dans la boule $\{|\xi| \leq 1\}$. ■

Lemme 29 *Soit $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction bornnée, telle que supp $\hat{a} \subset \{\xi : \ |\xi| \leq R\}$. Alors $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $c > 0$, telle que*

$$\left\|a^{(\alpha)}\right\|_\infty \leq cR^{|\alpha|} \|a\|_\infty .$$

Preuve: Il suffit d'appliquer le théorème 3. ■

Lemme 30 *Soit $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ dont la transformée de Fourier est à support dans la boule $\{|\xi| \leq \lambda\}$. Alors a est C^∞, et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe $C(n,\alpha)$(ne dépendant que de n et α)telle que:*

$$\|\partial_x^\alpha a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,\alpha)\,\lambda^{|\alpha|} \|a\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} .$$

Démonstration .— Voir [Met] ■

Lemme 31 *Soitent $0 \leq m \leq N$ deux entiers, soit $\mu \in]0.1[$ il existe C telle que pour tout $f \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$f = g + \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

avec:

i) $\|g\|_{C^N(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{C^{m+\mu}}$,
ii)$\|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-k(m+\mu)} \|f\|_{C^{m+\mu}}$.

En outre, $\hat{g}$ est à support dans la boule $\{|\xi| \leq 1\}$, et $\hat{f}_k$ à support dans la couronne $\left\{\frac{1}{3}2^k \leq |\xi| \leq 3.2^k\right\}$
Preuve: On reprend la décomposition du lemme (28)

$$\psi(\xi) + \sum_{j=0}^{\infty} \chi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = 1,$$

ψ étant à support dans $\{|\xi| \leq 1\}$,etχ dans $\left\{\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 3\right\}$.En outre,$\psi$ et χ sont C^∞. On pose alors $\hat{f}$

$$\hat{g} = \psi \hat{f}; \qquad \hat{f}_k = \chi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)\hat{f}.$$

Notons φ_{-1} la transformée de Fourier inverse de ψ et φ_k celle de $\chi\left(./2^k\right)$.
On a alors

$$\hat{g} = \varphi_{-1} * f \quad ; \qquad \hat{f}_k = \varphi_k * f$$

Puisque $\varphi_{-1} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on a $\|g\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{L^\infty}$,et avec le lemme l'estimation sur les dérivées de g suit.
Maintenant on utilise le fait que pour $f \in C^{m+\mu}$, on a

$$\left| f(x) - \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} (\partial_x^\alpha f)(y)(x-y)^\alpha \right| \leq C |x-y|^{m+\mu} \|f\|_{C^{m+\mu}},$$

comme on le voit tout de suite en utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale. On a :

$$\varphi_k(x) = 2^{nk}\varphi_0\left(2^k x\right) \quad (k \geq 0) \text{ et } \int x^\alpha \varphi_k(x)\,\mathrm{d}x = (-\mathrm{D}_\xi)^\alpha \chi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)\Big|_{\xi=0} = 0.$$

Par conséquent,

$$f_k(x) = \int \varphi_k(x-y)\left(f(y) - \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{1}{\alpha!}(y-x)^\alpha \partial_x^\alpha f(x)\right) \mathrm{d}y, \quad \text{et}$$

$$|f_k(x)| \leq C \|f\|_{C^{m+\mu}} \int |\varphi_k(x-y)| \, |x-y|^{m+\mu} \, \mathrm{d}y.$$

Mais on a :

$$\int |\varphi_k(x-y)| \, |x-y|^{m+\mu} \, \mathrm{d}y = 2^{-k(m+\mu)} \int |\varphi_0(x)| \, |x|^{m+\mu} \, \mathrm{d}x,$$

la derniére intégrale étant finie puisque $\varphi_0 \in S(\mathbb{R}^n)$. On a donc bien:

$$\|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-k(m+\mu)} \|f\|_{C^{m+\mu}},$$

■

Lemme 32 *Soit f_k une suite de fonctions de $C^N(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient*

$$\|\partial_x^\alpha f_k\|_{L^\infty} \leq M 2^{k(|\alpha|-m-\mu)} \qquad \textit{pour } |\alpha| \leq N,$$

m étant un entier $< N$, et $\mu \in]0,1[$ .Alors $f = \sum f_k \in C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ il existe C ne dépendant que de n, m, N et μ telle que:

$$\|f\|_{C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)} \leq CM.$$

Théorème 33 *Soit $\sigma(x,\xi)$ type (1,1) sur $\mathbb{R}^n$. Alors l'opérateur T de symbole σ est borné de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$ pour tout $s > 0$, et de $C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{m+\mu}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $\mu \in]0,1[$.*

Théorème 34 *Soit $\sigma(x,\xi)$ une fonction sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui vérifie :*

$$\left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi)\right| \leq M_{\alpha\beta} (1+|\xi|)^{m+|\alpha|-|\beta|}$$

(m étant un nombre réel) pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $|\beta| \leq \left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Alors pour tout $r > 0$ non entier, tel que $r - m > 0$ non entier, l'opérateur T de symbole σ est borné de $C^r(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{r-m}(\mathbb{R}^n)$.

Preuve du téorème 34 Suivant le lemme 31, on ecrit:

$$f = f_{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} f_k$$

avec

$$\|f_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \, \|f\|_{C^r} \, 2^{-kr}$$

$\mathrm{supp}\hat{f}_{-1} \subset \{|\xi| \leq 1\}$, $\mathrm{supp}\overset{\wedge}{f_k} \subset \left\{\frac{1}{3}2^k < |\xi| < 3.2^k\right\}$ pour $k \geq 0$. On introduit une partition de l'unité :

$$1 = \psi(\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} \chi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)$$

qui permet de décomposer:

$$p(x,\xi) = p_{-1}(x,\xi) + \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x,\xi)$$

avec

$$p_{-1}(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\,\psi(\xi) \qquad ; p_k(x,\xi) = \sigma(x,\xi)\,\chi\left(\frac{\xi}{2^k}\right)$$

Ou l'on note P_k l'opérateur de symbole p_k. ■

Lemme 35 *Pour tout $k \geq -1$, P_k envoie $C^r(\mathbb{R}^n)$ dans $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. En outre, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe C_α telle que pour tout k et tout $f \in C^r(\mathbb{R}^n)$, on ait :*

$$\|\partial_x^\alpha P_k \, f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_\alpha \, \|f\|_{C^r(\mathbb{R}^n)} \, 2^{k(m-r+|\alpha|)}.$$

2.3 Opérateurs paradifférentiels

Rappelons que pour m réel, $S_{1.1}^{m}$ désigne l'espace des fonctions σ, C^{∞}sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et telles que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$,il existe $C_{\alpha,\beta}$ pour laquelle:

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \left|\partial_x^{\alpha} \partial_{\xi}^{\beta} \sigma (x, \xi)\right| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{m+|\alpha|-|\beta|} \tag{10}$$

$$\sigma (x, D_x) y (x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\xi} \sigma (x, \xi) \hat{u} (\xi) d\xi \tag{11}$$

qui a bien un sens si $\sigma (x, \xi) \hat{u} (\xi) \in L^1 (\mathbb{R}^n)$.
En particulier, si $u \in S (\mathbb{R}^n)$,les dérivation sous le signe somme et les intégration par parties en ξ sont justifiées et on voit que $\sigma (x, D_x) u \in S (\mathbb{R}^n)$ dans lui-même.

Théorème 36 *Si r est un réel > 0 non entier, tel que r-m soit aussi > 0 non entier, l'opérateur $\sigma (x, D_x)$, associé au symbole $\sigma \in S_{1.1}^{m}$, se prolonge en opérateur borné de $C^r (\mathbb{R}^n)$ dans $C^{r-m} (\mathbb{R}^n)$.*

Si $u \in C^r (\mathbb{R}^n)$, l'écriture (10) prend alors une signification tout à fait conventionnelle, qui coïncide avec la signification indiquée précédemment si $u \in S (\mathbb{R}^n)$ ou si $\hat{u}$ est à support compact .

Définition 37 $\sum_0^m$ *désignera l'espace des fonctions $\sigma (x, \xi)$ telles qu'il existe $\varepsilon < 1$ de sorte que la transformation de Fourier en x de σ, $\overset{\wedge}{\sigma} (\eta, \xi)$, soit à support dans la cône $\{|\eta| \leq \varepsilon |\xi|\}$, et telles que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, il existe C_{β} pour laquelle :*

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad \left|\partial_{\xi}^{\beta} \sigma (x, \xi)\right| \leq C_{\beta} (1 + |\xi|)^{m-|\beta|} \tag{12}$$

Maintenant, pour $r > 0$ non entier on introduit $\sum_r^m$ l'espace des fonctions $\sigma (x, \xi)$ dont la transformation de Fourier $\overset{\wedge}{\sigma} (\eta, \xi)$ est à support dans un cone

$\{|\eta| \leq \varepsilon |\xi|\}$, pour un certain $\varepsilon < 1$, et telles que pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$ il existe C_β pour laquelle :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \ \left\| \partial_\xi^\beta \sigma(x,\xi) \right\|_{C^r(\mathbb{R}^n)} \leq C_\beta \left(1 + |\xi|\right)^{m-|\beta|}$$

Lemme 38 *Pour $r \geq 0$, $m \in \mathbb{R}$, $p > 0$, on a les inclusions*

$$\textstyle\sum_r^m \subset \sum_0^m \subset S_{1.1}^m \text{ et } \sum_r^m \subset \sum_{0+p}^{m+p}.$$

CHAPITRE 3

LE PARAPRODUIT ET LA PARALINEARISATION D'APERS Y. MEYER

3.1 Paraproduit

Lemme 39 *Soient* $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$ *et* $R > 0$. *Il existe des fonctions* $\psi(\eta, \xi)$, C^∞ *sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, *nulles pour* $|\eta| \leq \varepsilon_2 |\xi|$, *valant 1 pour* $|\eta| \leq \varepsilon_1 |\xi|$ *et* $|\xi| \geq R$, *et telles que pur tout* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$, *il existe* $C_{\alpha,\beta}$ *pour la laquelle :*

$$\forall (\eta, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \qquad \left| \partial_\eta^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\eta, \xi) \right| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{-|\alpha| - |\beta|} \tag{13}$$

Démonstration . Ilexiste $\chi(\eta, \xi)$ homogène de degré 0 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$ et C^∞ pour $(\eta, \xi) \neq (0,0)$, telle queχ vaille 1 pour $|\eta| \leq \varepsilon_1 |\xi|$ et 0 pour $|\eta| \leq \varepsilon_2 |\xi|$.
Pour éliminer la singularité à l'origine, on introduit $\varphi \in C^\infty$ qui vaut 1 pour $|\xi| \geq R$ et 0 pour $|\xi| \geq \frac{R}{2}$, et on pose

$$\psi(\eta, \xi) = \chi(\eta, \xi) \varphi(\xi),$$

la fonction $\partial_\eta^\alpha \partial_\xi^\beta \chi$ est homogéne de degré $-|\alpha| - |\beta|$ et continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\}$. Par conséquent χ (et donc ψ) vérifie (13) pour $|\xi| \geq 1$. Pour $|\xi| \leq 1, \psi$ est C^∞, et (13) suit. ■

Lemme 40 *Soit* $\psi(\eta, \xi)$ *une fonction* C^∞ *sur* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, *à support dans* $\{|\eta| \leq C|\xi|\}$, *et vérifiant (13). Alors la transformation inverse de Fourier:*

$$G(y, \xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{iy.\eta} \psi(\eta, \xi)\, d\eta$$

vérifie: pour tout $\beta \in \mathbb{N}^n$, *il existe* C_β *tel que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \left\| \partial_\xi^\beta G(., \xi) \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C_\beta (1 + |\xi|)^{-|\beta|}.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire :

$$y^\alpha \partial_\xi^\beta G(y, \xi) = \left| \int e^{iy.\eta} \partial_\eta^\alpha \partial_\xi^\beta \psi(\eta, \xi) \frac{d\eta}{(2\pi)^n} \right| \leq C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi|)^{n - |\alpha| - |\beta|}$$

et, en sommant pour tous les $|\alpha| \leq n + 1$:

$$\partial_\xi^\beta G(y,\xi) \leq C_\beta \frac{|\xi|^n}{(1+|\xi|\,|y|)^{n+1}} (1+|\xi|)^{-\beta}$$

ce qui implique le lemme. ■

Proposition 41 *Soit ψ comme au lemme (39) et soit $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (resp.$C^r(\mathbb{R}^n)$, $r > 0$ non entier). Alors le symbole:*

$$\sigma_a(x,\xi) = (2\pi)^{-n} \int e^{i\eta.x} \psi(\eta,\xi) \hat{a}(\eta)\, d\eta \tag{14}$$

appartient à $\sum_0^0$(resp.$\sum_r^m$).

Démonstration. On a:

$$\overset{\wedge}{\sigma}(\eta,\xi) = \psi(\eta,\xi) \hat{a}(\eta),$$

si bien que la condition sur le support $\overset{\wedge}{\sigma}_a$est satisfaite puisque ψ est à support dans $\{|\eta| \leq \varepsilon_2 |\xi|\}$.
Dans (14), l'intégrale a une signification symbolique, puisque $\hat{a}$ n'est pas forcément une fonction.(c'est une dualité $\mathcal{S} \times \mathcal{S}'$, puisque
$\eta \longrightarrow e^{i\eta.x}\psi(\eta,\xi) \in \mathcal{S}$ et que $\hat{a} \in \mathcal{S}'$
En fait revenant par Fourier, on peut aussi écrire:

$$\sigma_a(x,\xi) = \int G(y,\xi)\, a(x-y)\, \mathrm{d}y \tag{15}$$

et compte tenu du lemme(40),l'intégrale a maintenant un sens. On a aussi

$$\partial_\xi^\beta \sigma_a(x,\xi) = \int \partial_\xi^\beta G(y,\xi)\, a(x-y)\, \mathrm{d}y,$$

et on conlcut en utilisant le lemme(40) et le fait que la convolution par une fonction de L^1 est un opérateur borné deL^∞ dans L^∞ et deC^r dansC^r ■

Définition 42 *Pour $a \in L^\infty$ et $u \in C^\mu$ $(\mu > 0$ non entier$)$, on note $\pi(a,u)$ le paraproduit de a et u, défini par : $\pi(a,u) = \sigma_a(x,D)$.*

Remarquons que puisque $\sigma_a \in S^0_{1.1}$, l'opérateur $\sigma_a(x, D)$ opèré de C^μ dans C^μ, et le paraproduit est donc bien défini.En outre, on peut écrire:

$$\|\pi(a,u)\|_{C^\mu(\mathbb{R}^n)} \leq C\,\|a\|_{L^\infty}\,\|u\|_{C^\mu} \tag{16}$$

Il faut cependant remarquer que ce paraproduit dépend du choix de la fonction ψ utilisée pour définir (14). Pour le moment, on va indique cette dépendance en notant π_ψ le paraproduit défini à l'aide de la fonction ψ.

Lemme 43 *Si ψ et $\psi_1$sont deux fonctions comme au lemme 39, si $a \in C^r(\mathbb{R}^n)$, $u \in C^\mu(\mathbb{R}^n)$ et si $r+\mu$ n'est pas entier, alors*

$$\pi_\psi(a,u) - \pi_{\psi_1}(a,u) \in C^{r+\mu}(\mathbb{R}^n).$$

preuve Voir [Met]. ■

Lemme 44 *Une fonction $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ appartient à l'espace $C^\mu(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$ non entier) si et seulement si il existe $C > 0$ telle que*

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \|\triangle_k u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C 2^{-\mu k}$$

Définition 45 *D'aprés les notations ci-dessus,définissons la fnction*

$$\psi(\eta,\xi) = \sum_{k=2}^{\infty} \varphi_{k-2}(\eta)\,\theta_k(\xi). \tag{17}$$

Alors cette fonction satisfait aux conclusion du lemme 39 avec $\varepsilon_1 = \frac{1}{16}$; $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$; $R = 4$

Définition 46 *On peut définir le paraproduit par*

$$\pi'(a,u) = \sum_{k=2}^{\infty} S_{k-2}(\eta)\,\triangle_k(u). \tag{18}$$

Proposition 47 *Si ψ est la fonction (17), le paraproduit $\pi^{'}(a,u)$,défini par*

$$\pi^{'}(a,u)=\sum_{k=2}^{\infty}S_{k-2}(\eta)\bigtriangleup_{k}(u) \tag{19}$$

coïncide avec le paraproduit $\pi(a,u)$.

Démonstration. Par densité de $S(\mathbb{R}^n)$ dans $C^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ et continuité des paraproduits, il suffit de prouver l'égalité $\pi^{'}(a,u)=\pi_{\psi}(a,u)$ pour $a\in L^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ et $u\in S(\mathbb{R}^n)$. On a alors:

$$S_k a(x)=\int\breve{\varphi}_k(x-y)\,a(y)\,dy$$

$$\bigtriangleup_k u(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\theta_k(\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi$$

si bien que

$$S_{k-2}a\bigtriangleup_k u(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\sigma_k(x.\xi)\,\hat{u}(\xi)\,d\xi$$

avec

$$\sigma_k(x.\xi)=\int\breve{\varphi}_{k-2}(x-y)\,\theta_k(\xi)\,a(y)\,dy.$$

Pour tout ξ,la série $\psi(\eta,\xi)=\sum\varphi_{k-2}(\eta)\,\theta_k(\xi)$ ne comporte au plus que trois teremes non nuls; il en est de même pour la série:

$$\sigma(x.\xi)=\sum_{k=2}^{\infty}\sigma_k(x.\xi)=\int G(x-y,\xi)\,a(y)\,dy, \tag{20}$$

avec

$$G(y,\xi)=(2\pi)^{-n}\int e^{iy.\eta}\psi(\eta,\xi)\,d\eta=\sum_{k=2}^{\infty}\varphi_{k-2}(y)\,\theta_k(\xi).$$

En outre,

$$\left|\sigma_k\left(x.\xi\right)\right| \leq 2\left\|\breve{\varphi}\right\|_{L^1}\left\|\varphi\right\|_{L^\infty}\left\|a\right\|_{L^\infty},$$

et par le théoréme de la convergence dominée, on voit que :

$$\pi^{'}\left(a,u\right) = \left(2\pi\right)^{-n}\int e^{ix.\xi}\sigma\left(x,\xi\right)\hat{u}\left(\xi\right)d\xi.$$

La proposition suit, puisque d'après les formules (15) et (20)

$$\sigma_a\left(x,\xi\right) = \int G\left(y,\xi\right)a\left(x-y\right)dy,$$

on a $\sigma = \sigma_a$.

Plutôt que la formule (19) , on aurait pu poser:

$$\pi^{''}\left(a,u\right) = \sum_{k=2}^{\infty} S_k\left(a\right)\triangle_k\left(u\right) \tag{21}$$

Lemme 48 *Pour* $a \in C^r\left(\mathbb{R}^n\right),\ u \in C^\mu\left(\mathbb{R}^n\right)\ r,\mu$ *et* $(r+\mu$ *non entier*), *on a:*

$$\pi'\left(a,u\right) - \pi^{''}\left(a,u\right) \in C^{r+\mu}\left(\mathbb{R}^n\right).$$

Démonstration . Voir [Met] ■

3.2 Paralinéarisation

Théorème 49 *Soit F une fonction C^{∞} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.soit $u \in C^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ ($\mu > 0$, non demi-entier). Alors:*

$$F(u) - \pi(F'(u), u) \in C^{2\mu}(\mathbb{R}^n). \tag{22}$$

Avant de passer à la démontration, faisons quelques remarques:d'abord, puisque $u \in C^{\mu}(\mathbb{R}^n), F(u) \in C^{\mu}(\mathbb{R}^n)$,et de meme $F'(u) \in C^{\mu}(\mathbb{R}^n)$ .Par conséquent,compte tenu des résultats du paragraphe précédent, on peut utiliser n'importe quel paraproduit pour établir (22); grace au lemme 48, on utilisera en fait π'' défini en (21).
Pour simplifier les ntaions, on posera $u_k = S_k u$, $v_k = \triangle_k u = u_{k+1} - u_k$. D'après le lemme (44) et le lemme (30), on a:

$$\|\partial_x^{\alpha} v_k\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{\alpha} 2^{(|\alpha|-\mu)k}. \tag{23}$$

Ecrivant que

$$u = u_k + \sum_{\ell=k}^{\infty} v_{\ell}$$

on voit alors que pour $|\alpha| < \mu$,

$$\|\partial_x^{\alpha}(u - u_k)\|_{L^{\infty}} \leq C_{\alpha} 2^{(|\alpha|-\mu)k}.$$

De même, les u_k sont C^{∞} et

$$\|\partial_x^{\alpha} u_k\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^n)} \leq C_{\alpha} 2^{(|\alpha|-\mu)k},$$

en notant comme d'habiyude $(|\alpha| - \mu)_+ = \max(0, |\alpha| - \mu)$. Puisque $u_k \longrightarrow u$ dans L^{∞}, on a $F(u_k) \longrightarrow F(u)$ dans L^{∞} et :

$$F(u) = F(u_0) + \sum_{k=0}^{\infty} (F(u_{k+1}) - F(u_k)),$$

série convergente dans L^{∞}.La formule de Taylor:

$$F(u) - F(u') = (u - u') F'(u') + (u - u')^2 \int_0^1 F''(u' + t(u - u'))(1 - t)\, \mathrm{d}t$$

permet d'ecrire:

$$F\left(u_{k+1}\right)-F\left(u_{k}\right)=F^{\prime}\left(u_{k}\right)v_{k}+m_{k}v_{k}^{2},$$

avec

$$m_{k}\left(x\right)=\int_{0}^{1}F^{\prime\prime}\left(u^{\prime}+t\left(u-u^{\prime}\right)\right)\left(1-t\right)\mathrm{d}t. \qquad \blacksquare$$

Lemme 50 *i) les fonctions m_k sont C^∞et vérifient:*

$$\left\|\partial_x^\alpha m_k\right\|_{L^\infty}\leq C_\alpha 2^{k|\alpha|}.$$

ii) Les fonctions$m_k v_k^2$ sont C^∞et vérifient:

$$\left\|\partial_x^\alpha\left(m_k v_k^2\right)\right\|_{L^\infty}\leq C_\alpha 2^{k(|\alpha|-2\mu)}.$$

ii) La série $\sum_{k=0}^{\infty}m_k v_k^2$ converge et définit une fonction de $C^{2\mu}\left(\mathbb{R}^n\right).$

Démonstration. Les fonctions $w_k=u_k+tv_k$ vérifient

$$\left\|\partial_x^\alpha w_k\right\|_{L^\infty}\leq C_\alpha 2^{k|\alpha|}$$

En particulier pour, $\|w_k\|_{L^\infty}\leq C_0$. Utilisant le fait que F'' et C^∞ sur $[-C_0,C_0]$ et des majorants pour les normes L^∞ de ses dérivées, on voit que $F''\left(w_k\right)$ est C^∞ et vérifie:

$$\left\|\partial_x^\alpha F^{\prime\prime}\left(w_k\right)\right\|_{L^\infty}\leq C_\alpha 2^{k|\alpha|}$$

uniformément pour $t\in[0,1]$. Intégrant en t on obtient i).
Pour obtenir ii), il suffit d'ecrire $\partial_x^\alpha\left(m_k v_k^2\right)$ comme une somme de termes de la forme

$$\partial_x^{\alpha'}m_k\partial_x^{\alpha''}v_k\partial_x^{\alpha'''}v_k \qquad \text{avec} \qquad |\alpha|=|\alpha'|+|\alpha''|+|\alpha'''|\,,$$

et d'utiliser les estimations i) et (44).
Enfin,iii) est une conséquence immédiate de ii)(lemme 32)puisque 2μ est supposé non entier. $\blacksquare$

CHAPITRE 4

CONTUNITE DES O.P.D

SUR LES ESPACES DE

BESOV-LIZORKIN-TRIEBEL

4.1 Préparation

Les paramèters p, q sont fixes comme suit: $p \in [1, \infty]$ dans le cas B-espace, et $p \in [1, \infty[$ dans le cas de F-espace, et $q \in [1, \infty]$. on pose

$$\mathcal{E}_{p,q} = \begin{cases} \ell^q(L^p) & \text{le cas B-espace}\,, \\ L^p(\ell^q) & \text{le cas de F-espace}\,. \end{cases}$$

On commence par rappeller les estimations du type de Nikol'skij répresentation, voir [RSi, Proposition 2.3.2(1), p. 59] or [Ym]. Mais avant ça nous allons formuler une inégalité de convolution:

Lemme 51 *Pour tout $b \in]0, 1[$, tout suite $\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de termes positifs vérifiant $\|\{\varepsilon_j\}_{j\in\mathbb{N}}\|_{\ell_q} = C < +\infty$ et tout $p, q, r \in [1, +\infty]$ tel que*

$$\frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

alors

$$\Big(\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{j=0}^{k} b^{(k-j)}\,\varepsilon_j\Big)^r\Big)^{1/r} + \Big(\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{j=k}^{\infty} b^{(j-k)}\,\varepsilon_j\Big)^r\Big)^{1/r} \leq \frac{2C}{1-b^p}\,. \tag{24}$$

En particulier on a

$$\Big(\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{j=0}^{k} b^{(k-j)}\,\varepsilon_j\Big)^q\Big)^{1/q} + \Big(\sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{j=k}^{\infty} b^{(j-k)}\,\varepsilon_j\Big)^q\Big)^{1/q} \leq \frac{2C}{1-b}\,. \tag{25}$$

Preuve Il suffit d'appliquer le théorème 2 de Young dans sa version dicrète

pour obtenir (24). Quant-à (25), n'est autre que (24) avec p=1. ∎

Définition 52 *On note par $E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Besov ou de Lizorkin-Triebel, lorsque le résultat est vrai pour les deux.*

Proposition 53 *(i) Soit $s \in \mathbb{R}$. Il existe un constant $c > 0$, telles que pour tout $g \in E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$, et pour tout $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ avec le support contenu dans la couronne $b^{-1} \leq |\xi| \leq b$, la suite $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ définit par $\hat{g}_j = \theta(2^{-j})\,\hat{g}$ satisfait*

$$\Big\|\big\{2^{sj} g_j\big\}_{j\in\mathbb{N}}\Big\|_{\mathcal{E}_{p,q}} \leq c\,\|g\|_{E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) Soit $s > 0$. Il existe un constant $c > 0$, telles que pour toute suite de fonction $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ de $S'(\mathbb{R}^n)$, satisfaisant les deux supports de $\hat{g}_j$ est contenu dans la boule $|\xi| \leq b2^j$ et $\left\|\{2^{sj}g_j\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\varepsilon_{p,q}} = A < \infty$, alors les séries $\sum_{j=0}^{\infty} g_j$ convergentes dans $S'(\mathbb{R}^n)$ pour une limite dans $F_p^{s,q}$, et $\left\|\sum_{j=0}^{\infty} g_j\right\|_{F_p^{s,q}} \leq cA$.

Proposition 54 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ telle que $0 < a < b < 2a$. Il existe a constant $c > 0$, telles que pour toute suite de fonctions $\{g_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ avec le support de $\hat{g}_j$ est contenu dans la couronne $2^j a \leq |\xi| \leq 2^j b$, satisfait*

$$\left\|\left\{2^{sj}g_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\varepsilon_{p,q}} \leq c\left\|\sum_{j=0}^{\infty} g\right\|_{E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}.$$

Démonstration. On choisit deux nombres a', b' de telle sorte que :
$\frac{b}{2} < a' < a < b < b' < 2a$.
Aussi nous choisissons une fonction $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$,telle que:

$$\eta(\xi) = 1 \text{ si } a' \leq |\xi| \leq b'.$$

Nous avons

$$\eta\left(2^{-j}\xi\right)\hat{g}_k(\xi) = 0 \text{ si } j \neq k,$$

et

$$\eta\left(2^{-k}\xi\right)\hat{g}_k(\xi) = \hat{g}_k(\xi).$$

On utlise la proposition 53(i), on obtient le résultat désiré

$$\left\|\left\{2^{sj}g_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\varepsilon_{p,q}} = \left\|\left\{2^{sj}2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\eta\left(2^j.\right) * \left(\sum_{j=0}^{\infty} g_k\right)\right\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\varepsilon_{p,q}} \leq \left\|\sum_{j=0}^{\infty} g_k\right\|_{F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}. \quad \blacksquare$$

4.2 L'espace $C_\omega^s(\mathbb{R}^n)$

Soit $\omega : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$, une fonction croissante,nulle près de l'origine et concave. Nous allons associé l'espace fonctionnel suivant : Soit $C_\omega^s(\mathbb{R}^n)$ l'espace de Banach muni de la norme suivante

$$\|u\|_{C_\omega^s(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\beta|\le[s]} \left(\left\|u^{(\beta)}\right\|_\infty + \sup_{h\neq 0} \frac{\left\|u^\beta(.+h) - u^{(\beta)}\right\|_\infty}{\omega(|h|)} \right) < +\infty.$$

Remarque 55 *Si $\omega(t) = t^{s-[s]}$, alors $C_\omega^s(\mathbb{R}^n)$ coincide avec les espaces Hölder $C^s(\mathbb{R}^n)$, qui est lui même l'espace de Besov $B_\infty^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$.*

Lemme 56 *Soit $u \in C_\omega^s(\mathbb{R}^n)$, on pose $k = [s]$. Si $f \in C^k(\mathbb{R})$ alors $f(u) \in C_\omega^s(\mathbb{R}^n)$*

Preuve $\partial_x^\alpha f(u)$ est la somme des termes suivant

$$f^{(p)}(u)\,\partial_x^{\beta_1}u....\partial_x^{\beta_p}u, \quad |\alpha| \ge p \ge 1, |\beta_1| + ... + \left|\beta_p\right| = |\alpha|.$$

Par que la continuté de $f^{(p)}$ sur l'intervalle $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$ on a

$$\left|f^{(p)}(u)(x+h) - f^{(p)}(u)(x)\right| \le c\,\omega(|h|).$$

Nous concluons

$$\begin{aligned}
&\left|f^{(p)}(u)\,\partial_x^{\beta_1}u.....\partial_x^{\beta_p}u(x+h) - f^{(p)}(u)\,\partial_x^{\beta_1}u.....\partial_x^{\beta_p}u(x)\right| \\
&\le \left|f^{(p)}(u)(x+h) - f^{(p)}(u)(x)\right| \left|\partial_x^{\beta_1}u...\partial_x^{\beta_p}u(x+h)\right| \\
&+ \left|f^{(p)}(u)(x)\right| \left|\partial_x^{\beta_1}u...\partial_x^{\beta_p}u(x+h) - \partial_x^{\beta_1}u...\partial_x^{\beta_p}u(x)\right|
\end{aligned}$$

$$\le$$

$$c_1\omega(|h|)\left\|\partial_x^{\beta_1}u\right\|_\infty ... \left\|\partial_x^{\beta_p}u\right\|_\infty + \|f\|_\infty \left(\left|\partial_x^{\beta_1}u(x+h) - \partial_x^{\beta_1}u(x)\right| \left\|\partial_x^{\beta_2}u\right\|_\infty \times \right.$$
$$.... \left\|\partial_x^{\beta_p}u\right\|_\infty + \left|\partial_x^{\beta_2}u(x+h) - \partial_x^{\beta_2}u(x)\right| \left\|\partial_x^{\beta_1}u\right\|_\infty \left\|\partial_x^{\beta_1}u\right\|_\infty ... \left\|\partial_x^{\beta_p}u\right\|_\infty + ..)$$
$$\le c_2\omega(|h|).$$

Les propriétés des opérateurs $\triangle_j$ et Q_J dans $C_\omega^s(\mathbb{R}^n)$ donnent les estimations souhaiteés. ■

Lemme 57 *Il existe une constant $c>0$, telles que les inégalités*

$$\left\|\triangle_j g\right\|_\infty \leq c2^{-j[s]}\omega\left(2^{-j}\right)\|g\|_{C^s_\omega(\mathbb{R}^n)}$$

sont satisfaites pour toute $g \in C^s_\omega\left(\mathbb{R}^n\right)$

La preuve:Par le développement de Taylor on a :

$$\begin{aligned}
g(x-y) &= \sum_{|\beta|\leq[s]}\frac{(-y)^\beta}{\beta!}g^{(\beta)}(x)+[s]\sum_{|\beta|<[s]}\frac{(-y)^\beta}{\beta!}\int_0^1(1-v)^{[s]-1}g^{(\beta)}(x-vy)\,\mathrm{d}v\\
&= \sum_{|\beta|\leq[s]}\frac{(-y)^\beta}{\beta!}g^{(\beta)}(x)+R(x,y),
\end{aligned}$$

où

$$R(x,y)=[s]\sum_{|\beta|\leq[s]}\frac{(-y)^\beta}{\beta!}\int_0^1(1-v)^{[s]-1}\left(g^{(\beta)}(x-vy)-g^{(\beta)}(x)\right)\mathrm{d}v,$$

qui satisfait

$$R(x,y)\leq c\,|y|^{[s]}\,\omega(|y|)\,\|g\|_{C^s_\omega(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Puis le lemme résulte immédiatement de l'égalité suivante

$$\triangle_j g(x)=\int_{\mathbb{R}^n}R\left(x,2^{-j}y\right)\mathcal{F}^{-1}\phi(y)\,dy.$$

■

4.3 La continuité des Opérateurs pseudo-différentiels

4.3.1 Symboles et module de continuité

Soit $S_{1,0}^{m}$ la collection de la fonctions $\sigma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$,appelé un symbole, tel que pour tous multi-indices α et β avec $|\beta| \leq N$ on a:

$$\left|\partial_{\xi}^{\alpha}\partial_{x}^{\beta}\sigma\left(x,\xi\right)\right| \leq c_{\alpha,\beta}\left(1+|\xi|\right)^{m-|\alpha|}, \tag{26}$$

$$\left|\partial_{\xi}^{\alpha}\partial_{x}^{\beta}\sigma\left(x+h,\xi\right)-\partial_{\xi}^{\alpha}\partial_{x}^{\beta}\sigma\left(x,\xi\right)\right| \leq \acute{c}_{\alpha,\beta}\omega\left(|h|\right)\left(1+|\xi|\right)^{m-|\alpha|},$$

où le module ω de la continuité est défini ci-dessus à (voir début du pragraphe (4.2).
Le o.p.d associé est défini par la formule

$$\sigma\left(x,D\right)u(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\sigma\left(x,\xi\right)\hat{u}\left(\xi\right)\mathrm{d}\xi, \qquad \left(u\in S, \quad x\in\mathbb{R}^n\right).$$

En liaison avec l'espace $B_p^{s,q}$,l'étude de la continuité d'Opérateurs pseudo-différentiels du symbole dans $S_{1,0}^{m}\left(\omega,[s]\right)$, demande la condition

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jq(s-[s])}\omega^{q}\left(2^{-j}\right)\right)^{\frac{1}{q}}<\infty. \tag{27}$$

A savoir que nous avons le résultat suivant.

Théorème 58 *(i) supposons que (27) détient. Alors tous Opérateurs pseudo-différentiels de symbole dans $S_{1,0}^{m}\left(\omega,[s]\right)$ envoie $E_p^{s+m,q}$ dans $E_p^{s,q}$.*
(ii) Si une fonction ω ne satisfait pas (27) c'est dire

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty}2^{jq(s-[s])}\omega^{q}\left(2^{-j}\right)\right)^{\frac{1}{q}}=+\infty, \tag{28}$$

alors il existe un symbole $\sigma\in S_{1,0}^{m}\left(\omega,[s]\right)$,et une fonction $g\in S\left(\mathbb{R}^n\right)$,de telle sorte que $\sigma\left(x,D\right)g$ n'appartient pas à $E_p^{s,q}$.

La preuve est basée sur la propostion suivante plus, précise que le théorème lui-même, et qui a son propre intérêt. ■

Proposition 59 *Soit $\eta > 1$.Supposons que ω satisfait (27) . Alors il existe une constante $c > 0$, tels que l'inégalité*

$$\left\| \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j f_j \right\|_{E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left(\sup_{k\in\mathbb{N}} \|\chi_k\|_{C_\omega^s(\mathbb{R}^n)} \right) \left\| \left\{ 2^{sj} f_j \right\}_{j\in\mathbb{N}} \right\|_{\varepsilon_{p,q}} \tag{29}$$

vaut pour toutes les suites $\{f_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ avec supp$\hat{f}_j$ contenus dans la boule $|\xi| \leq 2^j\eta$, et toutes les suites $\left\{\chi_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ de la classe $C_\omega^s(\mathbb{R}^n)$.

preuve Nous commençons par écrire

$$\sum_{j=0}^{\infty} \chi_j f_j = \sum_{j=0}^{\infty} f_j Q_j \chi_j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k-1} f_j \triangle_k \chi_j \, (= g_1 + g_2) \, .$$

L'estimation de $\|g_1\|_{E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$: La fonction $\left(\varphi\left(2^{-j}.\right)\hat{\chi}_j\right) * \hat{f}_j$ est supportée dans la boule $\{|\xi| \leq 2^j(\eta+2)\}$, alors la proposition 53/(ii) donne l'inégalité

$$\left\|Q_j \chi_j\right\|_\infty \leq c \left\|\mathcal{F}^{-1}\varphi\right\|_1 \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\chi_k\|_\infty \qquad (\forall j \in \mathbb{N})$$

d'où le résultat souhaité.
L'estimation de $\|g_2\|_{E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$: Aussi parce que le support de $\left(\varphi\left(2^{-j}.\right)\hat{\chi}_j\right) * \hat{f}_j$ est contenu dans la boule $\left\{|\xi| \leq 2^j\left(2 + \left(\frac{\eta}{2}\right)\right)\right\}$ alors la proposition53/(ii) donne

$$\|g_2\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c \left\| \left\{ 2^{sk} \sum_{j=0}^{k-1} f_j \triangle_k \chi_j \right\}_{k\in\mathbb{N}} \right\|_{\varepsilon_{p,q}} .$$

Maintenant du lemme 57 et le fait que $s > 0$, le résultat souhaité sera obtenu.
■
Démonstration du théorème (58) Soit $\sigma(x,\xi) \in S_{1,0}^m(\omega,[s])$. La décomposition de $\sigma(x,\xi)$ en symbole élémentaire peut être écrite comme (26)

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \left(1+|k|^2\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} + \sigma_k(x,\xi) + \rho(x,\xi) \, ,$$

où $\rho(x,\xi)=0$ si $|\xi|\geq 2$, et la fonction

$$a_u(x)=(2\pi)^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-iu.\xi}\left(1-\triangle_\xi\right)^{2n}\rho(x,\xi)\,d\xi$$

appartient à $C^s_\omega(\mathbb{R}^n)$,et

$$\sigma_k(x,\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{jm}M_{j,k}(x)\,\theta_k\left(2^{-j}\xi\right),$$

tel que $M_{j,k}$ est borné dans $C^s_\omega(\mathbb{R}^n)$ uniformment par rapport à k, et θ_k est $C^\infty(\mathbb{R}^n)$,supporté en $\frac{1}{2}\leq|\xi|\leq 2$ et $\left\|\theta_k^{(\beta)}\right\|_\infty\leq c$ pour tout $k\in\mathbb{Z}^n$,et $|\beta|\leq N=\left[\frac{n}{2}\right]+1$.
L'estimation de σ_k :proposition (54) et proposition (53/(i))
donnent respectivement

$$\begin{aligned}\|\sigma_k(.,D)f\|_{E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} &\leq c_1\left(\sup_{j,\acute{k}}\left\|M_{j,\acute{k}}\right\|_{C^s_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)\left\|\left\{2^{(s+m)j}\left(2^{jn}\mathcal{F}^{-1}\theta_k\left(2^j.\right)\right)*f\right\}_{j\in\mathbb{N}}\right\|_{\varepsilon_{p,q}}\\ &\leq c_2\left(\sup_{k,|\beta|\leq N}\left\|\theta_k^{(\beta)}\right\|_\infty\right)\|f\|_{E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}.\end{aligned}$$

Estimation de ρ :Nous avons

$$\rho(.,D)f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(1+|u|^2\right)^{-2n}a_u(x)\,f(x+u)\,du,$$

et $\triangle_j(\rho(.,D)f)=0$ si $j\geq 1$, alors

$$\begin{aligned}\|\tau(.,D)f\|_{E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} &= \|\triangle_0(\tau(.,D)f)\|_p\\ &\leq \left\|\mathcal{F}^{-1}\phi\right\|_1\|\rho(.,D)f\|_p\\ &\leq c_1\left(\sup_{u\in\mathbb{R}^n}\|a_u\|_{C^s_\omega(\mathbb{R}^n)}\right)\|f\|_p\leq c_2\|f\|_p.\end{aligned}$$

(ii) On consédère le symbole

$$\sigma(x,\xi)=\sum_{j=0}^{\infty}2^{-j[s]}\omega\left(2^{-j}\right)\exp\left(i2^jx_1\right)\left(1+|\xi|^2\right)^{m/2},\quad (x_1,\acute{x})\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{n-1};$$

il n'est pas difficile de voir que $\sigma(x,\xi)$ appartient à $S_{1,0}^{m}(\omega,[s])$.
Nous mettons les détails.Soit maintenant une fonction g de $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, telle que $\|g\|_p = 1$ et supp$\hat{g}$ contenu dans la boule $|\xi| \leq \frac{1}{4}$. Il est claire que le support de la fonction

$$\xi \longrightarrow \mathcal{F}\left(\exp\left(i2^j x_1\right) g(x)\right)(\xi)$$

est continu dans la couronne $\left(\frac{3}{4}\right)2^j \leq |\xi| \leq \left(\frac{5}{4}\right)2^j$. On pose $h = (1-\triangle)^{-m/2} g$.
La proposition 53 Conduit alors à

$$\|\sigma(.,D)h\|_{E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \geq c\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq(s-[s])}\omega^q\left(2^{-j}\right)\right)^{1/q} = +\infty. \qquad \blacksquare$$

4.4 La classe $S_{1,0}^{m}\left(E_r^{s,q}(\mathbb{R}^n)\right)$

La perforation de la condition (27) dans la classe $S_{1,0}^{m}(\omega,N)$ conduit à introduire $S_{1,0}^{m}\left(E_r^{s,q}(\mathbb{R}^n)\right)$ définie comme

$$\left\|\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)\right\|_{E_r^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c_\alpha (1+|\xi|)^{m-|\alpha|}.$$

Alors nous obtenons une formulation du théorème 58/(i)

Théorème 60 *(i) Tous les Opérateurs pseudo-différentiels de symbole dans la classe* $S_{1,0}^{m}\left(B_\infty^{s,q}(\mathbb{R}^n)\right)$ *envoie* $E_p^{s+m,q}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Tous les Opérateurs pseudo-différentiels de symbole dans la classe $S_{1,0}^{m}\left(E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)\right)$ *envoie* $E_p^{s+m,q}(\mathbb{R}^n)$ *dans l'espace algèbre* $E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ *,avec* $p \leq q$ *.*

preuve : La preuve est semblable à la démonstration du théorème 58 basée sur la proposition 59, il est également valable pour toutes les suites $\left\{\chi_j\right\}_{j\in\mathbb{N}}$ dans $B_\infty^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ pour le cas (i), (resp $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$) pour le cas (ii).
Pourtant dans (29), il vient que $\left\{\chi_j\right\}_{C_\omega^s(\mathbb{R}^n)}$ doit être changé par $\left\|\chi_j\right\|_{B_\infty^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$, (resp $\left\|\chi_j\right\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$). Toutefois dans la preuve de la proposition59, se restrient à l'estimation du $\|g_2\|_{E_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$.

Le cas de Besov on utilise Minkowski par rapport à ℓ_q $(q \geq 1)$ et inégalité de Hölder dans l'ordre

$$
\begin{aligned}
\|g_2\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left\| f_j \triangle_k \chi_j \right\|_p \right)^{1/q} \right) \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{skq} \left\| f_j \triangle_k \chi_j \right\|_p^q \right)^{1/q} \\
&\leq \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{skq} \left\| \triangle_k \chi_j \right\|_\infty^q \right)^{1/q} 2^{-sj} \left(2^{sj} \left\| f_j \right\|_p \right), & \text{(Ai)} \\ \sum_{j=0}^{\infty} \left(\left(\sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{skq} \left\| \triangle_k \chi_j \right\|_\infty^q \right)^{1/q} \right) 2^{-sj} \left(2^{sj} \left\| f_j \right\|_\infty \right) & \text{(Aii)} \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} c \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\| \chi_j \right\|_{B_\infty^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell sq} \left\| f_\ell \right\|_p^q \right)^{1/q} \\ c \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\| \chi_j \right\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-(s-n/p)j} \left(2^{sj} \left\| f_j \right\|_p \right) \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} c \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\| \chi_j \right\|_{B_\infty^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell sq} \left\| f_\ell \right\|_p^q \right)^{1/q} \\ c \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\| \chi_j \right\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell sq} \left(2^{sj} \left\| f_\ell \right\|_p^q \right) \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} c \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\| \chi_j \right\|_{B_\infty^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell sq} \left\| f_\ell \right\|_p^q \right)^{1/q} \\ c \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\| \chi_j \right\|_{B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{\ell sq} \left\| f_\ell \right\|_p^q \right)^{1/q} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(Ai) correspond au théorème 60/(i) , (Aii) pour le cas $\left(s > n/p, \text{ et } s = \frac{1}{p} \text{ avec } q = 1\right)$. La même procédure pour le cas de Lizorkin-trieble que nous avons

$$\begin{aligned}
\|g_2\|_{F_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} &\leq \left\| \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{skq} \left| \sum_{j=0}^{k-1} f_j(x) \triangle_k \chi_j(x) \right|^q \right)^{1/q} \right\|_p \\
&\leq \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{skq} \left| f_j(x) \triangle_k \chi_j(x) \right|^q \right) \right)^{1/q} \right\| \\
&\leq \begin{cases} \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{skq} \left\| \triangle_k \chi_j \right\|_\infty^q \right)^{1/q} 2^{-sj} \left(2^{sj} |f_j(x)| \right) \right\|_p, (\mathrm{A_i}) \\ \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{skq} \left| \triangle_k \chi_j(x) \right|^q \right)^{1/q} \right\|_p 2^{-sj} \left(2^{sj} |f_j(x)| \right) \right\|_\infty, (\mathrm{A_{iii}}) \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} c \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\| \chi_j \right\|_{B_\infty^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \left\| \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{s\ell q} |f_\ell(x)|^q \right)^{1/q} \right\|_p, \\ c \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\| \chi_j \right\|_{F_\infty^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \left\| \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{s\ell q} |f_\ell(x)|^q \right)^{1/q} \right\|_\infty \end{cases} \\
&\leq \begin{cases} c \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\| \chi_j \right\|_{B_\infty^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \left\| \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{s\ell q} |f_\ell(x)|^q \right)^{1/q} \right\|_p, \\ c \sup_{j \in \mathbb{N}} \left\| \chi_j \right\|_{F_\infty^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \left\| \sum_{\ell=0}^{\infty} 2^{-s\ell} \left(2^{s\ell} |f_\ell(x)| \right) \right\|_\infty \end{cases}
\end{aligned}$$

(Ai) déjà defini. ■

4.5 Opérateurs paraproduit et résultat principal

Définition 61 *Pour tout $a, u \in S'(\mathbb{R}^n)$, le paraproduit définit par*

$$\pi(a, u) = \sum_{j=2}^{\infty} Q_{j-2} a \triangle_j u \tag{30}$$

Pour $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ .si $u \in C_\omega^s(\mathbb{R}^n)$ le lemme 57 donne la convergence géométrique de la série (30).

Aussi, par la proposition (53) on a $u \longrightarrow \pi(a, u)$ est borné dans $B_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$. Maintenant nous retournons à la composition à gauche par l'étude de l'opérateurT_f défini : $u \longrightarrow T_f(u) = f(u)$ et l'opérateur modulo un o.p.d :

$$u \longrightarrow \tilde{T}_f(u) = f(u) - \pi(f'(u), u).$$

Théorème 62 *Soit ω un module de continuité vérifiant*

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq(s-[s])}\omega^q\left(2^{-j}\right)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

On pose $k=[s]$. pour tout fonction $f\in C^k(\mathbb{R}^n)$ avec $f(0)=0$, et pour toute $u\in C^s_\omega(\mathbb{R}^n)\cap E^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)$, on a :

(i) la fonction fou appartient à $E^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)$.En particulier l'opérateur T_f envoie $C^s_\omega(\mathbb{R}^n)\cap E^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)$ dans $E^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)$.

(ii) La fonction $f(u)-\pi(f'(u),u)$ appartient à $E^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)$.En particulier l'opérateur $\tilde{T}_f$ envoie $C^s_\omega(\mathbb{R}^n)\cap E^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)$ dans $E^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)$.

Preuve:

Etape1. On va démontrer que $\lim\limits_{j\to\infty} f(Q_ju)=f(u)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. En effet, du lemme 57, on a

$$u=Q_ju+\sum_{k=j+1}^{\infty}\triangle_k u,$$

d'où

$$\left\|\partial^\beta(Q_ju)\right\|_\infty \le c\left\|\partial^\beta u\right\|_\infty \tag{31}$$

et

$$\left\|\partial^\beta(u-Q_ju)\right\|_\infty \le c2^{(|\beta|-m)j}\omega\left(2^{-j}\right) \text{ pour } |\beta|\le m \tag{32}$$

on obtient $\lim\limits_{j\longrightarrow\infty} Q_ju=u$ et par la continuité de f on conclut.
Ainisi la linéarisation suivante est obtenue:

$$f(Q_0u)+\lim_{N\longrightarrow\infty}\sum_{k=0}^{N}\left(f(Q_{j+1}u)-f(Q_ju)\right)=f(u). \tag{33}$$

Alors

$$f(u)=\sum_{j=0}^{\infty}\triangle_j u S_j u.$$

où

$$S_0u=\int_0^1 f'(tQ_0u)\,\mathrm{d}t,$$

et

$$S_ju=\int_0^1 f'(Q_{j-1}u+t\triangle_j u)\,\mathrm{d}t \qquad \text{si } j\ge 1. \tag{34}$$

Etape2.D'après le lemme 56 on a $f^{(k)}(u) \in C^s_\omega(\mathbb{R}^n)$ pour tout $k \leq m$. Aussi comme dans le lemme 56 les fonctions $f^{(k)}$ sont bornnées dans l'intervalle $[-\|u\|_\infty, \|u\|_\infty]$ par l'inégalité (31), on a:

$$\begin{aligned}\left\|\partial^\beta\left(f'\left(Q_{j-1}u - t\triangle_j u\right)\right)\right\|_\infty &\leq c_1\left\|\partial^\beta\left(Q_{j-1}u - t\triangle_j u\right)\right\|_\infty \\ &\leq c_2\left\|\partial^\beta\left(Q_{j-1}u\right)\right\|_\infty + t\left\|\partial^\beta\left(\triangle_j u\right)\right\|_\infty \\ &\leq c_3\|u\|_\infty \qquad (\text{si } 0 \leq t \leq 1)\end{aligned}$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\forall |\beta| \leq m$ il résulte

$$\left|\partial_x^\beta S_j u(x)\right| \leq c\left\|\partial^\beta u\right\|_\infty \qquad \text{pour } (j = 0, 1..........) \tag{35}$$

De la même façon, on utilise (32) on obtient

$$\left|\partial_x^\beta S_j u(x+h) - \partial_x^\beta S_j u(x)\right| \leq c\omega(|h|). \tag{36}$$

Ainisi $\{S_j u\}_{j\in\mathbb{N}} \subset C^s_\omega(\mathbb{R}^n)$ .Alors la proposition 59 donne l'assertion (i)

Etape3. On va montrer

$$\|f(Q_0 u)\|_{E^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{E^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)}.$$

D'après (i), il suffit de montrer

$$\|Q_0 u\|_{E^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)} \leq c\|u\|_{E^{s,q}_p(\mathbb{R}^n)};$$

en effet d'après l'inégalité de Young

$$\|\triangle_j(Q_0 u)\|_p \leq c\|\phi_0\|_1\|\triangle_j u\|_p$$

suffisant pour obtenir le résultat dans le cas de Besov.
Alors que dans le cas de Lizorkin-Triebl

$$\triangle_j \widehat{(Q_0 u)} = \phi \text{ si } j \geq 3$$

car

$$\triangle_j(Q_0 u)(x) = 0$$

Etape4.On suppose que

$$f(u) - f(Q_0 u) - \pi(f'(u), u)$$

est un opérateur pseudo-différentiels de symbole,notée $\sigma(x,\xi)$ à $S^0_{1,0}(\omega,[s])$. Alors que le résultat découle le théorème 58.En effet à partir de(33) on obtient

$$\begin{aligned}\sigma(x,D)u &= \sum_{k=0}^{\infty}(f(Q_{j+1}u) - f(Q_j u)) - \sum_{j=2}^{\infty} Q_{j-2}(f'(u)) \triangle_j u \\ &= \triangle_1 u \; S_1 u + \sum_{j=2}^{\infty} \triangle_j u \left(S_j u - Q_{j-2}(f'(u))\right),\end{aligned}$$

Où la séquence $\{S_j u\}_{j\in\mathbb{N}}$ est définie en (34).On pose

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \phi\left(2^{-j}\xi\right) g_j(x),$$

ou $g_1 = S_1 u$, et

$$g_j = S_j u - Q_{j-2}(f'(u)) \text{ si } j = 2...$$

Alors d'après (32)et le lemme 57, on peut demontrer, comme dans(35)et dans (36), que g_j appartient en $C^s_\omega(\mathbb{R}^n)$ pour

tout j . ■

CHAPITRE 5

O.P.D SUR LES ESPACES HOMOGENES

5.1 Préparation

On commence par quelques notations. On désigne par $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de tous les polynômes sur $\mathbb{R}^n$, et par $\mathcal{S}_\infty(\mathbb{R}^n)$ l'ensemble de tout $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telles que $\langle f, u \rangle = 0$ pour tout $f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$.
Pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, on désigne par $[f]$ la classe d'équivalence de f module $\mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)$.

Définition 63 *Si f appartient à $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$, c'est-à-dire $f \in \mathcal{P}_\infty(\mathbb{R}^n)^\perp$, on dit alors f est une* distribution modulo les polynomes*.*

On considère la fonction suivante: $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, telle que

$$0 \le \rho \le 1, \quad \rho(x) = 1 \quad \text{for} \quad |x| \le 1, \quad \rho(x) = 0 \quad \text{for} \quad |x| \ge 3/2. \tag{37}$$

On pose

$$\gamma(\xi) = \rho(\xi) - \rho(2\xi) \quad , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Alors γ est portée par la couronne compacte $1/2 \le |\xi| \le 3/2$, vérifiant les identités suivantes:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \gamma(2^j \xi) = 1 \quad , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} ,$$

$$\rho(\xi) + \sum_{j \ge 1} \gamma(2^{-j} \xi) = 1 \quad , \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n .$$

Pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on introduit les opérateurs pseudo-differentiels $S_j = \rho(2^{-j}D)$ et $Q_j = \gamma(2^{-j}D)$.
On a:

Remarque 64 *L'opérateur S_j est définit $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ alors que Q_j est définit sur $\mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ car $Q_j(f) = 0$ pour tout f polynôme.*

5.2 Définition et quelques propriétés

Définition 65 *Soient $s \in \mathbb{R}$, $p, q \in [1, +\infty]$. L'espace de Besov homogène $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des distributions modulo les polynômes $f \in \mathcal{S}'_\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que*

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{sj}\|Q_j f\|_p)^q\Big)^{1/q} < +\infty\,.$$

Proposition 66 *Soit a, b sont des nombres réels tels que $0 < a < b$. soit $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ une suite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telle que*

- *$\widehat{u_j}$ est porté par la couronne $a2^j \leq |\xi| \leq b2^j$,*
- *$A = \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big(2^{js}\|u_j\|_p\Big)^q\Big)^{1/q} < +\infty.$*

(i) les séries $\displaystyle\sum_{j\in\ \mathbb{Z}} u_j$ convergent dans $\mathcal{S}'_\infty$, et satisfait

$$\Big\|\sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j\Big\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \leq c\,A\,, \tag{38}$$

ou c dépend seulement des paramètres n, s, p, q, a et b.
(ii) Si $s > 0$, la même conclusion vaut pour les $a = 0$;si $s < 0$, la même conclusion vaut pour $b = +\infty$.

Nous allons exploiter le lemme suivant, dont sa démonstration est baseé sur la formule de Taylor.(Voir [Bo3]).

Lemme 67 *(i) Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, alors $\|Q_j f\|_p = O(2^{-jN})$ pour $j \to +\infty$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$.*
(ii) Si $f \in \mathcal{S}_\infty$, alors $\|S_j f\|_p + \|Q_j f\|_p = O(2^{jN})$ pour $j \to -\infty$, pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Preuve de la Proposition 66
Etape1 *: Convergence dans $\mathcal{S}'_\infty$.* Soit $f \in \mathcal{S}_\infty$.
Sous-etape 1.1 *: le cas $s > 0$.* Nous supposons que $\widehat{u_j}$ is portée par la boule $|\xi| \leq b2^j$. Il existe un entier m, dépendant seulement de b, tel que

$S_{j+m}(u_j) = u_j$, donc $\langle u_j, f\rangle = \langle u_j, S_{j+m}f\rangle$, pour tous $j \in \mathbb{Z}$. D'après le lemme 67, il découle

$$\|S_{j+m}f\|_{p'} \leq c(f)\,\min(1, 2^{jN}), \quad \forall j \in \mathbb{Z}\,,$$

Où N is arbitrairement large. Par hypothèse et par inégalitéde Hölder, on obtient

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\langle u_j, f\rangle| \leq c_1(f)\,A\,. \tag{39}$$

Sous-étape 1.2 *: le cas $s < 0$.* Maintenant nous supposons que $\widehat{u_j}$ est portée par l'ensemble $|\xi| \geq a2^j$. Il existe un entier m, dépendant seulement de a, tels que $S_{j+m}(u_j) = 0$, D'où $\langle u_j, f\rangle = \langle u_j, f - S_{j+m}f\rangle$, pour tous $j \in \mathbb{Z}$. D'après le lemme 67 et la définition 5, On déduit

$$\|S_{j+m}f - f\|_{p'} \leq c(f)\min\Big(1, 2^{-jN}\Big), \quad \forall j \in \mathbb{Z}\,,$$

Où N est arbitrairement large. On obtient (39) comme dans la Sous-étape 1.1.

Sous-étape 1.3 *: le case $s = 0$.* il existe deux entiers m_1, m_2, dépendant seulement de a et b, tels que $Q_k(u_j) = 0$ sauf pour $m_1 < j - k < m_2$. Alors

$$\langle u_j, f\rangle = \sum_{m_1<m<m_2} \langle u_j, Q_{j-m}f\rangle\,.$$

Nous concluons d'après le Lemme 67, comme dans les cas précédents.

Etape 2. Nous passons à la prouve de l'estimation (38).

Remarque 68 *Soit $u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} u_j$. Par etape 1, nous avons*

$$Q_k u = \sum_{k+m_1<j<k+m_2} Q_k(u_j)\,.$$

Où $m_1 \in \mathbb{Z}\cup\{-\infty\}$, $m_1 = -\infty$ si $b = +\infty$, $m_2 \in \mathbb{Z}\cup\{+\infty\}$, $m_2 = +\infty$ si $a = 0$. Par la Proposition 8, nous avons

$$2^{ks}\|Q_k u\|_p \leq c \sum_{k+m_1<j<k+m_2} 2^{(k-j)s}\,2^{js}\,\|u_j\|_p\,.$$

Or nous avons,

$$B = \sum_{m_1 < l < m_2} 2^{-ls} < +\infty\,.$$

En appliquant alors l'inégalité de Young dans $l^q(\mathbb{Z})$,on obtient

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(2^{ks}\|Q_k u\|_p\Big)^q\Big)^{1/q} \le cAB\,.$$

. ■

Remarque 69 *Le théorème suivant, ainsi que les trois propositions sont démontrés dans ([Bo3])*

Théorème 70 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, \infty]$. $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ est espace de Banach, vérifiant*

$$\mathcal{S}_\infty \hookrightarrow \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'_\infty\,.$$

Proposition 71 *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, \infty]$. Alors il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telle que*

$$c_1\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \le \lambda^{(n/p)-s}\|f(\lambda(\cdot))\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \le c_2\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}\,, \tag{40}$$

por tout $f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ et tous $\lambda > 0$.

Remarque 72 IL en résulte immédiatement par la Proposition 71 que nous pouvons renormer $\dot{B}_p^{s,,q}(\mathbb{R}^n)$ en prenant $c_1 = c_2 = 1$ dans (40).

Proposition 73 *Soient $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, \infty]$. une fonction f de $\mathcal{S}'_\infty$ appartient à $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si ces dériveés premières $\partial_\ell f$ appartienent à $\dot{B}_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)$, $(\ell = 1, \dots, n)$. De plus $\sum_{\ell=1}^n \|\partial_\ell f\|_{\dot{B}_p^{s-1,q}(\mathbb{R}^n)}$ est une norme équivalent dans $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$.*

Proposition 74 *L"inclusion $\dot{B}_{p_1}^{s_1,q}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \dot{B}_{p_2}^{s_2,q}(\mathbb{R}^n)$ est satisfait pour tout les paramètre $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ et $p_1, p_2, q \in [1, \infty]$ tele que:*

$$s_1 - \frac{n}{p_1} = s_2 - \frac{n}{p_2} \quad \text{et} \quad p_2 \ge p_1\,.$$

5.3 Dualité

Nous commençons par introduire les notions suivantes Si E est un espace vectoriel, on désigne par $c_c(\mathbb{Z}, E)$ l'ensemble des suites $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}}$ telle que $u_j = 0$, sauf pour un nombre fini d'indice j, et par $c_0(\mathbb{Z}, E)$ l'ensemble des suites $(u_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}}$ telle que $\lim_{|j|\to+\infty} \|u_j\|_E = 0$. on désigne par $C_0(\mathbb{R}^n)$ le sous-espace de Banach des fonctions bornneés t.q $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = 0$
Le théorème suivant est une adaptation des résultats de Triebl pour les espaces de Besov non homogènes voir ([T1])

Théorème 75 *Soit $s \in \mathbb{R}$ et $p, q \in [1, \infty]$. Alors l'espace de Besov homogènes $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ est l'ensemble des $f \in \mathcal{S}'_\infty$ tels que*

$$N_p^{s,q}(f) = \sup\{\, |\langle f, g\rangle| \,:\, g \in \mathcal{S}_\infty\,,\, \|g\|_{\dot{B}_{p'}^{-s,q'}(\mathbb{R}^n)} \le 1\,\} < +\infty\,. \tag{41}$$

De plus $N_p^{s,q}$ est une norme équivalante dans $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$.

Nous introduisons une fonction radiale $\tilde{\gamma} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ telle que $\tilde{\gamma}\gamma = \gamma$, et nous définissons $\widetilde{Q_j} = \tilde{\gamma}(2^{-j}D)$. Alors nous pouvons définir le produit suivant:

$$\lhd f, g \rhd = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle Q_j f, \widetilde{Q_j} g\rangle\,.$$

En utilisant les Définitions 5 et 66, nous obtenons

$$\lhd f, g\rhd = \langle f, g\rangle \quad , \forall f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)\,, \forall g \in \mathcal{S}_\infty\,,$$

$$|\lhd f, g\rhd| \le c\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}\, \|g\|_{\dot{B}_{p'}^{-s,q'}(\mathbb{R}^n)} \quad , \forall f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)\,, \forall g \in \dot{B}_{p'}^{-s,q'}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Par les deux relation ci-dessus, nous concluons que toute $f \in \dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$ satisfait la propriété (41), avec $N_p^{s,q}(f) \le c\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)}$.
Inversement supposons que f satisfait la propriété (41).on pose

$$\mathcal{L}((g_j)_{j\in\mathbb{Z}}) = \langle f, \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-sj}\widetilde{Q_j} g_j\rangle \quad , \forall (g_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in c_c(\mathbb{Z}, \mathcal{S}_\infty)\,.$$

$E = L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, si $p' < \infty$, et $E = C_0(\mathbb{R}^n)$, si $p' = \infty$. En utilisant l'interpolation voir ([T1]) on obtient

$$\|(f_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_{l^q(\mathbb{Z}, E')} \le c_1 N_p^{s,q}(f)$$

et

$$\mathcal{L}((g_j)_{j\in\mathbb{Z}}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \langle f_j, g_j\rangle \quad , \quad \forall (g_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in c_c(\mathbb{Z}, \mathcal{S}_\infty)\,.$$

L'identité ci-dessus implique

$$f = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{-sj} Q_j f_j\,.$$

Alors les propositions 66 et 8 donnent

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)} \le c_2 \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|Q_j f_j\|_p^q\Big)^{1/q} \le c_3 N_p^{s,q}(f)\,.$$

■

5.4 Théorème de continuité

D'après la proposition 66 et en suivant les mêmes étapes du théorème 58, on obtient le résultat suivant:

Théorème 76 *(i) supposons que (27) détient. Alors tous Opérateurs pseudo-différentiels de symbole dans $S_{1,0}^m(\omega,[s])$ envoie $\dot{B}_p^{s+m,q}$ dans $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$.*

(ii) Si une fonction ω ne satisfait pas (27) c'est à dire

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^{jq(s-[s])} \omega^q \left(2^{-j}\right)\right)^{\frac{1}{q}} = +\infty, \tag{42}$$

alors il existe un symbole $\sigma \in S_{1,0}^m(\omega,[s])$,et une fonction $g \in S(\mathbb{R}^n)$,de telle sorte que $\sigma(x,D)\,g$ n'appartient pas à $\dot{B}_p^{s,q}(\mathbb{R}^n)$.

Dans ce mémoire nous avons abordé deux axes:

- La continuité des Operateurs Pseudo- différentiels (O.P.D) sur les espaces de Besov (B) et de Lizorkin-Triebel (LT).
- L'utilisation de la continuité des O.P.D pour l'étude de la composition.

Dans le premier point on a obtenue une résultat qui concerne les O.P.D de symboles d'ordre m quelconque sur les espaces (B)et (LT) ou une fonction dite de module de continuité intervienne pour obtenir un résultat optimal.

Dans le second point nous avons étendu certains résultats précédents aux espaces homogènes pour les O.P.D. Nous constatons que ceci est une généralisations pour les espaces nom homogènes.

Il est a noté que pour réaliser ce mémoire nous avons fait un appel à plusieurs notion de l' analyse fonctionnelle comme : Les espaces de Banach-La théorie de Fourier-La théorie de la Mesure.

Nous avons aussi utiliser la théorie dit de"Paralinéarisation" développée par Y.Meyer et J.Bony.

Notons enfin que ce travail peut être suivi par des éventuelles recherches■

References

[BeL] J. Bergh, J. Löfstrom : Interpolation Spaces, Springer-Verlag 1976.

[Bo1] G. Bourdaud : Régularité du commutateur des opérateurs pseudo-différentiels peu réguliers, C.R.A.S., Paris, t. 290, Série A (1980), 67-70.

[Bo2] G. Bourdaud : L^p-estimates for certain pseudo-differential operators, Comm. Partial Differential Equations, 7 (1982), 1023-1033.

[Bo3] G. Bourdaud : Ce qu'il faut savoir sur les espaces de Besov. Preprint Paris 2008.

[BMo] G. Bourdaud et M. Moussai: Continuité des commutateurs d'intégrales singulières sur les espaces de Besov, Bull. Sci. Math, 118 (1994), 117-130.

[DMo] D. Drihem et M. Moussai : On the pointwise multiplication in Besov and Lizorkin-Triebel spaces, . Int. J. Math. Math. Sci., Art. ID 76182 (2006), 1–18.

[Met] G. Metivier : Intégrales singulières. Cours DEA, Université de Renne, France, 1981.

[Me] Y. Meyer : Ondelettes et opérateurs, T. 2, Paris, Hermann 1990.

[Mo1] M. Moussai : Continuity of pseudo-differential operators on Bessel and Besov spaces. Serdica Math. J., **27** (2001), 249–262.

[Mo2] M. Moussai : The composition in Lizorkin-Triebel spaces via para-differential operators, A paraître dans Math. Repports

[P] J. Peetre : New thoughts on Besov spaces, Duke Univ. Math. Series 1, Durham, 1976.

[RSi] T. Runst et W. Sickel : Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations, de Gruyter, Berlin, 1996.

[St] E. M. Stein : Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton University Press 1970.

[T1] H. Triebel : Theory of function spaces, Geest & Portig, Leipzig and Birkhäuser, Basel 1983.

[T2] H. Triebel : Theory of Function Spaces II, Birkhäuser, Basel, 1992.

[Ya] K. Yabut : Generalization of Calderón-Zygmund operators, Studia Math., 62 (1985), 17-31.

[Ym] M. Yamazaki : A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, I: Boundedness on spaces of Besov type. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. **33** (1986), 131–174. II: A Symbolic calculus. ibidem **33** (1986), 311–345.

ملخص الرسالة

ليكن التطبيق $T: g \to fog$ المعرف بالتركيب من اليسار
في هذه المذكرة ندرس الدالة f المعرفة على محور الأعداد الحقيقية من اجل أن يكون T **محدود على فضاءات من نوع** Sobolev، Besov **و**Lizorkin-Triebel ، وهذا باستعمال المؤثرات الشبه جدائية المعرفة من قبل J.M Bonyوالشبه الخطية لY.Meyer .

الكلمات المفتاحية

فضاء Lizorkin-Triebel**، فضاء** Besov**، فضاء** Sobolev**، مؤثر**para-produit ، **مؤثر** Pseudo-différentiels، مؤثرالتركيب.

Abstract

Let $T: g \to fog$ the composition operator. This is to characterize the real function f such that T acts on some fonctionnal spaces, like Sobolev, Besov and Lizorkin-Triebel. For the paralineatization of Y.Meyer , we will use the paraproduct of J.M Bony in particular the Littlweood-Paley theory .

Key word

Lizorkin-Triebel spaces, Besov spaces, Sobolev spaces paraproduct operator, Pseudo-differential operator, Composition.

Résumé

Soit l'opérateur de composition à gauche définie par $T: g \to fog$. Il s'agit de caractériser la fonction réelle f définie sur l'axe réel R, tel que T soit borné sur certains espaces fonctionnels de type de Sobolev, de Besov et de Lizorkin-Triebel. En utilisant les opérateurs du par-produit, définis par J.M Bony à partir de la théorie de Littlweood-Paley et développés par Y.Meyer, pour la paralinéarisation.

Mot-clés

Espaces de Lizorkin-Triebel, Espace de Besov, Espace de Sobolev Opérateurs du para-produit, opérateurs Pseudo-différentiels, Composition.