REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

1985

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

N° :………………………………………..

DOMAINE : SCIENCES DE LA MATIERE

FILIERE : PHYSIQUE

OPTION : PHYSIQUE DES PARTICULES A HAUTE ENERGIES

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par : SAHRAOUI Khaled

Intitulé

L'étude physique des niveaux d'énergies produit par le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace-phase non commutatif à trois Dimensions

Soutenu le 31/05/2017 devant le jury composé de :

S-Madjber	Université de M'sila	Président
A-MAIRECHE	Université de M'sila	Rapporteur
S-Medjedel	Université de M'sila	Examinateur

Année universitaire : 2016/2017

REMERCIEMENTS

Tout d'abord remercions Dieu tout poussant qui mous a éclairé vers le bon chemin.

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de Mémoire professeur : Abdelmadjid Maireche.

Je remercie les membres de jury qui ont accepté de juger ce travail.

Mes remerciements vont également à tous les enseignants du département de physique et mes collègues de promotion 2017.

Je tiens à remercier mes parents qui sont fatigués à cause de moi. Et ma famille, mes amies.

Finalement je tiens à remercier ma collègue Benyettou Houda qui m'aidé à accomplir ce travail.

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 3

L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace-temps non commutatif à trois Dimensions

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Après le déficit indiqué par la mécanique classique dans l'interprétation de certains phénomènes physiques (rayonnement de corps noir – photoélectrique ....) il a été nécessaire à l'émergence d'une nouvelle science est capable d'interpréter ces phénomènes. Bien sûr, ce qui est arrivé l'année 1900 par Planck où il a pu expliquer le phénomène de rayonnement du corps noir en utilisant un nouveau concept, le concept a contribué à l'émergence d'une nouvelle science qui la mécanique quantique. La mécanique quantique est la science la plus mystérieuse. Elle traite du niveau le plus fondamental de la réalité, celui des particules (atomes, électrons, photons, . . .). La mécanique quantique a fait entrer dans la physique des concepts radicalement nouveaux : dualité onde-corpuscule, probabilités, etc..., le changement radical entre la mécanique quantique et la mécanique classique est essentiellement qu'en mécanique classique une particule est un objet ponctuel décrit par un point (x, p) dans l'espace des phases, alors qu'en mécanique quantique une particule est un objet ponctuel décrit par une fonction d'onde $\psi(x)$. Le rôle de la mécanique est de donner les lois qui gouvernant l'évolution de ces objets. Ce sont les équations de Hamilton (ou Newton) dans le cas classique et l'équation de Schrödinger dans le cas quantique [1].

En mécanique quantique ordinaire l'espace de phase est définit en remplaçant les variables et les moments canoniques x_i, p_i par des opérateurs hermétiques qui obéissent aux règles de commutation canonique$[x_i, p_i] = i\hbar\delta_{ij}$, La relation de commutations canonique entre variable (x_i, p_i) avec : i =1, 2, 3 qui deviennent des observables dans l'espace d'Hilbert :

$(x_i \to \hat{x}_i \;\; et \;\; p_i \to \hat{p}_i)$.

L'étude de la mécanique quantique a continué dans l'espace normal (l'espace commutative). Cela a suggéré Heisenberg la généralisation et l'extension de son principe (principe d'incertitude) dans un espace plus large et plus complet (espace non commutative) de manière à permettre les résultats obtenus à partir de cette nouvelle étude de résoudre les problèmes qui sont apparus dans les domaines de la théorie quantique de champs.

La mécanique quantique sur espace non commutative (MQNC) a dans un premier temps, été proposée par Heisenberg dans les années 1930 puis développée par Snyder à la fin des années 1947, dans l'espoir que les propriétés induite par la noncommutativité des coordonnées d'espace permettraient de résoudre le problème des divergences à courte distance (ultra violette) de la théorie des champs. La mécanique quantique en espace non-commutative correspond à l'étude de Hamiltonien dépendant des opérateurs de position et d'impulsion qui satisfont une algèbre de commutateurs non canonique [2]. La théorie non commutative se donne pour but de trouver une version non commutative de ces espaces en considérant des algèbres non commutatives ayant de bonnes propriétés, Les propriétés choisies sur ces algèbres non commutatives doivent caractériser complétement le type de l'espace non commutative qu'elles représentent [3].

Le but principal de ce travail :

L'objectif principal de ce travail est d'étudier l'équation de Schrödinger modifiée avec de potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace-phase non commutative à trois dimensions (3D-NC-RPS), et la connaissance de la nouveauté qui venait de cet espace sur l'Hamiltonien et l'énergie.

Ce travail se compose à trios chapitre :

Chapitre 1 :

Dans ce chapitre nous commencerons par rappelle sur la structure physique de la mécanique quantique ordinaire et la connaissance la structure quantique de l'espace-phase non commutative en utilisant le produit de Moyal-Weyl (produit star) et la méthode de Boopp's Shift, et on applique cette méthode sur le potentiel gravitationnel plus exponentiel.

Chapitre 2 :

Dans ce chapitre étude l'équation de Schrödinger pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace ordinaire à trios dimensions et trouver la fonction d'onde et l'énergie en utilisant la méthode de Nikiforov-Uvarov.

Chapitre 3 :

Dans ce chapitre étude l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace-phase non commutative à trois dimensions (3D-NC-RPS), et trouver l'énergie résultant de l'étude dans ce nouvel espace (espace-phase non commutative).

Chapitre 1

La structure quantique de l'espace-phase Non Commutative

1.1. Introduction :

Dans ce chapitre on a traité les postulats et les hypothèses caractérisé la structure quantique et physique de l'espace-phase noncommutative, les éléments principales traité dans ce chapitre sont :

1-Rappelle sur la structure quantique ordinaire,

2-Les nouveaux postulats de l'espace-phase noncommutative,

3- Produit star et ces propriétés, la formule de Moyal-Weyl,

4-La méthode de Boopp's Shift et ces applications pour un potentiel de la forme

$$V(r) = mgr + \delta\, e^{-kr} \quad \text{(1.1)}$$

Qui connait par le potentiel gravitationnel plus exponentiel (gravitational plus exponential potential) qui traité dans l'espace ordinaire a trois dimensions par T. A. Anake et B. I. Ita dans le cadre de la mécanique quartique ordinaire [4].

1.2. Rappelle sur la structure physique de la mécanique quantique ordinaire :

La mécanique quantique des branches de base modernes qui sont apparues dans la science de la physique, ce science est apparu en 1900 à la main du Planck après son interprétation du phénomène de rayonnement du corps noir et introduit le concept de quanta, qui est dérivé le nom de ce science (la mécanique quantique), science de sa structure mathématique et les concepts physiques en eux-mêmes par rapport à l'ancienne mécanique.

La mécanique quantique est construite sur des bases fondamentales et les postula suivants [5,6] :

Postulat I.

À tout instant t, l'état d'un système quantique est décrit par un vecteur d'état $|\Psi\rangle$ appartenant à l'espace vectoriel $\mathfrak{H}$ des états quantiques.

Postulat II.

À toute grandeur physique mesurable $\mathcal{A}$, on peut faire correspondre un opérateur **A** qui agit sur les vecteurs d'état de l'espace $\mathfrak{H}$; cet opérateur est une observable.

Postulat III.

Les valeurs propres de l'observable **A**, correspondant à une grandeur physique $\mathcal{A}$, sont les seules valeurs mesurables.

Postulat IV.

L'opérateur Hamiltonien **H** d'un système est l'observable associée à l'énergie totale de ce système. L'évolution dans le temps du vecteur d'état $|\Psi\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger :

$$H\,|\Psi(\mathrm{t})\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(\mathrm{t})\rangle \quad \text{(1.2)}$$

Postulat V.

Soit $\mathcal{A}$ une grandeur physique d'un système quantique et **A** l'observable correspondante dont le spectre ne comporte que des valeurs propres non dégénérées a_n associées aux vecteurs propres orthonormés $|u_n\rangle$. Lorsqu'on mesure $\mathcal{A}$ sur le système dans l'état quelconque $|\Psi\rangle$ de norme unité, la probabilité $P(\mathrm{a}_n)$ d'obtenir comme résultat de mesure a_n est donnée par :

$$P(\mathrm{a}_n) = \left|\langle u_n|\Psi\rangle\right|^2 \quad \text{(1.3)}$$

Dans le cas d'un spectre comportant des valeurs propres a_n dégénérées g_n fois, il correspond à chaque valeur propre g_n vecteurs propres orthonormés $|u_n^k\rangle$, avec k =1, 2, …. g_n. Le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ peut être développé sur la base orthonormée $\{|u_n^k\rangle\}$ sous la forme :

$$|\Psi\rangle = \sum_n \sum_{k=1}^{g_n} c_n^k\,|u_n^k\rangle \quad \text{(1.4)}$$

Puisqu'on a g_n états $|u_n^k\rangle$ correspondant à la même valeur propre a_n, la probabilité d'obtenir a_n comme résultat d'une mesure doit être égale à la somme des probabilités relatives à chaque état $|u_n^k\rangle$, soit :

$$P(\mathrm{a}_n) = \sum_{k=1}^{g_n}\left|c_n^k\right|^2 \quad \text{(1.5)}$$

Postulat VI.

Soit A une grandeur physique d'un système et **A** l'observable correspondante ; soit a_n une valeur propre de **A** dégénérée g_n fois et associée aux vecteurs propres orthonormés $\left|u_n^k\right\rangle$. Lorsqu'on mesure **A** sur le système dans l'état $\left|\Psi\right\rangle$ de norme unité, la probabilité $P(\mathrm{a}_n)$ d'obtenir comme résultat de mesure a_n est donnée par :

$$P(\mathrm{a}_n)=\sum_{k=1}^{g_n}\left|\left\langle u_n^k \middle| \Psi\right\rangle\right|^2 \quad \text{... (1.6)}$$

La mécanique quantique ordinaire est formulée sur l'espace des coordonnées et des moments qui sont considéré comme des opérateurs hermétiques (x_i, p_j) suivants :

$$\begin{cases}\left[x_i, p_j\right]=i\hbar\delta_{ij}\\ \left[x_i, x_j\right]=0\\ \left[p_i, p_j\right]=0\end{cases} \quad \text{.. (1.7)}$$

Ou $\hbar=\frac{h}{2\pi}$ et δ_{ij} sont la constant de Planck réduit et le symbole ordinaire de Kronecker, respectivement, la structure présenté par (1.7) connue par les relations des commutations canonique (canonical commutation relations CCRs).

Le point fondamentale qui représente la déférence entre la mécanique classique et la mécanique quantique ordinaire est appelée relation d'incertitude d' Heisenberg [6,7] :

$$\begin{cases}\Delta x\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}\\ \Delta y\Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}\\ \Delta z\Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}\end{cases} \quad \text{.. (1.8)}$$

1.2.1- Représentations de l'énergie, l'impulsion et l'équation de Schrödinger :

En mécanique classique l'énergie d'une particule de masse m_0 soumise des forces produit par potentiel extérieurs $V(\vec{r},t)$ est donnée par :

$$E=\frac{\vec{P}^2}{2m_0}+V(\vec{r},t) \quad \text{.. (1.9)}$$

Les procédures de la quantification satisfait par les deux principes fondamentales concernant l'énergie E et l'impulsion p_i [7] :

$$\begin{cases} E \to i\hbar \dfrac{\partial}{\partial t} \\ p_i \to \dfrac{\hbar}{i} \dfrac{\partial}{\partial x^i} \end{cases} \quad \text{(1.10)}$$

L’équation de Schrödinger dans l’espace-temps ordinaire définie par :

$$\mathrm{H}\Psi(\vec{r},t) = E\Psi(\vec{r},t) \quad \text{(1.11)}$$

Si l'Hamiltonien du système physique ne dépond pas de temps, l'énergie totale E est conservée.

L'équation de Schrödinger, dans sa forme générale équation différentielles linéaire et homogène et une équation aux dérivées partielles du premier ordre par rapport de temps et de second ordre par rapport de coordonnées.

On applique les deux principes de quantification canonique présentée dans l’équation (1.11), on trouve directement :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m_0}\Delta + V(\vec{r},t)\right]\Psi(\vec{r},t) = i\hbar\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t} \quad \text{(1.12)}$$

Cette équation fondamentale basée sur les postulats présentés par (1.8) et Δ est l’opérateur Laplacien, en trois dimensions prendre l’expression suivant :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{(1.13)}$$

1.2.2-La fonction d'onde et la probabilité :

Les solutions de l'équation de Schrödinger d’un système quantique sont appelées les fonctions d'onde on peut associer à une particule matérielle, $\Psi(\vec{r},t)$ est connue par la fonction d’onde [8], cette fonction qui caractérise son « état » et contient toutes les informations qu’il est possible d’obtenir sur la particule. Cette fonction doit satisfaire les conditions suivantes :

- Elle doit être normalisée. Cela n’implique que la fonction d'onde en approche à zéro comme r approche à l'infinité c'est-à-dire :

$$\int \Psi^*(r)\Psi(r)d^3r = \int |\Psi(r)|^2 d^3r = 1 \quad \text{(1.14)}$$

- La fonction d'onde et sa dérivée doivent être continues dans tout l'espace.

Qui déterminer la probabilité de trouver d’une particule à l’instant t dans un volume d^3r entourant le point $\vec{r}$ [9,10] :

$$dP = \left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2 d^3r \quad \text{(1.15)}$$

Avec $\left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2$ est la densité de probabilité. Et

$$\int dP(\vec{r},t) = 1 \quad (1.16)$$

1.2.3-La valeur moyenne :

Une valeur très important caractérisée la mécanique quantique ordinaire, considérons un système quantique dans un état quelconque $|\Psi\rangle$. La valeur moyenne, notée $\langle A\rangle_\Psi$, d'une observable **A** est donnée par [5] :

$$\langle A\rangle_\Psi = \sum_n P(\mathrm{a}_n)\mathrm{a}_n \quad (1.17)$$

En reportant dans cette dernière relation l'expression de $P(\mathrm{a}_n)$ donnée par (1.6), on obtient :

$$\langle A\rangle_\Psi = \sum_n \sum_{k=1}^{g_n} \left|\langle u_n^k | \Psi\rangle\right|^2 a_n = \sum_n \sum_{k=1}^{g_n} \langle\Psi | a_n u_n^k\rangle\langle u_n^k | \Psi\rangle \quad (1.18)$$

Puisqu'on a : $A|u_n^k\rangle = a_n|u_n^k\rangle$, la relation précédente devient :

$$\langle A\rangle_\Psi = \sum_n \sum_{k=1}^{g_n} \langle\Psi | A u_n^k\rangle\langle u_n^k | \Psi\rangle = \langle\Psi | A\left[\sum_n \sum_{k=1}^{g_n} |u_n^k\rangle\langle u_n^k|\right]|\Psi\rangle \quad (1.19)$$

Lorsqu'un système se trouve dans un état quelconque $|\Psi\rangle$ de norme unité, la valeur moyenne de l'observable **A** est donnée par :

$$\langle A\rangle_\Psi = \langle\Psi|A|\Psi\rangle \quad (1.20)$$

Cette expression étant une conséquence du postulat V. Prendre les deux expressions dans le cas à deux et trois dimensions, respectivement [5,9] :

$$\begin{cases} \langle a\rangle = \int \Psi(\vec{r},t)^* \hat{A}\Psi(\vec{r},t) d^2r \\ \langle a\rangle = \int \Psi(\vec{r},t)^* \hat{A}\Psi(\vec{r},t) d^3r \end{cases} \quad (1.21)$$

Avec l'élément de surface d^2r et l'élément de volume d^3r.

1.2.4- Le moment angulaire global $\vec{J}$:

En mécanique quantique le moment angulaire global $\vec{J}$ est la somme des deux moments angulaire $\vec{L}$ et le moment de spin $\vec{S}$, donc [6, 11, 12] :

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \quad (1.22)$$

Moments angulaire $\vec{L}$: Le moment cinétique est une grandeur importante, conservée dans le temps, classiquement, le moment cinétique d'une particule est défini par

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (-i\hbar\vec{\nabla}) \quad (1.23)$$

Où $\vec{r}$ est la position d'une particule, et $\vec{p}$ son impulsion, avec :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \quad (1.24)$$

Le moment de spin $\vec{S}$: Le spin est un moment intrinsèque porté par certaines particules, et notamment l'électron, auquel est généralement associé un moment magnétique.

On trouvées les composantes de opérateur $\vec{L}$ à travers l'équation (1.23)

$$\begin{cases} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = xp_z - zp_x \\ L_z = xp_y - yp_x \end{cases} \quad (1.25)$$

Les relations de commutations des trois composantes L_x, L_y, L_z donné par :

$$[L_i, L_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}L_k \quad (1.26)$$

Avec :$i, j\ et\ k\ \equiv \overline{1.3}$

Les composantes de l'opérateur correspondant $\vec{S}\ et\ \vec{J}$: satisfont aux lois de commutation (1.26)

Les valeurs propres des opérateurs $\vec{J}^2, \vec{L}^2$ et $\vec{S}^2$ en mécanique quantique $(c = \hbar = 1)$ **:**

$$\begin{cases} \vec{J}^2\Psi = j(j+1)\Psi \\ \vec{L}^2\Psi = \ell(\ell+1)\Psi \\ \vec{S}^2\Psi = s(s+1)\Psi \end{cases} \quad (1.27)$$

Avec $\left|l - \frac{1}{2}\right| \leq j \leq \left|l + \frac{1}{2}\right|$, ce qui permit de donnée deux valeurs possible :

$$\begin{cases} j = l + \frac{1}{2} \rightarrow \text{on dit que l'électron de spin up} \\ j = l - \frac{1}{2} \rightarrow \text{on dit que l'électron de spin down} \end{cases} \quad (1.28)$$

Ce qui permit de trouver le couplage spin-orbite $\vec{L}\vec{S}$ de la façon suivante **:**

$$\vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2] \quad (1.29)$$

On remplaçant l'équation (1.27) dans (1.29) ont trouvé :

$$\vec{L}\vec{S}\Psi = \frac{1}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]\Psi \quad \text{(1.30)}$$

1.3. La structure quantique de l'espace-phase non-commutative :

La mécanique quantique en espace noncommutative correspond à l'étude de Hamiltonien dépendant des opérateurs de position et d'impulsion qui satisfont une algèbre de commutateurs non canonique. La première apparition de la notion de l'espace-temps noncommutatif par H. Syndre en 1947, satisfait par nouveaux structure algébrique, connait par : les relations non commutatif canoniques des commutations suivant :

$$\begin{aligned} [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij} \\ [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= i\hbar\theta_{ij} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\bar{\theta}_{ij} \end{aligned} \quad \text{(1.31)}$$

On $\left(i, j = \overline{1, D}\right)$ et D la dimensions de l'espace. Les deux paramètres sont deux tenseurs antisymétriques.

$$\begin{cases} \theta^{ij} = -\theta^{ji} = \varepsilon^{ij}\theta \\ \bar{\theta}^{ij} = -\bar{\theta}^{ji} = \varepsilon^{ij}\bar{\theta} \end{cases} \quad \text{(1.32)}$$

Induits par la noncommutativité (position-position) et (impulsion-impulsion), respectivement et $(\theta, \bar{\theta})$ deux paramètres infinitésimale [13]. Pour l'espace-phase a trois dimensions $N=3$, les indices prendre les valeurs$\left(i, j = \overline{1,3}\right)$, dans ce cas particulière, [14] les règles de commutations non canonique dans système d'unité naturelle ($c=\hbar=1$) devient :

$$\begin{cases} [\hat{x}_1, \hat{p}_2] = [\hat{x}_1, \hat{p}_3] = [\hat{x}_2, \hat{p}_3] = 0 \\ [\hat{x}_2, \hat{p}_1] = [\hat{x}_3, \hat{p}_1] = [\hat{x}_3, \hat{p}_2] = 0 \\ [\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta_{12} \\ [\hat{x}_1, \hat{x}_3] = i\theta_{13} \\ [\hat{x}_2, \hat{x}_3] = i\theta_{23} \end{cases} \quad \text{(1.33)}$$

Et

$$\begin{cases} [\hat{x}_1, \hat{p}_1] = [\hat{x}_2, \hat{p}_2] = [\hat{x}_3, \hat{p}_3] = i \\ [\hat{p}_1, \hat{p}_2] = i\bar{\theta}_{12} \\ [\hat{p}_1, \hat{p}_3] = i\bar{\theta}_{13} \\ [\hat{p}_2, \hat{p}_3] = i\bar{\theta}_{23} \end{cases} \quad \text{(1.34)}$$

1.4-Le produit star :

Le formalisme du produit star initie pour Harman Weyl et Wigner pour permettre une description de la mécanique quantique en termes d'espace phases**.** Le but est trouver un produit (noté produit star *) pour des fonctions (ordinaires) définies sur un espace de Minkowski qui permet au symbole de Weyl [15].

1.4.1- La quantification de Weyl :

La quantification de Weyl est une technique utilisée pour décrire la mécanique quantique à partir de l'espace de phase de la mécanique classique, c'est une prescription qui nous permet d'associer un opérateur quantique à une fonction classique qui dépend des variables de l'espace de phase. Soit f(x) une fonction quelconque définie sur l'espace phase à D dimensions, pour chaque fonction f(x) on note $\tilde{f}$(k) transformation de Fourier :

$$\tilde{f}(k) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D x e^{ikx} f(x) \quad (1.35)$$

Remarque que si $f(x)$est une fonction réelle alors :

$$\tilde{f}^*(k) = \tilde{f}(-k) \quad (1.36)$$

La quantification de Weyl basé sur le lien entre l'algèbre des fonctions$f(x)$ définies sur R^D et l'algèbre des opérateurs, on définit le symbole de Weyl de fonction f , g par :

$$W(f) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D k e^{ik_m \hat{x}_m} \tilde{f}\,(k) \quad (1.37)$$

Et

$$W(g) = (2\pi)^{\frac{-D}{2}} \int d^D l e^{il_n \hat{x}_n} \tilde{g}\,(l) \quad (1.38)$$

Avec $m, n = \overline{1.D}$

Si $f(x)$ fonction réelle alors l'opérateur de Weyl est hermitien

$$W^+(f) = W(f) \quad (1.39)$$

Le produit de deux opérateurs de Weyl de deux fonctions soit égal à l'opérateur de Weyl associé au produit star de deux fonctions :

$$W(f).W(g) = W(f * g) \quad (1.40)$$

L'information sur la noncommutativité de l'espace -phase est codée dans le produit star.

$$W(f).W(g) = (2\pi)^{-D} \int d^D k d^D l e^{ik_i \hat{x}^i} e^{il_j \hat{x}^j} \tilde{f}\,(k) \tilde{g}(l) \quad (1.41)$$

En utilisant la formule de Campbell-Baker-Hausdorff **:**

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]} \quad (1.42)$$

Valable pour les opérateurs A et B talque **:**

$$\big[A, [A, B]\big] = \big[B, [A, B]\big] = 0 \quad (1.43)$$

Donc :

$$W(f).W(g) = (2\pi)^{-D}\int d^D k d^D l e^{i(k_i+l_j)\hat{x}^i - \frac{i}{2}k_i l_j \theta^{ij}}\tilde{f}(k)\tilde{g}(l)$$

$$= w(f * g) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.44)$$

Et (f*g) c'est la fonction de $Moyal - Weyl$:

$$W(f * g) = W\left[(2\pi)^{-D}\int d^D k d^D l[e^{\frac{i\theta^{ij}}{2}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}} e^{ik_i\hat{x}^i + il_j y^j}]\tilde{f}(k)\tilde{g}(l)\right]$$

$$= W\left[e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}} f(x)g(y)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.45)$$

Donc :

$$(f * g) = \left[e^{\frac{i}{2}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}} f(x)g(y)\right]|_{Y\to X} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.46)$$

Alors [16] :

$$(f * g)(\mathrm{x}, \mathrm{p}) = (fg)(x,p) + \frac{i}{2}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i} f(x,p)\frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial}{\partial p^j} g(x,p) + O(\theta^2) +$$

$$\frac{i}{2}\bar{\theta}^{ij}\frac{\partial}{\partial p^i} f(x,p)\frac{\partial}{\partial p^j} g(x,p) + 0(\bar{\theta}^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.47)$$

$\big(f(x,p) * g(x,p)\big)$Représenté le nouveaux produit en mécanique quantique non commutative.

Notations :

La quantité $e^{\theta^{ij}k_i l_j}$est appelée le facteur de la phase non commutative. Une autre écriture du produit star est la suivante [17] :

$$(f * g)(x) = f(x)e^{\frac{i}{2}\overleftarrow{\partial_i}\theta^{ij}\overrightarrow{\partial_j}} g(x) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.48)$$

1.4.2-Propriétés du produit star :

Le produit star vérifie les déférentes propriétés suivant **:**

1-Lorsque θ =0 on trouve :

$$f(x,p) * g(x,p) = g(x,p).f(x,p) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.49)$$

On retrouve donc le cas commutatif

2- le produit star entre exponentiels :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{ikx}} * \mathrm{e}^{\mathrm{iqx}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i(k+q)x} - \frac{\mathrm{i}}{2}\theta^{ij}k_i q_j} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1.50)$$

En utilisant la formule de Baker-Campbell – Hausdorff

3- Non commutatif :

$$f(x,p)*g(x,p) \neq g(x,p)*f(x,p) \quad (1.51)$$

Par conter [18]

$$\begin{cases} f*g = g*f \downharpoonright_{\theta\to-\theta} \\ (f*g*h)\downharpoonright_{\theta} = (\mathrm{h}*g*f)\downharpoonright_{-\theta} \end{cases} \quad (1.52)$$

4-Associatif :

$$[f(x,p)*g(x,p)]*h(x,p) = f(x,p)*[g(x,p)*h(x,p)] \quad (1.53)$$

5-La relation du complexe conjugué [19]

$$[(f(x,p)*g(x,p)]^* = g(x,p)^* * f(x,p)^* \quad (1.54)$$

6-La relation d'intégrale :

$$\int d^D x(f*g)(x,p) = \int d^D\, x(g*f)(x,p) = \int d^D x f(x,p) g(x,p) \quad (1.55)$$

7-Permutation cyclique :

$$\int d^D x(f*g*h)(x,p) = \int d^D\,(h*f*g) = \int d^D\, x(f*h*g) \quad (1.56)$$

8-Satisfait la règle de Leibniz :

$$\partial_\mu(f*g) = \partial_\mu f*g + f*\partial_\mu g \quad (1.57)$$

Remarque :

Si on veut travailler avec un espace - phase non commutative (pour coder la noncommutativité de l'espace phase) ils existent deux manières différentes :

• Utiliser un produit ordinaire avec des opérateurs de Weyl.

• Déformer le produit ordinaire en un produit star et utiliser des fonctions ordinaires définies sur un espace - phase commutative.

1.5- La Méthode de Boopp's Shift :

Pour écrire l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase noncommutative, on applique les étapes suivant [13, 20] :

1-On remplace la fonction d'onde ordinaire $\Psi(\vec{r},t)$ par nouveaux fonction d'onde $\hat{\Psi}(\vec{\hat{r}},t)$.

2- On remplace l'operateur d'Hamiltonien ordinaire $H(p_i,x_i)$ par nouveaux opérateur $\hat{H}(\hat{\mathrm{p}}_i,\hat{\mathrm{x}}_i)$.

3- On remplace l'énergie ordinaire E par nouveaux valeur E_{nc}.

4-On remplace le produit ordinaire par le produit star.

Alors l'équation de Schrödinger dans l'espace-phase non-commutative

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = E_{nc}\,\hat{\Psi}(\vec{r}, t) \qquad (1.58)$$

La fonction d'onde $\Psi(\vec{r}, t)$ est peut être écrié

$$\hat{\Psi}(\vec{r}, t) = \hat{\Psi}(\vec{r}) f\,(t) \qquad (1.59)$$

On remplaçant l'équation (1.59) dans (1.58) :

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \hat{\Psi}(\vec{r}) = E_{nc}\hat{\Psi}(\vec{r}) \qquad (1.60)$$

La méthode Boopp's Shift permit de traité l'équation de Schrödinger déformée (1.60) comme une équation ordinaire à condition d'appliquée les deux translations :

$$H(\hat{p}, \hat{x})\Psi(\vec{r}) = E_{nc}\Psi(\vec{r}) \qquad (1.61)$$

Avec l'operateur de Hamiltonien $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$ peut être écrié en trois variétés [13, 21] :

1- pour_NC-ND-RSP

Non **C**ommutative-**N D**imensions-**R**eal **S**pace **P**hase

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2} x_j\,, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \qquad (1.62)$$

2-pour_NC-ND-RS

Non **C**ommutative-**N D**imensions-**R**eal **S**pace

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \qquad (1.63)$$

3- pour_NC-ND-RP

Non **C**ommutative-**N D**imensions-**R**eal **P**hase

$$H(\hat{p}_i, \hat{x}_i) \equiv H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2} x_j\,, \hat{x}_i = x_i\right) \qquad (1.64)$$

C'est-à-dire, les variétés (1.62), (1.63) et (1.64) correspondent :

$$\begin{cases} \begin{cases} p_i \to \hat{p}_\mathrm{i} = p_i - \frac{\overline{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2} x_j \\ x_i \to \hat{x}_\mathrm{i} = x_i - \frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2} p_j \end{cases} \\ \begin{cases} p_i \to \hat{p}_\mathrm{i} = p_i \\ x_i \to \hat{x}_\mathrm{i} = x_i - \frac{\theta^{\mathrm{ij}}}{2} p_j \end{cases} \\ \begin{cases} p_i \to \hat{p}_\mathrm{i} = p_i - \frac{\overline{\theta}^{\mathrm{ij}}}{2} x_j \\ x_i \to \hat{x}_\mathrm{i} = x_i \end{cases} \end{cases} \qquad (1.65)$$

Cette étude dans l'espace-phase noncommutative à trois dimensions pour l'équation (1.62) Avec la carré de $\hat{r}^2$ et $\hat{p}^2$ sont donné par :

$$\begin{cases} \hat{r}^2 = \sum_{i=1}^{3} \hat{x}_i^{\,2} \\ \hat{p}^2 = \sum_{i=1}^{3} \hat{p}_i^{\,2} \end{cases} \qquad (1.66)$$

La méthode de Boopp's Shift est considéré comme une conséquence direct du produit star elle permit de traité l'équation de Schrödinger déformé comme une équation ordinaire, de la façon suivant :

$$\left(\frac{\vec{\hat{p}}^2}{2m_0} + \hat{V}\left(\vec{\hat{r}}\right) \right) * \hat{\Psi}\left(\vec{\hat{r}}\right) = E_{nc} \hat{\Psi}\left(\vec{\hat{r}}\right) \to \left(\frac{\vec{p}^2}{2m_0} + V(\vec{r}) \right) \Psi(\vec{r}) == E_{nc} \Psi(\vec{r}) \qquad (1.67)$$

On basé sur les travaux scientifique, pour écrier les deux opérateurs $\hat{r}^2$ et $\hat{p}^2$ dans l'espace-phase noncommutative à trois dimensions [13, 14, 16] :

$$\begin{cases} \hat{r}^2 = r^2 - \vec{L}\vec{\Theta} \\ \frac{\hat{p}^2}{2m_0} = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{\vec{L}\vec{\overline{\theta}}}{2m_0} \end{cases} \qquad (1.68)$$

Avec les notations :

$$\begin{cases} L\Theta = L_x \Theta_{23} + L_y \Theta_{13} + L_z \Theta_{12} \\ \vec{L}\vec{\overline{\theta}} = L_x \overline{\theta}_{23} + L_y \overline{\theta}_{13} + L_z \overline{\theta}_{12} \end{cases} \qquad (1.69)$$

Avec $\Theta = \frac{\theta}{2}$

1.6-Application sur le potentiel gravitationnel plus exponentiel :

Ont utilisé le potentiel gravitationnel plus exponentiel de la forme [4] :

$$V(z) = mgz + \delta e^{-kz} \quad (1.70)$$

Pour étudier le mouvement d'une particule dans un champ gravitationnel et a obtenu l'énergie et la fonction de distribution de probabilité pour la position de la particule, ce potentiel composé en deux termes :

1- terme gravitationnelle → mgz

2- terme exponentiel→ δe^{-kz}

On définit les composantes de ce potentiel (z → coordonnée, k → déplacement, g → gravitationnelle accélération, m → la masse, δ →paramètre constante)

On applique la méthode de Boopp’s Shift sur ce potentiel,

$$V(r) = \beta r + V_0 e^{-\alpha r} \quad (1.71)$$

Avec β =mg, α =k, z= r, δ =V_0

On écrire aussi l'équation (1.71)

$$V(r) = \beta r + V_0(1 - \alpha r + \frac{\alpha^2}{2} r^2)$$

$$= V_0 + (\beta - \alpha V_0) r + \frac{\alpha^2}{2} V_0 r^2 \quad (1.72)$$

L’opérateur Hamiltonien $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$correspond, dans l’espace-phase noncommutative à trois dimensions :

$$H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2} x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + V(\hat{x}, t) \quad (1.73)$$

Avec :

$$V(\hat{r}) = V_0 + (\beta - \alpha V_0)\hat{r} + \frac{\alpha^2}{2} V_0 \hat{r}^2 \quad (1.74)$$

Et

$$\frac{\hat{p}^2}{2m_0} = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{\vec{L}\vec{\overline{\theta}}}{2m_0} \quad (1.75)$$

Les résultants de l’équation (1.74) permit de calculer les deux termes $(\beta - \alpha V_0)\hat{r}$ et $\alpha^2 V_0 \hat{r}^2$:

$$\begin{cases} (\beta - \alpha V_0)\hat{r} = (\beta - \alpha V_0) r + (\beta - \alpha V_0)\frac{\vec{L}\vec{\Theta}}{2r} \\ \frac{\alpha^2}{2} V_0 \hat{r}^2 = \frac{\alpha^2}{2} V_0 r^2 - \frac{\alpha^2}{2} V_0 \vec{L}\vec{\Theta} \end{cases} \quad (1.76)$$

Donc le potentiel $V(\hat{r})$ est :

$$V(\hat{r}) = V(r) + \left((\beta - \alpha V_0)\frac{1}{2r} - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\vec{L}\vec{\Theta} \qquad (1.77)$$

On remplaçant les équations (1.75) et (1.77) dans (1.73) permit d'obtenir donné $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$ de la façon suivant :

$$H\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2}x_j, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right) = \frac{p^2}{2m_0} + V(r) + \frac{\vec{L}\vec{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\vec{L}\vec{\Theta} \qquad (1.78)$$

L'opérateur $H(\hat{p}_i, \hat{x}_i)$ est la somme deux opérateurs $H(p_i, x_i)$ et $H_{pert}(p_i, x_i)$

$$\begin{cases} H(p_i, x_i) = \frac{p^2}{2m_0} + V(r) \\ H_{pert}(p_i, x_i) = \frac{\vec{L}\vec{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\vec{L}\vec{\Theta} \end{cases} \qquad (1.79)$$

Chapitre 2

Etude de l'équation de Schrödinger pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace ordinaire à trois dimensions

2.1- Introduction :

Il est bien connu que pour étudier un modèle quantique, dans les différents domaines de la physique atomique, nucléaire, moléculaire, nous avons besoin de résoudre l'équation non relativiste de Schrödinger par différents méthodes : la méthode de Nikiforov-Uvarov, mécanique quantique super-symétrique, calcule numérique, interaction asymptotique, l'approché de l'intégrale de chemin …etc.

Dans ce chapitre on va résumer les solutions de l'équation de Schrödinger pour un potentiel gravitationnel plus exponentiel à trois dimensions, et on déduit les fonctions d'ondes et les énergies correspondantes à l'état fondamentales et premier état excité en utiliseront méthode de Nikiforov-Uvarov (NU) ont basé sur la référence [4].

2.2- Etude de l'équation de Schrödinger pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace ordinaire à trois dimensions :

L'équation de Schrödinger a été proposée de façon inductive par Erwin Schrödinger 1925, et été publiée dans quatre articles en 1926 un peu après la mécanique des matrices de Heisenberg(1925) et s'est développée d'abord dans le but de décrire les petits objets (atomes) constitués d'une seule particule située dans un certain champ déforcé (l'électron au sein de l'atome d'hydrogène par exemple). L'objet central de la théorie de Schrödinger, nommée aussi mécanique ondulatoire, est une fonction $\Psi(r, t)$ à valeurs complexes, appelée fonction d'onde. L'équation de Schrödinger est une équation fondamentale de la mécanique quantique, elle s'agit d'une équation aux dérivées partielles qui décrit l'évolution au cours du temps de la fonction d'onde d'un système physique. Elle prend la forme suivante [22] :

$$H\psi(\vec{r},t) = E\psi(\vec{r},t) \qquad (2.1)$$

Ou E repèrent l'énergie total du system et H est l'opérateur Hamiltonien, qui donnée par :

$$H = \frac{\hbar^2}{2\mu}\Delta + V\,(\mathrm{r}) \quad \text{……………………………………..…………………………… (2.2)}$$

On note que la grandeur E est une valeur propre de l'Hamiltonien H. L'operateur Laplacien Δ s'écrit dans les coordonnées sphériques (r, θ, φ):

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \quad \text{……………………………………….……. (2.3)}$$

Et μ est la masse réduit du système physique étudie, composé par deux masses déférons m_1 et m_2:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{……………………………………………………………….………….. (2.4)}$$

Cette équation (2.1) décrit comment la fonction d'onde se transforme au cours du temps, donc l'équation de Schrödinger admit des solutions particulières sous forme :

$$\psi(\vec{r}, t) = e^{-i\frac{H}{\hbar}t}\psi(\vec{r}) \quad \text{………………………………………………………………...…. (2.5)}$$

Où $\psi(\vec{r})$ est la fonction d'onde qui satisfait l'équation de Schrödinger stationnaire. Donc l'équation de Schrödinger indépendante du temps permet de trouver des états stationnaires parmi tous les états possibles du système qui est en effet un cas particulier d'une équation générale dépendante du temps qui donne l'évolution de la fonction quel que soit l'état du système.

2.2.1- Représentation différentielle de moments angulaire :

Les trois composantes (L_x, L_y, L_z) de l'expression analytique du moment cinétique orbital $\vec{L}$:

$$\vec{L} = \begin{cases} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = zp_x - xp_z \\ L_z = xp_y - yp_x \end{cases} \quad \text{…………………………………………………..…………………………….. (2.6)}$$

On remplace les composantes (p_x, p_y et p_z) par ($\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}$ et $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}$), respectivement, pour trouver [6, 12] :

$$\begin{cases} L_x = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ L_y = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ L_z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{cases} \quad \text{.......................} (2.7)$$

Pour la transformation :

$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases} \xrightarrow{\text{la transformation inverse}} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = arct\left(\frac{y}{x}\right) \\ \theta = arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{cases} \quad \text{.......................} (2.8)$$

Les composantes L_x, L_y, L_z de $\vec{\mathrm{L}}$ en coordonnées sphérique (r, θ, φ)

$$\begin{cases} L_x = i\hbar\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{tg\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_y = -i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{tg\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ L_z = \frac{\hbar}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \end{cases} \quad \text{.......................} (2.9)$$

Qui forment l'opérateur $L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ lequel on peut considérer comme étant l'observable correspondant au carré L^2 du vecteur moment cinétique :

$$\mathrm{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \quad \text{.......................} (2.10)$$

Notons que les opérateurs H, L^2 et L_z , commutent entre eux et ils ont formé un ensemble commun des fonctions propres $\psi(r, \theta, \varphi)$:

$$[H, L^2] = [H, L_z] = 0 \quad \text{.......................} (2.11)$$

Ce qui donne L^2 en coordonnées sphériques :

$$L^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{(\sin\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right) \quad \text{.......................} (2.12)$$

La valeur propre d'opérateur $\hat{L}^2$:

$$\hat{L}^2\psi(r,\theta,\varphi) = \hbar^2 l(l+1)\psi(r,\theta,\varphi) \quad \text{.......................} (2.13)$$

Alors l'operateur Laplacien Δ s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2} \quad \text{...} (2.14)$$

Donc l'équation de Schrödinger devient :

$$\left\{\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] - V(r)\right\}\psi(r,\theta,\varphi) = E\psi(r,\theta,\varphi) \quad \text{.....................} (2.15)$$

Ou bien :

$$\left\{\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}\right] + V(r)\right\}\psi(r,\theta,\varphi) = E\psi(r,\theta,\varphi) \quad \text{.................................} (2.16)$$

On peut maintenant écrire les solutions sous la forme d'un produit d'une fonction radiale $R_{n,l}(r)$ et d'une fonction angulaire $Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)$:

$$\psi_{n,l,m_l}(r,\theta,\varphi) = R_{n,l}(r)Y_l^{m_l}(\theta,\varphi) \quad \text{...} (2.17)$$

$$\begin{cases} R_{n,l}(r) : \text{Fonction radiale dépend seulement de rayon} \\ Y_l^{m_l}(\theta,\varphi) : \text{Fonction angulaire appelée aussi harmonique sphérique dépend de } \theta \text{ et } \varphi \end{cases}$$

Nous pouvons toujours supposer que les fonctions $R_{n,l}(r)$ et .$Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)$ sont normalisées séparément :

$$\begin{cases} \iiint |\psi(r,\theta,\varphi)|^2 r^2 \sin(\theta) dr\, d\theta\, d\varphi = 1 \\ \qquad \begin{cases} \int_0^\infty |R(r)|^2 r^2\, dr = 1 \\ \int_0^{2\pi}\int_0^\pi \left|Y_l^{m_l}\right|^2(\theta,\varphi)\sin(\theta) d\theta\, d\varphi = 1 \end{cases} \end{cases} \quad \text{...} (2.18)$$

On remplace (2.17) dans l'équation (2.16) :

$$\left\{\frac{-\hbar^2}{2\mu}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{L}^2}{\hbar^2 r^2}\right] + V(r)\right\}R_{n,l}(r)Y_l^{m_l}(\theta,\varphi) = ER_{n,l}(r)Y_l^{m_l}(\theta,\varphi) \quad \text{..................} (2.19)$$

À travers l'équation (2.19) on va trouver [4] :

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-V(r)-\frac{\lambda\hbar^2}{2\mu r^2}\right]\right\}U_{n,l}(r)=0 \quad (2.20)$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\lambda-\frac{m^2}{sin^2(\theta)}\right]\right\}\Theta_{m,l}(\theta)=0 \quad (2.21)$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+m^2\right\}\Phi_m(\varphi)=0 \quad (2.22)$$

Avec $U_{n,l}(r)=r\,R_{n,l}(r)$ et λ=l (l+1) et m^2sont les constantes de séparation.

$Y_l^{m_l}(\theta,\varphi)=\Theta_{m,l}(\theta)\Phi_m(\varphi)$ Est la solution des équations (2.21) et (2.22) qui sont les fonctions harmoniques sphériques bien connues. On remplaçant le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'équation radiale (2.20) :

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E-V_0-(\beta-\alpha V_0)r-\alpha^2V_0r^2-\frac{l(l+1)}{2\mu r^2}\right]\right\}U_{n,l}(r)=0 \quad (2.23)$$

Pour l=0, l'équation (2.23) devient :

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}(E-V_0)-\frac{2\mu}{\hbar^2}(\beta-\alpha V_0)r-\frac{2\mu}{\hbar^2}\alpha^2V_0r^2\right\}U_{n,l}(r)=0 \quad (2.24)$$

Pour trouver les solutions de l'équation (2.24), exister plusieurs méthodes pour résolution cette équation, Comme méthode de Nikiforov-Uvarov (NU).

2.3- méthode de Nikiforov-Uvarov (UV) :

La méthode de Nikiforov-Uvarov (NU) est basée sur la résolution d'équation différentielle de (2^{eme}) ordre de type hypergéométrique, en utilisant la fonction spécial orthogonal qui conduit à une solution exacte de l'équation de Schrödinger pour certains types de potentiel. Pour un potentiel donné, l'équation de Schrödinger est transformée à une équation différentielle du (2^{eme}) ordre avec des transformations appropriés des coordonnés (r → s) et elles peuvent être résolues pour trouver une solution exacte ou particulière [4, 23].

L'équation est donnée par la formule suivante :

$$\psi''(s)+\frac{\bar{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s)+\frac{\bar{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s)=0 \quad (2.25)$$

Ou $\sigma(s)$ et $\bar{\sigma}(s)$sont des polynomes au plus de dégrée 2, $\bar{\tau}(s)$est un polynôme de dégrée 1. Est $\psi(s)$une fonction de type hypergéométrique.

L'équation (2.25) peut être résolue à l'aide de la méthode (NU). En général, la méthode (NU) est donnée par l'équation généralisée du type hypergéométrique :

$$\psi''(s)+\frac{c_1-sc_2}{s(1-sc_3)}\psi'(s)+\frac{1}{s^2(1-sc_3)^2}[-\xi_1 s^2+\xi_2 s-\xi_3]\psi(s)=0 \quad (2.26)$$

De l'équation (2.26), les fonctions propres et les valeurs propres correspondantes de l'équation peuvent être obtenues comme suit :

$$\psi(s)=N_n s^{c_{12}}(1-sc_3)^{-c_{12}-\frac{c_{13}}{c_3}}P_n^{\left(c_{10}-1,\frac{c_{11}}{c_3}-c_{10}-1\right)}(1-c_3 s) \quad (2.27)$$

$$(c_2-c_3)n+c_3n^2-(2n+1)c_5+(2n+1)\left(\sqrt{c_9}+c_3\sqrt{c_8}\right)+c_7+2c_3c_8+2\sqrt{c_8c_9}=0 \quad (2.28)$$

Avec :

$$\begin{cases} c_4=\frac{1}{2}(1-c_1) \quad c_5=\frac{1}{2}(c_2-2c_3) \\ c_6=c_5^2+\xi_1 \quad c_7=2c_4c_5-\xi_2 \\ c_8=c_4^2+\xi_3 \quad c_9=c_3c_7+c_2^2c_8+c_6 \\ c_{10}=c_1+2c_4+2\sqrt{c_8} \quad c_{11}=c_2-2c_5+2(\sqrt{c_9}+c_3\sqrt{c_8}) \\ c_{12}=c_4+\sqrt{c_8} \quad c_{13}=c_5-(\sqrt{c_9}+c_3\sqrt{c_8}) \end{cases} \quad (2.29)$$

N_n Est la constante de normalisation et $P_n^{(a,b)}$ sont les polynômes Jacobi. En comparant l'équation (2.24) à l'équation (2.26), on obtient les paramètres suivants :

$$\begin{cases} c_1=c_2=c_3=0 \\ \xi_1=\frac{2\mu\alpha^2V_0}{\hbar^2} \\ \xi_2=\frac{2\mu(\beta-\alpha V_0)}{\hbar^2} \\ \xi_3=\frac{2\mu(E-V_0)}{\hbar^2} \end{cases} \quad (2.30)$$

D'autres coefficients sont déterminés comme :

$$\begin{cases} c_4=\frac{1}{2} \quad c_5=0 \\ c_6=\xi_1 \quad c_7=-\xi_2 \\ c_8=\frac{1}{4}+\xi_3 \quad c_9=\xi_1 \\ c_{10}=1+2\sqrt{\frac{1}{4}+\xi_3} \quad c_{11}=2\sqrt{\xi_1} \\ c_{12}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\xi_3} \quad c_{13}=-\sqrt{\xi_1} \end{cases} \quad (2.31)$$

En utilisant maintenant les équations (2.30), (2.31), (2.27) et (2.28), nous obtenons le spectre énergétique du potentiel gravitationnel plus exponentiel.

Alors l'énergie et la fonction d'onde obtiennent par la méthode Nikiforov-Uvarov [4] :

$$E_n = \frac{\hbar^4}{4\mu^2\alpha^2 V_0}\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{2\mu\alpha^2 V_0}{\hbar^2}} + \left[\frac{\mu(\beta-\alpha V_0)}{\hbar^2}\right]^2 - \frac{\mu\alpha^2 V_0}{2\hbar^2}\right\} + V_0 \qquad (2.32)$$

On trouvé l'équation (2.27) dans le cas $\boldsymbol{c_3 = 0}$:

$$\lim_{c_3\to 0} P_n^{\left(c_{10}-1,\frac{c_{11}}{c_3}-c_{10}-1\right)}(1-c_3 s) = \mathrm{L}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{c}_{10}-1}(\mathrm{c}_{11} s) \qquad (2.33)$$

Et

$$\lim_{c_3\to 0}(1-sc_3)^{-c_{12}-\frac{c_{13}}{c_3}} = \mathbf{e}^{\mathbf{c_{13}s}} \qquad (2.34)$$

Donc la solution de l'équation (2.24) comme suite :

$$R_{nl}(s) = N_n s^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} e^{-\sqrt{\xi_1}s} L_n^{\epsilon}(2\sqrt{\xi_1}s) \qquad (2.35)$$

Avec $\epsilon = 2\sqrt{\frac{1}{4}+\xi_3}$ et $L_n^{\epsilon}\left(2\sqrt{\xi_1}s\right)$ est le polynôme Laguerre associe.

2.3.2-La fonction d'onde et l'énergie pour l'étal fondamental :

La fonction d'onde $\psi_0(\vec{r})$ et l'énergie E_0 correspondant l'état fondamental est résumé par, respectivement :

$$\psi_0(\vec{r}) = N_0 r^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} e^{-\sqrt{\xi_1}r}\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad (2.36)$$

Et

$$E_0 = \frac{\hbar^4}{4\mu^2\alpha^2 V_0}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\mu\alpha^2 V_0}{\hbar^2}} + \left[\frac{\mu(\beta-\alpha V_0)}{\hbar^2}\right]^2 - \frac{\mu\alpha^2 V_0}{2\hbar^2}\right\} + V_0 \qquad (2.37)$$

2.3.3-La fonction d'onde et l'énergie pour le premier état excité :

La fonction d'onde$\psi_1(\vec{r})$et l'énergie E_1correspondant premier état excité est résumé par :

$$\psi_1(\vec{r}) = N_1 r^{\frac{1}{2}+\frac{\epsilon}{2}} e^{-\sqrt{\xi_1}r}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\left(-2\sqrt{\xi_1}\mathrm{r}+\epsilon+1\right) \qquad (2.38)$$

Et

$$E_1 = \frac{\hbar^4}{4\mu^2\alpha^2 V_0}\left\{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2\mu\alpha^2 V_0}{\hbar^2}+\left[\frac{\mu(\beta-\alpha V_0)}{\hbar^2}\right]^2}-\frac{\mu\alpha^2 V_0}{2\hbar^2}\right\}+V_0 \qquad (2.39)$$

Ou $\epsilon = 2\sqrt{\frac{1}{4}+\xi_3}$ et $Y_0^0(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

Chapitre 3

L'étude de l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace-phase noncommutatif à trois Dimensions

3.1-Introduction :

Dans ce chapitre, on a étudiée l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions, on applique la méthode de Bopp's Shift au lieu de résoudre l'équation de Schrödinger modifiée directement en utilisant le produit star et le théorème de perturbation pour trouver les corrections des énergies correspondant à l'états fondamentale et première état excité.

3.2-L'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace-phase noncommutatif (NC_ 3D-RSP) :

L'équation de Schrödinger modifiée dans l'espace-phase noncommutatif écrite comme suit [24]

$$\hat{H}(\hat{p}_i, \hat{x}_i) * \hat{\Psi}(\vec{r}, t) = E_{nc}\, \hat{\Psi}(\vec{r}, t) \quad (3.1)$$

Avec :

$\widehat{H}(\hat{x}, \hat{p})$: L'Hamiltonien d'un système dans un espace-phase noncommutatif

$\widehat{\Psi}(\vec{\hat{x}}, t)$: La fonction d'onde dans un espace-phase noncommutatif

E_{nc} : L'énergie associée dans un espace-phase noncommutatif

La plus importante dans cette équation (3-1) est le nouveau produit entre l'opérateur Hamiltonien $\widehat{H}(\hat{x}, \hat{p})$ et la fonction d'onde $\widehat{\Psi}(\vec{\hat{x}}, t)$, ce qui est connue produit star (*).

3.2.1- L'opérateur d' Hamiltonien pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace-phase non commutatif :

La mécanique quantique en espace noncommutatif correspond à l'étude de Hamiltonien dépendant des opérateurs de position et d'impulsion qui satisfont une algèbre de commutateurs non canonique. L'Hamiltonien d'un système évoluant dans un espace noncommutatif est obtenu en remplaçant dans l'expression du Hamiltonien ordinaire les opérateurs canoniques (x, p) par leurs équivalents noncommutative ($\hat{x}$, $\hat{p}$).

Dans ce cas nous avons établi la forme générale du l'Hamiltonien pour un system de masse m_0 et impulsion p en mouvement dans un potentiel gravitationnel plus exponentiel, est indépendant du temps, donc l'Hamiltonien dans un espace-phase noncommutative (NC_3D-RSP) s'écrit sous la forme :

$$\mathrm{H}_{nc-GPE}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j \,, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) = \frac{\hat{p}^2}{2m_0} + V(\hat{r}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.2)$$

Avec $\frac{\hat{p}^2}{2m_0}$ est l'énergie cinétique d'un system dans l'espace-phase noncommutatif, μ est la masse réduit et $V(\hat{r})$ représente le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace-phase noncommutatif, ce potentiel traité dans le cadre de l'équation de Schrödinger modifiée en utilisant la méthode de Bopp's Shift, présenté par l'équation (1.61) dans le chapitre 1, au lieu de résoudre directement l'équation de Schrödinger modifiée par le produit star (1.60). Donc L'expression explicite de l'équation de Schrödinger devient maintenant sous la forme suivant [21] :

$$H_{nc-GPE}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j \,, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) \Psi(\vec{r}) = E_{nc-GPE} \Psi(\vec{r}) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3)$$

L'opérateur de Hamiltonien $H_{nc-GPE}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j \,, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right)$ **n**on **c**ommutatif pour potentiel **g**ravitationnel **p**lus **e**xponentiel dans l'espace-phase à trois dimensions peut être écrit sous la forme suivant :

$$H_{nc-GPE}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2} x_j \,, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2} p_j\right) = \frac{p^2}{2m_0} + V(r) + \frac{\vec{L}\vec{\bar{\theta}}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2} V_0\right) \vec{L}\vec{\Theta} \ldots\ldots \quad (3.4)$$

On peut diviser l'équation (3.4) en deux termes principaux :

Le premier terme est L'Hamiltonien $H_{GPE}(\hat{x}_i = x_i, \hat{p}_j = p_i)$ dans l'espace ordinaire commutatif correspond le potentiel$V(r) = V_0 + (\beta - \alpha V_0) r + \frac{\alpha^2}{2} V_0 r^2$.

$$H_{GPE}(\hat{x}_i = x_i, \hat{p}_j = p_i) = \frac{p^2}{2\mu} + V_0 + (\beta - \alpha V_0)r + \alpha^2 V_0 r^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3.5)$$

Le deuxième terme est L'Hamiltonien noté par $H_{pert-GPE}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2}x_j\,, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right)$, est représenté dans l'espace-phase noncommutatif :

$$H_{pert-GPE}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2}x_j\,, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right) = \frac{\vec{L}\vec{\bar{\theta}}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\vec{L}\vec{\Theta} \ldots (3.6)$$

D'après l'équation (1.68), on rappeler par les deux-couplages $\mathbf{L}\Theta$ et $\vec{\mathbf{L}}\vec{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$, qui sont donnée par :

$$\begin{cases} L\Theta = L_x\Theta_{23} + L_y\Theta_{13} + L_z\Theta_{12} \\ \vec{L}\vec{\bar{\theta}} = L_x\bar{\theta}_{23} + L_y\bar{\theta}_{13} + L_z\bar{\theta}_{12} \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.7)$$

Et le paramétrer $\Theta \equiv \frac{\boldsymbol{\theta}}{\mathbf{2}}$, et les composantes L_x, L_y et L_z :

$$\begin{cases} L_x = yp_z - zp_y \\ L_y = \mathrm{zp}_x - \mathrm{xp}_z \\ L_z = xp_y - yp_x \end{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.8)$$

3.2.2- L'opérateur Spin-Orbite d'Hamiltonien pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace-phase noncommutatif :

D'après, les formes mathématiques du 2-couplages $\mathbf{L}\Theta$ et $\vec{\mathbf{L}}\vec{\bar{\boldsymbol{\theta}}}$, observé dans l'équation (3.7), elle est possible physiquement de remplacé $\vec{L}\vec{\Theta}$ et $\vec{L}\vec{\bar{\theta}}$ par $\alpha\Theta\vec{S}\vec{L}$ et $\alpha\bar{\theta}\vec{S}\vec{L}$ [13, 14, 23] :

$$\begin{array}{l} \mathbf{L}\Theta \rightarrow \alpha\Theta\vec{S}\vec{L} \\ \vec{\mathbf{L}}\vec{\bar{\boldsymbol{\theta}}} \rightarrow \alpha\bar{\theta}\vec{S}\vec{L} \end{array} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.9)$$

Avec $\vec{S}$ et α sont le spin de système et constante ordinaire de proportionnalité, respectivement. Ce qui permit de réécrire l'équation (3.6) comme suivant :

$$H_{pert-GPE}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\bar{\theta}^{ij}}{2}x_j\,, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right) = \alpha\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\Theta\right\}\vec{L}\vec{S} \ldots (3.10)$$

Avec :$\vec{L}\vec{S}$ -Le couplage spin-orbite, comme nous l'avons vu dans la première chapitre de la façon suivante :

$$\vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{J}^2 - \vec{L}^2 - \vec{S}^2] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.11)$$

En mécanique quantique ordinaire, les ensembles d'opérateurs (A, B, C …..) qui forment un ensemble complet d'observables complet sont commutent (ECOC). En applique ce règle sur les ensembles d'opérateurs$\left(\vec{J}^2, \vec{L}^2, \vec{S}^2\ et\ \vec{J}_z\right)$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \left[\vec{J}^2, \vec{L}^2\right] = 0 \\ \left[\vec{J}^2, \vec{S}^2\right] = 0 \\ \left[\vec{J}^2, \vec{J}_z\right] = 0 \end{cases} \qquad (3.12)$$

Et les valeurs propres correspondent, dans le système$(c = \hbar = 1)$, comme l'équation (1.14) alors :

$$\begin{cases} \vec{J}^2\Psi = j(j+1)\Psi \\ \vec{L}^2\Psi = \ell(\ell+1)\Psi \\ \vec{S}^2\Psi = s(s+1)\Psi \end{cases} \qquad (3.13)$$

Avec :

$$\vec{J}_z\Psi = m\Psi \qquad (3.14)$$

Avec $\vec{J}$ est le moment angulaire global, comme l'équation (1.9). Donc les valeurs propres de couplage spin-orbite$\vec{L}\vec{S}$ comme suite :

$$\vec{L}\vec{S}\Psi = \frac{1}{2}[j(j+1) - \ell(\ell+1) - s(s+1)]\Psi \qquad (3.15)$$

Avec$\left|l - \frac{1}{2}\right| \le j \le \left|l + \frac{1}{2}\right|$, pour($S = \frac{1}{2}$), ce qui permit de donnée deux valeurs possible :

$$\begin{cases} j = l + S \\ j = l - S \end{cases} \qquad (3.16)$$

Pour les deux valeurs extrémale du moment cinétique totale, on peut écrierai :

$$\vec{L}\vec{S}\,\psi = \begin{cases} \frac{1}{2}\{(l+s)(l+s+1) - l(l+1) - s(s+1)\}\psi = p_+\psi \quad si\ j = |l+s| \\ \frac{1}{2}\{(l-s)(l-s+1) - l(l+1) - s(s+1)\}\psi = p_-\psi \quad si\ j = |l-s| \end{cases} \qquad (3.17)$$

Ou p_+ et p_-sont donnée par $\frac{1}{2}\{(\mathrm{l}+\mathrm{s})(\mathrm{l}+\mathrm{s}+1) - \mathrm{l}(\mathrm{l}+1) - \mathrm{s}(\mathrm{s}+1)\}$ et

$\frac{1}{2}\{(\mathrm{l}-\mathrm{s})(\mathrm{l}-\mathrm{s}+1) - \mathrm{l}(\mathrm{l}+1) - \mathrm{s}(\mathrm{s}+1)\}$, respectivement.

3.3- Le spectre exact produit par l'effet de Spin-orbite pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel :

Nous avons observé que le Hamiltonien modifié $H_{pert-GPE}(r,\bar{\theta},\Theta)$ est proportionnel au deux paramètres infinitésimale $(\bar{\theta},\Theta)$ et cela signifie que $H_{pert-GPE}(r,\bar{\theta},\Theta)$ prend une valeur très petite par rapport à la partie principale (Hamiltonien normale) $H_{GPE}(\hat{x}_i = x_i, \hat{p}_j = p_i)$, Donc on peut appliquer le théorème de perturbation pour obtenir les modifications exacte d'énergie $E_{nc-pert}$ au premier ordre en$(\bar{\theta},\Theta)$. L'énergie totale dans l'espace-phase noncommutatif E_{nc-GPE} est la somme de l'énergie correspondant à l'espace ordinaire E et les corrections $E_{nc-pert}$:

$$E_{nc-GPE} = E + E_{nc-pert} \quad (3.18)$$

Le théorème de perturbation permet d'obtenir les corrections au premier ordre de la façon suivante :

$$E_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) = \langle\psi(\vec{r})|\, H_{pert-GPE}(r,\bar{\theta},\Theta)|\psi(\vec{r})\rangle \quad (3.19)$$

On peut récrire l'équation (3-19) sous la forme :

$$E_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) = \int \psi_{n,l,m}{}^{*}(\vec{r})\, H_{pert-GPE}(r,\bar{\theta},\Theta)\, \psi_{n,l,m}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (3.20)$$

Ou d$\vec{r}$ représenté l'élément de volume en coordonnées sphériques(r,θ,φ), qui est donnée par :

$$d\vec{r} = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \quad (3.21)$$

Avec les angles $(0 \leq \theta \leq \pi \; et \; 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ et $\psi_{n,l,m}(\vec{r})$la fonction d'onde qui est définie par :

$$\psi_{n,l,m}(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_l^m(\theta,\varphi) \quad (3.22)$$

Donc, on peut écrire l'équation (3-20), de la forme :

$$E_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) = \int \psi_{n,l,m}{}^{*}(\vec{r}) \alpha \left\{ \frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2} V_0 \right) \Theta \right\} \vec{L}\vec{S}\, \psi_{n,l,m}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (3.23)$$

On remplaçante l'équation (3.22) dans (3.23) on obtenue :

$$E_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) = \int R_{nl}{}^{*}(r) \alpha \left\{ \frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2} V_0 \right) \Theta \right\} \vec{L}\vec{S}\, R_{nl}(r) r^2 dr \int |Y_l^m(\theta,\varphi)|^2 d\Omega. \quad (3.24)$$

Avec l'angle solide$d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\varphi$. La fonction d'onde $\psi_{n,l,m}(\vec{r})$normalisée, cela permet d'écrire :

$$\int |Y_l^m(\theta,\varphi)|^2 d\Omega = 1 \quad (3.25)$$

Ce qui permit de réduit les corrections trouvées par l'équation (3.24) sont réduites sous la forme :

$$E_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) = \int R_{nl}{}^{*}(r)\alpha\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\Theta\right\}\vec{L}\vec{S}\, R_{nl}(r) r^2 dr \quad (3.26)$$

On remplace le terme de couplage spin-orbite $\alpha\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\Theta\right\}\vec{L}\vec{S}$ par :

$$\alpha\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\Theta\right\}\vec{L}\vec{S}R_{nl}(r) =$$

$$\alpha\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\Theta\right\}\frac{\hbar^2}{2}\{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\}R_{nl}(r) \quad (3.27)$$

En remplaçant l'équation (3.27) dans l'équation (3.26) pour trouver les corrections au premier ordre :

$$E_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) = \frac{\alpha}{2}\hbar^2\{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\}\int R_{nl}{}^{*}(r)\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\Theta\right\}R_{nl}(r) r^2 dr \quad (3.28)$$

3.3.1- Le spectre exact à l'état fondamental produit par l'effet de spin-orbite pour potentiel gravitationnel plus exponentiel :

Maintenant on applique le théorème de perturbation pour trouver les corrections d'énergie pour d'état fondamentale $E^0{}_{nc-pert}$, en utilisant la fonction d'onde présenté (2.36) et l'équation (3.28) :

$$E^0{}_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) = \frac{\alpha}{2}\hbar^2\{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\} \times$$

$$\int |N_0|^2 r^{3+\epsilon} e^{-2\sqrt{\xi_1}r}\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\Theta\right\}dr \quad (3.29)$$

On peut simplifier (3.29) pour trouver :

$$E^0{}_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) = \frac{\alpha}{2}\hbar^2\{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\}\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0}T_1 + \Theta T_2\right\} \quad (3.30)$$

Avec les deux termes T_1, T_2:

$$T_1 = \int_0^{\infty} |N_0|^2 r^{3+\epsilon} e^{-2\sqrt{\xi_1}r}\, dr$$

$$= \int_0^{\infty} |R_{nl}(r)|^2\, r^2 dr = 1 \qquad (3.31)$$

Et

$$T_2 = \int_0^{\infty} R_{nl}{}^*(r) \left\{ \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2} V_0 \right) \right\} R_{nl}(r) r^2 dr$$

$$= \frac{(\beta - \alpha V_0)}{2} \int_0^{\infty} R_{nl}{}^*(r)\, R_{nl}(r) r dr - \frac{\alpha^2}{2} V_0 \int_0^{\infty} R_{nl}{}^*(r)\, R_{nl}(r) r^2 dr$$

$$= T_3 + \frac{(\beta - \alpha V_0)}{2} T_4 \qquad (3.32)$$

Avec :

$$T_3 = -\frac{\alpha^2}{2} V_0 \int_0^{\infty} R_{nl}{}^*(r)\, R_{nl}(r) r^2 dr$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} V_0 \int_0^{\infty} |R_{nl}(r)|^2\, r^2 dr$$

$$= -\frac{\alpha^2}{2} V_0 \qquad (3.33)$$

Et

$$T_4 = \int_0^{\infty} R_{nl}{}^*(r)\, R_{nl}(r) r dr$$

$$= |N_0|^2 \int_0^{\infty} r^{2+\epsilon} e^{-2\sqrt{\xi_1}r}\, dr \qquad (3.34)$$

N_0 Constante de normalisation de la fonction radiale à l'état fondamentale.

Pour trouver l'intégral T_4 on utilise l'intégral suivant [25] :

$$\int_0^{\infty} r^n e^{-\mu r}\, dr = n!\, \mu^{-n-1} \qquad (3.35)$$

Donc :

$$T_4 \quad = |N_0|^2(2+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-(3+\varepsilon)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.36)$$

On remplaçant les équations (3.33) et (3.36) dans l'équation (3.32) on trouvée :

$$T_2 \quad = -\frac{\alpha^2}{2}V_0 + \frac{(\beta-\alpha V_0)}{2}|N_0|^2(2+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-(3+\varepsilon)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.37)$$

On remplaçant les équations (3.31) et (3.37) dans l'équation (3.30) on trouvée :

$$E^0{}_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) = \frac{\alpha}{2}\hbar^2\{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)\} \times$$

$$\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \Theta(-\frac{\alpha^2}{2}V_0 + \frac{(\beta-\alpha V_0)}{2}|N_0|^2(2+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-(3+\varepsilon)})\right\} \ldots\ldots\ldots (3.38)$$

L'énergie totale dans l'espace-phase noncommutatif pour d'état fondamentale $E^0{}_{nc-GPE}$ est la somme de l'énergie de 'état fondamentale E_0 présenté par l'équation (2.37) et les corrections $E^0{}_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta)$ déterminée par (3.38) :

$$E^0{}_{nc\text{-}GPE} = E_0 + E^0{}_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.39)$$

Donc :

$$E^0{}_{nc-GPE} = \frac{\hbar^4}{4{m_0}^2\alpha^2V_0}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m_0\alpha^2V_0}{\hbar^2} + \left[\frac{m_0(\beta-\alpha V_0)}{\hbar^2}\right]^2} - \frac{m_0\alpha^2V_0}{2\hbar^2}\right\} + V_0 +$$

$$\frac{\alpha}{2}\hbar^2\{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)\}\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \Theta(-\frac{\alpha^2}{2}V_0 + \frac{(\beta-\alpha V_0)}{2}|N_0|^2(2+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-(3+\varepsilon)})\right\} \ldots (3.40)$$

L'énergie totale dans l'espace-phase noncommutative pour d'état $j = l + S$:

$$E^0{}_{nc-GPE} = \frac{\hbar^4}{4{m_0}^2\alpha^2V_0}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m_0\alpha^2V_0}{\hbar^2} + \left[\frac{m_0(\beta-\alpha V_0)}{\hbar^2}\right]^2} - \frac{m_0\alpha^2V_0}{2\hbar^2}\right\} + V_0 +$$

$$\frac{\alpha}{2}\hbar^2\left\{\frac{\bar{\theta}}{2\mu} + \Theta(-\frac{\alpha^2}{2}V_0 + \frac{(\beta-\alpha V_0)}{2}|N_0|^2(2+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-(3+\varepsilon)})\right\}p_+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.41)$$

L'énergie totale dans l'espace-phase noncommutative pour d'état $j = l - S$:

$$E^0{}_{nc-GPE} = \frac{\hbar^4}{4m_0{}^2\alpha^2 V_0}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m_0\alpha^2 V_0}{\hbar^2}} + \left[\frac{m_0(\beta - \alpha V_0)}{\hbar^2}\right]^2 - \frac{m_0\alpha^2 V_0}{2\hbar^2}\right\} + V_0 +$$

$$\frac{\alpha}{2}\hbar^2\left\{\frac{\bar{\theta}}{2\mu} + \Theta(-\frac{\alpha^2}{2}V_0 + \frac{(\beta-\alpha V_0)}{2}|N_0|^2(2+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-(3+\varepsilon)})\right\}p_- \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3.42)$$

3.3.2- Le spectre exact de premier état excité produit par l'effet de spin-orbite pour potentiel gravitationnel plus exponentiel :

Dans ce sous cas on applique aussi le théorème de perturbation pour trouver les corrections d'énergie $E^1{}_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta)$ pour première état excité de spin-orbite pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel, en utilisant la fonction d'onde présenté (2.38) et l'équation (3.28) :

$$E^1{}_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) = \frac{\alpha}{2}\hbar^2\{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\}|N_1|^2 \times$$

$$\int_0^\infty r^{3+\epsilon}e^{-2\sqrt{\xi_1}r}(-2\sqrt{\xi_1}\mathrm{r} + \epsilon + 1)^2\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0} + \left(\frac{1}{2r}(\beta - \alpha V_0) - \frac{\alpha^2}{2}V_0\right)\Theta\right\}dr \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3.43)$$

On peut simplifier (3.43) pour trouver :

$$E^1{}_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) = \frac{\alpha}{2}\hbar^2\{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\}\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0}T^1 + \Theta T^2\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots.. (3.44)$$

Avec :

$$T^1 = T_1 + T_2 + T_3 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3.45)$$

Et

$$T_1 = \int_0^\infty r^{3+\epsilon}e^{-2\sqrt{\xi_1}r}(-2\sqrt{\xi_1}\mathrm{r})^2 dr \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3.46)$$

$$T_2 = \int_0^\infty r^{3+\epsilon}e^{-2\sqrt{\xi_1}r}(\epsilon + 1)^2 dr \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3.47)$$

$$T_3 = -\int_0^\infty r^{3+\epsilon}e^{-2\sqrt{\xi_1}r}4(\epsilon + 1)\sqrt{\xi_1}\mathrm{r}\,\mathrm{dr} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (3.48)$$

On utilise l'intégral de l'équation (3.35) :

$$\begin{cases} T_1 = 4\xi_1(5+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-\epsilon-6} \\ T_2 = (\epsilon+1)^2(3+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-\epsilon-4} \\ T_3 = -4\sqrt{\xi_1}(\epsilon+1)(4+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-\epsilon-5} \end{cases} \qquad (3.49)$$

On remplaçant les équations (3.49) dans (3.45) on trouvé :

$$T^1 = (3+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-\epsilon-4}\Big[4\xi_1(5+\epsilon)(4+\epsilon)\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-2} + (\epsilon+1)^2 - 4\sqrt{\xi_1}(\epsilon+1)(4+\epsilon)\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-1}\Big] \qquad (3.50)$$

Maintenant, nous calculons le deuxième parti de l'énergie T^2 :

$$T^2 = T_4 + T_5 + T_6 + T_7 \qquad (3.51)$$

Avec :

$$T_4 = -4\xi_1\frac{\alpha^2}{2}V_0\int_0^\infty r^{5+\epsilon}e^{-2\sqrt{\xi_1}r}dr \qquad (3.52)$$

$$T_5 = (\epsilon+1)^2\frac{\beta-\alpha V_0}{2}\int_0^\infty r^{2+\epsilon}e^{-2\sqrt{\xi_1}r}dr \qquad (3.53)$$

$$T_6 = \left[4\xi_1\frac{\beta-\alpha V_0}{2} + 4(\epsilon+1)\sqrt{\xi_1}\frac{\alpha^2}{2}V_0\right]\int_0^\infty r^{4+\epsilon}e^{-2\sqrt{\xi_1}r}dr \qquad (3.54)$$

$$T_7 = \left[-(\epsilon+1)^2\frac{\alpha^2}{2}V_0 - 4(\epsilon+1)\sqrt{\xi_1}\frac{\beta-\alpha V_0}{2}\right]\int_0^\infty r^{3+\epsilon}e^{-2\sqrt{\xi_1}r}dr \qquad (3.55)$$

On utilise l'intégral de l'équation (3.35) :

$$\begin{cases} T_4 = -\frac{\alpha^2}{2}4\xi_1V_0(5+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-\epsilon-6} \\ T_5 = (\epsilon+1)^2\frac{\beta-\alpha V_0}{2}(2+\epsilon)!\,(2\sqrt{\xi_1})^{-\epsilon-3} \\ T_6 = \left[4\xi_1\frac{\beta-\alpha V_0}{2} + 4(\epsilon+1)\sqrt{\xi_1}\frac{\alpha^2}{2}V_0\right](4+\epsilon)!\,(2\sqrt{\xi_1})^{-\epsilon-5} \\ T_7 = \left[-(\epsilon+1)^2\frac{\alpha^2}{2}V_0 - 4(\epsilon+1)\sqrt{\xi_1}\frac{\beta-\alpha V_0}{2}\right](3+\epsilon)!\,(2\sqrt{\xi_1})^{-\epsilon-4} \end{cases} \qquad (3.56)$$

On remplaçant les équations (3.56) dans (3.51) :

$$\boldsymbol{T^2} = (2+\epsilon)!\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-\epsilon-3}\Big[-4\xi_1\frac{\alpha^2}{2}V_0(5+\epsilon)(4+\epsilon)(3+\epsilon)\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-3} + (\epsilon+1)^2\frac{\beta-\alpha V_0}{2} - \left(4\xi_1\frac{\beta-\alpha V_0}{2} + 4(\epsilon+1)\sqrt{\xi_1}\frac{\alpha^2}{2}V_0\right)(4+\epsilon)(3+\epsilon)\left(2\sqrt{\xi_1}\right)^{-2} + \left(-(\epsilon+1)^2\frac{\alpha^2}{2}V_0 - 4(\epsilon+1)\sqrt{\xi_1}\frac{\beta-\alpha V_0}{2}\right)(3+\epsilon)(2\sqrt{\xi_1})^{-1}\Big] \qquad (3.57)$$

Pour trouver la correction d'énergie $E^1{}_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta)$ pour première état excité on remplaçant l'équation (3.57) et (3.50) dans l'équation (3.44).

L'énergie totale dans l'espace-phase noncommutatif pour premier états excité ${E^1}_{nc-GPE}$ est la somme de l'énergie de l'état fondamentale E_1 présenté par l'équation (2.37) et les corrections ${E^1}_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta)$déterminée par (3.44) :

$$ {E^1}_{nc-GPE} = E_1 + {E^1}_{nc-pert}(\bar{\theta},\Theta) \qquad (3.58) $$

Alors L'énergie totale dans l'espace-phase noncommutative :

$$ {E^1}_{nc-GPE} = \frac{\hbar^4}{4{m_0}^2\alpha^2 V_0}\left\{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2m_0\alpha^2 V_0}{\hbar^2}+\left[\frac{m_0(\beta-\alpha V_0)}{\hbar^2}\right]^2}-\frac{m_0\alpha^2 V_0}{2\hbar^2}\right\}+V_0 $$

$$ +\frac{\alpha}{2}\hbar^2\{j(j+1)-l(l+1)-s(s+1)\}\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0}T^1+\Theta T^2\right\} \qquad (3.59) $$

Donc :

L'énergie totale dans l'espace-phase noncommutative pour d'état $j = l + S$:

$$ {E^1}_{nc-GPE} = \frac{\hbar^4}{4{m_0}^2\alpha^2 V_0}\left\{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2m_0\alpha^2 V_0}{\hbar^2}+\left[\frac{m_0(\beta-\alpha V_0)}{\hbar^2}\right]^2}-\frac{m_0\alpha^2 V_0}{2\hbar^2}\right\}+V_0+\alpha\hbar^2\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0}T^1+\Theta T^2\right\}p_+ \qquad (3.60) $$

L'énergie totale dans l'espace-phase noncommutative pour d'état $j = l - S$:

$$ {E^1}_{nc-GPE} = \frac{\hbar^4}{4{m_0}^2\alpha^2 V_0}\left\{\frac{3}{2}\sqrt{\frac{2m_0\alpha^2 V_0}{\hbar^2}+\left[\frac{m_0(\beta-\alpha V_0)}{\hbar^2}\right]^2}-\frac{m_0\alpha^2 V_0}{2\hbar^2}\right\}+V_0+\alpha\hbar^2\left\{\frac{\bar{\theta}}{2m_0}T^1+\Theta T^2\right\}p_- \qquad (3.61) $$

CONCLUSION

En étudiant l'équation de Schrödinger modifiée pour le potentiel gravitationnel plus exponentiel modifiée $V(\hat{r})$ dans l'espace-phase non commutative à trois dimensions (NC_ 3D-RSP) en utilisant la méthode Boopp's Shift qui convertissent l'équation (1.60) à l'équation (1.61) afin d'étudier plus facilement en utilisant une conversion spécifique pour chacun des position x et l'impulsion p et d'après les résultants représenté par les équations les (3.38) et (3.44), les énergies correspondant à l'état fondamental $E^0{}_{nc-pert}$ et le premier état excité $E^1{}_{nc-pert}$, respectivement, sont produits par le nouveau Hamiltonien $H_{pert-GPE}$ ce qui est exprimé par l'équation (3.10)

$$H_{pert-GPE}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2}x_j\,, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right) = \alpha\left\{\frac{\overline{\theta}}{2\mu} + \left(\frac{1}{2}(\beta - \alpha V_0) + \alpha^2 V_0\right)\Theta\right\}\vec{L}\vec{S}$$

Nous notons dans ce nouveau Hamiltonien $H_{nc-GPE}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2}x_j\,, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right)$ qui a résulté de l'étude dans le nouvel espace (l'espace-phase non commutative), qui se compose de deux parties.

Le premier terme est L'Hamiltonien $H_{GPE}(\hat{x}_i = x_i, \hat{p}_j = p_i)$ dans l'espace ordinaire commutative, où il représente l'interaction entre une particule avec spin (1/2) en potentiel gravitationnel plus exponentiel dans l'espace ordinaire commutative.

Le deuxième terme est L'Hamiltonien noté par $H_{pert-GPE}\left(\hat{p}_i = p_i - \frac{\overline{\theta}^{ij}}{2}x_j\,, \hat{x}_i = x_i - \frac{\theta^{ij}}{2}p_j\right)$, est représenté dans l'espace-phase non commutative qui doit faire avec la dégénérescence de l'énergie des deux équations (3.40) et (3.50) à (2j+1) niveau d'énergie, La modification des niveaux d'énergie est également établie, les anciens états changent radicalement et remplacent par de nouveaux états dégénérés, le terme $\vec{L}\vec{S}$ dans l'équation de $H_{pert-GPE}$ responsable de cette dégénérescence, physiquement, ce terme connu par le couplage spin-orbite.

L'interaction spin-orbite apparaît directement après l'étude dans le nouvel espace (l'espace-phase non commutative) et après la conversion de coordonnées normales pour l'espace normal (l'espace-phase commutative) à operateurs hermitiens privé de l'espace phase non commutative. Alors que cette réaction (couplage spin-orbite) reflète la quantité de déformation dans l'espace, qui est l'une de ses propriétés.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIES

[1] Frédéric Faure, Notes de cours sur la Mécanique quantique, Université Joseph Fourier, Grenoble (novembre 2015).

[2] Justin Gabriel, Diverses Approches de la Mécanique Quantique sur Espace Non-Commutatif, Master Science de la matière, (2014).

[3] Thierry Masson, thèse présentée Pour obtenir Le GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES, Géométrie non commutative et applications à la théorie des champs, UNIVERSITE DE PARIS, N^0: 3989, (1996).

[4] T. A. Anake and B. I. ITA, solutions of the Schrodinger equation with gravitational plus exponential potential, IJTPC, Vol. 8, March (2015).

[5] J_Hladik, M_Chrysos, P_E_Hladik, L_U_Ancarani, MÉCANIQUE QUANTIQUE Atomes et noyaux Applications technologiques 3^eédition, ISBN 978-2-10-053979-6 (2006), Paris.

[6] Nouredine Zettili_ Quantum Mechanics, Concepts and Applications ISBN 978-0-470-02678-6 Jacksonville State University, Jacksonville, USA 2009

[7] Mémoire de master préparé par : Iman Djenaoui et dirigé par PRF : Maireche Abdelmadjid, Les niveaux d'énergie atomique produit par le potentiel de Cornell au Quarkouniom dans l'espace-phase non commutatif à trois dimensions, promotion : 2016, département de physique, université de M'sila, Algérie.

[8] E. Schrödinger_ AN UNDULATORY THEOR OF THE MECHANICS OF ATOMS AND MOLECULE, Physical Review Letters (PRL) Vol. 28, No. 6 (December1926)

[9] A-C-phillips_ Introduction to Quantum Mechanics ISBN 0-470-85323-9 2003 Manchester

[10] C-Tannoudji, B-Diu, F-Laloe_Wave and particles.Intruduction to the fundamental ideas of quantum mechanics, French (1973)

[11] J.-L. Vuilleumier_ Mécanique quantique, Université de Neuchâtel, 2001

[12] Y-Peleg, R-Pnini, E-Zaarur_ schaum's outline of quantum mechanics ISBN 0-07054018-7 1998 USA

[13] Abdelmadjid Maireche, a Complete Analytical Solution of the Mie-Type Potentials in Noncommutative 3-Dimensional Spaces and Phases Symmetries, the African Review of Physics (2016) 11:0015.

[14] Abdelmadjid Maireche, New Exact Energy Eigen-values for (MIQYH) and (MIQHM) Central Potentials: Non-relativistic Solutions, The African Review of Physics (2016) 11:0023.

[15] S. M. Ikhdair and R. Sever, Exact polynomial Eigen solutions of the Schrödinger equation for the pseudo harmonic potential, J. Mol. Struc.-Theochem. Vol. 806, (2007), pp. 155–158.
[16] Abdelmadjid Maireche, a Recent Study of Quantum Atomic Spectrum of the Lowes Excitations for Schrödinger Equation with Typical Rational Spherical Potential at Planck's and Nanoscales, JOURNAL OF NANO - AND ELECTRONIC PHYSICS. Vol. 7 No 3, 03047(7pp) (2015).
[17] S. M. Ikhdair and R. Sever, Exact solutions of the 2D Schrödinger equation with central potentials induced by the non-commutativity of space. ArXiv: 1405.1002v2 [math-ph] (2014)1-8.
[18] 6 I. F. Raid, M. M. Sheikh-Jabbari, Noncommutative QED and Anomalous Dipole Moments, JHEP 0008 (2000) 045, hep-th/0008132
[19] A. Micu and M. M. Sheikh- Jabbari, Noncommutative Φ^4 Theory at Two Loops, JHEP 0101 (2001) 025, hep-th/ 0008057
[20] Abdelmadjid Maireche, New Relativistic Atomic Mass Spectra of Quark (u, d and s) for Extended Modified Cornell Potential in Nano and Plank's Scales, JOURNAL OF NANO - AND ELECTRONIC PHYSICS , Vol. 8 No 1, 01020(7pp) (2016).
[21] Abdelmadjid Maireche, Quantum spectrum of Schrodinger equation with singular 1-fraction power potential in no commutative 2-dimensional space, Turkish Journal of Physics. (2014).
[22] C-Tannoudji, B-Diu, F-Laloe_ mécanique quantique 1 TOME1 ISBN : 2705660747, Paris (1996)
[23] B. I. Ita and A. I. Ikeuba, Solutions to the Klein-Gordon Equation with Inversely Quadratic Yukawa plus Inversely Quadratic Potential using Nikiforov-Uvarov Method, IJTPC, Vol. 8, March (2015).
[24] Abdelmadjid Maireche, Spectrum of Schrödinger Equation with H.L.C. Potential in Non-commutative Two-dimensional Real Space, the African Review of Physics (2014) 9:0060.
[25] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, ISBN-13: 978-0-12-373637-6, (2007) USA.

Abstract

In this work, of master memory, in theoretical physics, (2016/2017), we have studied the Schrödinger equation for gravitational plus exponential potential in noncommutative three dimensional spaces and phases by applying the Bopp's shift method to first order in the noncommutative parameters ($\Theta,\bar{\theta}$), instead of using the star product method. We apply Bopp's shift method to obtaining modified inverse –square root potential; and by applying standard perturbation theory we obtain the modification energy levels of atoms with one electron, it has been observed that the obtained energy spectra was changed radically, and replaced by degenerate new states, depending on the discrete quantum atomic numbers: j, l and the spin of electron, these results produced from spin-orbital interactions.

Keywords: Star product, noncommutative space and phase, gravitational plus exponential potential.

Paces number(s): **11.10.Nx, 32.30-r, 03.65-w.**

ملخص

في هذا العمل الخاص بمذكرة الماستر في الفيزياء النظرية (2017/2016). درسنا معادلة شرودينغر تحت تأثير كمون يسمي

gravitational plus exponential potential

في الفضاء اللاتبادلي ثلاثي البعد-وثلاثي الطور بتطبيق مبدأ Bopp بدلا من الحل المباشر الناتج عن الجداء النجمي. اعتمدنا النتائج الموافقة للحد ($\Theta,\bar{\theta}$). وجدنا الكمون الناتج عن خواص الفضاء يحتوي على حد جديد متناهي في الصغر بالمقارنة مع الحد الرئيسي وهذا يسمح بتطبيق نظرية الاضطرابات المستقرة. قمنا بحساب الطاقات الجديدة. حيث أن النتائج المحصل عليها تختلف جذريا عن النتائج الأصلية و أصبحت متوالدة و متعلقة بأعداد كمية جيدة هي l , j : و السبين. هذا التوالد في مستويات الطاقة يمكن تفسيره فيزيائيا نتيجة لتأثير التفاعل سبين-مدار.

الكلمات المفتاحية: الجداء النجمي. الفضاء اللاتبادلي البعدي والطوري والكمون المركزي

gravitational plus exponential potential