REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE DES MATHEMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

DEPARTEMENT DE MATIMATIQUES

MEMOIRE de fin d'étude

Présenté pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Spécialité : Mathématiques discrètes

Par: Khamsa SEGHIRI

SUJET

Semi groupes de transformations et leurs compositions

Soutenu publiquement le : 30 / 05 / 2016 devant le jury composé de :

Mr. Nourdine MIDOUNE	**M.C.A.**	**Université de M'sila**	**Président**
Mr. Douadi MIHOUBI	**Prof.**	**Université de M'sila**	**Rapporteur**
Mr. Nacer GHADBAN	**M.A.A.**	**Université de M'sila**	**Examinateur**

Promotion : 2015/2016

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Allah qui m'a donné la force de rediger ce travail modeste.

Je tiens à remercie Mr. D. MIHOUBI directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères et ma soeur Afaf qui m'ont toujours encouragé.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Saad Eddine KADI.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, tous les étudiants et étudiantes de ma promotion, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :
-A mes parents ma mère et mon pére.
-A mes frères.
-A toute la famille.
-A toute mes amies.

NOTATIONS

Σ	Alphabet.
Σ^*	Monoïde libre sur Σ.
AFD	Automate fini déterministe.
$C(w)$	Contexte de mot w .
$M(L)$	Monoïde syntaxique d'un langage L.
$\Sigma^*/\sim_L$	Monoïde quotient.
$[w]$	Classe d'equivalence de w.
$PF\ (Q)$	Ensemble de toutes les applications de Q vers Q (Q^Q).
1_Q	Application identité de Q vers Q.
$X = (Q, S)$	Semi-groupe de transformations.
$X^\bullet$	Monoïde de transformations associé à X.
S_E	Groupe des permutations de l'ensemble E.
$\widetilde{q}$	Application constante défine par l'élément q.
$\widetilde{Q}$	Ensemble de toutes les applications constantes sur Q .
$\overline{X}$	Fermeture de X.
$S \times T$	Produit direct de S et T.
$End\ (S)$	Ensemble de touts les endomorphismes de S.
$S \times_\theta T$	Produit semi direct de S et T relativement à θ.
S^P	Ensemble de tout les applications de P vers S.
$X \circ Y$	Produit en couronne de X et Y.
$\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}'$	Produit direct de semi automates $\mathcal{M}$ et $\acute{\mathcal{M}}$.
$\mathcal{M}\omega\mathcal{M}'$	Produit en cascade de semi automates $\mathcal{M}$ et $\acute{\mathcal{M}}$.
$X \preceq Y$	Y couvre X.

Table des matières

Introduction

La théorie de semi-groupe est une partie relativement jeune des mathématiques. Comme une direction distincte de l'algèbre avec ses objets propres, formulations de problèmes, la théorie de semi groupe a été formé il y a environ 60 ans.

En algèbre, un semi groupe de transformation est un ensemble de fonctions à partir d'un ensemble vers lui-même qui est muni de la composition de fonctions. Si de plus il contient la fonction d'identité, il est un monoïde, appelé un monoïde de transformations. Un semi groupe de transformation d'un ensemble a une action de semi groupe sur cet ensemble. Ces actions se caractérisent par leur efficacité, à savoir, si deux éléments du semi groupe ont la même action, ils sont égaux.

Le résultat de Kenneth Krohn et John Rhodes, a annoncé il y a près de 50 ans, affirme que tout automate déterministe peut être décomposé en une cascade de simples automates, dont structure reflète la structure algébrique du semi groupe de transformations associée à l'automate. Depuis quelque temps, dans les années 60 et 70, leur théorème, qui les a 2 titres de doctorat simultanés de Harvard et MIT, respectivement, a été considérée comme une pierre angulaire de la théorie des automates.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à l'etude des semi groupes de transformations en particulier : semi groupe et monoïde de transformations, groupe de transformations, le produit direct et semi direct de semi groupes, semi groupes de transformations, et semi automates.

Ce travail est composé de trois chapitres:

Dans le premier chapitre **:** nous rappelons les notions de base qui concernent les structures (Semi-groupes, Monoïdes, Automates, Semi-Automates,...etc) et on donnant quelques exemples pour comprendre ces notions.

Dans Le deuxiéme chapitre : On s'intéresse aux semi-groupe de transformations , monoïde de transformations et groupe de transformations.

Dans le troisiéme chapitre: On présente le produit (direct, semi direct, en couronne) de semi-groupes de transformations et le produit en cascade de semi automates et on citant à la fin de ce chapitre la théorème de décomposition de semi-groupe de transformations de Krohn et Rhodes.

On termine ce mémoire par une conclusion.

Chapitre 1

Préliminaires algébriques

Ce chapitre est conçu comme une sorte de lexiques dans lequel sont répertoriées les définitions de base (semi-groupe, monoïde, groupe, automate,...etc) utilisé tout au long de ce mémoire et quelques exemples pour comprendre ces notions.

1.1 Semi-groupe

Définition 1.1.1

Soit S un ensemble et $\cdot : S \times S \to S$ une opération binaire interne. L'ensemble S muni de l'opération " $\cdot$" possède une structure de semi-groupe si l'opération " $\cdot$ " est associative c'est -à-dire si :

$$\text{pour tous } x\ ,\ y\ ,\ z \in\ S\ : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\ .$$

Exemple 1.1.1

► $(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{Z}, +)$ *sont des semi-groupes.*

► $(\mathbb{N}, \times)$; $(\mathbb{R}, \times)$; $(\mathbb{Z}, \times)$ *sont des semi-groupes.*

► *Soit* $(L, \leq)$ *un treillis;* $(L, \wedge)$ *est un semi-groupe.*

1.1.1 Sous semi-groupe

Définition 1.1.2

Soit $(S, \cdot)$ un semi-groupe. Une partie non vide B de S appelée sous semi-groupe de S si elle " stable" pour l'opération " $\cdot$ ", c'est -à-dire si :

$$\forall a, b \in B : a \cdot b \in B \ .$$

Exemple 1.1.2

► *L'ensemble $2\mathbb{Z}$ est un sous semi-groupe de $(\mathbb{Z}, \ \times)$.*

1.1.2 Congruence sur un semigroupe

Définition 1.1.3

Définition 1.1.4 *Soit $(S, \ \cdot)$un semi-groupe et soit R une relation d'équivalence sur S. On dit que R est compatible avec l'opération $(*)$, ou encore que R est une congruence, si:*

$$\begin{aligned} \forall \ x, y, z, t \ &\in \ S : \ xRy \ \text{et} \ zRt \Rightarrow xzRyt \quad \text{ie:} \\ \overline{x} \ &= \ \bar{y} \ \text{et} \ \bar{z} = \bar{t} \ \text{on a donc} \ \overline{xz} = \overline{yt}. \end{aligned}$$

Si R est une congruence, on peut définir sur l'ensemble quotient S/R une opération $(\cdot)$ par:

$$\overline{x} \cdot \bar{y} = \overline{xy}.$$

*L'opération $(\cdot)$ ainsidéfinie sur S/R est encor associative. Ainsi $(S/R, \ \cdot)$ est un semi-groupe, on l'appelle **semi-groupe quotient** de $(S, \ \cdot)$par la congruence R.*

1.2 Monoïde

Définition 1.2.1

Un monoïde $(M, \cdot, 1_M)$est un semi groupe qui admet un élément neutre 1_M tel que :

$$\text{pour tout } x \in M \ : \ x \ \cdot 1_M \ = 1_M \ \cdot x \ = x \ .$$

Remarque 1.2.1

- *Soit S un semigroupe. Supposons que S n'est pas un monoïde, soit un élément $e \notin S$ et formant l'ensemble $S^{\bullet} = S \cup \{e\}$, nous définissons une multiplication notée $*$ sur $S^{\bullet}$ en étendant la multiplication déjà sur S de sorte que,*

$$a * b = \begin{cases} ab \quad si \quad a,\ b \in S \ ; \\ \quad b \quad si \quad a = e \ ; \\ \quad a \quad si \quad b = e \ . \end{cases}$$

où $a,\ b \in S^{\bullet}$.

-Il est clair que $S^{\bullet}$ est un monoïde avec élément unité e. Si S est déjà un monoïde, nous définissons $S^{\bullet} = S$.

- *L'élément neutre 1_M de M est unique.*

Exemple 1.2.1

1. *Le semi-groupe $(\mathbb{N}, +)$ d'élément neutre 0 est un monoïde.*
2. *Le semi-groupe $(\mathbb{N}, \times)$ d'élément neutre 1 est un monoïde.*
3. *L'ensemble des applications de Q vers lui même $Q^Q = \{f \mid f : Q \to Q\}$ muni de la composition $(Q^Q, \circ)$ est un monoïde d'élément neutre 1_Q (L"application identité).*
4. *L'ensemble des parties d'un ensemble E , muni de l'union d'ensembles $(P(E), \cup)$est un monoïde dont l'ensemble vide est l'élément neutre. Le même ensemble muni de l'intersection d'ensembles $(P(E), \cap)$ est aussi un monoïde , dont l'ensemble E est l'élément neutre.*

Définition 1.2.2 [5]

- *Un alphabet est un ensemble fini (souvent noté A ou* Σ *) dont les éléments sont appelés lettres ou symboles. Ainsi* $A = \{a, b, c, d\}$, $\triangle = \{\bigstar, \emptyset, \diamondsuit, \triangleleft\}$; $\Omega = \{0, 1\}$ *sont des alphabets.*

- *Un mot* w *sur l'alphabet* A *est une suite finie* $a_1 a_2 ... a_n$ *de lettres de* A*. L'entier* n *est appelé la longueur de* w *notée* $|w|$*. On note* $|w|_a$ *le nombre d'occurrence de la lettre* a *dans le mot* w*. Si l'on note* $w = a_1 a_2 ... a_n$ *:*

$$|w|_a = card \ \{i \in [1, \ n], \ a_i = a \ \}$$

- *Le mot vide noté* ε *ou parfois* Λ *correspond à l'unique mot de longueur 0.*

- *Un langage* L *sur l'alphabet* A *est un ensemble de mots sur* A $(L \subset A^*)$ *.*

- *L'ensemble des mots* Σ^* *muni de la concaténation est un monoïde appelé le le monoïde libre sur* Σ*. La concaténation des deux mots* $u = u_1 u_2 ... \ u_m$ *et* $v = v_1 v_2 ... v_n$ *est le mot noté* $u .v$ *ou* uv *et égal à* $u_1 u_2 ... \ u_m v_1 v_2 ... v_n$ *obtenu par simple juxtaposition. C'est une opération associative dont le mot vide* ε *est l'élément neutre.*

Remarque 1.2.2

Tout groupe est un monoïde, mais l'inverse n'est pas toujours vrai. Par exemple $(\mathbb{N}, +)$ *est un monoïde qui n'est pas un groupe .*

1.2.1 Sous monoïde

Définition 1.2.3 *Soit un monoïde* $(M, \cdot, 1_M)$ *. Un sous monoïde est un triplet* $(N, \cdot, 1_N)$ *tel que:*

* $N \subset M$.

* $1_M = 1_N$.

* $\forall a, b \in N \Longrightarrow a \cdot b \in N$

Exemple 1.2.2

- *Pour tout monoïde* $(M, \cdot, 1_M)$*, les parties* $\{1_M\}$ *et* M *sont des sous monoïdes, dite "triviaux".*
- *L'ensemble* $2\mathbb{Z}$ *des entiers pairs est un sous monoïde de* $(\mathbb{Z}, +)$*.*

1.3 Homomorphisme

Définition 1.3.1

On appelle structure algébrique tout ensemble ou famille d'ensembles muni d'une ou plusieurs lois de composition internes .On appelle homomorphisme de la structure algébrique $(A, \cdot)$ *sur la structure algébrique* $(B, *)$ *tout application* $f : A \longrightarrow B$ *qui vérifie la formule suivante :*

$$\forall\ x, y \in A \qquad f(x \cdot y) = \ f(x) * f(y)$$

Abrégé : l'image du composé est égale au composé des images, ou bien l'application f préserve les lois.

- Un homomorphisme $f : A \longrightarrow A$ est un endomorphisme de A .

- Un homomorphisme $f : A \longrightarrow B$ est un isomorphisme si f est bijective.

1.3.1 Homomorphisme de semi-groupes

Définition 1.3.2

Soient $(S, \cdot)$ *et* $(T, *)$ *deux semi-groupes et* $f : S \longrightarrow T$ *une application. Nous appelons* f *un homomorphisme de semi-groupes si :*

- $f(ab) = f(a) * f(b)$ *pour tout* a*,* $b \in S$*.*

1.3.2 Homomorphisme de monoïdes

Définition 1.3.3

Soient $(M, \cdot)$ *et* $(N, *)$ *deux monoïdes d'éléments neutres respectif* 1_M *et* 1_N*. Une application* $f : M \longrightarrow N$ *est un morphisme (ou homomorphisme) de monoïdes si :*

- Pour tout $x, y \in M \quad : f(xy) = f(x) * f(y)$.
- $f(1_M) = 1_N$.

Exemple 1.3.1

- ▶ Soit E un ensemble quelconque, et soit l'application $f : P(E) \to P(E)$ qui à chaque partie A de E fait correspondre son complémentaire $\overline{A}$. Puisque $f(\emptyset) = \overline{\emptyset} = E$ et que $f(A \cup B) = \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} = f(A) \cap f(B)$, cette application est un homomorphisme du monoïdes $(P(E), \cup)$ et $(P(E), \cap)$.
- ▶ L'application h est un morphisme de Σ^* dans $\mathbb{N}$. Tel que $|w|$ est la langueur d'un mot.

$$\begin{array}{rccc} h : & \Sigma^* & \to & \mathbb{N} \\ & w & \longmapsto & |w| \end{array}$$

- ▶ La composée de deux morphismes de monoïdes est un morphisme de monoïdes.
- ▶ L'image d'un sous-monoïde par un morphisme de monoïdes est un sous-monoïde. En particulier l'image d'un morphisme de monoïdes est un sous-monoïde.
- ▶ On appelle noyau d'un morphisme de monoïdes l'ensemble des antécédents de l'élément neutre. Si le morphisme est injectif alors son noyau est réduit à l'élément neutre, mais la réciproque est fausse en général (contrairement au cas d'un morphisme de groupes)
- ▶ L'image réciproque d'un sous-monoïde par un morphisme de monoïdes est un sous-monoïde. En particulier le noyau d'un morphisme de monoïdes est un sous-monoïde.

1.4 Automate Fini Déterministe

Définition 1.4.1

On appelle automate fini déterministe (AFD) tout quintuplet $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F\ )$ *où*

- Σ *est un alphabet.*
- Q *est un ensemble fini, l'ensemble des états.*
- $q_0 \in Q$ *est l'unique état initial.*
- $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ *est la fonction de transition de* $\mathcal{A}$*.*
- $F \subset Q$ *est l'ensemble des états finaux (terminaux).*

Nous représentons un AFD $\mathcal{A}$ *de la manière suivante :*

Les états de A sont les sommets d'un graphe orienté et sont représentés par des cercles.Si $\delta(q, a) = q'$; $q, q' \in Q$,$a \in \Sigma$, *alors on trace un arc orienté de q vers q' et de label a;* $q \xrightarrow{a} q'$. *Les états finals sont repérés grâce à un double cercle et l'état initial est désigné par une flèche entrante sans label. Enfin si deux lettres a et a' sont telles que* $\delta(q, a) = q'$ *et* $\delta(q, a') = q'$, *on s'autorise à dessiner un unique arc portant deux labels séparés par une virgule* $q \xrightarrow{a,\ a'} q'$. *Cette convention s'adapte aisément à plus de deux lettres.*

Définition 1.4.2

Soit $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F\ )$*un automate fini déterministe. Pour toute transition (p, a, q) de Q, on dit que :*

- *a (qui appartient à* Σ*) est* ***l'étiquette*** *de la transition.*
- p *(qui appartient à* Q*) est* ***l'origine*** *de la transition.*
- q *(qui appartient à* Q*) est* ***l'extrémité*** *de la transition.*
- *On note également* $p \xrightarrow{a} q$ *la transition*(p, a, q).

On étend naturellement la fonction de transition à $Q \times \Sigma^*$*de la manière suivante :*

- $\delta(q, \varepsilon) = q$.
- $\delta(q, aw) = \delta((q, a),\ w);\ \ a \in \Sigma;\ w \in \Sigma^*$

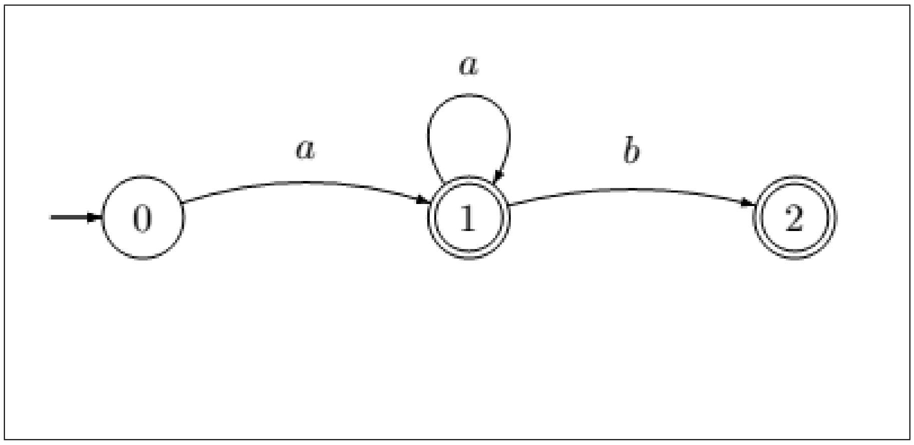
Définition 1.4.3 *(Automate complet)*

Un automate fini est complet si pour tout état q de Q et pour tout symbole a de Σ ; $\delta(q, a) \neq \varnothing$.

Exemple 1.4.1 *Soit $\mathcal{A} = (Q, I,\ F,\ \Sigma,\ \delta)$ un automate défini par :*

$\Sigma = \{a, b\},\ Q = \{0, 1, 2\}, I = \{0\}, F = \{1, 2\}$et $\delta = \{(0, a, 1), (1, a, 1), (1, b, 2)\}$.

La représentation sagittale de $\mathcal{A}$ est alors la figure suivante :



1.5 Semi-automate

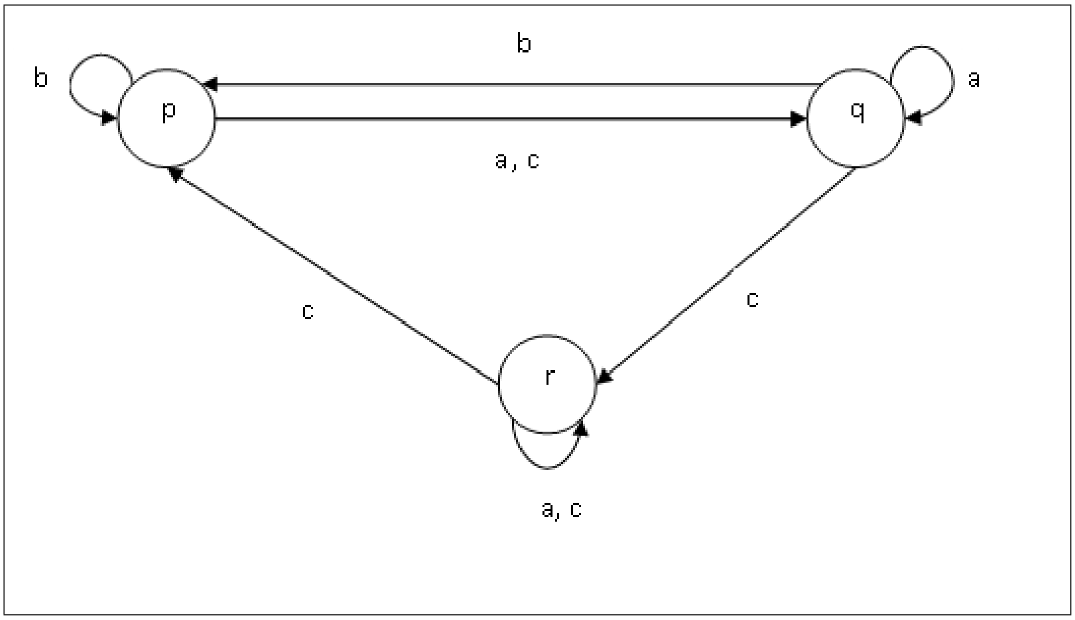
Un semi-automate est un triple $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta)$, où Σ et Q des ensembles finis et δ est une fonction .

$$\delta : Q \times \Sigma \to Q$$

Exemple 1.5.1 *Soit $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta)$ un semi-automate avec $Q = \{p,\ q,\ r\}$*

$\Sigma = \{a,\ b,\ c\}$; et δ définie par le tableau

δ	p	q	r
a	q	q	r
b	p	p	$\varnothing$
c	q	r	$\{p,\ r\}$



Le semi-automate $\mathcal{M}$

Définition 1.5.1 [6]*(Langage reconnaissable).*

Le langage reconnu par un automate fini déterministe $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F\ )$ *est*

$$L(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \in F\ \}$$

Un langage L sur Σ^* *est reconnaissable s'il existe un automate fini déterministe sur* Σ *tel que L = L(A). L'ensemble des langages reconnaissables sur* Σ^* *est noté Rec(*Σ^* *).*

Définition 1.5.2 [6]*(Reconnaissance par monoïde)*

On dit qu'un langage $L \subset \Sigma^*$ *est reconnu par le morphisme* $\mu : \Sigma^* \to M$ *s'il existe une partie P de M telle que* $L = \mu^{-1}(P)$*. Par extension, on dit qu'un monoïde M reconnaît le langage L s'ilexiste un morphisme* $\mu : \Sigma^* \to M$ *qui reconnaît L.*

Proposition 1.5.1 [6]*Soit L un langage sur l'alphabet* Σ *. Alors L est reconnaissable si et seulement s'il est reconnu par un monoïde fini.*

Définition 1.5.3 [6]*(Congruence de monoïde).*

Une relation d'équivalence $\sim$ définie sur un monoïde M est appelée congruence (de monoïde) si pour tous a, $\grave{a}$, b et $\grave{b}$ dans M vérifiant $a \sim \grave{a}$ et $b \sim \grave{b}$, on a $ab \sim \grave{a}\grave{b}$. De manière équivalente, il suffit que pour tous y, $\grave{y} \in M$, l'implication

$$y \sim \grave{y} \Longrightarrow \forall x, z \in M;\ xyz \sim x\grave{y}z$$

soit satisfaite.

Définition 1.5.4 [6]*(Congruence syntaxique).*

Pour tout langage L, on appelle contexte de $w \in \Sigma^*$ l'ensemble

$$C(w) = \{(u, v) \in (\Sigma^*)^2 \mid uwv \in L\}$$

La relation $\sim_L$ définie par

$$w \sim_L \grave{w} \Longleftrightarrow C(w) = C(\grave{w}) \Longleftrightarrow \forall u, v \in \Sigma^*;\ (uwv \in L \Longleftrightarrow u\grave{w}v \in L)$$

est appelée congruence syntaxique de L .

1.6 Monoïde syntaxique

Dans ce partie, on représente la notion de monoïde syntaxique d'un langage reconnaissable L et on montre si L est reconnaissable alors $M(L)$ est fini.

Définition 1.6.1 *Soit l'opération*

$$\circ \ :\ \Sigma^*/\sim_L \ \times\ \Sigma^*/\sim_L \ \to\ \Sigma^*/\sim_L \ :\ ([x], [y]) \ \longmapsto\ [x] \circ [y]$$

Défnie par :

$$[x] \circ [y] = [xy]$$

L'ensemble quotient $\Sigma^*/\sim_L$ muni de l'opération $\circ$ possède une structure de monoïde et appelé monoïde syntaxique de L, tel que:

1. L'élément neutre est $[\varepsilon]$: $\forall x \in \Sigma^*, [x] \circ [\varepsilon] = [x]$

2. L'associativité :$\forall x, y, z \in \Sigma^*$,

$$\begin{aligned}([x] \circ [y]) \circ [z] &= [xy] \circ [z] \\ &= [(xy)z] \\ &= [x(yz)] \qquad \text{(car } \Sigma^* \text{ est monoïde)} \\ &= [x] \circ [yz] \\ &= [x] \circ ([y] \circ [z])\end{aligned}$$

Proposition 1.6.1 *$\Sigma^*/\sim_L$ est fini ssi L est reconnaissable.*

Exemple 1.6.1 *Soit $\Sigma = \{0,1\}$; $\Sigma^* = \{0,1\}^*$ et soient les deux langages*

$L = \{w \in \Sigma^* : \ |w|_1 \equiv 0 \ [2]\}$ *et* $\acute{L} = \{w \in \Sigma^* : \ |w|_1 \equiv 1 \ [2]\}$.

On calcule le monoide syntaxique de L.

$$\begin{aligned} u \sim_L v &\iff (\forall x;\ y \in \Sigma^* : xuy \in L \iff xvy \in L) \\ &\iff (\forall x; y \in \Sigma^* : |xuy|_1 \equiv 0 \ [2] \iff |xvy|_1 \equiv 0 \ [2]) \\ &\iff (\forall x; y \in \Sigma^* : |xuy|_1 \equiv 0 \ [2] \iff |xvy|_1 \equiv 0 \ [2]) \\ &\iff (\forall x; y \in \Sigma^* : |x|_1 + |u|_1 + |y|_1 \equiv 0 \ [2] \iff |x|_1 + |v|_1 + |y|_1 \equiv 0 \ [2]) \end{aligned}$$

$\Sigma^*/\sim_L = \{[w] \mid w \in \Sigma^*\}$.

$[w] = \{u \in \Sigma^* \mid u \sim_L w \}$.

-Soit $w \in L$;

$$\begin{aligned}[w] &= \{u \in \Sigma^* \mid \forall x; y \in \Sigma^* : |x|_1 + |u|_1 + |y|_1 \equiv 0 \ [2] \iff |x|_1 + |w|_1 + |y|_1 \equiv 0 \ [2]\} \\ &= L.\end{aligned}$$

-Soit $w \in \acute{L}$;

$$\begin{aligned}[w] &= \{u \in \Sigma^* \mid \forall x; y \in \Sigma^* : |x|_1 + |u|_1 + |y|_1 \equiv 0 \ [2] \iff |x|_1 + |w|_1 + |y|_1 \equiv 0 \ [2]\} \\ &= \acute{L}.\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\Sigma^*/\sim_L = \{L,\ \acute{L}\}.}$

Chapitre 2

Semi-groupe et monoïde de transformations

2.1 Semi-groupe de transformations

Définition 2.1.1 [1]

Soit Q un ensemble fini , on note par $PF(Q)$ le monoïde de toutes les applications(les transformationss) de $Q \to Q$ muni de la composition des applications que la multiplication. La transformation identité 1_Q est l'élément de l'unité. Ce monoid a un zéro, à savoir l'applicaton vide $\theta : Q \to Q$ avec $\forall s \in PF(Q) \quad \theta s = \theta = s\,\theta$, cette fonction $\theta \in PF(Q)$. Un semi-groupe de transformation (l'abréviation: ts) se compose d'un ensemble fini Q et un sous-semigroupe S de PF (Q). Les éléments de Q sont appelés états, et Q lui-même est appelé l'ensemble fondamentale. Les éléments de S sont appelés transformations de X, alors que S est lui-même appelé le semigroupe d'action de X. Si plusieurs ts de sont impliqués dans un argument, nous doit écrire Q_X et S_X au lieu de Q et S, pour rendre la reconnaissance plus facile, alors un semi-groupe de transformations est le couple $X = (Q, S)$. Souvent, le semigroupe S est donnée abstraitement, à savoir au dehors de PF (Q). Pour encastrement S dans PF (Q), on doit donner une fonction partielle (appelée l'action de S sur Q)

$$\alpha \ : \ Q \times \ S \ \ \to \ Q$$

satisfaisant les conditions suivantes :

1. $\alpha(\alpha(q,s),s') = \alpha(q,ss')$ *pour tout* $q \in Q$; $s,\ s' \in S$.

2. $\alpha(q,s) = \alpha(q,s')$ *pour tout* $q \in Q$; $s,\ s' \in S \Longrightarrow s = s'$

Nous écrivons généralement qs *au lieu de* $\alpha(q,s)$. *Les conditions (1) et (2) prennent alors les formes plus faciles (1′) et (2′)*

1′. $(qs)s' = q(ss')$

2′. $qs = qs'$ *pour tout* $q \in Q$; $s,\ s' \in S \Longrightarrow s = s'$

La condition (1′) est appellée la condition d'associativité et la condition (2′) est appelée la condition de fidélité.

Exemple 2.1.1 [1]

1. *Pour tous ensemble fini* Q, *le pair* $(Q,\emptyset)$ *est un semi-groupe de transformations notée par* Q.

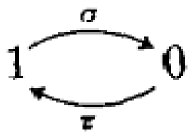
2. *Pour chaque entier* $k \geq 0$, *on note par* $\mathbf{k}$ *l'ensemble* $\mathbf{k} = \{0,1,...,k-1\}$ *des chiffres à la base* k. *En particulier* $\mathbf{0}$ *est l'ensemble vide,* $\mathbf{1}$ *a un élément unique* 0 *et* $\mathbf{2}$ *composé par les chiffres* 0 *et* 1. *Comme expliqué ci-dessus, nous consédérons* $\mathbf{k}$ *comme un semi-groupe de transformations avec un semi-groupe vide d'action . En particulier* $\mathbf{0} = (\mathbf{0},\emptyset)$ *est le plus petit semi-groupe de transformations.*

3. *Un semi-groupe de transformations* E *donné par*

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{0}$$

Avec $Q_E = \mathbf{2} = \{0,1\}$ *l'ensemble de ses états, avec* S_E *l'ensemble de ses transformationss* σ *et* $\theta = \sigma^2$.

4. Le semi-groupe de transformations F est donné par



ici, $Q_F = \mathbf{2} = \{0,1\}$ et S_F avec les transformationss σ, τ, $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, $\theta = \sigma^2 = \tau^2$ est donné par les formules suivantes :

$$\sigma \begin{cases} \sigma(0) = \emptyset \\ \sigma(1) = 0 \end{cases}$$

$$\tau \begin{cases} \tau(0) = 1 \\ \tau(1) = \emptyset \end{cases}$$

$$\sigma\tau \begin{cases} \sigma\tau(0) = \sigma(\tau(0)) = \sigma(1) = 0 \\ \sigma\tau(1) = \sigma(\tau(1)) = \sigma(\emptyset) = \emptyset \end{cases}$$

$$\tau\sigma \begin{cases} \tau\sigma(0) = \tau(\sigma(0)) = \tau(\emptyset) = \emptyset \\ \tau\sigma(1) = \tau(\sigma(1)) = \tau(0) = 1 \end{cases}$$

$$\sigma^2 \begin{cases} \sigma^2(0) = \sigma(\sigma(0)) = \emptyset \\ \sigma^2(1) = \sigma(\sigma(1)) = \emptyset \end{cases}$$

$$\tau^2 \begin{cases} \tau^2(0) = \tau(\tau(0)) = \emptyset \\ \tau^2(1) = \tau(\tau(1)) = \emptyset \end{cases}$$

Les autre cas sont inclus dans les états précédente par exemple :

$$\sigma\tau\sigma \left\{ \begin{array}{l} \sigma\tau\sigma(0) = \sigma(\tau\sigma(0)) = \sigma(0) = \emptyset \\ \sigma\tau\sigma(1) = \sigma(\tau\sigma(1)) = \sigma(\emptyset) = \emptyset \end{array} \right\} = \sigma^2 \text{ etc.}$$

On peut représentant ces formules par le tableau suivant :

	0	1
σ	$\emptyset$	0
τ	1	$\emptyset$
$\sigma\tau$	0	$\emptyset$
$\tau\sigma$	$\emptyset$	1
σ^2	$\emptyset$	$\emptyset$
τ^2	$\emptyset$	$\emptyset$

5. Le semi-groupe de transformations $\mathbb{Z}_2$ est donné par

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, bend left, "\sigma"] & 0 \arrow[l, bend left, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

ses transformationss sont σ et $\sigma^2 = \mathrm{id}_{\mathbf{2}}$.

6. Un semi-groupe de transformations C est donné par

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\sigma"] & 0 \arrow[loop right, "\sigma"] \end{tikzcd}$$

Il n'existe qu'une seule transformations σ avec $\sigma^2 = \sigma$.

2.2 Monoïde de transformations

Définition 2.2.1 [1]

Le semi-groupe de transformations $X = (Q, S)$ est appelé monoïde de transformations (abréviation: tm) si la transformation d'identité 1_Q est en S, ainsi S dans ce cas est un sous monoïde. A noter que S étant un monoid ne suffit pas de faire en sorte que X est un tm; nous devons insister pour que S soit un monoïde de PF (Q), à savoir, que S contient l'élément unitaire de PF (Q). Donc avec chaque semi-groupe de transformations $X = (Q, S)$ on peut lui associer le monoïde de transformations $X^\bullet = (Q, S \cup 1_Q)$ avec l'action α : $Q \times (S \cup 1_Q) \rightarrow Q$ satisfaisant les conditions suivantes :

- $q1_Q = q$, *pour tout* $q \in Q$.
- $(qs)s' = q(ss')$, *pour tout* $q \in Q$; $s, s' \in S$.

Remarque 2.2.1 *le monoïde de transformations $X^\bullet = (Q, S \cup 1_Q)$ est fini si l'ensemble Q est fini.*

Exemple 2.2.1

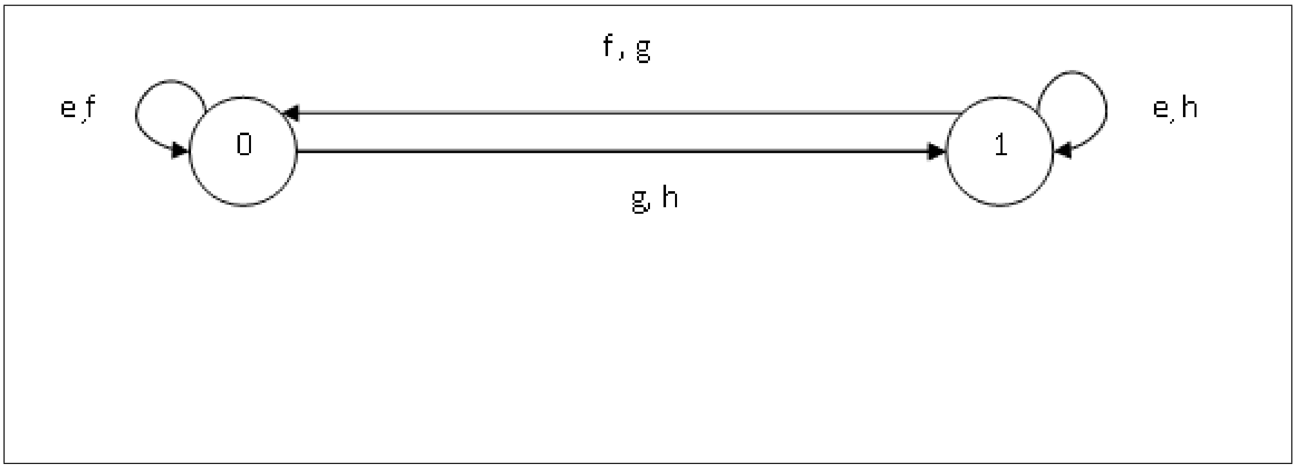
1. $\mathbf{0} = (\mathbf{0}, \theta)$ est le plus petit monoïde de transformations .
2. Avec chaque semi-groupe de transformations $X = (Q, S)$ on peut associer le monoïde de transformations $X = (Q, S \cup 1_Q)$, donc tous les semi-groupes de transformations de l'exemple précédent sont des monoïdes des transformations si on ajoute 1_Q au sous semi-groupe S.
3. Soit l'ensemble fini Q , $Q^Q = \{f : Q \rightarrow Q\}$ l'ensemble des applications de Q vers Q muni de la composition des applictions comme opération est appelé le monoïde de transition de Q .

$Q = \{0, 1\}$, $S = \{f, g, h\}, 1_Q = e$.

les éléments de Q^Q sont e, f, g, h tel que

$$\begin{cases} e(0) = 0. \\ e(1) = 1. \end{cases} \quad \begin{cases} f(0) = 0. \\ f(1) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} g(0) = 1. \\ g(1) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} h(0) = 1. \\ h(1) = 1. \end{cases}$$

Le monoïde de transformations $X = (Q, S \cup e\ )$.



Le monoïde de transformations X

2.3 Groupe des transformations

Définition 2.3.1 [1]

Un semi-groupe de transformations $X = (Q, S)$ est appelé groupe de transformations (ou groupe des permutations) si :

* $Q \neq \emptyset$.

** S *est un groupe.*

Exemple 2.3.1

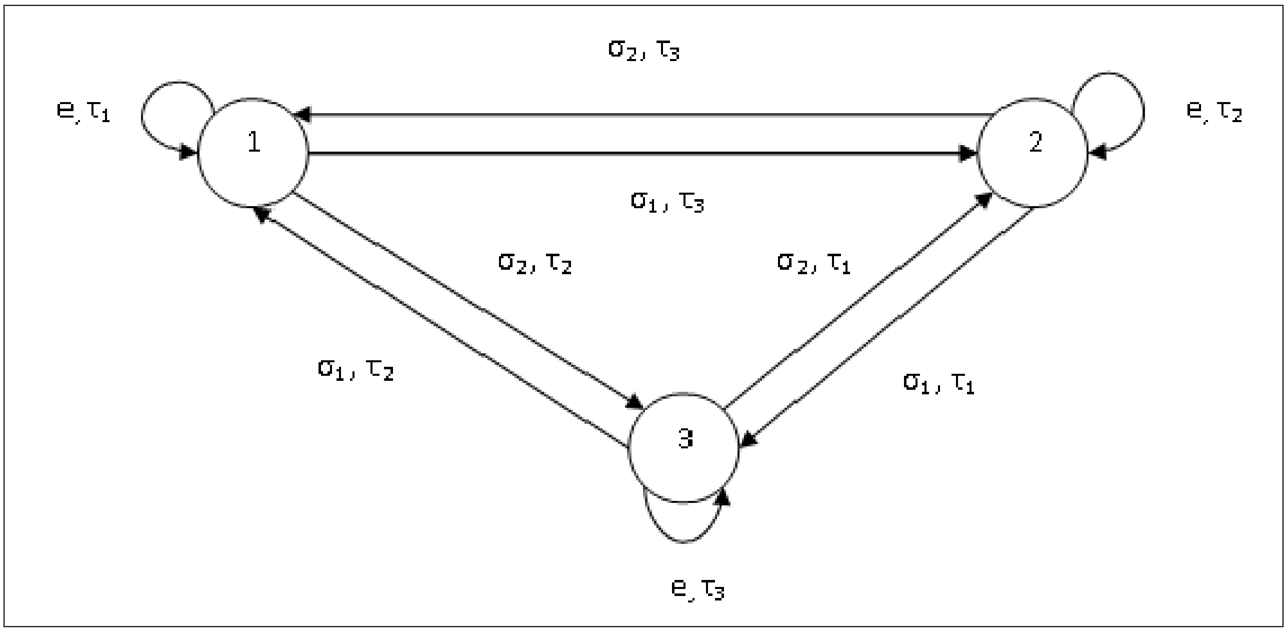
▶ *Le semi-groupe de transformations $\mathbb{Z}_2$ est un groupe de transformations .*

► *Soit E un ensemble. On note S_E le groupe des applications bijectives de E dansE(ou permutations de E) pour la loi de composition interne définie par la composition des applications. Si $E = \{1,\ 2,\ 3\}$ les éléments de S_E sont :*

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On notera ce groupe S_3, et de façon générale on notera S_n le groupe S_E pour $E = \{1, 2, ..., n\}$. Le groupe S_E est appelé groupe des permutations de l'ensemble E, ou groupe symétrique de E.



Le groupe S_E des permutations de l'ensemble E

Définition 2.3.2 [1]

Soient un ensemble fini Q et un élément $q \in Q$, on définit une application $\tilde{q} : Q \rightarrow Q$ par

$$\tilde{q}(q') = q \quad , \text{ pour tout } q' \in Q.$$

- $\widetilde{q}$ *est l'application constante défine par l'élément q.*

- *L'ensemble de toutes les applications constantes sur Q est un sous semi-groupe de $PF(Q)$noté par $\widetilde{Q}$. Nous pouvons maintenant considérer le semi-groupe de transformations $(Q, \widetilde{Q})$.*

- *Soit $X = (Q, S)$ un semi groupe de transformations on définit la fermeture $\overline{X}$ de X par $\overline{X} = (Q,\ S \cup \widetilde{Q})$.*

- *Un semi groupe de transformations $X = (Q, S)$ dite complet si:*

• $Q \neq \varnothing$.

• $qs \neq \varnothing$, *pour tout* $q \in Q$, $s \in S$.

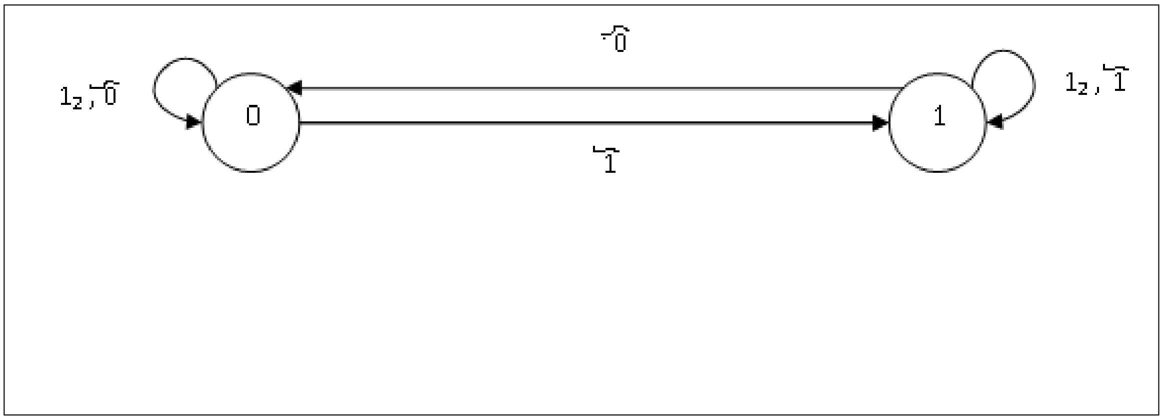
Exemple 2.3.2

▶ *pour $Q = \mathbf{2} = \{0, 1\}$ les applications constantes sur Q sont :*

$\widetilde{q}$	0	1
$\widetilde{0}$	0	0
$\widetilde{1}$	1	1

Donc $\widetilde{Q} = \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}$.

► *Et on a le semi-groupes de transformations* $\mathbf{2} = (\mathbf{2},\ \emptyset) = \{0,1\}$ *donc* $\mathbf{2}^{\bullet} = (\mathbf{2},\ \emptyset \cup 1_{\mathbf{2}})$, $\overline{\mathbf{2}} = (\mathbf{2},\ \emptyset \cup \widetilde{\mathbf{2}}) = (\mathbf{2},\ \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\ \})$ *et* $\overline{\mathbf{2}^{\bullet}} = (\mathbf{2},\ \emptyset \cup 1_{\mathbf{2}} \cup \widetilde{\mathbf{2}}) = (\mathbf{2},\ \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\ , 1_{\mathbf{2}}\})$



le semi-groupes de transformations $\overline{\mathbf{2}^{\bullet}}$

Définition 2.3.3

Soit X = (Q, S), une partition $\pi = \{H_i\}_{i \in I}$ *de Q est addmissible si :*

$$\forall i \in I, s \in S\ \exists j \in I, \textit{telque } H_i s \subseteq H_j \textit{ ou } H_i s = \varnothing$$

2.4 Morphisme de monoïdes de transformations

Définition 2.4.1 [7]

Un morphisme entre deux monoïdes de transformation $X = (Q, M)$ *et* $Y = (P, N)$ *est une paire* (φ, ψ) *où* $\varphi : Q \to P$ *est une application et* $\psi : M \to N$ *est un homomorphisme tel que* $\varphi(qm) = \varphi(q)\psi(m)$ *pour tout* $q \in Q$ *et* $m \in M$*. Il est appelé surjective (resp. Injective) si les deux applications* φ *et* ψ *sont surjective (resp.Injective). Il est un isomorphisme, si* φ *et* ψ *sont bijections.*

L'importance de semi-groupes de transformations comme des représentations plus concrètes de semigroupes abstraites viennent du théorème suivant :

Théorème 2.4.1 ***(théorème de Cayley)*** [4] *Chaque semi-groupe est isomorphe à un semi-groupe de transformations .*

Preuve.

Soit (S, $\cdot$) un semi-groupe, pour $s \in S$ on coisdére l'application $f_s \; : \; S \; \rightarrow \; S$ définie par $f_s(x) = s \cdot x$, pour tout x$\in S$.

L'ensemble $K = \{f_s \mid s \in S\}$ est un sous-semi groupe de $PF(S)$; on cosidére l'application $T \; : \; S \; \rightarrow \; K$ définie par $T(s) = f_s$, pour tout s $\in S$.

T est un homomorphisme de semi-groupes car :

Soient s, s$'$ et x $\in S$

$$\begin{array}{rcl} T(s \cdot s')(x) & = & f_{ss'}(x) \\ & = & (ss') \cdot x \\ & = & s \cdot (s'x) \qquad \text{, car S est associative} \\ & = & (f_s \circ f_s)(x) \\ & = & (T(s) \circ T(s'))(x) \end{array}$$

Et aussi T est injective car

$$\begin{array}{rcl} ker(T) & = & \{s \in S \mid T(s) = id_S\} \\ & = & \{s \in S \mid f_s = id_S\} \\ & = & \{s \in S \mid f_s(x) = x, \; \forall x \in S\} \\ & = & \{s \in S \mid s \cdot x = x, \; \forall x \in S\} \\ & = & \{1_S\} \end{array}$$

et surjective par définition, donc T est un isomorphisme . ■

Chapitre 3

Produit de semi groupes de transformations

3.1 produit direct de semi groupes

Définition 3.1.1 [2]

Le produit direct $S \times T$ *de deux semi groupes* $(S, \cdot)$ *et* $(T, *)$ *est l'ensemble des couples (s, t), où* $s \in S$ *et* $t \in T$*, muni de la loi interne:*

$$(s,t)(s',t') = (s \cdot s',\ t\ * t')\ ;\forall t\ , t' \in T, s, s' \in S$$

D'où la loi sur $S \times T$ *est associative.*

Exemple 3.1.1

Soient $S = (\mathbb{N}, +)$ *et* $T = (\mathbb{N},\ \times)$ *deux semi-groupes.*

L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *muni de la loi :* $(n, r)(m, s) = (n + m, r \times s)$ *est un produit direct de semi groupes.*

3.1.1 produit direct de semi-groupes de transformations

Définition 3.1.2

Soient $X = (Q_1, S_1)$ *et* $Y = (Q_2, S_2)$ *deux semi-groupes de transformations, on définir le produit direct par*

$$X \times Y = (Q_1 \times Q_2, S_1 \times S_2)$$

Où l'action de $S_1 \times S_2$ *sur* $Q_1 \times Q_2$ *donné par :*

$$(q_1, q_2)(s_1,\ s_2) = (q_1 s_1, q_2 s_2);\ \textit{pour tout}\ (q_1, q_2) \in Q_1 \times Q_2,\ (s_1,\ s_2) \in S_1 \times S_2.$$

3.2 Produit semi direct

3.2.1 Produit semi direct de semi groupes

Soient S et T deux semi groupes. Et soit θ un homomorphisme de T dans End(S).

Proposition 3.2.1 *L'ensemble* $S \times T$ *muni de la loi interne* $(s, t) \circledast (s', t') = (s\ \theta(t)(s'),\ t\ t')$ *est un semi groupe.*

Démonstration. Montrons que la loi $\circledast$ est associative.

Soient s, s', et $s'' \in S$ et t, t' et $t'' \in T$

$$\begin{aligned}
((s,t) \circledast (s',t')) \circledast (s'',t'') &= (s\ \theta(t)(s'),\ t\ t') \circledast (s'',t'') \\
&= (s\ \theta(t)(s')\theta(tt')(s''),\ t\ t't'') \\
&= (s\ \theta(t)(s')\theta(t)(\theta(t')(s'')),\ t\ t't'') \quad \text{,car } \theta \text{ est homomorphisme} \\
&= (s\ \theta(t)(s'(\theta(t')(s'')),\ t\ t'\ t'') \quad \text{,car } \theta(\text{t}) \in \text{End(S)} \\
&= (s\ ,t) \circledast ((s'(\theta(t')(s'')),\ t'\ t'') \\
&= (s\ ,t) \circledast ((s',t') \circledast (s'',\ t'')) \quad .
\end{aligned}$$

D'où la loi $\circledast$ est associatve sur $S \times T$ ∎

Définition 3.2.1 *Le semi groupe* $S \times T$ *muni de la loi* $(s, t) \circledast (s', t') = (s\ \theta(t)(s'),\ t\ t')$ *est appelé produit semi direct de* S *et* T *relativement à* θ *et on le note* $S \times_\theta T$.

3.2.2 produit en couronne

produit en couronne de semi groupes

-Etant données deux semi groupes S et T. On note par $S^{T^\bullet}$ l'ensemble des applications de $T^\bullet$ dans S (avec $T^\bullet = T \cup \{e\}$).

Proposition 3.2.2 [2]*L'ensemble* $S^{T^\bullet} \times T$ *muni de la loi interne* $(f, t\ ) \circ (g, t') = (f \circ g,\ t\ t')$, *où* $f \circ g \in S^{T^\cdot}$ *est définie par* $(f \circ g)(x) = f\ (x)g(xt)$, $x \in T$; $t,\ t' \in T$; $f, g \in S^{T^\bullet}$ *est un semi groupe.*

Démonstration. Si f, g, h $\in S^{T^\bullet}$ et $t, t', t" \in T$

$$\begin{aligned} ((f,t) \circ (g,t')) \circ (h,t'') &= (f \circ g,\ t\ t') \circ (h,t'') \\ &= ((f \circ g) \circ h,\ t\ t't'') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (f,t) \circ ((g,t') \circ (h,t'')) &= (f,t) \circ (g \circ h,,\ t'\ t'') \\ &= (f \circ (g \circ h),\ t\ t'\ t'') \end{aligned}$$

Si $x \in T$:

$$\begin{aligned} ((f \circ g) \circ h)\ (x) &= (f \circ g)(x)h(xt\ t') \\ &= f(x)g(xt)h(xt\ t') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ h))(x) &= f(x)(g \circ h)(xt) \\ &= f(x)g(xt)h(xt\ t') \end{aligned}$$

Alors la loi sur $S^{T^\bullet} \times T$ est associative. ∎

Définition 3.2.2 *L'ensemble* $S^{T^\bullet} \times T$ *(ou* $S \circ T$ *) muni de la loi interne est un semi groupe appelé produit en couronne (wreath product en anglais)de S et T.*

Produit en couronne de semi groupes de transformations

Définition 3.2.3 [2]

Soient $X = (Q, S)$, $Y = (P, T)$ *deux semi groupes de transformations. Le produit en couronne de X et Y est :*

$$X \circ Y = (Q \times P,\ S^P \times T)$$

telque : S^P *est l'ensemble de tout les applications de* P *vers* S.

Où l'action de $S^P \times T$ *sur* $Q \times P$ *donné par :*

$$(q,\ p)(f,\ t) = (q\ (f\ (p)), pt);\ \text{pour tout } (q,\ p) \in Q \times P,\ (f,\ t) \in S^P \times T.$$

Pour tout $(q,\ p) \in Q \times P$. *Remarquons que si* $(q,\ p) \in Q \times P$, *Alors*

$$\begin{aligned} ((q,p)(f,\ t))(g,\ t') &= (q\ (f\ (p)), pt)(g,\ t') \\ &= (q\ (f\ (p))(g(pt)), ptt') \end{aligned}$$

Exemple 3.2.1

Soient $X = \overline{\mathbf{2}} = (Q, S) = (\{0, 1\}, \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\})$, $Y = X = (P, T) = (\{0, 1\}, \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\})$ *deux semi groupes de transformations. Le produit en couronne de* X *et* Y *est :*

$$\overline{\mathbf{2}} \circ \overline{\mathbf{2}} = (Q \times P,\ S^P \times T) = (\{0, 1\} \times \{0, 1\},\ \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}^{\{0,1\}} \times \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\})$$

Les éléments de $S^P \times T$ *sont les couples* $(f,\ t)$ *où* $f \in \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}^{\{0,1\}}; t \in \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\})$.

$S^P = \{f,\ g,\ h,\ l\ \}$ *avec*

x	0	1
$f(x)$	$\widetilde{0}$	$\widetilde{0}$
$g(x)$	$\widetilde{0}$	$\widetilde{1}$
$h(x)$	$\widetilde{1}$	$\widetilde{0}$
$l(x)$	$\widetilde{1}$	$\widetilde{1}$

On peut écrire $(f,\ t)$ *comme un triple* $(f(0), f(1),\ t)$, *Donc les transformations de* $S^P \times T$ *sont :*

		00	01	10	11
$(f,\ \widetilde{0})$	$(\widetilde{0},\widetilde{0},\widetilde{0})$	00	00	00	00
$(f,\ \widetilde{1})$	$(\widetilde{0},\widetilde{0},\widetilde{1})$	01	01	01	01
$(g,\ \widetilde{0})$	$(\widetilde{0},\widetilde{1},\widetilde{0})$	00	10	00	10
$(g,\widetilde{1}\ )$	$(\widetilde{0},\widetilde{1},\widetilde{1})$	01	11	01	11
$(h,\ \widetilde{0})$	$(\widetilde{1},\widetilde{0},\widetilde{0})$	10	00	10	00
$(h,\ \widetilde{1})$	$(\widetilde{1},\widetilde{0},\widetilde{1})$	11	01	11	01
$(l,\ \widetilde{0})$	$(\widetilde{1},\widetilde{1},\widetilde{0})$	10	10	10	10
$(l,\ \widetilde{1})$	$(\widetilde{1},\widetilde{1},\widetilde{1})$	11	11	11	11

Par exemple $(0,1)(f,\widetilde{0}) = (0(f\ \ (1)), 1\widetilde{0}) = (0\widetilde{0}, 1\widetilde{0}) = (0,0) = 00$

3.3 Produit des semi-automates

3.3.1 Produit direct

Définition 3.3.1 [2]*Soient* $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta)$ *et* $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma', \delta')$ *deux semi-automates alors leurs produit direct est l' automate :*

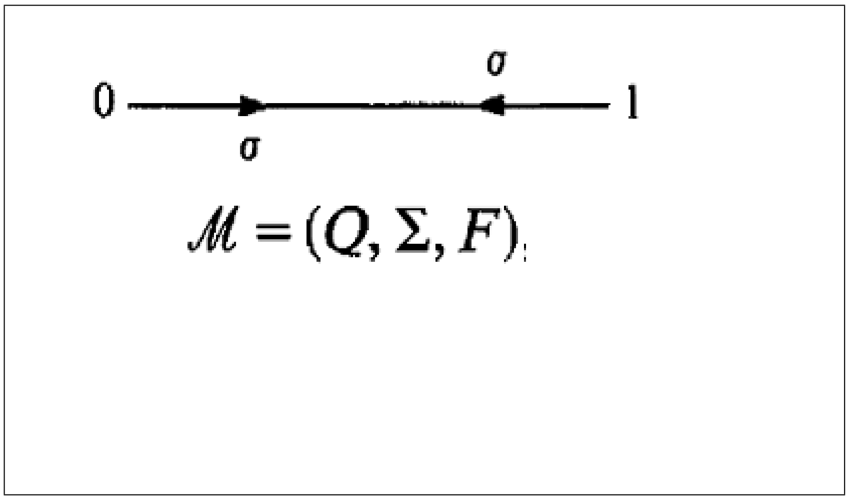
$$\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}' = \ (Q \times Q', \Sigma, \delta \wedge \delta')\ , \textit{dans le cas } \Sigma = \Sigma'$$

défini par :

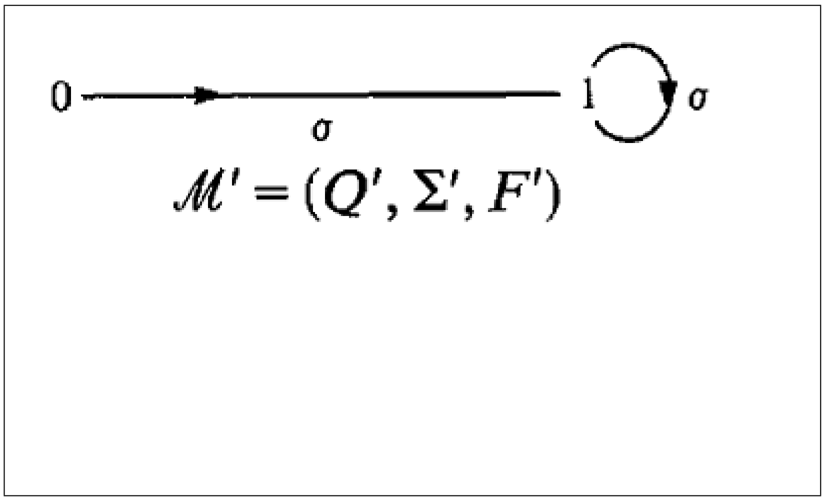
$$(\delta \wedge \delta')((q, q'), \sigma) = (\delta(q, \sigma), \delta'(q', \sigma))$$

Pour $\sigma \in \Sigma\ ,\ (q\ \ , q') \in Q\ \ \times Q'$*.*

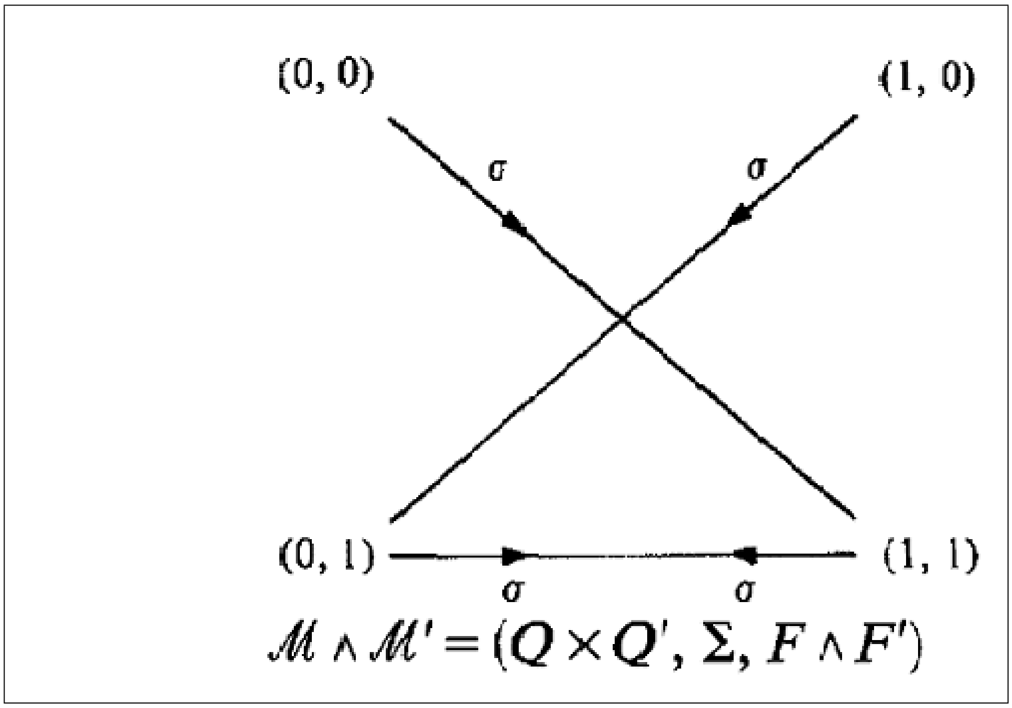
Exemple 3.3.1



Semi automate $\mathcal{M}$



Semi automate $\mathcal{M}'$



Le produit direct $\mathcal{M} \wedge \mathcal{M}'$

3.3.2 produit direct general

Définition 3.3.2 [2]

Soient $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta)$ et $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma', \delta')$ deux semi-automates on défini leurs produit direct general dans le cas $\Sigma \neq \Sigma'$ par :

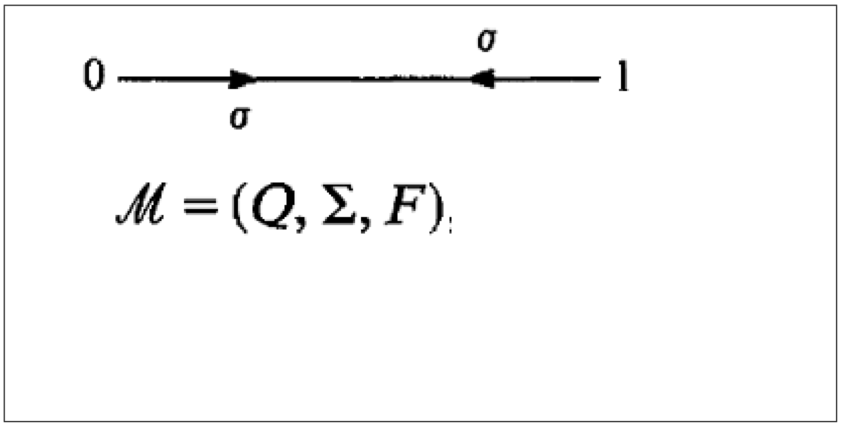
$$\mathcal{M} \times \mathcal{M}' = \ (Q \times Q', \Sigma \times \Sigma', \delta \times \delta')$$

Tels que

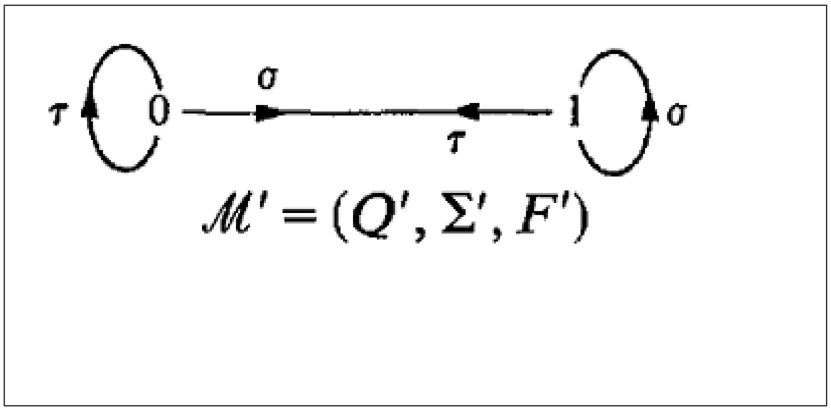
$$(\delta \times \delta')((q, q'), (\sigma, \sigma')) = (\delta(q, \sigma), \delta'(q', \sigma'))$$

Avec $(\sigma, \sigma') \in \Sigma \times \Sigma'$, $(q \ , q' \ ) \in Q \ \times Q'$.

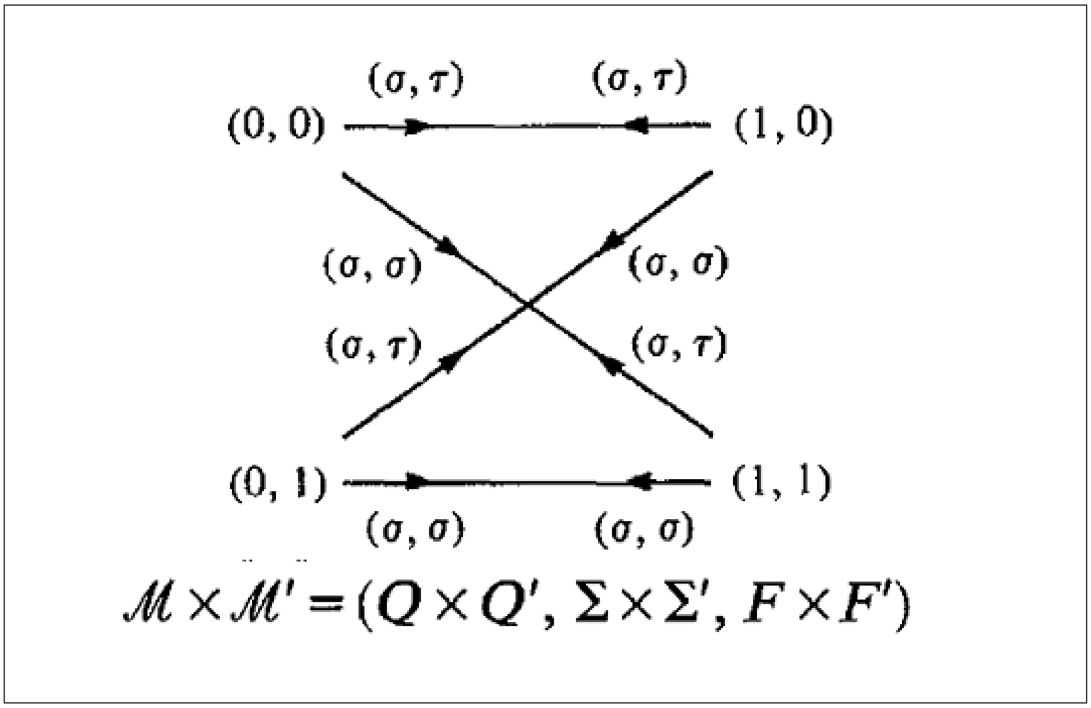
Exemple 3.3.2



Semi automate $\mathcal{M}$



Semi automate $\mathcal{M}'$



Le produit direct general $\mathcal{M}' \times \mathcal{M}$

3.3.3 Produit en cascade

Définition 3.3.3 [2]*Soient* $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta)$ *et* $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma', \delta')$ *deux semi-automates on va défini leurs produit en cascade par :*

$$\mathcal{M}\ \omega \mathcal{M}' = (Q \times Q', \Sigma', \delta^{\omega}) \text{ avec } \omega : Q' \times \Sigma' \to \Sigma$$

tel que

$$\delta^{\omega}((q, q'), \sigma') = (\delta(q, \omega(q', \sigma')), \delta'(q', \sigma'))$$

pour tout $\sigma' \in \Sigma'$, $(q\ , q') \in Q\ \times Q'$.

Exemple 3.3.3 *Soit* $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, F\ )$ *et* $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma', F')$ *avec* $Q = Q' = \{0, 1\}$; $\Sigma = \{\sigma,\ \tau\}$; $\Sigma' = \{\sigma\}$

F	0	1
$\to \sigma$	1	1
$\to \tau$	0	0

F'	0	1
$\to \sigma$	1	0

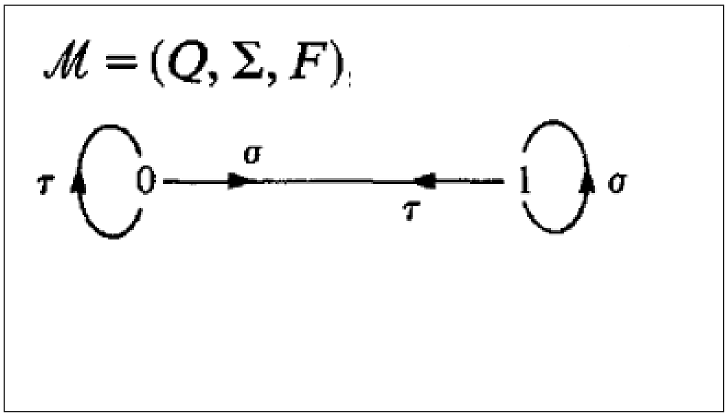
Et soit

$$\begin{array}{ccccc} \omega : Q' & \times & \Sigma' & \to & \Sigma \\ & (q',\sigma') & \longmapsto & \omega(q',\sigma') = & \begin{cases} \omega(0,\sigma) = \sigma \\ \omega(1,\sigma) = \tau \\ \end{cases} \end{array}$$

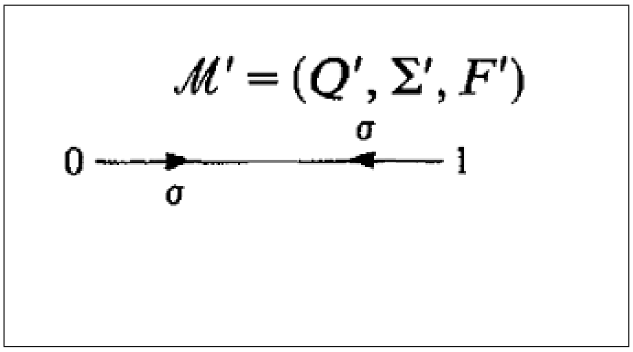
$\mathcal{M}\ \omega\mathcal{M}' = (Q \times Q', \Sigma', F^{\ \omega})$ avec

$$F^{\omega}((q,q'),\sigma') = (F\ (q,\omega(q',\sigma')),\ F'\ (q',\sigma'));\ \forall \sigma' \in \Sigma'\ ,\ (q\ ,q') \in Q\ \times Q'.$$

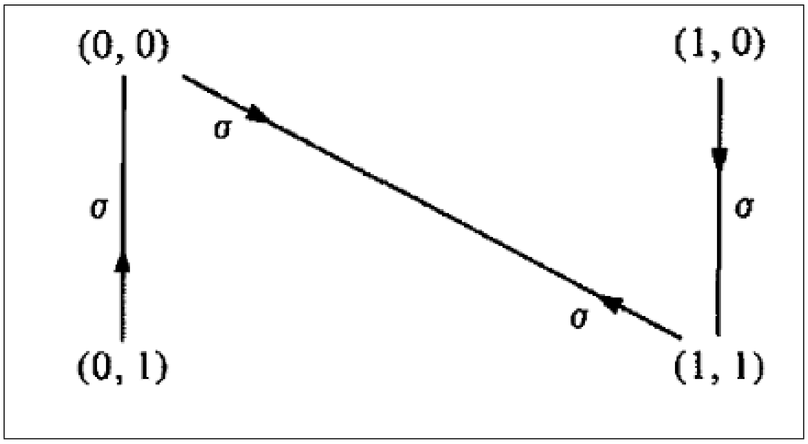
$(q\ ,q'\ )$	σ'	$\omega(q',\sigma')$	$F\ (q,\omega(q',\sigma'))$	$F'\ (q',\sigma')$	$F^{\omega}((q,q'),\sigma')$
$(0\ ,0\ )$	σ	$\omega(0,\sigma) = \sigma$	$F\ (0,\omega(0,\sigma)) = F\ (0,\ \sigma) = 1$	$F'\ (0,\sigma) = 1$	$(1\ ,1\ )$
$(0\ ,1\ )$	σ	$\omega(1,\sigma) = \tau$	$F\ (0,\omega(1,\sigma)) = F\ (0,\ \tau) = 0$	$F'\ (1,\sigma) = 0$	$(0\ ,0\ )$
$(1\ ,0\ )$	σ	$\omega(0,\sigma) = \sigma$	$F\ (1,\omega(0,\sigma)) = F\ (0,\ \sigma) = 1$	$F'\ (0,\sigma) = 1$	$(1\ ,1)$
$(1\ ,1)$	σ	$\omega(1,\sigma) = \tau$	$F\ (1,\omega(1,\sigma)) = F\ (0,\ \tau) = 0$	$F'\ (1,\sigma) = 0$	$(0\ ,0\ )$



Semi automate $\mathcal{M}$



Semi automate $\mathcal{M}'$



Le produit en cascade $\mathcal{M}\ \omega\acute{\mathcal{M}}$

3.4 Recouvrement

Définition 3.4.1 [2]

Soient $X = (Q, S)$ et $Y = (P, T)$ deux semi-groupes des transformations ; s'il une fonction $\eta : P \to Q$ surjective vérifiée , pour tout $s \in S$ il existe $t_s \in T$ telque :

$$\eta(p).s \subseteq \eta(p.t_s) \text{ , pour tout } p \in P$$

Nous dirons que Y couvre X, et écrire $X \preceq Y$, et η est un recouvrement de X par Y.

La Théorème de Décomposition de Krohn -Rhodes a un certain nombre de formulations termes d'automates, semi groupes de transformations, ou semigroupes, pour une extension.

Théorème 3.4.1 [1] ***Théorème de Décomposition de Krohn-Rhodes***

Chaque semigroupe de transforrnation $X = (Q, S)$ admet une décomposition

$$X \preceq X_1 \circ X_2 \circ \ldots \circ X_n$$

Où pour chaque index $1 \leq i \leq n$

$X_i = \overline{\mathbf{2}}$

Ou

$X_i = (G, G)$ *avec G est un groupe simple et $G \preceq S$.*

Conclusion

Au terme de ce travail, nous pouvons dire que le semi groupe de transformations est un ensemble de fonctions à partir d'un ensemble vers lui-même qui est muni de la composition de fonctions. Si de plus il contient la fonction d'identité, il est un monoïde, appelé un monoïde de transformations. Dans ce mémoire on a peut comprende les notions algébriques suivantes: semi groupe et monoïde de transformations, groupe de transformations, le produit en couronne de semi-groupes de transformations, le produit en cascade de semi automates.

Bibliographie

[1] **S.EILENBERG,** Automata, Languages and Machines, Vol B, Academic Press New York San Francisco London 1976.

[2] **W. M. L. HOLOCOMBE,** Algebraic automata theory, Cambridge University Press 1982.

[3] **M. Marchand** , Outils mathémathiques pour l'informaticien , 2 édition.

[4] **O.Maler**, On the Krohn-Rhodes Cascaded Decomposition Theorem. Time for verification. Springer Berlin Heidelberg, 2010. 260-278.

[5] **O.Carton**, Langages formels Calculabilité et Complexité, Version du 5 juin 2008.

[6] **B. MONMEGE et S. SCHMITZ,** Notes de révision : Automates et langages, Version du 24 octobre 2011, http:// Creative Commons.org.

[7] **V. Diekert**, **M. Kufleitner**, **B.Steinberg,** The Krohn-Rhodes Theorem and Local Divisors. Fundamenta Informaticae, 2012 vol. 116, no 1-4, p. 65-77.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire on essayée d'expliquer quelques concepts et propriétés sur les Semi-groupes de transformation.

Mots clés : Semi-groupe, Monoïde, semi-automate, Produit.

ABSTRACT

In this work we try to explain some of concepts and properties on the transformation semi groups.

Keywords: Semi group, Monoid, Automaton, product.

ملخص

في هذه المذكرة حاولنا شرح بعض المفاهيم و الخصائص لشبه زمرة التحويلات .

كلمات مفتاحية: شبه زمرة، نصف زمرة، شبه آلة، جداء.