

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de MASTER

Spécialité:

Mathématiques

Option:

Analyse Fonctionnelle

Par:

DJERIOUI Abdelaaziz

Sujet

Quelques propriétés de l'adjoint d'un opérateur linéaire p-sommants

Soutenu publiquement le : 03/06/ 2017, devant le jury :

Mr. Khalil SAADI	MCA. Univ de M'sila	Président
Mr. Abdelmoumen TIAIBA	MCA. Univ de M'sila	Rapporteur
Mr. Abdelaziz BELAADA	MAA. Univ de M'sila	Examineur
Mr. Maatougui BELAALA	MAA. Univ de M'sila	Examineur

Promotion 2016/2017.

Remerciements

Avant tout, j'adresse mes remerciements en premier lieu, à Dieu tout puissant pour la volonté, la santé, le courage et la patience qu'il m'a donné durant toutes ces longues années de formation.

Je tiens à remercier sincèrement Mr. Abdemoumen TIAIBA, pour avoir accepté de diriger ce mémoire, pour les conseils qu'il m'a prodigué et pour les efforts qu'il a consenti tout au long de la réalisation de ce travail, qu'il trouve ici toute ma gratitude et ma reconnaissance.

Mes remerciements vont également à tous les membres de jury qui m'ont fait l'honneur de participer au jury de mon mémoire et examiner ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes collègues, et pour leurs aides et leurs encouragements.

Enfin je ne voudrais pas oublier de remercier toute personne m'a aidé de loin ou de près à réaliser ce travail.

Merci .

Table des matières

Introduction	2
1 Notations et préliminaires	4
1.1 Espaces vectoriels	4
1.2 Espace de Banach	5
1.2.1 Espace de Banach réflexif	5
1.3 Exemples des espaces de Banach classiques	6
1.4 Opérateurs linéaires bornés	8
1.4.1 L'adjoint d'un opérateur linéaire borné	9
1.5 Espaces des suites à valeur dans un espace de Banach	11
1.6 Espace de Hilbert	14
1.6.1 Adjoint dans un Hilbert	15
2 L'espace $\pi_p(X, Y)$ et quelques fondamentales inégalités	16
2.1 Le produit tensoriel	17
2.2 Fonction de Rademacher	18
2.3 Les inégalités de Khintchine	19
2.4 Inégalité de Kahane	20
2.4.1 Série inconditionnellement sommable de X	21
2.5 Les opérateurs linéaires p -sommants	21
2.6 Relation entre $\mathcal{D}_p(X, Y)$ et $\pi_p(X, Y)$	24
3 Quelques propriétés opérationnelles de l'opérateur adjoint p-sommants	27
3.1 Propriétés opérationnelles	27

Bibliographie	31
----------------------	-----------

Résumé

Soient X et Y deux espaces de Banach. Soit u un opérateur linéaire continu de X dans Y . Dans ce mémoire on va étudier le travail de Bu et Kranz qui montrent que si l'opérateur u^* qui est l'adjoint de u est p -sommants pour $p \geq 1$ alors pour tout $q \geq 2$, u prend (presque) les séries inconditionnellement sommables de X dans un membre de $l_q \hat{\otimes}_\pi Y$ qui est le produit tensoriel projectif de l_q et Y .

Mots Clés : Espace de Banach ordonné, opérateur adjoint, opérateurs p -sommants, opérateurs positifs.

Notation

$\ \cdot\ $	: Norme.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: Produit scalaire.
$\mathcal{L}(X, Y)$	: L'espace des opérateurs linéaires continues de X dans Y .
X^*	: Dual (topologique) de X .
T^*	: L'adjoint d'opérateur T .
$\mathbb{N}$	: L'ensemble des nombres naturels.
B_X	: La boule d'unité fermée de X .
$\Pi_p(X, Y)$	: Espace des opérateurs p – sommants.
$D_p(X, Y)$	: Espace des opérateurs fortement p – sommants.
$L(E, F)$	: L'espace des opérateurs linéaires $T : E \rightarrow F$.
$B(X, Y)$	: Espace des opérateurs borné $T : E \rightarrow F$.

Introduction

Plusieurs chercheurs en Mathématiques a investi à la théorie des opérateurs p –sommants par exemple J.S.Cohen [9] et H Apiola [4] faisons des travaux sur les opérateurs linéaires p –sommants aussi pour les linéaires avec des adjoints p –sommants où ils montrent que pour un espace de Banach X et $1 < p < \infty$ on peut exprimer le produit tensoriel projectif de l_q et X . note $l_q \hat{\otimes}_{\pi} X$ comme un espace de Banach de suites $l_q\langle X \rangle$. Pour plus) dinformations nous vous référons (Q. Bu, J. Diestel [10]). A l’aide de l’espace de Banach $l_q\langle X \rangle$ et les inégalités de Khinchin et de Kahane aussi le Théorème de domination de Pietsch Q.Bu [11] à déduire une propriété des opérateurs p –sommants qui est : ce dernier type d’opérateurs ont des espaces de Hibert comme domaine. Aussi Cohen [9] à déduire directement de l’adjoint, la propriétés suivante si u est *fortement* p –sommants. Alors u^* est p^* –sommants dans le même cadre d’étude concernant la théorie des opérateurs et leur sommabilité. On a préféré dans ce mémoire de prendre en détail et profondément un travail fiat par Q.Bu et P.T.Kranz en 2005 voir [12]. La dont les auteurs ont montré que pour un opérateur linéaires continu u d’un espace de Banach X dans un autre de même nature. Si u^* l’opérateur adjoint de u est p –sommants pour les réels $q \geq 2$, alors u prendre (presque) les séries inconditionnellement sommables de X dans un membre de $l_q \hat{\otimes}_{\pi} Y$ qui est le produit tensoriel projectif de l_q et Y . Ce mémoire est construisait de trois chapitres.

Dans un initiative chapitre on va citer une collection forme de quelques définitions, propriétés et formules de bases qui nous sera utile à la suite de notre travail. Par exemples les espaces vectoriels, les Banach, les opérateurs linéaires et quelques standards inégalités. A la fin on porte un résumé d’identification pour quelques espaces de suites connus.

Dans un deuxième chapitre on va mentionner quelques concepts, résultats et théorèmes fondamentaux qui nous sera utiles à la suite de notre étude sûr tout dans les démonstrations

des théorèmes principaux du troisième chapitre qui sont le but de ce mémoire. Comme exemple des concepts on a définie le produit tensoriel en générale aussi les produits tensoriels projectif et injectif. En cours de ce chapitre on a choisi de faire l'annonce de l'espace des opérateurs p —sommants. En effet, comme principal outil on va citer le Théorème de domination de Pietsch. A la fin de ce chapitre on a prés l'attention de faire une représentation des deux importantes inégalités qui sont les inégalités de Khinchin et de Kahane. Sans oublier de rappeler les théorèmes références qui nous serons besoin au troisième chapitre.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude approfondie des théorèmes qui sont l'original résultat de [12]. Qui est la prouve si u^* l'opérateur adjoint de u est p —sommants on a bien l'existence de quelques propriétés de sommabilité séquentielles pour l'opérateur u , tous les résultats de ce chapitre sont articulés sur l'espace $l_p\langle X \rangle$.

Chapitre 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre on va citer une collection de quelques définitions, propriétés et formules de bases qui nous sera utile a la suite de notre travail. Par exemples les espaces vectoriels, les Banach, les opérateurs linéaires et quelques standards inégalités. A la fin on porte un résumé d'identification pour quelques espaces des suites connus.

1.1 Espaces vectoriels

Définition 1.1.1 *un espace vectoriel est un ensemble formé des vecteurs, de sorte que l'on puisse additionner (et soustraire) deux vecteurs u, v pour en forme troisième $u+v$ (ou $u-v$) et aussi a fin que l'on puisse multiplier chaque vecteur u d'un facteur $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ pour obtenir un vecteur λu .*

Définition 1.1.2 *Un $\mathbb{k}$ -espace vectoriel est un ensemble non vide E muni :*

- *D'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :*

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x + y. \end{aligned}$$

- *D'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{k} \times E$ dans E :*

$$\begin{aligned} \mathbb{k} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x. \end{aligned}$$

1.2 Espace de Banach

Définition 1.2.1 Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans un espace vectoriel normé X .

1. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un point α de X si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1, n \geq N \implies \|x_n - \alpha\| < \varepsilon.$$

2. On dit que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1, m, n \geq N \implies \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Définition 1.2.2 (Espace de Banach) Soit X un espace vectoriel normé, on dit que c'est un espace de Banach s'il est complet. Autrement dit, X est complet si toute suite de Cauchy dans X est convergente.

Théorème 1.2.1 Un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé complet. Autrement dit X est un espace de Banach si et seulement si toute série normalement convergente est une série convergente. La boule unité fermée de l'espace X est définie par

$$B_X = \{x \in X, \|x\| \leq 1\}.$$

1.2.1 Espace de Banach réflexif

Soit X un espace de Banach et soit X^* son dual topologique. On définit l'espace bidual X^{**} de X comme étant l'espace dual de X^* . Il existe une application linéaire canonique $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ associant à $x \in X$ la forme linéaire $J_X(x) : X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$J_X(x)(x^*) = \langle J_X(x), x^* \rangle := \langle x, x^* \rangle.$$

Pour toute forme linéaire $x^* \in X^*$. Cette définition entraîne que l'application linéaire $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ est une isométrie, en effet, pour tout $x \in X$ on a

$$\|J_X(x)\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle J_X(x), x^* \rangle| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle| = \|x\|.$$

Alors on peut dire que J_X est une injection canonique et on écrit

$$J_X : X \hookrightarrow X^{**}.$$

En général l'application J_X n'est pas surjective.

Définition 1.2.3 Soit X un espace de Banach. On dit que X est réflexif si J_X est surjective. i.e. $J_X(X) = X^{**}$ isométriquement. Lorsque X est réflexif on identifie implicitement X et X^{**} (à l'aide de l'isomorphisme J_X).

Proposition 1.2.1 Soit X un espace vectoriel normé, alors toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Preuve. Soit $(x_n)_n$ suite converge vers point α de X on a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1, I \geq N \implies \|x_n - \alpha\| < \varepsilon, I \in \{n, m\}.$$

Donc, pour tout $I \geq N$, on a

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - \alpha\| + \|\alpha - x_m\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

et donc $x_n - x_m \rightarrow 0$ pour $n, m \rightarrow \infty$. ■

1.3 Exemples des espaces de Banach classiques

Pour $p > 1$ on note p^* le conjugué de p défini par la formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$. On pose $p^* = \infty$ si $p = 1$.

(1) L'espace $C(K)$

Soit K un espace topologique compact. L'espace de Banach $C(K)$ est défini par :

$$C(K) = \{f : K \longrightarrow \mathbb{K} : \text{continue}\}.$$

Muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_K |f(x)|, f \in C(K).$$

(2) L'espace L^p

Soit $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par

$$L^p(\Omega, \mathcal{M}, \mu) = L^p(\mu) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ mesurable et } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

$L^p(\mu)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_p = \left(\int |f(x)|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour $p = \infty$ nous avons $f \in L^\infty(\mu)$ s'il existe $C > 0$ telle que

$$|f| \leq C. \mu \text{ p.p.} \quad (1)$$

$L^\infty(\mu)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C, \text{ vérifier (1)}\}.$$

(3) L'espace ℓ_p

Soit $1 \leq p < \infty$. On note par ℓ_p l'espace de Banach des suites scalaires p -sommables

$$\ell_p = \ell_p(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \|(x_i)_i\|_p := \left(\sum_{i \geq 0} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Pour $p = +\infty$

$$\ell_\infty = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \|(x_i)_i\|_\infty := \sup_i |x_i| < +\infty \right\}.$$

La propriété suivante, que nous énonçons sans démonstration, est une conséquence du théorème de Hahn-Banach sur le prolongement des formes linéaires.

Proposition 1.3.1 [5] *Soit X un espace de Banach. Pour tout $x \in X$ on a*

$$\|x\| = \sup_{\|x^*\| \leq 1} |\langle x, x^* \rangle|. \quad (2)$$

Ceci suggère la définition suivante.

Définition 1.3.1 *Soit X un espace de Banach. On dit qu'un sous-ensemble K de B_{X^*} est normant si*

$$\|x\| = \sup_{x^* \in K} |\langle x, x^* \rangle|, \text{ pour tout } x \in X. \quad (3)$$

On définit aussi l'espace des suites scalaires convergentes vers zéro

$$c_0 = \left\{ x = (x_i)_i \subset \mathbb{K} : \lim_{i \rightarrow +\infty} |x_i| = 0 \right\}$$

cet espace est un sous-espace fermé de ℓ_∞ muni de la norme sup.

1.4 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.4.1 Soient X, Y deux espaces normés et $u : X \rightarrow Y$ une application. Elle est linéaire si et seulement si,

1. $\forall x, y \in X : u(x + y) = u(x) + u(y)$.
2. $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

On note $L(X, Y)$ l'espace des applications linéaires, on le muni de deux opérations algébriques suivantes :

1. $\forall x \in X : (u_1 + u_2)(x) = u_1(x) + u_2(x)$.
2. $\forall x \in X, \forall \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda u)(x) = \lambda(u(x))$.

Définition 1.4.2 Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ entre deux espaces de Banach est dit borné s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|Tx\| \leq C \|x\|, \text{ pour tout } x \in X.$$

Dans ce cas, pour tout $x \in X$, on définit

$$\begin{aligned} \|T\| &:= \inf \{C : \|Tx\| \leq C \|x\|\} \\ &= \sup_{x \in B_X} \|Tx\| \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \\ &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \end{aligned} \tag{4}$$

On note par $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace vectoriel des opérateurs linéaires bornés de X dans Y qui est un espace de Banach sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) muni de la norme définie par (4).

Proposition 1.4.1 Soient X et Y deux espaces normés. Si Y est un espace de Banach alors $\mathcal{L}(X, Y)$ est aussi un espace de Banach.

Le dual topologique

L'espace des formes linéaires continues sur X est dit le dual topologique de X , noté X^* , i.e ($X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$). Pour $x^* \in X^*$ et $x \in X$ on notera généralement $\langle x, x^* \rangle$ au lieu de $x^*(x)$.

1.4.1 L'adjoint d'un opérateur linéaire borné

Définition 1.4.3 Soient X, Y deux espaces vectoriels normés. Pour un opérateur linéaire borné $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, on définit l'opérateur $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ par

$$\langle T(x), y^* \rangle = \langle x, T^*(y^*) \rangle \quad \forall x \in X, y^* \in Y^*.$$

est appelé l'adjoint de T .

Proposition 1.4.2

(1) Soit $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ alors T^* linéaire et $\|T\| = \|T^*\|$.

(2) L'application suivante est linéaire

$$\begin{aligned} I : \mathcal{L}(X, Y) &\longrightarrow \mathcal{L}(Y^*, X^*) \\ T &\longmapsto I(T) = T^*. \end{aligned}$$

(3) Pour tout $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ et $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$ on a $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.

Preuve.

(1) Soient $y_1^*, y_2^* \in Y^*$, et $\alpha \in \mathbb{k}$ on a

$$\begin{aligned} \langle x, T^*(\alpha y_1^* + y_2^*) \rangle &= \langle T(x), \alpha y_1^* + y_2^* \rangle \\ &= \alpha \langle T(x), y_1^* \rangle + \langle T(x), y_2^* \rangle \\ &= \langle x, \alpha T^*(y_1^*) \rangle + \langle x, T^*(y_2^*) \rangle \\ &= \langle x, \alpha T^*(y_1^*) + T^*(y_2^*) \rangle. \end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in X$ on a

$$T^*(\alpha y_1^* + y_2^*) = \alpha T^*(y_1^*) + T^*(y_2^*).$$

Ce qui implique que T^* est linéaire. Il est aussi borné puisque

$$\begin{aligned} |y^*(T(x))| &\leq \|y^*\|_{Y^*} \|T(x)\|_Y \\ &\leq \|y^*\|_{Y^*} \|T\| \|x\|_X, \end{aligned}$$

par conséquence

$$\begin{aligned}\|T^*(y^*)\|_{X^*} &= \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|T^*(y^*)(x)|}{\|x\|} \\ &\leq \|y^*\|_{Y^*} \|T\|,\end{aligned}$$

ce qui implique que $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ et $\|T^*\| \leq \|T\|$.

Pour montrer l'inégalité inverse, nous prouvons que

$$\|T(x)\|_Y \leq \|T^*\| \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

L'opérateur adjoint implique que

$$\begin{aligned}|y^*(T(x))| &\leq \|T^*(y^*)\|_{X^*} \|x\|_X \\ &\leq \|y^*\|_{Y^*} \|T^*\| \|x\|_X,\end{aligned}$$

et

$$\sup_{\|y^*\| \neq 0} \frac{|y^*(T(x))|}{\|y^*\|_{Y^*}} \leq \|T^*\| \|x\|_X \quad \forall x \in X.$$

Ce qui termine la démonstration.

■

Remarque 1.4.1 Soient X, Y deux espaces normés et $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Alors le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ J_X \downarrow & & \downarrow J_Y \\ X^{**} & \xrightarrow{T^{**}} & Y^{**} \end{array}$$

Autrement dit, pour tout $x \in X$, on a $T^{**}(J_X(x)) = J_Y(T(x))$.

Isomorphisme, isométrie

L'application linéaire $T : X \rightarrow Y$ est dite isomorphisme si T est bijective continue et T^{-1} continue.

De plus si $\|T(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$, on dit que T est une isométrie, si l'isomorphisme $T : X \rightarrow T(X)$ vérifie $\|T(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$, on dit que T est une isométrie injective et on écrit $T : X \hookrightarrow Y$.

Inégalité de Hölder généralisé

Soient $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $(x_i)_{i=1}^n, (y_i)_{i=1}^n$ deux suites finies d'éléments de X et $p, q, r \in [1, +\infty[$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^n (\|x_i\| \|y_i\|)^r \right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (5)$$

1.5 Espaces des suites à valeur dans un espace de Banach

Soient X et Y deux espaces de Banach.

- (1) On désignera par $\ell_p(X)$ l'espace de Banach des suites p -sommables d'éléments de X dont la norme est

$$\|(x_i)_i\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } 1 \leq p < \infty,$$

et par $\ell_{\infty}(X)$ l'espace de Banach des suites bornées, normé par

$$\|(x_i)_i\|_{\infty} = \sup_i \|x_i\|.$$

- (2) On désignera par $c_0(X)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)_i$ d'éléments de X convergeant vers 0. Notons que $c_0(X)$ est un sous-espace fermé de $\ell_{\infty}(X)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$.
- (3) On désignera par $\ell_{p,\omega}(X)$ l'espace de Banach des suites $(x_i)_i$ d'éléments de X faiblement p -sommables, c'est à dire des suites $(x_i)_i$ vérifiant

$$(\langle x_i, x^* \rangle)_i \in \ell_p, \quad \text{pour tout } x^* \in X^*,$$

muni de la norme définie par

$$\|(x_i)_i\|_{p,\omega} := \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|(\langle x_i, x^* \rangle)_i\|_p,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} \|(x_i)_i\|_{p,\omega} = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x_i, x^* \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \|(x_i)_i\|_{\infty,\omega} = \|(x_i)_i\|_{\infty} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

- Si $1 \leq p < \infty$, on a

$$\| (x_n)_n \|_p = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| : (x_n^*)_{n=1}^\infty \in X^*, \| (x_n^*)_{n=1}^\infty \|_{p^*} \leq 1 \right\} \quad (6)$$

particulièrement, pour $X = \mathbb{K}$, on a

$$\| (x_n)_n \|_p = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n \right| : \| (\lambda_n)_{n=1}^\infty \|_{p^*} \leq 1 \right\}.$$

- $\| (x_n)_n \|_{p,\omega} = \sup \left\{ \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n \right\| : \| (\lambda_n)_{n=1}^\infty \|_{p^*} \leq 1 \right\}$
- Pour $p = \infty$, on a $\ell_{\infty,\omega}(X) = \ell_\infty(X)$ isométriquement.
- Soit $1 \leq p < +\infty$, alors, $\ell_p(X) \subset \ell_{p,\omega}(X)$.

(4) On désignera par $\ell_p \langle X \rangle$ l'espace de Banach des suites $(x_n)_n$ d'éléments de X Cohen fortement p -sommables, c'est à dire des suites $(x_n)_n$ vérifiant

$$\ell_p \langle X \rangle = \left\{ \bar{x} = (x_n)_n \in X : \sum_{n=1}^\infty |\langle \zeta_n, x_n \rangle|^p < \infty, \forall \zeta_n \in \ell_{p^*,\omega}(X^*) \right\}$$

Théorème 1.5.1 $\ell_p \langle X \rangle$ est un espace normé pour la norme $\| (x_n)_{n \geq 1} \|_{\mathbf{c},\mathbf{p}}$ définie par: pour tout $x = (x_n)_{n \geq 1} \in \ell_p \langle X \rangle$, on a

$$\| (x_n)_{n \geq 1} \|_{\mathbf{c},\mathbf{p}} = \sup_{\| (\zeta_n)_{n \geq 1} \|_{p^*,\omega} \leq 1} \sum_{n=1}^\infty |\langle \zeta_n, x_n \rangle|.$$

Proposition 1.5.1

(1) Soit $1 < p < \infty$, on a

$$\ell_p \langle X \rangle \subset \ell_p(X) \subset \ell_{p,\omega}(X),$$

pour tous $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p \langle X \rangle$;

$$\| (x_n)_{n \geq 1} \|_{p,\omega} \leq \| (x_n)_{n \geq 1} \|_p \leq \| (x_n)_{n \geq 1} \|_{\mathbf{c},\mathbf{p}}.$$

(2) Si $p = 1$, on a

$$\ell_1 \langle X \rangle = \ell_1(X) \text{ et } \| (x_n)_{n=1}^\infty \|_1 = \| (x_n)_{n=1}^\infty \|_{c,1}.$$

Preuve.

(1) On a : $\ell_p(X) \subset \ell_{p,\omega}(X)$ et $\|(x_n)_n\|_{p,\omega} \leq \|(x_n)_n\|_p$.

D'autre part, soit $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p(X)$, d'après (6) et comme $B_{\ell_{p^*}}(X) \subset B_{\ell_{p^*,\omega}}(X)$ on a

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*}}(X)} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &\leq \sup_{(x_n^*)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_{p^*,\omega}}(X)} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &= \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{c,p}. \end{aligned}$$

Alors, $\ell_p(X) \subset \ell_p(X)$ et $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_p \leq \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{c,p}$.

(2) Pour $p = 1, p^* = \infty$, soit $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_1(X)$, d'après (6) on a :

$$\begin{aligned} \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \\ &= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_\infty}(X)} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_{\infty,\omega}}(X)} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\ &= \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{c,1}. \end{aligned}$$

■

Proposition 1.5.2 $\ell_p(X)$ est un espace de Banach.

Preuve. D'après le Théorème 1.5.1 $\|\cdot\|_{c,p}$ est une norme. Donc, il suffit de montrer que $\ell_p(X)$ est un sous-espace vectoriel complet.

Soit $(x_n)_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy dans $\ell_p(X)$ telle que $x_n = (x_{n,i})_{i=1}^\infty$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0 : \|x_n - x_m\|_{c,p} < \varepsilon$$

d'après la Proposition 1.5.1 on a

$$\|x_n - x_m\|_p \leq \|x_n - x_m\|_{c,p} < \varepsilon$$

donc $(x_n)_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $l_p(X)$. On pose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \text{ et } x = (x_i)_{i=1}^\infty.$$

On a

$$\|x_n - x_m\|_{c,p} = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^\infty \in B_{l_{p^*,\omega}(X)}} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i} - x_{m,i}) \right| < \varepsilon,$$

pour $m \rightarrow \infty$, cela donne

$$\sup_{(x_i^*)_{i=1}^\infty \in B_{l_{p^*,\omega}(X)}} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i} - x_i) \right| < \varepsilon.$$

Ce qui implique que $\|x_n - x\|_{c,p} < \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned} \|x\|_{c,p} &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_i) \right| : \|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*,\omega} \leq 1 \right\} \\ &= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_i - x_{n,i}) + x_i^*(x_{n,i}) \right| : \|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*,\omega} \leq 1 \right\} \\ &\leq \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*,\omega} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_i - x_{n,i}) \right| + \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^\infty\|_{p^*,\omega} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i}) \right| \\ &< \varepsilon + \|x_n\|_{c,p} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Donc, $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell_p(X)$, alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$ dans $\ell_p(X)$, d'où $\ell_p(X)$ est complet. ■

1.6 Espace de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont des espaces de Banach muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note en général par H . L'espace de Hilbert qui a été introduit par David Hilbert en 1909 pour développer l'analyse fonctionnelle abstraite. La norme induite par un produit scalaire définie par

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Remarquons que, toutes les propriétés de la norme sont vérifiées, due à la notion de produit scalaire, sauf peut être l'inégalité triangulaire, où on doit faire intervenir l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|, \forall f, g \in H.$$

Définition 1.6.1 Soient H et H' deux espaces de Hilbert sur le même corps $\mathbb{k}$ et soit f un opérateur de H dans H' , on dit que f est un opérateurs linéaire bornés de H dans H' . Si f est linéaire et il existe une constante $M > 0$ tq :

$$\|f(x)\|_{H'} \leq M \|x\|_H \quad \forall x \in H.$$

Notation 1.6.1

- L'espaces des opérateurs linéaire bornés de H dans H' est noté $\mathcal{L}(H, H')$.
- L'ensemble des opérateurs bornés de H dans lui même est noté par $\mathcal{L}(H)$.

1.6.1 Adjoint dans un Hilbert

Définition 1.6.2 Soit H un Hilbert et $T \in \mathcal{L}(H)$. L'adjoint de T est l'opérateur linéaire borné, note T^* , vérifiant

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^* x, y \rangle \quad \forall x, y \in H. \quad (7)$$

Théorème 1.6.1 (Opérateur adjoint) Soit $T \in \mathcal{B}(H, K)$ il existe un opérateur unique $T^* \in \mathcal{B}(K, H)$ tel que :

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^* x, y \rangle \quad \forall x, y \in H \times K.$$

De plus $\|T\| = \|T^*\|$, T^* est appelé l'adjoint de T .

Proposition 1.6.1 Soit H, K, L trois espaces de Hilbert, soit $T : H \rightarrow K$ et $S : K \rightarrow L$ deux opérateurs linéaire bornés, alors on a :

1. $(T^*)^* = T$.
2. $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$.
3. $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$.

Chapitre 2

L'espace $\pi_p(X, Y)$ et quelques fondamentales inégalités

Dans ce deuxième chapitre on va mentionner quelques concepts, résultats et théorèmes fondamentaux qui nous seront utiles pour la suite, sur tout dans les démonstrations des théorèmes principaux du troisième chapitre qui sont le but de ce mémoire. Comme exemple des concepts on a défini le produit tensoriel en générale aussi les produits tensoriels projectif et injectif. En cours de chapitre on a choisi faire l'annonce de l'espace des opérateurs p -sommants. En effet comme principal outil on va citer le théorème de domination de Pietsch. A la fin de ce chapitre on a pris l'attention de faire une représentation des deux importantes inégalités qui sont les inégalités de Khinchin et de Kahane. Sans oublier de rappeler les théorèmes références qui nous seront utiles au troisième chapitre.

2.1 Le produit tensoriel

Définition 2.1.1 Soient X et Y deux espaces vectoriels sur un corps commutatif K . Il existe un espace vectoriel, noté $X \otimes Y$, et une application bilinéaire

$$\varphi : X \times Y \longrightarrow X \otimes Y, \text{ on pose } (\varphi(x, y) = x \otimes y)$$

ayant la propriété suivante : pour tout espace vectoriel G , et pour toute application bilinéaire u de $X \times Y$ dans G , il existe une et une seule application linéaire v de $X \otimes Y$ dans G telle que

$$u = v \circ \varphi \text{ ou encore } \forall x \in X, y \in Y, u(x, y) = v(x \otimes y).$$

Soient X et Y deux espaces de Banach on note par

$$X \otimes Y = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i : n \in \mathbb{N}^*, x_i \in X, y_i \in Y \right\}.$$

Sur l'espace vectoriel $X \otimes Y$ on va définir deux normes.

Norme tensorielle projective

Définition 2.1.2 Soient X, Y deux espaces de Banach. La norme projective π sur $X \otimes Y$ est

$$\pi(u) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^n \|x_i\| \|y_i\| : u = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\}$$

tel que $\pi : X \otimes Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ et $\forall u \in X \otimes Y$.

On note par $X \otimes_\pi Y = (X \otimes Y, \pi)$ et par $X \overset{\wedge}{\otimes}_\pi Y$ le complété de $X \otimes_\pi Y$.

Norme tensorielle injective

Définition 2.1.3 On définit la norme injective de u par

$$\varepsilon(u) = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x^*(x_i) y^*(y_i) \right|, x^* \in B_{X^*}, y^* \in B_{Y^*} \right\}.$$

Notation 2.1.1 On note $X \otimes_\varepsilon Y$ le produit tensoriel $X \otimes Y$ muni de la norme injective.

Le complété de $X \otimes_\varepsilon Y$ pour cette norme sera noté $X \overset{\vee}{\otimes}_\varepsilon Y$, qui appelé le **produit tensoriel injective** de X et Y .

Théorème 2.1.1 (Bu et Diestel) Pour un espace de Banach X et $1 < p < \infty$, $\ell_p \langle X \rangle$ isométriquement isomorphe à $\ell_p \overset{\wedge}{\otimes}_\pi X$, le produit tensoriel projectif de ℓ_p et X .

2.2 Fonction de Rademacher

Il est remarquable que les fonctions de Rademacher jouent un rôle très important dans l'inégalité de Khintchine. On définit les fonctions de Rademacher $r_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, par

$$r_n(t) = \text{sign}(\sin(2^n \pi t)).$$

La caractéristique la plus importante de ces fonctions est qu'elles ont des propriétés d'orthogonalités. On peut ajouter d'où elles viennent :

- Si $n < m$, r_n est constant sur chacun des "Périodes" de r_m , et $\int r_n \cdot r_m = 0$.
- Si $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ et $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont positifs ou nuls, alors

$$\int_0^1 r_{n_1}^{p_1}(t) \dots r_{n_k}^{p_k}(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si tous les } p_j \text{ sont pairs} \\ 0 & \text{si non} \end{cases}.$$

Une conséquence immédiate est que les r_n forment une suite orthonormale dans $L_2[0, 1]$ et on a :

$$\int_0^1 \left| \sum_n \alpha_n r_n(t) \right|^2 dt = \sum_n |\alpha_n|^2 \quad \forall (\alpha_n) \in \ell_2.$$

Les fonctions de Rademacher sont aussi importantes d'un point de vue combinatoire. Remarquer que comme t varie à travers $[0, 1]$, le vecteur $(r_1(t), \dots, r_n(t))$ représente tous les choix possibles de signes $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ où $\varepsilon_i = \pm 1$. De plus, chaque choix particulier $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est également probable, se produisant sur un ensemble de mesures 2^{-n} . Nous force à dire que $\sum_{k=1}^n \alpha_k r_k(t) = \sum_{k=1}^n \pm \alpha_k$ pour certains "aléatoire" choix de signes $\pm$. En particulier,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k r_k(t) \right| dt &= 2^{-n} \sum_{\text{tout } \varepsilon_i = \pm 1} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \alpha_k \right| \\ &= \text{Moyenne de } \left| \sum_{k=1}^n \pm \alpha_k \right| \text{ sur tous les choix } \pm. \end{aligned}$$

Une importante inégalité classique due à Khintchine en 1923 nous dit comment estimer cette moyenne. Noter aussi cela

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k r_k(t) \right| = \sum_{k=1}^n |\alpha_k|.$$

Car ces fonctions de Rademacher sont indépendantes il peut être montré que

$$\int_0^1 f_1(r_1(t)) \cdots f_n(r_n(t)) dt = \left(\int_0^1 f_1(r_1(t)) dt \right) \cdots \left(\int_0^1 f_n(r_n(t)) dt \right),$$

pour un n et toutes fonctions continues $f_1, f_2, \dots, f_n$. Quelques auteurs prennent cette formule comme la définition de la propriété d'indépendance et nous pourrions faire le même (seulement la conséquence d'indépendance qui nous aurons besoin).

2.3 Les inégalités de Khintchine

C'est un fait d'analyse de Fourier classique que toute série trigonométrique lacunaire, telle que $(\sin(2^n \pi t))$, satisfait

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \sin(2^k \pi t) \right\|_p \approx \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

pour chaque $0 < p < \infty$. Ce n'est pas trop surprenant que les Rademacher classent des parts cette propriété.

Définition 2.3.1 Une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'un espace de Banach X est appelée Rademacher-sommable, et on note $(x_n) \in \text{Rad}(X)$ si la série $\sum_n r_n x_n$ converge pour (Lebesgue), pour tout $t \in [0, 1]$. Dans ce cas on a

$$\text{Rad}(X) = \left\{ (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}} : \int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) x_n \right\|^2 dt < \infty \right\}.$$

Avec la norme

$$\|(x_n)_n\|_{\text{Rad}(X)} = \left(\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^{\infty} r_n(t) x_n \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Théorème 2.3.1 (Inégalité de Khintchine [6], P. 10) Pour tout $1 < p < \infty$, il existe des constantes positives A_p et B_p telles que pour toute suite $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \ell_2$, on ait :

$$A_p \cdot \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k r_k(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \cdot \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En général, on ne peut pas remplacer la valeur absolue par la norme d'un espace de Banach.

Démonstration. On traite ici le cas où $p = 4$, qui est le cas que nous utiliserons plus loin.

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \left| \sum_{k \leq n} \alpha_k r_k(t) \right|^4 dt \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{i \leq n} \alpha_i r_i(t) \right) \left(\sum_{j \leq n} \alpha_j r_j(t) \right) \left(\sum_{\ell \leq n} \alpha_\ell r_\ell(t) \right) \left(\sum_{I \leq n} \alpha_I r_I(t) \right) dt \\
 &= \sum_{i, j, \ell, I \leq n} \alpha_i \alpha_j \alpha_\ell \alpha_I \int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_\ell(t) r_I(t) dt \\
 &= 3 \sum_{i, j \leq n} \alpha_i^2 \alpha_j^2 - 2 \sum_{i \leq n} \alpha_i^2 \\
 &\leq 3 \sum_{i \leq n} \alpha_i^2 \sum_{ij \leq n} \alpha_j^2. \\
 &= 3 \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \right)^2. \quad \text{Par suite, on a :}
 \end{aligned}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k r_k \right\|_{L^2[0,1]} \leq \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k r_k \right\|_{L^4[0,1]} \leq 3^{\frac{1}{4}} \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k r_k \right\|_{L^2[0,1]}.$$

■

Donc on peut poser $B_4 = 3^{\frac{1}{4}}$ et $A_4 = 1$.

Le cas général est traité dans les pages 11 – 12 de [6]

2.4 Inégalité de Kahane

Soit $1 < p, q < \infty$. Il existe alors une constante $K_{p,q} > 0$ telle que pour tout espace de Banach X et $x_1, \dots, x_n \in X$ on ait

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \leq K_{p,q} \cdot \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Théorème 2.4.1 (Hoffmann-Jorgensen) [6] Soit $(x_n)_n$ une suite dans un espace de Banach X . Alors la série de Rademacher $\sum_n r_n(t) x_n$ converge en X pour presque tout $t \in [0, 1]$. Si et seulement si la série $\sum_n r_n(\cdot) x_n$ converge en $L_p([0, 1], X)$ pour tous $0 < p < \infty$.

Démonstration. dans les pages 232 de [6] or [8].

2.4.1 Série inconditionnellement sommable de X

Proposition 2.4.1 *Soit $(x_n)_n$ une suite des vecteurs dans un espace de Banach X . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. La série $\sum_n x_{\pi(n)}$ converge pour toute permutation π des entiers.
2. La série $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ converge pour toute suite de choix de $n_1 < n_2 < n_3, \dots$
3. La série $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ converge pour toute suite de signes θ_n (i.e. $\theta_n = \pm 1$).
4. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n tel que $\left\| \sum_{i \in \delta} x_i \right\| < \varepsilon$ pour tous ensembles finis des entiers qui vérifient que $\min \{i \in \delta\} > n$.

Remarque 2.4.1 La série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ qui vérifie l'une des propriétés où toutes les propriétés de la précédente proposition dite une série **inconditionnellement sommable** ou **inconditionnellement convergente**.

2.5 Les opérateurs linéaires p -sommants

Nous allons dans ce paragraphe rappeler la notion d'opérateurs p -sommants introduite par Pietsch pour plus d'information voir [[1], [3], [6]].

Définition 2.5.1 Soient X, Y deux Banach dont Y réticulé et $T \in B(X, Y)$. On dira que T est p -sommant pour $0 < p < \infty$ si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C \sup_{\xi \in B_{X^*}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle x_i, \xi \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (8)$$

On note par

$$\pi_p(X, Y) = \{T : X \longrightarrow Y \text{ linéaires } p\text{-sommants}\}$$

et $\pi_p(T) = \inf \{C, \text{ vérifiant la définition (8)}\}$.

Exemple 2.5.1 Soit K un espace compact de Hausdorff, soit μ une mesure positive sur K et soit $1 \leq p < \infty$.

(1) Pour chaque $\varphi \in L_p(\mu)$, on définit l'opérateur de multiplication

$$\begin{aligned} T_\varphi : C(K) &\longrightarrow L_p(\mu) \\ f &\longmapsto f \cdot \varphi \end{aligned}$$

cet opérateur est linéaire et p -sommants de plus $\pi_p(T_\varphi) = \|\varphi\|_p$.

(2) L'opérateur canonique

$$\begin{aligned} J_p : C(K) &\longrightarrow L_p(\mu) \\ f &\longmapsto f \end{aligned}$$

est p -sommants de plus $\pi_p(J_p) = \mu(K)^{\frac{1}{p}}$.

Soit X, Y deux espaces de Banach. On note par $X \hat{\otimes}_\epsilon Y$ le produit tensoriel injectif, i.e., le complété de $X \otimes Y$ muni de la norme

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\|_\epsilon = \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^n x_i(\xi) \otimes y_i(\eta) \right| : \|\xi\|_{X^*} \leq 1, \|\eta\|_{Y^*} \leq 1 \right\}.$$

Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire entre X espace de Banach et Y espace Banach réticulé. On dira que T est p -sommants, $0 < p < \infty$ (on écrit $T \in \pi_p(X, Y)$), s'il existe une constante positive C telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$ les opérateurs

$$\begin{aligned} I_n \otimes T : l_p^n \otimes_\epsilon X &\longrightarrow l_p^n(Y) \\ \sum_{i=1}^n e_i \otimes x_i &\longmapsto (T(x_i))_{1 \leq i \leq n} \end{aligned}$$

sont uniformément bornés par C (i.e., $\|I_n \otimes T\|_{l_p^n \otimes_\epsilon X \longrightarrow l_p^n(Y)} \leq C$).

Dans ce cas, on pose

$$\pi_p(T) = \sup_n \|I_n \otimes T\|_{l_p^n \otimes_\epsilon X \longrightarrow l_p^n(Y)}.$$

Théorème 2.5.1 Soit $T : X \longrightarrow Y$ un opérateur linéaire p -sommants et $0 < p < \infty$. Alors, il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ telle que

$$\forall x \in X, \|T(x)\| \leq \pi_p(T) \left(\int_{B_{X^*}} | \langle x, \xi \rangle |^p d\lambda(\xi) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (9)$$

Inversement, s'il existe une probabilité de radon λ sur $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ et $C > 0$ telle que la formule suscitée est vérifiée, alors T est p -sommants et $\pi_p(T) \leq C$.

Remarque 2.5.1 (La factorisation proprement dite) *L'inégalité (9) de Pietsch implique qu'il existe $\tilde{T}$ dans $B(S_p, Y)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{T} & Y \\
 i \downarrow & & \uparrow \tilde{T} \\
 S & \xrightarrow{j/S} & S_p \\
 \cap & & \cap \\
 C(K) & \xrightarrow{j} & L_p(K, \lambda)
 \end{array}$$

avec $T = \tilde{T} \circ j/S \circ i$ et $\|\tilde{T}\| = \pi_p(T)$.

Où

$$K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X)),$$

$$C(K) = \{\text{des fonctions continues sur } K\},$$

$i : X \longrightarrow S$, $i(x) = \varphi_x$ qui est une isométrie injective,

$S = \{\varphi_x, x \in X \text{ avec } \varphi_x(\xi) = \langle x, \xi \rangle\}$ qui est un sous espace fermé de $C(K)$,

$j : C(K) \longrightarrow L_p(K, \lambda)$ est l'injection naturelle, et $\pi_p(j) = 1$ (j/S est j restreint à S),

$$S_p = \overline{j(S)}^{L_p(K, \lambda)}.$$

Si $p \geq 1$, alors

$$\pi_p(X, X) = \mathcal{L}(X, X) \text{ si et seulement si } \dim X < \infty.$$

Théorème 2.5.2 ([1], P. 345) *Soient $1 \leq p < \infty$, $T : X \rightarrow Y$ un opérateur linéaire (où X, Y sont des espace de Banach). T est p -sommant si et seulement si $T^{**} : X^{**} \rightarrow Y^{**}$ est p -sommants de plus, on a*

$$\pi_p(T) = \pi_p(T^{**}).$$

Les opérateurs fortement p -sommants.

Définition 2.5.2 *Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ (X, Y sont des espaces de Banach arbitraires) est fortement p -sommants, $1 < p \leq \infty$ si et seulement si, il existe une constante positive C telle que pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$, et tout $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, on a*

$$\sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\varphi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \varphi, y_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \quad (10)$$

Encore une fois la classe d'opérateurs fortement p -sommants de X dans Y , qui est notée par $\mathcal{D}_p(X, Y)$ est un espace de Banach muni de la norme

$$d_p(T) = \inf\{C, \text{vérifiant l'inégalité (10)}\}.$$

Théorème 2.5.3 Un opérateur linéaire $T : X \rightarrow Y$ (X, Y sont des espaces de Banach). Si T est fortement p -sommant alors T^* est p^* -sommant, pour $1 < p < \infty$ défini par la formule $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

2.6 Relation entre $\mathcal{D}_p(X, Y)$ et $\pi_p(X, Y)$

Théorème 2.6.1 Soient X, Y deux espaces de Banach.

- (1) Soit $1 \leq p < \infty$. L'opérateur T dans $\pi_p(X, Y)$ si et seulement si l'opérateur adjoint T^* est fortement p^* -sommant de Y^* dans X^* et $d_{p^*}(T^*) = \pi_p(T)$.
- (2) Soit $1 < p \leq \infty$. L'opérateur T dans $\mathcal{D}_p(X, Y)$ si et seulement si l'opérateur adjoint T^* est p^* -sommant de Y^* dans X^* et $\pi_{p^*}(T^*) = d_p(T)$.

Preuve.

- (1) Soient $T \in \pi_p(X, Y)$, Pour $(x_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$ et $(y_i^{**})_{i=1}^n \subset X^{**}$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T^*(x_i^*), y_i^{**} \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle x_i^*, T^{**}(y_i^{**}) \rangle| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \|x_i^*\| \|T^{**}(y_i^{**})\| \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} &\leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{i=1}^n \|T^{**}(y_i^{**})\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \pi_p(T) \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*} \sup_{\xi \in B_{X^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \xi, y_i^{**} \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

D'où

$$T \in \mathcal{D}_{p^*}(Y^*, X^*) \text{ et } d_{p^*}(T^*) \leq \pi_p(T).$$

Inversement, supposons que $T \in \mathcal{D}_{p^*}(Y^*, X^*)$, pour $(x_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$ et $(y_i)_{i=1}^n \subset X \subset X^{**}$, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T^*(x_i^*), y_i \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle x_i^*, T^{**}(y_i) \rangle| \\ &\leq d_{p^*}(T^*) \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*} \sup_{\xi \in B_{X^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \xi, y_i \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

D'autre part on a:

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\langle x_i^*, T(y_i) \rangle|, \|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*} \leq 1, (x_i^*)_{i=1}^n \subset Y^* \right\}.$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n \|T(y_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*} \leq 1} \sum_{i=1}^n |\langle x_i^*, T(y_i) \rangle| \\ &\leq d_{p^*}(T^*) \sup_{\xi \in B_{X^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \xi, y_i \rangle|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

D'où

$$T \in \pi_p(X, Y) \text{ et } \pi_p(T) \leq d_{p^*}(T^*).$$

Alors $d_{p^*}(T^*) = \pi_p(T)$.

(2) Soient $T \in \mathcal{D}_p(X, Y)$, Pour $(x_i^*)_{i=1}^n \subset X$ et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$, on a:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle x_i, T^*(y_i^*) \rangle| \\ &\leq d_p(T) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{\xi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \xi, y_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \end{aligned}$$

on a:

$$\left(\sum_{i=1}^n \|T^*(y_i^*)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\|(x_i)_{i=1}^n\|_p \leq 1} \sum_{i=1}^n |\langle T^*(y_i^*), x_i \rangle|.$$

Où

$$\|T^*(y_i^*)\|_p \leq d_p(T) \sup_{\xi \in B_{Y^{**}}} \left(\sum_{i=1}^n |\langle \xi, y_i^* \rangle|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}}$$

donc

$$T^* \in \pi_{p^*}(Y^*, X^*) \text{ et } \pi_{p^*}(T^*) \leq d_p(T).$$

Inversement, supposons que $T \in \pi_{p^*}(Y^*, X^*) \Leftrightarrow \forall (y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$ Tq

$$\|T^*(y_i^*)_{i=1}^n\|_p \leq \pi_{p^*}(T^*) \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, \omega}$$

on a $\forall (x_i)_{i=1}^n \subset X$ et $(y_i^*)_{i=1}^n \subset Y^*$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |\langle T(x_i), y_i^* \rangle| &= \sum_{i=1}^n |\langle x_i, T^*(y_i^*) \rangle| \\ &\leq d_{p^*}(T^*) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|T^*(y_i^*)\|^{p^*} \right)^{\frac{1}{p^*}} \\ &\leq \pi_{p^*}(T^*) \|(y_i^*)_{i=1}^n\|_{p^*, \omega} \end{aligned}$$

donc

$$T \in \mathcal{D}_p(X, Y) \text{ et } d_p(T) \leq \pi_{p^*}(T^*).$$

Alors

$$\pi_{p^*}(T^*) = d_p(T).$$

■

Chapitre 3

Quelques propriétés opérationnelles de l'opérateur adjoint p -sommants

Le troisième chapitre est consacré à l'étude approfondie des théorèmes qui sont les originales résultats de [12]. Qui est la preuve si u^* l'opérateur adjoint de u est p -sommants on a bien l'existence de quelques propriétés de sommabilité séquentielles pour l'opérateur u , tous les résultats de ce chapitre sont articulés sur l'espace $l_p\langle X \rangle$.

3.1 Propriétés opérationnelles

Définition 3.1.1 [6] On dit qu'un espace de Banach X est de type $p \in [1, 2]$ s'il existe une constante $c_p > 0$ telle que pour toute famille finie $x_1, \dots, x_n \in X$ d'éléments de X on ait

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_p \cdot \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Les plus petites constantes dans les définitions ci-dessus sont notées $T_p(X)$.

Théorème 3.1.1 Soient X et Y deux espaces de Banach et u est un opérateur linéaire continu de X dans Y . Si u^* , L'opérateur adjoint de u , est p -sommants pour certain $p \geq 1$, alors pour tout $q \geq 2$, u prend presque toutes les séries inconditionnellement sommables de X dans un membre de $\ell_q \hat{\otimes}_\pi Y$.

Preuve. D'après le théorème de Bu et Diestel et le théorème de Hoffmann-Jorgensen, pour prouver le théorème, nous avons besoin de prouver seulement que u prend des membres de $Rad(X)$ dans un membre de $\ell_q(Y)$. Puisque u^* est p -sommants, par le théorème de domination de Pietsch ([1] or [6], p.44) il ya une mesure de probabilité μ régulière sur $B_{Y^{**}}$, tel que : pour tout $y^* \in Y^*$, on a

$$\|u^* y^*\| \leq \pi_p(u^*) \cdot \left(\int_{B_{Y^{**}}} |\langle y^*, y^{**} \rangle|^p d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Où $\pi_p(u^*)$ est la norme de p -sommants de u^* .

Maintenant pour tout $x_1, \dots, x_n \in X$ et tout $y_1^*, \dots, y_n^* \in Y^*$, par l'inégalité de Khinchin et l'inégalité de Kahane

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\langle u x_k, y_k^* \rangle| &= \left| \sum_{k=1}^n \langle u x_k, \theta_k y_k^* \rangle \right|, \quad (\theta_k = \text{sign} \langle u x_k, y_k^* \rangle) \\ &= \left| \int_0^1 \left\langle \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k, \sum_{k=1}^n r_k(t) u^* \theta_k y_k^* \right\rangle dt \right|. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$\leq \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|^{p^*} dt \right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_0^1 \left\| u^* \left(\sum_{k=1}^n r_k(t) \theta_k y_k^* \right) \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

D'après l'inégalité de Kahane

$$\leq K_{2,P^*} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \left\| u^* \left(\sum_{k=1}^n r_k(t) \theta_k y_k^* \right) \right\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

par le théorème de domination de Pietsch

$$\begin{aligned} &\leq K_{2,P^*} \|(x_k)_{k=1}^n\|_{Rad(X)} \pi_p(u^*) \left(\int_0^1 \left(\int_{B_{Y^{**}}} \left| \left\langle \sum_{k=1}^n r_k(t) \theta_k y_k^*, y^{**} \right\rangle \right|^p d\mu(y^{**}) \right) dt \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= K_{2,P'} \pi_p(u^*) \|(x_k)_{k=1}^n\|_{Rad(X)} \left(\int_{B_{Y^{**}}} \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n r_k(t) \langle \theta_k y_k^*, y^{**} \rangle \right|^p dt \right) d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

par l'inégalité de Khinchin

$$\begin{aligned}
 &\leq K_{2.P^*} \pi_p(u^*) \| (x_k)_{k=1}^n \|_{Rad(X)} B_p \left(\int_{B_{Y^{**}}} \left(\sum_{k=1}^n |\langle \theta_k y_k^*, y^{**} \rangle|^2 \right)^{\frac{p}{2}} d\mu(y^{**}) \right)^{\frac{1}{p}} \\
 &\leq B_P K_{2.P^*} \pi_p(u^*) \| (x_k)_{k=1}^n \|_{Rad(X)} \| (\theta_K y_K^*)_{K=1}^n \|_{\ell_{2,w}(Y^*)} \\
 &\leq B_P K_{2.P^*} \pi_p(u^*) \| (x_k)_{k=1}^n \|_{Rad(X)} \| (y_K^*)_{K=1}^n \|_{\ell_{2,w}(Y^*)}.
 \end{aligned}$$

Cela montre que pour chaque $(x_n)_n \in Rad(X)$ et on a $(y_n^*)_n \in \ell_{2,w}(Y^*)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle ux_n, y_n^* \rangle| < \infty$. Noter que $\ell_{q^*,w}(Y^*) \subset \ell_{2,w}(Y^*)$ pour $q^* \leq 2$.

Donc nous avons pour chaque $(x_n)_n \in Rad(X)$ et chaque $(y_n^*)_n \in \ell_{q^*,w}(Y^*)$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle ux_n, y_n^* \rangle| < \infty$.

C'est pour chaque $(x_n)_n \in Rad(X)$, $(ux_n)_n \in \ell_q \langle Y \rangle$. ■

Corollaire 3.1.1 Soient X et Y des espaces de Banach et u est un opérateur linéaire continue de X à Y . Si u^* est p -sommants pour certains $p \geq 1$, alors pour tout $q \geq 2$, u prend des série inconditionnellement sommables dans X dans les membres de $\ell_q \hat{\otimes}_{\pi} Y$.

Rappelons que dans [7] une série $\sum_n x_n$ converge inconditionnellement dans un espace de Banach X si et seulement si la série $\sum_n e_n \otimes x_n$ converge en $\ell_1 \hat{\otimes}_{\varepsilon} X$, le produit tensoriel injectif de ℓ_1 et X . Alors on a les résultats suivants.

Corollaire 3.1.2 Soient X et Y deux espaces de Banach et u un opérateur linéaire continue de X dans Y . Si u^* est p -sommants pour certains $p \geq 1$, alors pour tout $q \geq 2$, u prend des membres de $\ell_1 \hat{\otimes}_{\varepsilon} X$ dans un membres de $\ell_q \hat{\otimes}_{\pi} Y$.

Remarque 3.1.1 Maintenant laissez nous considérer l'inverse de théorème 3.1.1. si u prend presque tous les séries inconditionnellement sommables de X dans un membres de $\ell_q \hat{\otimes}_{\pi} Y$ pour tout $q \geq 2$, est u^* p -sommants pour certains $p \geq 1$? La réponse est non en général. Par exemple, on sait d'après [7] que si $X = L_1[0, 1]$ alors $Rad(X) = \ell_2 \hat{\otimes}_{\pi} X$. Donc l'opérateur de l'identité sur $L_1[0, 1]$ prend presque tous les série inconditionnellement sommables de $L_1[0, 1]$ dans un membres de $\ell_2 \hat{\otimes}_{\pi} L_1[0, 1]$. Mais l'opérateur de l'identité sur $L_{\infty}[0, 1]$ n'est pas p -sommants pour tous $p \geq 1$. Le cas où l'espace de domaine de type 2 la réponse est où alors on a :

Théorème 3.1.2 *Soient X et Y deux espaces de Banach tel que X de type 2, et soit u un opérateur linéaire continu de X dans Y . Alors u prend presque tous les série inconditionnellement sommables de X dans membre de $\ell_2 \hat{\otimes}_\pi Y$ si et seulement si u^* est 2-sommants.*

Preuve. Par le théorème 3.1.1, il suffit de montrer seulement que si u prend presque tous les série inconditionnellement sommables de X dans membre de $\ell_2 \hat{\otimes}_\pi Y$. Alors u^* est 2-sommants. C'est bien connu qu'un opérateur de l'espace de Banach E dans un espace de Banach F est p -sommants ($1 \leq p < \infty$) si et seulement si il prend des membres de $\ell_{p,w}(E)$. Dans un membre de $\ell_p(F)$. Donc pour prouver le théorème, nous avons besoin de montrer seulement que si u prend un membre de $Rad(X)$ dans membre de $\ell_2 \langle Y \rangle$. Alors u^* prend des membres de $\ell_{2,w}(Y^*)$ dans des membres de $\ell_2(X^*)$. En effet soit $(x_n)_n \in \ell_2(X)$ et $(y_n^*)_n \in \ell_{2,w}(Y^*)$.

Puisque X est le type 2, d'après ([6] proposition 12.4, p.233), tel que $(x_n)_n \in Rad(X)$ et aussi $(ux_n)_n \in \ell_2 \langle Y \rangle$. d'où

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle ux_n, y_n^* \rangle| < \infty.$$

implique,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, u^* y_n^* \rangle| < \infty.$$

Donc $(x_n)_n$ est arbitraire dans $\ell_2(X)$, $(u^* y_n^*)_n \in \ell_2(X^*)$. ■

Bibliographie

- [1] A. Pietsch, Absolut p -summierende Abbildungen in normierten Räumen, *Studia Math.* 28 (1967) 333–353.
- [2] D. Li, H. Queffélec. (Cours Spécialisés 12) Introduction à l'étude des espaces de Banach — Analyse et probabilités-SMF (2005).
- [3] G. PISIER, Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **60** (1986).
- [4] H. Apiola, Duality between spaces of p -summable sequences, (p, q) -summing operators and characterization of nuclearity, *Math. Ann.* 219 (1976) 53–64.
- [5] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, MASSON Paris, New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.
- [6] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, Absolutely Summing Operators, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [7] J. Diestel, J. Fourie, J. Swart, A theorem of Littlewood, Orlicz, and Grothendieck about sums in $L_1(0, 1)$, *J. Math. Anal. Appl.* 251 (2000) 376–394.
- [8] J. Hoffmann-Jorgensen, Sums of independent Banach space valued random variables, *Studia Math.* 52 (1974) 159–186.
- [9] J.S. Cohen, Absolutely p -summing, p -nuclear operators, and their conjugates, *Math. Ann.* 201 (1973) 177–200.

- [10] Q. Bu, J. Diestel, Observations about the projective tensor product of Banach spaces, $I - \ell_p \hat{\otimes} X$, $1 < p < \infty$, Quaestiones Math. 24 (2001) 519–533.
- [11] Q. Bu, Some mapping properties of p -summing operators with Hilbertian domain, Contemp. Math. 328 (2003) 145–149..
- [12] Q.Bu, P.T.Kranz, Some mapping properties of p -summing adjoint operators, J. Math. Anal. Appl. 303 (2005) 585–590.
- [13] Q.Bu. On Banach spaces verifying Grothendieck’s theorem. Bull. London Math. Soc. **35** (2003) 738-748.