



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et applications

Thème

Problème inverse pour une équation de diffusion avec une condition au limite non locale

Présentée par :

M^{elle} AOUINA Imane

Soutenu publiquement le : Juin 2021.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r SINGOUGA Abdelmouhcene*

M.C.A, Université de M'sila

Encadreur : *M^r NOURI Brahim*

M.C.A, Université de M'sila

Examineur : *M^r MIHOUBI Farid*

M.A.A, Université de M'sila

Remerciements

AU NOM D'ALLAH LE CLÉMENT ET LE MISÉRICORDIEUX

Je tiens tout d'abord à remercier Dieu le tout puissant
qui m'a donné le courage et la persévérance pour la réalisation
de ce modeste mémoire .

Je remercie profondément Monsieur

Nouiri Brahim mon encadreur, qui m'a beaucoup aidé pour
terminer ce travail

il m'a qui de durant mon recherche, et sans oublier ses précieux conseils.

Mes sincères remerciements à à monsieur

Abdelmohcene Singouga, qui ma fait l'honneur d'accepter
de présider ce jury de ce mémoire

je remercie vivement Monsieur

Mihoubi Farid, qu'a accepté d'examiné mon travail .

je voudrais également remercier tous mes enseignants,
tous mes collègues de Master EDP et applications,

De tous mon cœur je remercie mes parents, et mon ami,

et mes prières que Dieu les protège et les accorde santé et longue vie.

enfin, j'adresse un grand remerciement à tous ma grande Famille Kouina. Imane.

Dédicaces

Je dédie ce modeste mémoire
À tous qui m'ont encouragé et soutenu pour arriver à ce niveau d'étude. Et à
mon ami Dr Cebani Saad .Et
À tout ces gents qui m'ont aimé.

Imane

Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour l'identification d'un coefficient de diffusivité thermique en fonction du temps et la distribution de la température dans une équation de diffusion unidimensionnelle avec une condition d'intégrale lorsqu'un échange de chaleur a lieu à travers la frontière du matériau. Nous avons démontré que le problème inverse est bien posé sous certaines conditions de régularité sur les données du problème. Le problème inverse est également étudié numériquement, en utilisant le schéma de différences finies Crank–Nicolson combiné à la technique du prédicteur-correcteur. Nous avons présenté des exemples numériques pour valider l'efficacité de ce schéma.

Mots-Clés : Méthode de Fourier, Méthode de point fixe de Schauder, Problème spectral non auto-adjoint, Schéma de Crank-Nicolson.

In this memoir, we have studied an inverse problem for the identification of a coefficient of thermal diffusivity as a function of time and the distribution of temperature in a one-dimensional diffusion equation with an integral condition when a heat exchange takes place through the material border. We have shown that the inverse problem is well posed under certain regularity conditions on the data of the problem. The inverse problem is also studied numerically, using the Crank – Nicolson finite difference scheme combined with the predictor-corrector technique. We have presented numerical examples to validate the effectiveness of this scheme.

Keywords : Fourier method, Schauder fixed point method, Non-self-adjoint spectral problem, Crank-Nicolson scheme.

Table des matières

Introduction générale	6
1 Rappel sur des outils mathématiques	9
1.1 Espace Normés	10
1.2 Espace de Banach	10
1.3 Espace de Hilbert	11
1.3.1 Espace L^p	11
1.4 Problème spectrale	12
1.5 Théorème de point fixe	14
1.6 Opérateur Compact	15
2 Étude théorique de problème inverse	16
2.1 Position de Problème	17
2.2 Le problème spectrale auxiliaire	17
2.3 Résultats d'existence et l'unicité	28
2.3.1 Unicité de la solution	40
2.4 Dépendance continue par rapport données	42
3 Étude numérique de problème inverse	46
3.1 Approximation Numérique	47
3.1.1 Schéma des différences finies	47
3.1.2 Système matricielle	48
3.1.3 Exemple Numérique	52
Bibliographie	56

Table des figures

3.1	Solution exacte et approchée de $u(x,t)$ pour $T = \frac{7}{80}$	53
3.2	Solution exacte et approchée de $a(t)$ pour $T = \frac{1}{4}$	54

Introduction générale

Au cours des dernières décennies, un intérêt s'est porté sur la détermination des coefficients dans l'équation de diffusion, voir [3, 8, 9, 10, 11, 14, 16]. Des problèmes de cette catégorie apparaissent dans de nombreux modèles mathématiques, notamment la conduction thermique, le processus de désintégration radioactive dans une tige, la conception du système de chauffage du bâtiment et le stockage de l'énergie thermique dans un milieu, voir [1, 2, 4, 6, 12].

Soit $T > 0$ un nombre fixe. Dans le rectangle $\Omega_T = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$, nous considérerons le problème avec conditions initiales et aux limites suivant :

$$u_t(x, t) = a(t) u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (4)$$

où f et φ sont des fonctions données et la condition (4) est appelée condition au limite non locale. Si le coefficient $a(t)$, $0 \leq t \leq T$, est donné, alors le problème (1)-(4) est appelé problème direct.

Il est bien connu que l'équation (1) modélise un processus de conduction thermique dans une tige qui subit une désintégration radioactive ou un dommage avec une source de chaleur. La conductivité thermique, la diffusivité, la capacité thermique et le coefficient de transfert thermique varient en fonction du degré de désintégration, qui peut être lié au temps, voir [2, 11].

La fonction $\varphi(x)$ est la température de la tige au temps initial $t = 0$, alors que $u(x, t)$ est sa distribution de température dans la tige à l'instant t .

Le coefficient de diffusion $a(t) > 0$ est égal au rapport $\frac{k(t)}{\rho c_p(t)}$, où $k(t) > 0$ est la conductivité thermique du matériau, ρ est la densité du matériau et $c_p(t)$ est la capacité thermique, voir [2, 11]. La condition locale de Neumann (3) modélise que l'extrémité gauche $x = 1$ de la tige est isolée de sorte qu'aucune chaleur ne circule à travers la limite gauche $x = 1$, tandis que la condition au limite non locale (4) modélise que la température de l'extrémité de gauche $x = 0$ est égale la température de l'extrémité de droite $x = 1$ de la tige pour tout $t \in [0, T]$.

Le problème (1)-(4) est bien posé au sens d'Hadamard si $a(t) > 0$ est connu. Cependant, dans le cas $a(t) > 0$ est inconnu, ce problème est mal posé. Dans ce cas, il faut tenir compte de la condition d'intégration supplémentaire

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

où $E(t)$ est une fonction donnée.

Le problème de la détermination du couple $(u(x, t), a(t))$ satisfaisant les conditions (1)-(5) est appelé problème inverse. L'objectif de la résolution de ce problème inverse est de déterminer le coefficient de diffusion $a(t)$ qui produira la distribution d'énergie demandée dans la tige.

Le problème inverse de trouver le coefficient de diffusion $a(t)$ dans l'équation (1) avec conditions aux limites non locales est étudié dans [8, 10, 11].

Dans ce mémoire, nous avons concerné les deux aspects suivants :

- ✓ **Aspect théorique** : nous avons étudié l'existence et l'unicité de la solution du problème inverse (1)-(5) ainsi que la dépendance continue de la solution par rapport aux données, en utilisant la méthode de Fourier, méthode de point fixe de Schauder et un problème spectral non autoadjoint.
- ✓ **Aspect numérique** : nous avons résolu numériquement le problème inverse (1)-(5) par le schéma de différences finies Crank-Nicolson combiné à la technique du prédicateur-correcteur. Des exemples numériques sont présentés et discutés.

Ce mémoire se décompose en trois chapitres de la manière suivante : dans le premier chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les espaces fonctionnels, un problème spectral non autoadjoint et la méthode de point fixe de Schauder.

Dans le deuxième chapitre, nous avons démontré par la méthode de Fourier et la méthode de point fixe de Schauder l'existence de la solution sur Ω_T et l'unicité sur Ω_{T_0} avec $0 < T_0 < T$, nous avons montré la dépendance continue de la solution par rapport aux données du problème inverse.

Dans le dernier chapitre, nous avons introduit un schéma de différences finies de Crank-Nicolson combiné avec la technique de prédicteur-correcteur pour résoudre numériquement ce problème inverse. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de ce schéma.

On termine ce mémoire par une conclusion et quelques perspectives.

RAPPEL SUR DES OUTILS MATHÉMATIQUES

Dans ce chapitre, nous rappelons certaines notions préliminaires fondamentales et les outils nécessaires dans ce mémoire concernant les espaces fonctionnels, un problème spectral non autoadjoint et la méthode de point fixe de Schauder.

1.1 Espace Normés

Définition 1.1. (Norme). Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Ou \mathbb{C}). une norme sur E , est une application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$. vérifiant les condition suivantes :

1. $\|x\| \geq 0$ et $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, pour tout $x, y \in E$.

Remarque 1.1. L'espace vectoriel E muni d'une norme S'appelle espace normé, noté par : $(E, \|\cdot\|)$. les application suivantes sont des normes usuelle sur \mathbb{R}^n .

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour tout } p \geq 1.$$

Exemple 1.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , l'espace vectoriel des fonctions de carré intégrable sur Ω est :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \int_{\Omega} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

L'application $\|\cdot\| : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

est une norme.

1.2 Espace de Banach

Définition 1.2. Un espace de Banach est un espace normé complet.

Définition 1.3. Soit E un espace vectoriel normé. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E est de Cauchy s si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n > m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

Définition 1.4. Soit E un espace vectoriel normé. On dit que E est complet si tout suite de Cauchy dans E est convergente dans E .

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.5. (Produit scalaire). Soit E un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} . un produit scalaire sur E est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ telle que pour tout $x, y, x_1, x_2 \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
3. $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.
4. $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$.

Remarque 1.2. Un produit scalaire sur E définit une norme sur E donnée par :

$$\forall x \in E : \|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Exemple 1.2. L'espace \mathbb{R}^n muni de produit scalaire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : (x, y) = \sum_{i=0}^n x_i y_i.$$

Est un produit scalaire.

1.3.1 Espace L^p

Soit $[a, b]$ ($-\infty < a \leq b < \infty$) un intervalle finie ou infinie de \mathbb{R} .

Définition 1.6. Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 < p < \infty$. on note par $L_p[a, b]$ l'espace des classes d'équivalence de fonctions de puissance p -intégrables sur $[a, b]$ à valeurs dans

$$C : L^p([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}, f \text{ mesurable, et } \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$

avec

$$\|f\|_{L^p}([a, b]) = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace $L^p[a, b]$ muni de la norme $\|\cdot\|$ est un espace de Banach. Si $p = 2$, alors $L^2[a, b]$ est l'espace de classe d'équivalence des fonctions mesurables de carré intégrable sur $[a, b]$. Le produit

scalaire sur $L^2 [a, b]$ est définie pour toutes $f, g \in L^2 ([a, b])$ par

$$(f, g)_{L^2([a,b])} = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx.$$

L'espace $L^2 ([a, b])$ muni de la norme

$$\|f\|_{L^2[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

est un espace de Hilbert .

1.4 Problème spectrale

On considère le problème spectrale suivant :

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.1)$$

$$X(0) = X(1), \quad X'(1) = 0. \quad (1.2)$$

Ce problème est un problème non auto-adjoint ; il a le problème adjoint suivant :

$$Y''(x) + \lambda Y(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.3)$$

$$Y'(0) = Y'(1), \quad Y(0) = 0. \quad (1.4)$$

En effet,

$$\int_0^1 Y(x) X''(x) dx = -X'(0) Y(0) + X(0) [Y'(0) - Y'(1)] + \int_0^1 Y''(x) X(x) dx.$$

Il est clair que le côté droit de cette relation s'annule si $Y'(0) = Y'(1)$ et $Y(0) = 0$.

Le problème spectral (1.1)-(1.2) possède les valeurs propres :

$$\lambda_n = (2\pi n)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

et les fonctions propres

$$X_0 = 2 \text{ pour } \lambda_0, \quad X_{2n-1} = 4 \cos(2\pi n x) \text{ pour } \lambda_n = (2\pi n)^2, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

L'ensemble des fonctions $\{X_0, X_{2n-1}\}$ ne forme pas un système complet et n'est pas une base pour l'espace $L^2(0, 1)$. Pour compléter la base, voir [4], nous considérons les fonctions propres

X_{2n} pour λ_n associées aux X_{2n-1} définies comme la solution du problème suivant :

$$X_{2n}'' + \lambda_n X_{2n} = -\sqrt{\lambda_n} X_{2n-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.5)$$

$$X_{2n}(0) = X_{2n}(1); \quad X_{2n}'(1) = 0. \quad (1.6)$$

Le problème (1.5)-(1.6) possède les fonctions propres suivantes :

$$X_{2n} = 4(1-x) \sin(2\pi n), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

En résolvant le problème adjoint (1.3)-(1.4), on obtient les fonctions propres

$$Y_0 = x \text{ pour } \lambda_0 = 0 \text{ et } , Y_{2n-1} = x \cos(2\pi n) \text{ pour } \lambda_n = (2\pi n)^2 \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*,$$

et les fonctions propres associés, $Y_{2n} = \sin(2\pi n)$ $n \in \mathbb{N}^*$, sont obtenus à partir du problème aux limites suivant :

$$Y_{2n}''(x) + \lambda_n Y_{2n}(x) = -\sqrt{\lambda_n} Y_{2n-1}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$Y_{2n}'(0) = Y_{2n}'(1), \quad Y_{2n}(0) = 0.$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 1.1. *Nous avons :*

1. Les deux systèmes des fonctions $\{X_0, X_{2n-1}, X_{2n}\}$ et $\{Y_0, Y_{2n-1}, Y_{2n}\}$ sont orthonormaux sur $[0, 1]$ c'est à dire

$$\int_0^1 X_i(x) Y_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (1.7)$$

2. Les deux systèmes des fonctions $\{X_0, X_{2n-1}, X_{2n}\}$ et $\{Y_0, Y_{2n-1}, Y_{2n}\}$ sont complets dans $L^2(0, 1)$.

Démonstration. 1. La preuve est triviale.

2. Soit $f \in L_2(0, 1)$ orthogonal aux système des fonctions $\{X_0, X_{2n-1}, X_{2n}\}$. Alors, f peut être présentée par la série

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(2\pi kx).$$

qui converge dans $L_2(0, 1)$. Comme f est orthogonal avec X_{2k} , nous avons :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 4f(x)(1-x)\sin(2\pi kx) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^1 4(1-x)\sin(2\pi nx)\sin(2\pi kx) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^1 X_{2n}(x)Y_{2n}(x) dx \\ &= B_k, \quad k \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

En utilisant (1.7), donc, $B_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, alors $f(x) = 0$. De la même manière, on peut montrer que le système $\{Y_0, Y_{2n-1}, Y_{2n}\}$ est complet dans $L^2(0, 1)$. □

Lemme 1.2 (voir [5]). *Les deux systèmes des fonctions $\{X_0, X_{2n-1}, X_{2n}\}$ et $\{Y_0, Y_{2n-1}, Y_{2n}\}$ sont des bases de Riesz dans $L_2(0, 1)$.*

Démonstration. Soit $\varphi \in L^2(0, 1)$ telle que

$$\varphi(x) = \varphi_0 X_0(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} [\varphi_{2k-1} X_{2k-1}(x) + \varphi_{2k} X_{2k}(x)], \quad (1.8)$$

où

$$\varphi_0 = \int_0^1 \varphi(x) Y_0(x) dx, \quad \varphi_{2k} = \int_0^1 \varphi(x) Y_{2k}(x) dx, \quad \varphi_{2k-1} = \int_0^1 \varphi(x) Y_{2k-1}(x) dx. \quad (1.9)$$

Nous avons :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_{2k}^2. \quad (1.10)$$

□

1.5 Théorème de point fixe

Les théorèmes de point fixe sont les outils mathématiques de base qui aident à établir l'existence de solutions de divers genres d'équations.

Nous rappelons le théorème du point fixe que nous allons utiliser pour obtenir des résultats d'existence variés. Nous commençons par la définition d'un opérateur Compact.

1.6 Opérateur Compact

Définition 1.7. Soit E et Y deux espace de Banach , et $P : D (P) \subseteq E \rightarrow Y$ un opérateur Compact s si :

1. P est continu .
2. P l'application les ensemble bornés en ensembles relativement Compacts.

Proposition 1.1. (voir[15]) Soit E et Y deux espace de Banach , avec M un sous ensemble bornée non vide de E . Soit $P : M \subset E \rightarrow Y$ un opérateur donné , alors P est Compact s si la condition suivante est satisfaite :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un opérateur Compact $P_n : M \rightarrow Y$ tel que

$$\sup \|P(x) - P_n(x)\| \leq \frac{1}{n} \text{ et } \dim(\text{vecteur } P_n(M)) < \infty.$$

dans la preuve , nous utilisons d'ensemble relativement Compact dans l'espace de Banach par dimension fini.

Théorème 1.1. (Théorème du point fixe de Schauder)

Soit M un sous ensemble convexe non vide , fermé d'un espace de Banach E , et supposons que $P : M \rightarrow M$ est un opérateur Compact . Alors P un point fixe . En fin , nous rappelons le théorème d'Arzela-Ascoli pour caractériser les parties relativement Compact .

Théorème 1.2. Soit E un espace de Banach et M une partie de $C([0, 1], E)$, M est relativement Compact dans $C([0, 1], E)$ si les condition suivant sont satisfait

1. M est uniformément bornée
 $\exists M > 0, \|f(x)\| \leq M \quad \forall f \in M \quad x \in [0, 1].$
2. l'ensemble M est e qui-continue
 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |t_1 - t_2| < \delta \Rightarrow \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \epsilon .$

Corollaire 1.1. Soit M un sous ensemble non vide ,Compact et convexe d'un espace de Banach E , et supposons que $P : M \rightarrow M$ est un opérateur continu . Alors P un point fixe .

ÉTUDE THÉORIQUE DE PROBLÈME INVERSE

Dans ce chapitre, nous avons démontré par la méthode de Fourier et la méthode de point fixe de Schauder l'existence de la solution sur Ω_T et l'unicité sur Ω_{T_0} avec $0 < T_0 < T$, nous avons montré la dépendance continue de la solution par rapport aux données du problème inverse.

2.1 Position de Problème

on considère l'équation de diffusion suivante :

$$u_t = a(t) u_{xx} + f(x, t), \quad (2.1)$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 < x < 1, \quad (2.2)$$

les conditions aux limites non locales

$$u_x(1, t) = 0, u(0, t) = u(1, t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.3)$$

et la condition d'intégrale supplémentaire

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t). \quad (2.4)$$

où f, φ et E sont des fonctions données, et $E(t)$ fonctions suffisamment régulière.

2.2 Le problème spectrale auxiliaire

Le problème spectrale associé au problème de-diffusions (2.1)-(2.3) est un problème non auto-adjoint

$$\begin{cases} LX(x) = X''(x) + \lambda X(x) = 0; & 0 \leq x \leq 1; \\ X(0) = X(1); & X'(1) = 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

L'utilisation de la méthode de Fourier pour résoudre le problème (2.5) conduit au problème spectral pour l'opérateur L donné par l'expression différentielle et les conditions aux limites.

Les conditions aux limites de (2.5) sont régulières, mais pas fortement régulières (voir [13]).

Nous avons le problème de diffusion suivant :

$$\begin{cases} U_t = a(t) U_{xx} + F(x, t) & 0 \leq x \leq 1 \quad 0 < t \leq T; \\ U(x, 0) = \varphi(x); \\ U(0, t) = U(1, t) \quad U_x(1, t) = 0 & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.6)$$

Pour trouver le problème spectral de (2.1)

On pose $F(x, t) = 0$ alors donnée le problème suivant :

$$\begin{cases} U_t = a(t) U_{xx} & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq T; \\ U(x, 0) = \varphi(x); \\ U(0, t) = U(1, t) \quad U_x(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (2.7)$$

Si pose $U(x, t) = X(x)Y(t) \neq 0$.

En remplaçant dans (2.7) on obtient :

$$X(x)Y'(t) = a(t)X''(x)Y(t).$$

D'où

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y'(t)}{a(t)Y(t)} = -\lambda; (\lambda \in \mathbb{R})$$

Et comme x et t sont indépendant :

On trouve

$$\begin{aligned} X''(x) &= -\lambda X(x) \\ Y'(t) &= -a(t)\lambda Y(t), \quad \forall t > 0 \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} U(0, t) &= U(1, t) \quad , \text{ alors} \\ X(0)Y(t) &= X(1)Y(t) \Rightarrow X(0) = X(1). \end{aligned}$$

On a

$$X'(1)Y(t) = 0 \quad \text{alors} \quad X'(1) = 0.$$

Donc on obtient le système suivante :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0; \\ X(0) = X(1); \quad X'(1) = 0. \end{cases}$$

Et

$$Y'(t) = -a(t)\lambda Y(t); \quad \forall t > 0.$$

Soit le problème spectral

$$\begin{cases} LX = X''(x) = -\lambda X(x) & 0 \leq x \leq 1; \\ X(0) = X(1); X'(1) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Le problème spectral de diffusion (2.7) a les valeurs et les fonctions propres associées sont respectivement :

$$\lambda_k = (2\pi k)^2 ; k \geq 0 ; X_0(x) = 2, \text{ et } x_K(X) = 4 \cos(2\pi kx) ; k = 1, 2, \dots$$

Pour trouver les valeurs propres et les fonctions propres de problème spectral, on résout un problème de valeur limite non locale pour l'équation de la chaleur par la méthode de Fourier.

Nous avons le problème spectral auxiliaire :

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 \leq x \leq 1; \\ X(0) = X(1); X'(1) = BX'(0). \end{cases} \quad (2.9)$$

Si $\lambda = 0 \Rightarrow X''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = ax + b$ Pour $X(1) \Rightarrow a = 0$

Et aussi on a

$$X'(1) = BX'(0) \quad (Ok) \Rightarrow X''(x) = b$$

On choisit $b = 2$ D'où $X_0(x) = 2$.

Si $\lambda > 0$ alors la solution caractéristique : $r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda$

$$\Delta = -4\lambda = 4i^2\lambda \rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 2i\sqrt{\lambda} \rightarrow r_1 = -i\sqrt{\lambda}; r_2 = i\sqrt{\lambda}$$

D'où

$$X(x) = a \cos(\sqrt{\lambda_k}x) + b \sin(\sqrt{\lambda_k}x)$$

$$\text{Pour } X(0) = X(1) \text{ alors } a = a \cos(\sqrt{\lambda_k}) + b \sin(\sqrt{\lambda_k})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos(\sqrt{\lambda_k}) = 1 \\ \sin(\sqrt{\lambda_k}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\lambda_k} = 2\pi k \Rightarrow \lambda_k = (2\pi k)^2, \quad k = 0, 1, 2$$

Et on a

$$X'(1) = BX'(0) \text{ alors } -\sqrt{\lambda_k}a \sin(2\pi k) + \sqrt{\lambda_k}b \cos(2\pi k) = B(\sqrt{\lambda_k}b)$$

D'où

$$b = Bb \text{ alors } b = 0 ; (\text{car } B \neq 1)$$

Donc

$$X(x) = a \cos(2\pi kx).$$

Et on choisit $b = 2 \Rightarrow a = 4$ alors $X_{2k-1}(x) = 4 \cos(2\pi kx)$.

Donc le problème spectral à les valeurs propres :

$$\lambda_k = (2\pi k)^2; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

et les fonctions propres :

$$X_0(x) = 2, (\lambda_0 = 0); X_{2k-1}(x) = 4 \cos(2\pi kx); \quad k = 1, 2, \dots$$

Donc $X_k = \{X_0(x) = 2; X_{2k-1}(x) = 4 \cos(2\pi kx)\}$

Si $\lambda < 0$ (donnée solution triviale).

La famille $\{X_k\}$, est un système non complet, car les fonctions propres $X_k; k \geq 0$ ne sont pas orthogonales à X_0 . Donc ils ne forment pas une base sur $L_2[0, 1]$.

L'idée présentée pour compléter la base (voir [7]).

Alors compléte le système $X_k; k = 0, 1, 2, \dots$ avec la fonction associées suivante :

$$X_{2k}(x) = 4(1-x) \sin(2\pi kx); \quad k = 1, 2 \tag{2.10}$$

On définit un problème auxiliaire associée X_k pour λ_k correspondant à X_k définit comme la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -X_{2k}''(x) = \lambda_k X_{2k} + \sqrt{\lambda_k} X_{2k-1} & 0 < x < 1; \\ X_{2k}'(1) = 0; X_{2k}(0) = X_{2k}(1); & k = 1, 2; \end{cases} \tag{2.11}$$

Pour trouver l'équation (2.10) en utilise l'équation (2.11).

Nous avons

$$\begin{cases} X''_{2k}(x) + \lambda_k X_{2k} = -\sqrt{\lambda_k} X_{2k-1} & 0 < x < 1 \\ X'_{2k}(1) = 0 ; X_{2k}(0) = X_{2k}(1) ; & k = 1, 2 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} X''_{2k}(x) + \lambda_k X_{2k} = -4\sqrt{\lambda_k} \cos(\sqrt{\lambda}x) ; \\ X'_{2k}(1) = 0 ; X_{2k}(0) = X_{2k}(1) ; & k = 1, 2. \end{cases}$$

On a l'équation homogène $X''_{2k} + \lambda_k X_{2k} = 0$

par la méthode caractéristique : $r^2 + \lambda_k = 0$; $r^2 = -\lambda_k$

Alors

$$X_{2k}(x) = C_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.12)$$

On résout le système d'équation de seconde ordre

$$\begin{cases} c'_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c'_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) = 0 ; \\ -c'_1 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x) + c'_2 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) = -4\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}x) . \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} c'_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c'_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) = 0 ; \\ -c'_1 \sin(\sqrt{\lambda}x) + c'_2 \cos(\sqrt{\lambda}x) = -4 \cos(\sqrt{\lambda}x) . \end{cases} \quad (2.13)$$

On va calculer le déterminant de (2.13)

$$\det = \begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}x) & \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ -\sin(\sqrt{\lambda}x) & \cos(\sqrt{\lambda}x) \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

En utilise la méthode de Cramer on obtient

$$\begin{aligned} c_1' &= \begin{vmatrix} 0 & \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ -4 \cos(\sqrt{\lambda}x) & \cos(\sqrt{\lambda}x) \end{vmatrix} = 4 \cos(\sqrt{\lambda}x) \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ &= 2 \sin(2\sqrt{\lambda}x). \end{aligned}$$

Donc

$$c_1' = 2 \sin(2\sqrt{\lambda}x)$$

Par intégration on obtient

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos(2\sqrt{\lambda}x) + k_1; k_1 \in \mathbb{R}$$

De même manière on trouve c_2 .

$$c_2 = -2x - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(2\sqrt{\lambda}x) + k_2$$

Alors en substitution c_1 et c_2 dans (2.12) on obtient

$$X_{2k}(x) = \left[-\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos(2\sqrt{\lambda}x) + k_1 \right] \cos(\sqrt{\lambda}x) + \left[-2x - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(2\sqrt{\lambda}x) + k_2 \right] \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

D'ou

$$X_{2k}(x) = k_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cos(2\sqrt{\lambda}x) \cos(\sqrt{\lambda}x) - k_2 \sin(\sqrt{\lambda}x) - 2x \sin(\sqrt{\lambda}x) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin(2\sqrt{\lambda}x) \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Alors

$$X_{2k}(x) = k_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + (k_2 - 2x) \sin(\sqrt{\lambda}x) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\cos(2\sqrt{\lambda}x) \cos(\sqrt{\lambda}x) + \sin(2\sqrt{\lambda}x) \sin(\sqrt{\lambda}x) \right]$$

Donc

$$X_{2k}(x) = \left(k_1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \cos(\sqrt{\lambda}x) + (k_2 - 2x) \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.14)$$

Avec les conditions aux limite

$$X_{2k}(0) = X_{2k}(1) \Rightarrow \begin{cases} X_{2k}(0) = k_1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ X_{2k}(1) = k_1 - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{cases}$$

Et On a $X'_{2k}(1) = 0$ alors

$$X'_{2k}(1) = \sqrt{\lambda}(k_2 - 2) = 0 \Rightarrow k_2 - 2 = 0, \text{ car } \sqrt{\lambda} = (2\pi k) \neq 0$$

Donc $k_2 = 2$

D'ou

$$X_{2k} = 2(1 - x) \sin(2\pi kx); \quad k = 1, 2, \dots$$

Comme choix en multipliée par 2 on obtient

$$X_{2k} = 4(1 - x) \sin(2\pi kx); \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.15)$$

de le problème (2.9), On note le système de fonction (2.14) et (2.15) sont définit :

$$S = \{X_0(x) = 2; \quad X_{2k-1}(x) = 4 \cos(2\pi kx); \quad X_{2k}(x) = 4(1 - x) \sin(2\pi kx), \quad k = 1, 2\}. \quad (2.16)$$

Ansi $S = \{X_0, X_{2k}, X_{2k-1}\}$ forme un système complet, mais non orthogonale.

On prend contre exemple :

$$\int_0^1 X_0 X_{2k} dx = 8 \int_0^1 (1 - x) \sin(2\pi kx) dx.$$

Par intégration par partie on obtient

$$\int_0^1 X_0 X_{2k} dx = \frac{4}{k\pi} \neq 0.$$

Donc l'ensemble S n'est pas orthogonaux sur $[0, 1]$.

Pour cela on besoin de construire un autre système de fonction complet qui forme un

système orthogonale avec le système S dans l'espace $L_2 [0, 1]$.

Pour obtenir l'autre système, nous considérons le problème adjoint :

$$\begin{cases} Y''(x) + \lambda Y(x) = 0; \\ Y(0) = 0, Y'(0) = Y'(1). \end{cases} \quad (2.17)$$

Pour obtenons les fonctions propres de problème (2.17)

Nous avons le problème spectrale (2.9) dans le problème adjoint (conjugue) suivante :

$$\begin{cases} Y''(x) = -\lambda_k Y(x) = 0; \\ Y(0) = 0, Y'(0) = Y'(1). \end{cases}$$

En réalité

$$\begin{aligned} \int_0^1 Y X'' &= Y(1) X'(1) - Y(0) X'(0) + Y'(0) X(0) - Y'(1) X(1) + \int_0^1 X Y'' \\ &= X'(0) Y(0) + X(0) (Y'(0) - Y'(1)) + \int_0^1 X Y''. \end{aligned}$$

Il est clair que le côté droit de cette relation disparaît si

$$Y'(0) = Y'(1) \text{ et } Y(0) = 0.$$

Nous avons (2.17)

$$\begin{cases} Y'' = -\lambda Y; \\ Y'(0) = Y'(1); Y(0) = 0. \end{cases}$$

Si $\lambda = 0$ alors $Y_0(x) = ax + b$

On a

$$Y_0'(0) = Y_0'(1) \text{ alors } Y_0'(x) = a$$

Et

$$Y_0(0) = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ donc } Y_0(x) = ax$$

Nous avons

$$\int_0^1 Y_0(x) X_0(x) = 1$$

Alors

$$\int_0^1 2ax dx = 2a \int_0^1 x dx = 1 \Rightarrow a = 1.$$

Donc

$$Y_0(x) = x$$

Si $\lambda > 0 \Rightarrow$

$$Y_{2k}(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x)$$

Avec

$$Y'_{2k}(0) = Y'_{2k}(1)$$

Alors

$$b\sqrt{\lambda} = -a\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}) + b\sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda})$$

D'où

$$\begin{cases} \cos(\sqrt{\lambda}) = 1 \\ \sin(\sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\lambda} = 2k\pi \Rightarrow \lambda = (2k\pi)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Et on a

$$Y(0) = 0 \Rightarrow a = 0$$

Donc

$$Y_{2k}(x) = b \sin(2\pi kx)$$

De même manière

$$\begin{aligned} \int_0^1 Y_{2k}(x) X_{2k}(x) dx &= 4b \int_0^1 (1-x) \sin^2(\sqrt{\lambda}x) dx \\ &= 2b \int_0^1 (1 - \cos(2\sqrt{\lambda}x)) dx \\ &= 2b \int_0^1 (1-x) dx - 2b \int_0^1 (1-x) \cos(2\sqrt{\lambda}x) dx \\ &= b - 2b \int_0^1 (1-x) \cos(2\sqrt{\lambda}x) dx = 1 \end{aligned}$$

On a $2b \int_0^1 (1-x) \cos(2\sqrt{\lambda}x) dx$, en utilise intégration par partie on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \int_0^1 \sin(2\sqrt{\lambda}x) dx &= -\frac{1}{4\lambda} [\cos(2\sqrt{\lambda}x)]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4\lambda} + \frac{1}{4\lambda} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors

$$2b \int_0^1 (1-x) \cos(2\pi kx) dx = 0$$

Et sachant que

$$\int_0^1 Y_{2k}(x) X_{2k}(x) dx = 1 \Rightarrow b = 1.$$

D'où

$$Y_{2k}(x) = b \sin(2\pi kx) \Rightarrow Y_{2k}(x) = \sin(2\pi kx); \quad k = 1, 2, \dots$$

De même résoudre (2.17) nous avons les fonctions propres $\{Y_0 = x; Y_{2k} = \sin(2\pi kx)\}$ et les fonctions propres associés sont obtenus à partir du problème des valeurs limites suivant :

$$\begin{cases} -Y_{2k-1}''(x) = \lambda_k Y_{2k-1}(0) + \sqrt{\lambda} Y_{2k} & 0 < x < 1; \\ Y_{2k-1}'(0) = Y_{2k-1}'(1); \quad Y_{2k-1}(0) = 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

De la même manière de (2.11) on résout le (2.18), nous avons :

$$\begin{cases} Y_{2k-1}''(x) + \lambda_k Y_{2k-1}(0) = -\sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}x); \\ Y_{2k-1}'(0) = Y_{2k-1}'(1); \quad Y_{2k-1}(0) = 0. \end{cases}$$

Alors la solution s'écrit sous forme

$$Y_{2k-1} = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x). \quad (2.19)$$

On résout le système suivant :

$$\begin{cases} c_1' \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2' \sin(\sqrt{\lambda}x) = 0 \\ -c_1' \sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2' \cos(\sqrt{\lambda}x) = -\sin(\sqrt{\lambda}x) \end{cases}$$

On a $\det = 1 \neq 0$, on utilise la méthode de Cramer et par intégration on trouve

$$c_1' = \sin^2(\sqrt{\lambda}x) \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \sin(2\sqrt{\lambda}x) + k_1 \right]$$

Et on a

$$c_2' = -\frac{1}{2} \sin(2\sqrt{\lambda}x) \Rightarrow c_2 = -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2\sqrt{\lambda}} \cos(2\sqrt{\lambda}x) + k_2 \right]$$

En substitution c_1 et c_2 dans (2.19) on obtient

$$Y_{2k-1}(x) = (k_1 + x) \cos(\sqrt{\lambda}x) + \left(k_2 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right) \sin(\sqrt{\lambda}x) \quad (2.20)$$

Et d'après condition aux limite $Y'_{2k-1}(0) = Y'_{2k-1}(1) \Rightarrow$.

$$\begin{cases} Y'(0) = 1 + \sqrt{\lambda} \left(k_2 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right) \\ Y'(1) = 1 + \sqrt{\lambda} \left(k_2 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right) \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\lambda} \left(k_2 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\right) = 0 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}, \quad (\text{car } \sqrt{\lambda} = 2\pi k \neq 0)$$

Et on a $Y(0) = 0 \Rightarrow k_1 = 0$ de (2.19) on obtient

$$Y_{2k-1}(x) = x \cos(2\pi kx) \quad ; k = 1, 2, \dots$$

L'ensemble des fonctions propres de ces problème $\tilde{S} = \{Y_0 ; Y_{2k-1} ; Y_{2k}\}$

Avec

$$\tilde{S} = \{Y_0(x) = x ; Y_{2k-1}(x) = x \cos(2\pi kx) ; Y_{2k}(x) = \sin(2\pi kx)\}. \quad (2.21)$$

Est un système complet dans l'espace $L_2[0, 1]$.

D'après la la normalisation , le système bi-orthogonal, alors défini par ces deux Familles des fonction propres :

$$\begin{aligned} S &= \{2 ; 4 \cos(2\pi kx) , 4(1-x) \sin(2\pi kx)\}. \\ \tilde{S} &= \{x ; x \cos(2\pi kx) ; \sin(2\pi kx)\}. \end{aligned}$$

Dont les élément sont orthogonaux deux à deux sur $[0, 1]$, ce sont aussi des bases de Riesz en $L_2[0, 1]$, c'est-à-dire

$$(X_i, Y_j) = \int_0^1 X_i(x) Y_j(x) dx = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

2.3 Résultats d'existence et l'unicité

Nous avons les hypothèses suivantes sur les données du problème (2.1)-(2.4)

$$(A_1) \quad E(T) \in C^1[0, T], \quad E'(t) < 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

$$(A_2) \quad \varphi(x) \in C^4[0, 1];$$

$$(1) \quad \varphi(0) = \varphi(1); \varphi'(1) = 0; \quad \varphi''(0) = \varphi''(1); \quad \int_0^1 \varphi(x) dx = E(0);$$

$$(2) \quad \varphi_{2k} \geq 0, k = 1, 2, \dots$$

$$(A_3) \quad F(x, t) \in C(\overline{\varphi_T}), F(x, t) \in C^4[0, 1] \text{ pour arbitraire fixe } \forall t \in [0, T];$$

$$(1) \quad F(0, t) = F(1, t); \quad F_x(1, t) = 0; \quad F_{xx}(0, t) = F_{xx}(1, t);$$

$$(2) \quad F_0(t) \geq 0; \quad F_{2k}(t) \geq 0; \quad \forall t \in [0, T];$$

$$(3) \quad F_{2k}(t) \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots, \int_0^T E'(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \varphi_{2k} - 2 \int_0^T F_0(t) dt > 0.$$

$$\text{Où } \varphi_k = \int_0^1 \varphi(x) Y_k(x) dx, \quad F_k(t) = \int_0^1 F(x, t) Y_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Remarque 2.1. Les fonctions φ, E et F satisfaisant les hypothèse $(A_1) - (A_3)$ par exemple,

$$\varphi(x) = (1-x) \sin(2\pi kx); \quad E(t) = \frac{1}{2\pi} \exp(-t), \quad F(x, t) = (1-x) \sin(2\pi kx) \exp(3t).$$

le résultat principal est présenté comme suite .

Théorème 2.1. Soit les hypothèse $(A_1) - (A_3)$ satisfaites. Alors les affirmations suivantes sont vraies :

(1) le problème inverse (2.1)-(2.4) a une solution dans Ω_T .

(2) la solution de problème inverse (2.1)-(2.4) est unique en Ω_{T_0} ; où le nombre T_0 ($0 < T_0 < T$) est déterminé par les données du problème .

Démonstration. Tout solution de l'équation (2.1) peut être représentée comme :

$$U(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(t) X_k(x). \quad (2.22)$$

Où les fonctions $U_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ satisfaire le système d'équation suivantes .

$$U(x, t) = U_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [U_{2k}(t) X_{2k}(x) + U_{2k-1}(t) X_{2k-1}(x)]. \quad (2.23)$$

En utilisant la méthode Fourier , nous pouvons facilement, voir que $U_k(t)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ satisfait le système suivant de nombreuses équation linéaires

$$\begin{cases} U'_k(t) + a(t) \lambda_k U_k(t) = F_k(t) \\ U_k(0) = \varphi_k \end{cases} \quad (2.24)$$

Où λ_k , $k = 0, 1, \dots$ sont des valeurs propres de (2.9), On voit facilement que les solutions de (2.24), sont de la forme

$$\begin{aligned} U'_0(t) &= F_0(t) \\ U'_{2k}(t) + (2\pi k)^2 a(t) U_{2k}(t) &= F_{2k}(t) \\ U'_{2k-1}(t) + (2\pi k)^2 a(t) U_{2k-1}(t) + 4\pi k U_{2k}(t) &= F_{2k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

En substituant la solution de ce système d'équation et la condition initiale (2.2) dans (2.23) , on obtient la solution du problème (2.1)- (2.3) sous la forme suivante :

Nous avons l'équation (2.23) pour $k=0$ alors $U(x, t) = U_0 X_0$

On a

$$U'_0(t) = F_0(t)$$

par intégration à deux coté on obtient

$$\int_0^t U'(s) ds = \int_0^t F_0(\tau) d\tau \text{ alors } U_0(t) = U_0(0) + \int_0^t F_0(\tau) d\tau$$

Avec la condition de (2.24) pour $k = 0$ alors $U_0(0) = \varphi(0) = \varphi_0$

Donc

$$U_0 = \varphi(0) + \int_0^t F_0(\tau) d\tau$$

D'ou

$$U_0(t) X_0(x) = \left[\varphi_0 + \int_0^t F_0(\tau) d\tau \right] X_0(x).$$

Pour $k = 1$, nous pouvons facilement le système suivante

$$\begin{cases} U'_{2k}(t) + (2\pi k)^2 a(t) U_{2k}(t) = F_{2k}(t) \\ U_{2k}(0) = \varphi_{2k} \end{cases}$$

Nous allons chercher la solution de l'équation sous deuxième nombre (équation homogène)

On a $U'_{2k}(t) + (2\pi k)^2 a(t) U_{2k}(t) = 0$, équation à variable séparées

Donc

$$\frac{U'_{2k}(t)}{U_{2k}(t)} = -(2\pi k)^2 a(t)$$

Par intégration on obtient

$$U_{2k}(t) = C_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds}$$

Pour $t = 0 \Rightarrow U_{2k}(0) = C_{2k} = \varphi_{2k}$

D'où

$$U_{2k}(t) = \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds}$$

2^{ème} étape en utilise variation des constantes

Nous allons chercher la solution de l'équation sous la forme

$$U_{2k}(t) = \varphi_{2k}(t) e^{-(2\pi k)^2 A(t)}, \text{ avec } A(t) = \int_0^t a(s) ds$$

Dérivons la fonction U_{2k} par rapport t

On trouve

$$U'_{2k} = \varphi'_{2k}(t) e^{-(2\pi k)^2 A(t)} - \varphi_{2k}(t) (2\pi k)^2 a(t) e^{-(2\pi k)^2 A(t)}$$

Alors substitution l'expression, on obtient

$$\Rightarrow \varphi'_{2k}(t) e^{-(2\pi k)^2 A(t)} = F_{2k}(t)$$

$$\Rightarrow \varphi'_{2k}(t) = F_{2k}(t) e^{(2\pi k)^2 A(t)}$$

Par intégration

$$\Rightarrow \varphi_{2k}(t) = \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t a(s) ds} + \varphi_{2k}(0), \text{ avec } \varphi_{2k} \geq 0$$

d'après condition (2) de l'hypothèse (A_2) on a $\varphi_{2k}(0) = \varphi_{2k} \geq 0$, alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} U_{2k}(t) X_{2k}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_\tau^t a(s) ds} d\tau \right] X_{2k}(x)$$

De même travail Nous allons chercher la solution de l'équation sous la forme

$$\begin{cases} U'_{2k}(t) + (2\pi k)^2 a(t) U_{2k-1}(t) + 4\pi k U_{2k}(t) = F_{2k-1}(t) \\ U_{2k-1}(0) = \varphi_{2k-1} \end{cases}$$

On cherche la solution de l'équation sous deuxième nombre (équation homogène)

On a $U'_{2k-1}(t) + (2\pi k)^2 a(t) U_{2k-1}(t) + 4\pi k U_{2k}(t) = 0$ équation a variable séparées

Nous avons

$$U'_{2k-1}(t) + (2\pi k)^2 a(t) U_{2k-1}(t) = -4\pi k U_{2k}(t)$$

$$\Rightarrow U_{2k-1}(t) = C_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds}$$

Pour $t = 0$ alors $U_{2k-1}(0) = C_{2k-1} = \varphi_{2k-1}$

$$\Rightarrow \varphi_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds}$$

Nous allons chercher la solution de l'équation sous la forme

$$U_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1}(t) e^{-(2\pi k)^2 A(t)}$$

Dérivons la fonction U_{2k-1} par rapport t et on substitution, on trouve

$$\varphi'_{2k-1}(t) e^{-(2\pi k)^2 A(t)} = -4\pi k \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 A(t)}$$

$$\Rightarrow \varphi'_{2k-1}(t) = -4\pi k \varphi_{2k}$$

Par intégration

$$\varphi_{2k-1}(t) = -4\pi k \varphi_{2k} t + C_{2k-1}, \text{ avec } \varphi_{2k-1}(0) = C_{2k-1} = \varphi_{2k-1}$$

$$\Rightarrow \varphi_{2k-1}(t) = \varphi_{2k-1} - 4\pi k \varphi_{2k} t$$

D'ou

$$\Rightarrow U_{2k-1}(t) = (\varphi_{2k-1} - 4\pi k \varphi_{2k} t) e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds}.$$

2^{eme} étape en utilise la même manière on trouve la dernière partie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t (F_{2k-1}(\tau) - 4\pi k F_{2k}(\tau) (t - \tau)) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right].$$

En substitution les solution du système des équations et condition initial (2.2) dans (2.23), on obtient la solution du problème (2.1)-(2.3) sous la forme :

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \left[\varphi_0 + \int_0^t F_0(\tau) d\tau \right] X_0(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} \right] X_{2k}(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[(\varphi_{2k-1} - 4\pi k \varphi_{2k} t) e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right] X_{2k-1}(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_0^t (F_{2k-1}(\tau) - 4\pi k F_{2k}(\tau) (t - \tau)) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right] X_{2k-1}(x). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Sous la condition (1) de (A_2) et (A_3) de la série (2.25) et de $\frac{\partial U}{\partial x}$ sont uniformément convergentes en $\overline{\Omega_T}$ car leur sommes majorantes sont absolument convergentes .

par conséquent , leurs $U(x, t)$ et $U_x(x, t)$ sont continués dans $\overline{\Omega_T}$. De plus , $\frac{\partial U}{\partial t}$ et la séries $\frac{\partial U}{\partial x^2}$ du second ordre sont uniformément convergentes dans Ω_T . Ainsi nous avons $U(x, t) \in C^2(\Omega_T) \cap C^{1,0}(\overline{\Omega_T})$. De plus $U_t(x, t)$ est continu dans $\overline{\Omega_T}$.

En différenciant la condition (2.4), sous l'hypothèse (A_1) on obtient.

On a de (2.4)

$$\int_0^1 U(x, t) dx = E(t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \int_0^1 U(x, t) dx = \frac{d}{dt} E(t)$$

Donc

$$\int_0^1 U_t(x, t) dx = E'(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.26)$$

De cela donne

$$a(t) = p[a(t)]. \quad (2.27)$$

De l'équation (2.1) on a

$$U_t = a(t) U_{xx} + F(x, t)$$

Alors par intégration sur $[0, 1]$

$$\int_0^t U_t(x, t) dx = a(t) \int_0^1 U_{xx} dx + \int_0^1 F(x, t) dx$$

De (2.25) on trouve

$$E'(t) = a(t) [U_x(1, t) - U_x(0, t)] + \int_0^1 F(x, t) dx$$

Avec la condition de (2.3) On a

$$a(t) U_x(0, t) = \int_0^1 F(x, t) dx - E'(t) \quad (2.28)$$

On va chercher de $U_x(0, t)$. De la série (2.23) on dérivée par rapport x

Nous avons

$$\frac{d}{dx} U(x, t) = [4(1-x) \sin(2\pi kx) + 8\pi k(1-x) \cos(2\pi kx)] U_{2k}(t) - [8\pi k \sin(2\pi kx)] U_{2k-1}(t)$$

Alors

$$U_x(0, t) = \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left[\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right]$$

D'ou l'équation (2.28) On a

$$a(t) = \frac{\int_0^1 F(x, t) - E'(t)}{U_x(0, t)}$$

Il est claire que la fonction $F(x, t)$ s'écrit sous forme

$$F(x, t) = F_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k-1}(t) X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}(t) X_{2k}(x)$$

On intégrant sur $[0, 1]$ et intégration par partie , on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x, t) dx &= 2F_0(t) \int_0^1 dx + \sum_{k=1}^{\infty} 4F_{2k-1}(t) \int_0^1 \cos(2\pi kx) dx + \sum_{k=1}^{\infty} 4F_{2k}(t) \int_0^1 (1-x) \sin(2\pi kx) dx \\ &= 2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} 4F_{2k-1}(t) \left[\frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} \right]_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} 4F_{2k}(t) \left(\frac{1}{2\pi k} - \frac{1}{2\pi k} \left[\frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} \right]_0^1 \right) \\ &= 2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t). \end{aligned}$$

D'ou on obtient :

$$P[a(t)] = \frac{2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) - E'(t)}{\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left[\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right]}. \quad (2.29)$$

On note

$$\begin{aligned} C_0 &= 2 \min_{t \in [0, T]} F_0(t) + \min_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) \right) - \max_{t \in [0, T]} E'(t). \\ C_1 &= 2 \max_{t \in [0, T]} F_0(t) + \max_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) \right) - \min_{t \in [0, T]} E'(t). \\ C_2 &= \int_0^T E'(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \varphi_{2k} - 2 \int_0^T F_0(t) dt. \\ C_3 &= \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} + \int_0^T F_{2k}(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifies que $C_k > 0, k = 0, 1, 2, 3$ et $C_2 \leq C_3$, De (2.25) par intégration sur $[0, T]$.

$$\int_0^T \left(\int_0^1 U_t(x, t) dx \right) dt = \int_0^T E'(t) dt.$$

On va chercher à $\int_0^1 U_t(x, t) dx$, Nous avons

$$U_t(x, t) = U'_0(t) X_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} U'_{2k-1}(t) X_{2k-1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} U'_{2k}(t) X_{2k}(x)$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 U_t(x, t) dx &= 2U'_0(t) \int_0^1 dx + \sum_{k=1}^{\infty} U'_{2k-1}(t) \int_0^1 X_{2k-1}(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} U'_{2k}(t) \int_0^1 X_{2k}(x) dx \\ &= 2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} 4U'_{2k-1}(t) \int_0^1 \cos(2\pi kx) dx + \sum_{k=1}^{\infty} 4U'_{2k}(t) \int_0^1 (1-x) \sin(2\pi kx) dx \end{aligned}$$

Par intégration par partie

$$\int_0^1 U_t(x, t) dx = 2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} 4U'_{2k-1}(t) \left[\frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k} \right]_0^1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} U'_{2k}(t)$$

D'ou

$$\int_0^1 U_t(x, t) dx = 2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} U'_{2k}(t)$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_0^T \left(\int_0^1 U_t(x, t) dx \right) dt &= 2 \int_0^T F_0(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \int_0^T U'_{2k}(t) dt \\ &= 2 \int_0^T F_0(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left[\varphi_{2k} e^{-(2\pi kx)} \int_0^t a(s) ds + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right]_0^T \end{aligned}$$

donc

$$\int_0^T E'(t) dt = 2 \int_0^T F_0(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left[\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^T a(s) ds} + \int_0^T F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^T a(s) ds} d\tau \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \varphi_{2k}$$

On trouve

$$\int_0^T E'(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \varphi_{2k} - 2 \int_0^T F_0(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left[\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^T a(s) ds} + \int_0^T F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^T a(s) ds} d\tau \right]$$

En utilise l'estimation suivent :

$$\left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^T a(s) ds} \right| \leq (2\pi k)^2 \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^T a(s) ds} \right| \leq (2\pi k)^2; \quad \left(\text{car } e^{-(2\pi k)^2 \int_0^T a(s) ds} \leq 1 \right).$$

On obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T E'(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \varphi_{2k} - 2 \int_0^T F_0(t) dt &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} (2\pi k)^2 \left[\varphi_{2k} + \int_0^T F_{2k}(\tau) d\tau \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left[\varphi_{2k} + \int_0^T F_{2k}(\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

En utilise la représentation (2.27) suivante est vraie

$$0 < \frac{C_0}{C_3} \leq a(t) \leq \frac{C_1}{C_2}.$$

On considérez l'ensemble M comme suite

$$M = \left\{ a(t) \in C[0, T] : \frac{C_0}{C_3} \leq a(t) \leq \frac{C_1}{C_2} \right\}.$$

. Il facile de voir que

$$P : M \longrightarrow M$$

L'opérateur $P(M)$ fait corresponde de M .

Nous allons maintenant montre que l'opérateur P est uniformément bornée et equi-continue sur M . (P opérateur compact, voir chapitre 1)

Soit M_1 un sous-ensemble de l'ensemble M .

Depuis $P(M_1) \subset M$, alors $P(M_1)$ est uniformément borné. Ensuite, nous avons pour $a(t) \in M_1$ et $t_1, t_2 \in [0, T]$

En utilisant $k(t), N(t)$

Alors

$$\begin{aligned} |P[a(t_1)] - P[a(t_2)]| &= \left| \frac{K(t_1)N(t_2) - K(t_1)N(t_1) + K(t_1)N(t_1) - K(t_2)N(t_1)}{N(t_1)N(t_2)} \right| \\ |P[a(t_1)] - P[a(t_2)]| &\leq \frac{|K(t_1) - K(t_2)|}{N(t_2)} + \frac{|K(t_1)(N(t_1) - N(t_2))|}{N(t_1)N(t_2)} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Où

$$K(t) = 2F_{0(t)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) - E'(t).$$

$$N(t) = \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right).$$

Pour $a(t) > 0$

Utilisant l'estimation suivant :

Lemme 2.1. Pour $t_1 \leq t \leq t_2$ où $t_1, t_2 > 0$, on a

$$\left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^{t_1} a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^{t_2} a(s) ds} \right| \leq (2\pi k)^2 |t_1 - t_2| \max_{[0, T]} a(t), \quad 0 < \tau < t, \quad \text{et } \|a(t)\|_{C[0, T]}.$$

On note la norme de Tchebychev définie par

$$\|a\|_{C[0, T]} = \max_{0 \leq t \leq T} |a(t)|.$$

Démonstration. On défini $g = (t, \tau) = e^{(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds}$ $t \in [t_1, t_2], 0 \leq \tau \leq T$.

Où $g(\cdot, \tau) \in C[t_1, t_2]$ et $g(t, \tau)$ est différentiable de (t_1, t_2) , par utilisation théorème des accroissement fini

$$|g(t_1, \tau) - g(t_2, \tau)| = |t_1 - t_2| g(t, \tau).$$

De plus

$$|g(t_1, \tau) - g(t_2, \tau)| \leq (2\pi k)^2 |t_1 - t_2| \max_{C[0, T]}.$$

□

Donc

$$\left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^{t_1} a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^{t_2} a(s) ds} \right| \leq (2\pi k)^2 |t_1 - t_2| \max_{[0, T]} a(t),$$

Et d'autre par on a

$$|N(t_1) - N(t_2)| \leq \left| \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \varphi_{2k} \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_0^{t_1} a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^{t_2} a(s) ds} \right) \right|$$

$$+ \left| \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left[\int_0^{t_1} F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_1} a(s) ds} - \int_0^{t_2} F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_2} a(s) ds} \right] \right|$$

Avec $0 < t_1 < t_2 < T$.

$$\begin{aligned} |N(t_1) - N(t_2)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k (2\pi k)^2 \varphi_{2k} |t_1 - t_2| \max_{[0, T]} a(t) \\ + \left| \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left[\int_0^{t_1} F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_1} a(s) ds} - \int_0^{t_1} F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_2} a(s) ds} - \int_{t_1}^{t_2} F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_2} a(s) ds} \right] \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 \varphi_{2k} |t_1 - t_2| \max_{[0, T]} a(t) + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^{t_1} F_{2k}(\tau) \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_1} a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_2} a(s) ds} \right| \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_{t_1}^{t_2} F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_2} a(s) ds} \end{aligned}$$

Puisque $e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^{t_2} a(s) ds} \leq 1$, $k = 0, 1, 2$, on obtient

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 \varphi_{2k} |t_1 - t_2| \max_{[0, T]} a(t) + \sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 \int_0^{t_1} F_{2k}(\tau) d\tau \max_{[0, T]} a(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_{t_1}^{t_2} F_{2k}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

On pose

$$C_4 = \sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 \varphi_{2k}, C_5 = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 F_{2k}(\tau) d\tau, C_6 = \max_{[0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k F_{2k}(t) \right).$$

Alors

$$|N(t_1) - N(t_2)| \leq \left[(C_4 + C_5) \max_{[0, T]} a(t) + C_6 \right] |t_1 - t_2|$$

De l'hypothèse $(A_2)_2$ et $(A_3)_3$

$$0 < a(t) \leq \frac{C_1}{C_2} < \infty, 0 \leq t \leq T.$$

On obtient

$$|N(t_1) - N(t_2)| \leq \left[(C_4 + C_5) \frac{C_1}{C_2} + C_6 \right] |t_1 - t_2| \quad (2.31)$$

Remarquez que forme la définition de C_1 , nous obtenons

$$|k(t)| \leq C_1; \quad N(t) \geq C_2; \quad t \in [0, T].$$

Puisque $K(t)$ est une fonction continue donc pour donné $\epsilon > 0 \exists \delta_1 > 0$.
Tel que $\delta_1 = \delta_1(\epsilon), \forall t_1, t_2 \in [0, T] (|t_1 - t_2| < \delta)$.

D'ou

$$|K(t_1) - K(t_2)| < \frac{C_2 \epsilon}{2}, \quad \text{pour tout } |t_1 - t_2| < \delta_1 \quad (2.32)$$

Soit

$$\delta = \min \left\{ \delta_1(\epsilon), \frac{C_2^3}{2[(C_4 + C_5)C_1 + C_2C_6]C_1} \epsilon \right\}$$

De (2.31) pour $|t_1 - t_2| < \epsilon$ on obtient

$$|N(t_1) - N(t_2)| \leq \frac{[(C_4 + C_5)C_1 + C_2C_6]}{C_2} \times \frac{C_2^3}{2[(C_4 + C_5)C_1 + C_2C_6]C_1} \epsilon.$$

D'ou

$$|N(t_1) - N(t_2)| \leq \frac{C_2^2 \epsilon}{2C_1} \quad (2.33)$$

Et d'autre part

$$|K(t_1)| \leq 2 \max_{t \in [0, T]} F_0(t) + \max_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) \right) - \min_{t \in [0, T]} E'(t)$$

Alors

$$|K(t_1)| \leq C_1.$$

Et

$$N(t_2) \leq C_3 \text{ telle que } C_2 \leq C_3 \text{ alors } N(t_2) \leq C_2.$$

Et aussi

$$N(t_1)N(t_2) \leq C_2^2;$$

En substitution de (2.32) et (2.33) dans (2.30), donne

$$|P[a(t_1)] - P[a(t_2)]| \leq \frac{C_2 \epsilon}{2C_2} + \frac{C_1 C_2^2 \epsilon}{2C_1 C_2^2}$$

Alors

$$|P[a(t_1)] - P[a(t_2)]| < \epsilon.$$

Ainsi, l'ensemble $P(M_1)$ est equi-continu. alors $P(M_1)$ est un ensemble compact et l'opérateur est compact et l'application de l'ensemble M sur lui même, En utilisant le théorème du point fixe de Schauder, nous avons une solution $a(t) \in C[0, T]$ de l'équation (2.27).

2.3.1 Unicité de la solution

Montrons maintenant qu'il existe Ω_{T_0} ($0 < T_0 \leq T$) pour le quel la solution (a, U) du problème (2.1)-(2.4) est unique dans Ω_{T_0} .

Supposons que $(U(x, t), a(t))$ et $(V(x, t), b(t))$ deux paires de solution du problème (2.1)-(2.4). En suite, à partir des représentation (2.25) et (2.27) de la solution

$$\begin{aligned} U(x, t) - V(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2k} \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t b(s) ds} \right) X_{2k}(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 F_{2k}(\tau) \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds} \right) d\tau \right) X_{2k}(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi_{2k-1} - 4\pi k \varphi_{2k} t) \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t b(s) ds} \right) X_{2k-1}(x) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 F_{2k-1}(\tau) \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds} \right) d\tau \right) X_{2k-1}(x) \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \left(4\pi k \int_0^t F_{2k}(\tau) (t - \tau) \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds} \right) d\tau \right) X_{2k-1}(x). \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$a(t) - b(t) = P[a(t)] - P[b(t)]. \quad (2.35)$$

Où

$$\begin{aligned} P[a(t)] - P[b(t)] &= \frac{2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) - E'(t)}{\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right)} \\ &- \frac{2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) - E'(t)}{\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t b(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds} d\tau \right)}. \end{aligned}$$

l'estimation suivante est vraie, et on a $\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left(\varphi_{2k} + \int_0^t F_{2k}(\tau) d\tau \right) \leq C_2$.

Alors

$$|P[a(t)] - P[b(t)]| \leq \frac{(2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) + |E'(t)|)}{C_2^2} \times \left(\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \varphi_{2k} \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t b(s) ds} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^T F_{2k}(\tau) \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds} \right| d\tau \right).$$

Utilisation des estimations

$$\begin{aligned} \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t b(s) ds} \right| &\leq (2\pi k)^2 T \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)|. \\ \left| e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t b(s) ds} \right| &\leq (2\pi k)^2 T \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)|. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Alors

$$\begin{aligned} |P[a(t)] - P[b(t)]| &\leq \frac{2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) + |E'(t)|}{C_2^2} \\ &\times \left[\sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 \varphi_{2k} T \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 \int_0^T F_{2k}(\tau) d\tau T \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)| \right] \end{aligned}$$

D'ou

$$|P[a(t)] - P[b(t)]| \leq \frac{2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) + |E'(t)|}{C_2^2} \left[(C_4 + C_5) T \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)| \right].$$

Et on a

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} |P[a(t)] - P[b(t)]| &\leq \frac{2 \max_{t \in [0, T]} F_0(t) + \max_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) \right) + |E'(t)|}{C_2^2} \times \\ &\left[(C_4 + C_5) T \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)| \right] \end{aligned}$$

D'ou

$$\max_{t \in [0, T]} |P[a(t)] - P[b(t)]| \leq \frac{C_1 (C_4 + C_5)}{C_2^2} T \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)|.$$

Si pose $\alpha = \frac{C_1 (C_4 + C_5)}{C_2^2} T$

On obtient

$$\max_{0 \leq t \leq T} |P[a(t)] - P[b(t)]| \leq \alpha \max_{0 \leq t \leq T} |a(t) - b(t)|.$$

Soit $\alpha \in (0, 1)$ un nombre fixe arbitraire. fixe un nombre $T_0, 0 < T_0 \leq T$, telle que

$$\frac{C_1 (C_4 + C_5)}{C_2^2} T_0 \leq \alpha.$$

puis formez l'égalité (2.34) on obtient

$$\|a - b\|_{C[0, T_0]} \leq \alpha \|a - b\|_{C[0, T_0]}.$$

Pour $\alpha < 1$ alors l'égalité $(1 - \alpha) \|a - b\|_{C[0, T_0]} \leq 0$

On obtient $a = b$ pour fixe $T_0 > 0$, en remplaçant $a = b$ dans (2.34), on obtient

$$U(x, t) - V(x, t) = 0$$

Ce qui implique que $U(x, t) = V(x, t)$ et $a(t) = b(t)$, $t \in [0, T]$.

2.4 Dépendance continue par rapport données

Théorème 2.2. *Sous des hypothèses $(A_1) - (A_3)$ la solution (a, u) du problème (2.1)(2.4) dépend continuellement des données pour les petits T .*

Démonstration. Soit $\phi = \{\varphi, F, E\}$ et $\bar{\phi} = \{\bar{\varphi}, \bar{F}, \bar{E}\}$

deux ensembles données, qui satisfont les hypothèses $(A_1) - (A_3)$. Alors il existe des constantes positives $M_i, i = 1, 2, 3$ tel que □

$$\|\phi\|_{C^4[0,1]} \leq M_1, \|F\|_{C^{4,0}(\bar{\Omega}_T)} \leq M_2, \|E\|_{C^4[0,1]} \leq M_3,$$

$$\|\bar{\phi}\|_{C^4[0,1]} \leq M_1, \|\bar{F}\|_{C^{4,0}(\bar{\Omega}_T)} \leq M_2, \|\bar{E}\|_{C^4[0,1]} \leq M_3.$$

Soit (a, U) et (\bar{a}, \bar{U}) est les solution du problème inverse (2.1)- (2.4) correspondant aux données ϕ et $\bar{\phi}$, respectivement selon de l'équation (2.27) nous avons

$$a(t) = \frac{2F_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) - E'(t)}{\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left[\varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} + \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right]}, \quad (2.37)$$

$$\bar{a}(t) = \frac{2\bar{F}_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \bar{F}_{2k}(t) - \bar{E}'(t)}{\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \left[\bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} + \int_0^t \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} d\tau \right]}, \quad (2.38)$$

Premièrement, laissez nous estimation $a - \bar{a}$ de calculer que

$$\begin{aligned}
& \left| F_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} - \bar{F}_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \\
&= \left| F_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \bar{\varphi}_{2k} \left(e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} - e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} (\bar{\varphi}_{2k} - \varphi_{2k}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} \left(F_0(t) - \bar{F}_0(t) \right) \right|
\end{aligned}$$

En utilisant (2.36) et les hypothèses du théorème, nous avons la suite suivante pour la première estimation

$$\begin{aligned}
& \left| F_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} - \bar{F}_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \\
&\leq \max \left(\sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 |F_0(t)| |\bar{\varphi}_{2k}(t)| \right) T \max |a(t) - \bar{a}(t)| + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \max |\varphi_{2k} - \bar{\varphi}_{2k}| \\
&+ \max \left(\sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k |\varphi_{2k}| \right) \max |F(t) - \bar{F}(t)| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 \|F\|_{C^{4,0}(\bar{Q}_T)} \|\varphi\|_{C^4[0,1]} \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]} + \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi\|_{C^4[0,1]} \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)} \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 T M_1 M_2 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]} + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k M_1 \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)}
\end{aligned}$$

De même manière on a

$$\begin{aligned}
& \left| F_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t \bar{a}(s) ds} d\tau - \bar{F}_0(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_{\tau}^t a(s) ds} d\tau \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4(2\pi k)^3 T^2 M_2^2 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \sum_{k=1}^{\infty} 16\pi k M_2 T \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \bar{F}_{2k}(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} 16(2\pi k)^2 T M_1 M_2 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + 16M_2 \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]} + 16M_1 \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)}.
\end{aligned}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} F_{2k}(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} d\tau - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \bar{F}_{2k}(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} d\tau \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} 16 (2\pi k)^2 M_2^2 T^2 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + 32M_2 T \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)}.$$

$$E'(t) \left| \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \bar{\varphi}_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} - \bar{E}'(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \varphi_{2k} e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4 (2\pi k)^3 T M_1 M_3 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]} + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k M_1 \|E - \bar{E}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)}.$$

$$\left| E'(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t \bar{F}_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t \bar{a}(s) ds} d\tau - \bar{E}'(t) \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k \int_0^t F_{2k}(\tau) e^{-(2\pi k)^2 \int_0^t a(s) ds} d\tau \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} 4 (2\pi k)^3 T^2 M_2 M_3 \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k T \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)} + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k T M_2 \|E - \bar{E}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)}.$$

Où $M_k, k = 1, \dots, 6$ sont quelques constantes

On a

$$M_1 = \sum_{k=1}^{\infty} 4 (2\pi k)^3 T M_1 M_2 + \sum_{k=1}^{\infty} 4 (2\pi k)^3 T^2 M_2^2 + \sum_{k=1}^{\infty} 16 (2\pi k)^2 T M_1 M_2 + \sum_{k=1}^{\infty} 16 (2\pi k)^2 M_2^2 T^2$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} 4 (2\pi k)^3 T M_1 M_3.$$

$$M_2 = \sum_{k=1}^{\infty} 16\pi k + 16M_2.$$

$$M_3 = \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k M_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 16\pi k T M_2 + 16M_1 + 32T M_2 + \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k.$$

$$M_4 = \sum_{k=1}^{\infty} 8\pi k M_1 + \sum_{k=1}^{\infty} T M_2.$$

Après avoir ces estimation dans $a - \bar{a}$, nous obtenons

$$(1 - M_1) \|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} \leq M_5 \left(\|E - \bar{E}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)} + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]} + \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)} \right)$$

Ou $M_5 = \max \{M_2, M_3, M_4\}$.

L'inégalité $M_1 < 1$ on prend le petites T , finalement on obtient

$$\|a - \bar{a}\|_{C[0,T]} \leq \frac{M_5}{(1 - M_1)} \|\phi - \bar{\phi}\|.$$

Si pose $M_6 = \frac{M_5}{(1 - M_1)}$.

Ou

$$\|\phi - \bar{\phi}\| = \|E - \bar{E}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)} + \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{C^4[0,1]} + \|F - \bar{F}\|_{C^{4,0}(\Omega_T)}.$$

De l'équation (2.25) une estimation similaire est également obtenue pour la différence $U - \bar{U}$ au comme

$$\|U - \bar{U}\|_{C(\bar{\Omega}_T)} \leq M_6 \|\phi - \bar{\phi}\|.$$

□

ÉTUDE NUMÉRIQUE DE PROBLÈME INVERSE

Dans ce chapitre, nous avons introduit un schéma de différences finies de Crank-Nicolson combiné avec la technique de prédicteur-correcteur pour résoudre numériquement ce problème inverse. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de ce schéma.

3.1 Approximation Numérique

Soient $N_x, N_t \in \mathbb{N}$ définit $t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, N_t$ $x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N_x + 1$, ou $\tau = \frac{T}{N_t}$ et $h = \frac{1}{N_x + 1}$ sont le pas d'espace et le pas temps respectivement.

Soit U_i^j l'application numérique de $U(x_i, t_j)$, F_i^{j+1} L'approximation numérique de $F(x_i, t_j)$ et a^{j+1} l'application numérique de $a(t_j)$.

1. La discrétisation de la dérivée première ordre dans la direction t est donnée par :

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x_i, t_j) = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{\tau} + \theta(\tau). \quad (3.1)$$

2. La discrétisation de Crank-Nicolsonla dans la direction x est donnée par :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{1}{2} \left(\frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2} + \frac{U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1}}{h^2} \right). \quad (3.2)$$

3. La discrétisation de la condition initiale et aux limites sont données par :

$$U(x_i, 0) = \varphi(x_i) \Rightarrow U_i^0 = \varphi_i. \quad (3.3)$$

4. Pour la condition non locale :

$$U(0, t_j) = U(1, t_j) \Leftrightarrow U(x_0, t_j) = U(x_{N_x}, t_j) \Rightarrow U_0^j = U_{N_x}^j. \quad (3.4)$$

$$U_x(1, t_j) = 0 \Leftrightarrow U_x(x_{N_x}, t_j) = 0 \Rightarrow \frac{U(x_{N_x+1}, t_j) - U(x_{N_x-1}, t_j)}{h} = 0 \Rightarrow U_{N_x-1}^j = U_{N_x+1}^j. \quad (3.5)$$

3.1.1 Schéma des différences finies

En utilisant (3.1) et (3.2) et (2.1), on obtient le schéma de Crank-Nicolson défini par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (U_i^{j+1} - U_i^j) &= \frac{1}{2} (a^{j+1} + a^j) \frac{1}{2h^2} [(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j) + (U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1})] \\ &+ \frac{1}{2} (F_i^{j+1} + F_i^j). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Le schéma (3.6) devient

$$U_{i-1}^{j+1} - 2(1+R)U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1} = -U_{i-1}^j + 2(1-R)U_i^j - U_{i+1}^j - R\tau(F_i^{j+1} + F_i^j), \quad (3.7)$$

$$U_i^0 = \varphi_i, \quad (3.8)$$

$$U_0^j = U_{N_x}^j, \quad (3.9)$$

$$U_{N_x-1}^j = U_{N_x+1}^j. \quad (3.10)$$

Où $R = \frac{2h^2}{\tau(a^{j+1}+a^j)}$, $i = 1, 2, \dots, N_x + 1$, $j = 0, 1, \dots, N_t$

3.1.2 Système matricielle

On observe qu'on obtient N_x équation servant à déterminer les N_x inconnues $(U_1, U_2, U_3, \dots, U_{N_x})$. On dit usuellement qu'on a discrétisé le problème par une méthode de différences finies utilisant le schéma Crank-Nicolson. On note que la connaissance des conditions au bord U_0 et U_{N_x} est nécessaire à la résolution du système, puisque'elles apparaissent dans (3.7) lorsque $i = 1, \dots, N_x + 1$

De l'équation (3.7)-(3.10) a $N_x + 1 \times N_x + 1$ de système des fonction linéaire.

$$AU^{j+1} = BU^j + F^j. \quad (3.11)$$

1. Pour $j = 0$

De (3.7) on a

Pour $i = 1$:

$$U_{N_x}^1 - 2(1+R)U_1^1 + U_2^1 = -U_{N_x}^0 + 2(1-R)U_1^0 - U_2^0 - R\tau(F_1^1 + F_1^0)$$

Pour $i = 2$:

$$U_1^1 - 2(1+R)U_2^1 + U_3^1 = -U_1^0 + 2(1-R)U_2^0 - U_3^0 - R\tau(F_2^1 + F_2^0)$$

Pour $i = 3$:

$$U_2^1 - 2(1+R)U_3^1 + U_4^1 = -U_2^0 + 2(1-R)U_3^0 - U_4^0 - R\tau(F_3^1 + F_3^0)$$

⋮

⋮

⋮

⋮

Pour $i = N_x - 1$:

$$U_{N_x-2}^1 - 2(1+R)U_{N_x-1}^1 + U_{N_x}^1 = -U_{N_x-2}^0 + 2(1-R)U_{N_x-1}^0 - U_{N_x}^0 - R\tau(F_{N_x-1}^1 + F_{N_x-1}^0)$$

Pour $i = N_x$:

$$2U_{N_x-1}^1 - 2(1+R)U_{N_x}^1 = -2U_{N_x-1}^0 + 2(1-R)U_{N_x}^0 - R\tau(F_{N_x}^1 + F_{N_x}^0)$$

Où

$$\begin{aligned} b_1 &= 2(1-R)U_1^j - U_2^j - U_{N_x}^j - R\tau(F_1^{j+1} + F_1^j), \quad j = 0, 1, \dots, N_t. \\ b_{N_x} &= -2U_{N_x-1}^j + 2(1-R)U_{N_x}^j - R\tau(F_{N_x}^{j+1} + F_{N_x}^j), \quad j = 0, 1, \dots, N_t. \\ b_i &= -U_{i-1}^j + 2(1-R)U_i^j - U_{i+1}^j - R\tau(F_i^{j+1} + F_i^j), \quad j = 0, 1, \dots, N_t. \end{aligned}$$

2. Pour $j > 0$ De même manière de cas ($j = 0$). Donc, l'équation (3.11) écrit comme suite :

$$AU^{j+1} = -U_{i-1}^j + 2(1-R)U_{i=1}^j - U_{i+1}^j, \text{ Pour } i = 2, 3, \dots, N_x - 1, j = 0, 1, \dots, N_t.$$

Où

$$A = \begin{pmatrix} -2(1+R) & 1 & 0 & \dots & 0 & & 1 \\ 1 & -2(1+R) & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & -2(1+R) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & 1 & -2(1+R) & 1 \\ & & & & 0 & 2 & -2(1+R) & \end{pmatrix}$$

Et

$$B = \begin{pmatrix} 2(1-R) & -1 & 0 & \dots & 0 & & -1 \\ -1 & 2(1-R) & -1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & -1 & 2(1-R) & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \\ & & & & 0 & -1 & 2(1-R) & -1 \\ & & & & 0 & -2 & 2(1-R) & \end{pmatrix}$$

Où

$$R = \frac{2h^2}{\tau(a^{j+1} + a^j)}, \quad j = 0, 1, \dots, N_t.$$

$$F^j = \left[-R\tau (F_1^{j+1} + F_1^j), -R\tau (F_2^{j+1} + F_2^j), \dots, -R\tau (F_{N_x}^{j+1} + F_{N_x}^j) \right]_{N_x \times 1}^T.$$

Remarque 3.1. Les matrice A et B sont définie positive.

Proposition 3.1. A est une matrice tridiagonale a diagonal dominante $U^T AU$ est définie positive.

A définie positive $\Rightarrow A$ inversible .

Donc le système admet une unique solution.

Propriétés 3.1. 1. A diagonal dominant par ligne $\left(|a_{ii}| \geq \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}| \right)$.

2. A tridiagonale par blocs .

3. A définie positive .

Pour démontre que les matrices A et B sont définie positive, il suffit de montre que

$$U^T AU > 0, \quad U \neq 0.$$

On a

Pour $i = j = 1$

$$|-2(1 + R)| \geq |2| = 2 > 0$$

Pour $i = j = 2$

$$|-2(1 + R)| \geq |2| = 2 > 0$$

⋮

Pour $i = j = N_x$

$$|-2(1 + R)| \geq |1| = 2 > 0$$

Donc pour tout $U \neq 0$, $U^T AU > 0$.

De même manières B est définie positive si $U^T BU > 0, U \neq 0$.

Maintenant, construisons la correction le mécanisme de prédictive-correction Premièrement , intégrant l'équation (2.1) par rapport à x de 0 à 1 en utilisant (2.3)-(2.4) , et l'équation (2.26), on obtient

$$a(t) = \frac{-E'(t) + \int_0^1 F(x, t) dx}{U_x(0, t)}. \quad (3.12)$$

L'approximation des différences finies de (3.12) est

$$a^j = \frac{\left[-((E^{j+1} - E^j) / \tau) + (Fin)^j \right] h}{U_1^j - U_0^j}.$$

Où $E^j = E(t_j)$, $(Fin)^j = \int_0^1 F(x, t_j) dx$, $j = 0, 1, \dots, N_t$.

$$a^0 = \frac{\left[-((E^1 - E^0) / \tau) + (Fin)^0 \right] h}{\phi_1 - \phi_0}.$$

Et les valeurs de ϕ_i nous permettent de démarrer notre calcul. A noter les valeurs de a^j, U_i^j à s-itération $a^{j(s)}, U_i^{j(s)}$ respectivement. En calcul numérique, le pas de temps étant très petit, on peut prendre $a^{j+1}(0) = a^j, U_i^{j+1(0)}$, $j = 0, 1, 2, \dots, N_t$, $i = 1, 2, \dots, N_{x+1}$.

Chaque(s + 1)-l'étape d'itération nous déterminons d'abord à partir $a^{j+1(s+1)}$ de la formule

$$a^{j+1(s+1)} = \frac{\left[-((E^{j+2} - E^{j+1}) / \tau) + (Fin)^{j+1} \right] h}{U_1^{j+1(s)} - U_0^{j+1(s)}}.$$

Alors de (3.6)-(3.9) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \left(U_i^{j+1(s+1)} - U_i^{j+1(s)} \right) &= \frac{1}{4h^2} \left(a^{j+1(s+1)} + a^{j+1(s)} \right) \times \left[\left(U_{i-1}^{j+1(s+1)} - 2U_i^{j+1(s+1)} + U_{i+1}^{j+1(s+1)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(U_{i-1}^{j+1(s)} - 2U_i^{j+1(s)} + U_{i+1}^{j+1(s)} \right) \right] + \frac{1}{2} (F_i^{j+1} + F_i^j); \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$U_0^{j+1(s)} = U_{N_x}^{j+1(s)}; \quad (3.14)$$

$$U_{N_x-1}^{j+1(s)} = U_{N_x+1}^{j+1(s)}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (3.15)$$

Le système des équation (3.13) – (3.14) peut être résolu par méthode d'élimination de Gauss. Si la différence de valeurs entre deux itérations atteint la tolérance prescrite, l'itération est arrêtée et nous acceptons les valeurs affichées $U^{j+1(s)}, U_i^{j+1(s)}$ ($i = 1, 2, \dots, N_x$), est a^{j+1}, U_i^{j+1} ($i = 1, 2, \dots, N_x$), dans le $(j + 1)$ sur le pas de temps $(j + 1)$ respectivement. En vertu de cette itération, nous pouvons déplacer le niveau de formulaire j au niveau j+1.

3.1.3 Exemple Numérique

On considère le problème inverse de (2.1)-(2.4), avec

$$F(x, t) = \left(\frac{1}{\pi} e^{-t} + 4\pi e^{3t} \right) \cos(2\pi x) + (2\pi)^2 (1-x) \sin(2\pi x) e^{3t};$$

$$\varphi(x) = (1-x) \sin(2\pi x), \quad E(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-t}, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, T].$$

Il est facile de vérifier que la solution analytique du problème (2.1)-(2.4) est

$$\{a(t), U(x, t)\} = \left\{ \frac{1}{(2\pi)^2 + e^{4t}}, (1-x) \sin(2\pi x) e^{-t} \right\}. \quad (3.16)$$

Appliquons le schéma qui a été expliqué dans la section précédente pour la taille de pas $h = 0.005$, $\tau = \frac{h}{4}$. Si nous observons ce schéma pour certaines valeurs de T , à savoir, pour $T = N_t \tau$, $N_t \in \mathbb{N}$,

Dans le cas où $T = \frac{1}{4}$ les comparaisons entre la solution analytique (3.16) et la solution numérique aux différences sont représentées sur les figures 1 et 2.

La solution analytique et numérique de $u(x, t)$ au $t = \frac{7}{80}$ l'orsque $T = \frac{1}{4}$

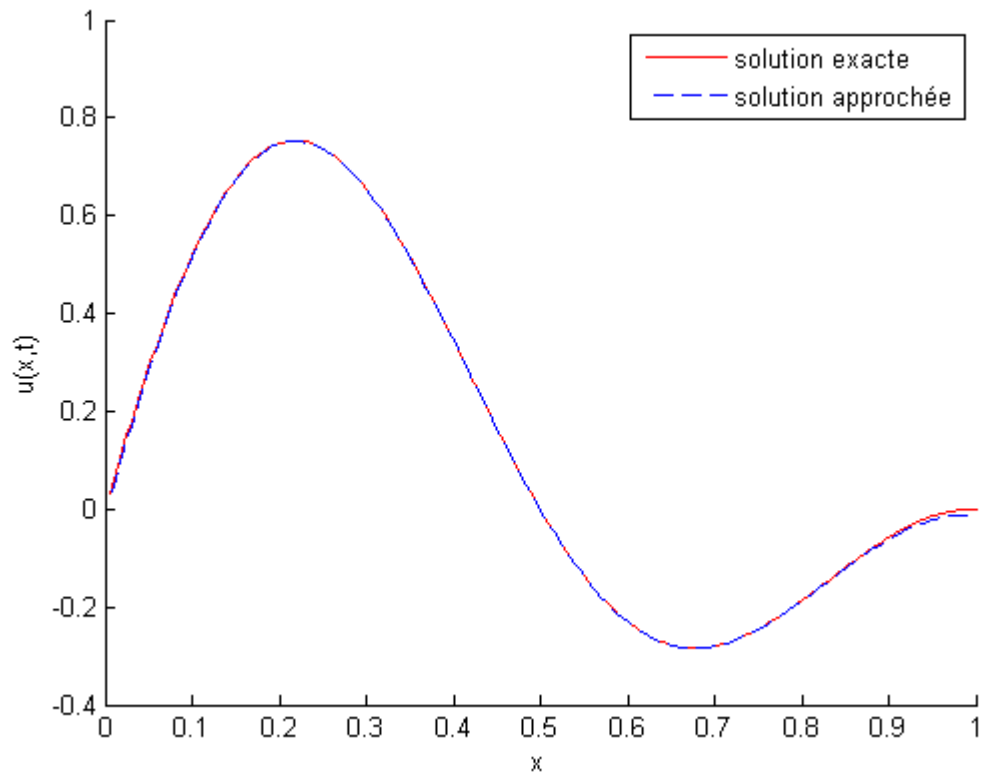


FIGURE 3.1 – Solution exacte et approchée de $u(x,t)$ pour $T = \frac{7}{80}$

La solution analytique et numérique de $a(t)$ l'orsque $T = \frac{1}{4}$

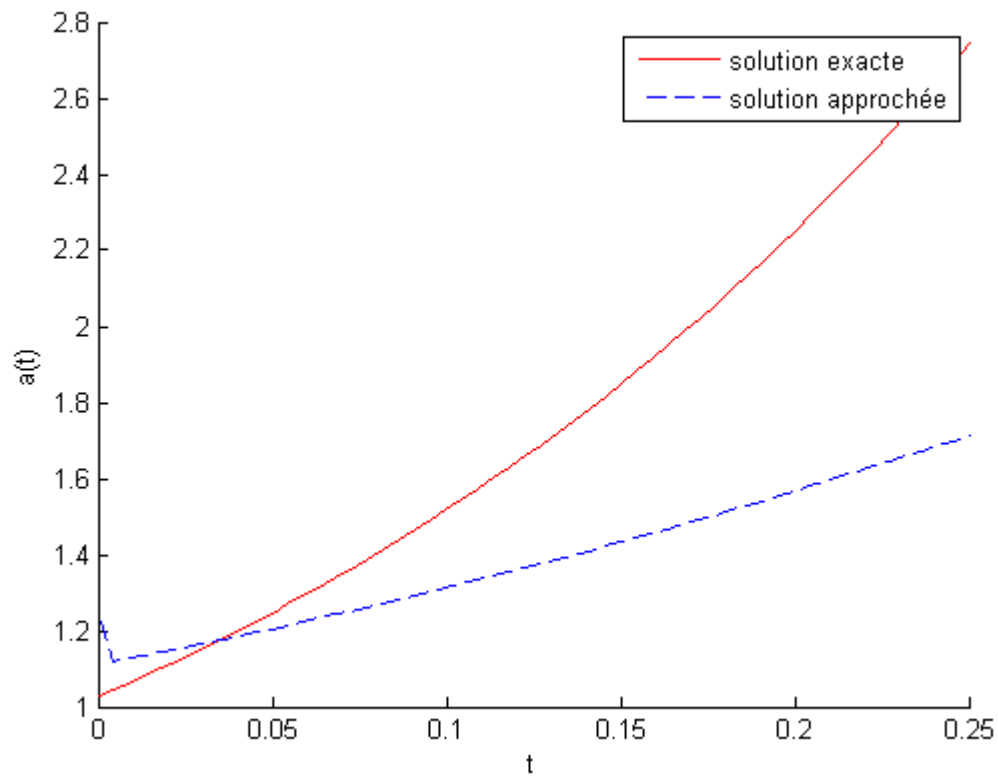


FIGURE 3.2 – Solution exacte et approchée de $a(t)$ pour $T = \frac{1}{4}$

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour l'identification d'un coefficient de diffusivité thermique en fonction du temps et la distribution de la température dans une équation de diffusion unidimensionnelle avec une condition d'intégrale et une condition non locale. Ce travail se déroule en deux étapes :

- ✓ **Etude théorique d'un problème inverse** : nous avons démontré par la méthode de Fourier et la méthode de point fixe de Schauder l'existence de la solution sur Ω_T et l'unicité sur Ω_{T_0} avec $0 < T_0 < T$, nous avons montré la dépendance continue de la solution par rapport aux données du problème inverse.
- ✓ **Etude numérique d'un problème inverse** : nous avons introduit un schéma de différences finies de Crank-Nicolson combiné avec la technique de prédicteur-correcteur pour résoudre numériquement ce problème inverse. Des exemples numériques sont présentés pour valider l'efficacité de ce schéma.

Comme perspectives, nous avons prévu le sujet de recherche suivant :

- ✓ Problème inverse pour une équation des ondes avec condition au limite non locale :

$$u_{tt}(x, t) = a(t) u_{xx}(x, t) + f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(0, t) = u(1, t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = E(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

Bibliographie

- [1] D. T. Britton and J. St'ormer. Application of time-dependent diffusion models to the study of real solids. *Appl. Surf. Sci.*, 85 :1–7, 1995.
- [2] J. R. Cannon. *The one-dimensional heat equation*. Addison-Wesley, 1984.
- [3] J. R. Cannon and W. Rundell. Recovering a time dependent coefficient in a parabolic differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 160 :572–582, 1991.
- [4] P. E. Ergatis, P. G. Massouros, G. C. Athanasouli, and G. P. Massouros. Time-dependent heat transfer coefficient of a wall. *Int. J. Energy Res.*, 27 :795–811, 2003.
- [5] I. Gohberg and Krei. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*. American Mathematical Soc, 1988.
- [6] K. G. Helmer, B. J. Dardzinski, , and C. H. Sotak. The application of porous-media theory to the investigation of time-dependent diffusion in in vivo systems. *NMR In Biomed*, 8 :297–306, 1995.
- [7] V.A. IL'in. *Necessary and sufficient conditions for the subsystem of eigenfunctions and associated functions of Keldysh's pencil of ordinary diffurential operators to form the basis*. Soviet math.Dokl, 17(1976).
- [8] N. I. Ivanchov. Inverse problems for the heat-conduction equation with nonlocal boundary conditions. *Ukr. Math. J.*, 45 :1186–1192, 1993.
- [9] V. L. Kamynin and A. B.Kostin. Two inverse problems of the determination of a coefficient in a parabolic equation. *Differ. Equations*, 46 :375–386, 2010.
- [10] F. Kanca and M. I. Ismailov. The inverse problem of finding the time-dependent diffusion coefficient of the heat equation from integral overdetermination data. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 20 :463–476, 2012.
- [11] D. Lesnic, S. A. Yousefi, and M. Ivanchov. Determination of a time-dependent diffusivity from nonlocal conditions. *J. Appl. Math. Comput.*, 41 :301–320, 2013.
- [12] R. J. Moitsheki. Transient heat diffusion with temperature-dependent conductivity and time-dependent heat transfer coefficient. *Math. Probl. Eng*, 2008 :347568, 2008.
- [13] M.A. Naimark. *Linear differential operators :elementare theory of lineae differential operators*. Frederick Ungar Publishing Co,New York, 1967.

-
- [14] G. K. Nazarov. *Inverse problems of the theory of equations of mathematical physics (in Russian)*. Baku, Azerbaijan, 1984.
- [15] J. Schauder. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I*. Eberhard Zeidler Sektion Mathematik, 2020.
- [16] M. Shamsi and M. Dehghan. Recovering a time-dependent coefficient in a parabolic equation from overspecified boundary data using the pseudospectral legendre method. *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 23 :196–210, 2006.

ملخص: في هذه المذكرة، درسنا مسألة عكسية لتحديد معامل الانتشار الحراري كدالة للوقت وتوزيع درجة الحرارة في معادلة الانتشار أحادية البعد مع شرط تكاملي عندما يكون التبادل الحراري متعادل عبر حدود المادة. لقد برهننا أن المسألة العكسية مطروحة جيداً في ظل شروط انتظام معينة على معطيات المسألة. كما تمت دراسة المسألة العكسية عددياً باستخدام مخطط الفروق المنتهية لـ كرنك-نيكلسون جنباً إلى جنب مع تقنية مصحح التنبؤ. لقد قدمنا أمثلة عديدة للتحقق من فعالية هذا المخطط المقدم.

كلمات مفتاحية: طريقة فورييه ، طريقة النقطة الثابتة لشودر ، مشكلة طيفية غير ذاتية ، مخطط كرنك-نيكلسون.

Dans ce mémoire, nous avons étudié un problème inverse pour l'identification d'un coefficient de diffusivité thermique en fonction du temps et la distribution de la température dans une équation de diffusion unidimensionnelle avec une condition d'intégrale lorsqu'un échange de chaleur a lieu à travers la frontière du matériau. Nous avons démontré que le problème inverse est bien posé sous certaines conditions de régularité sur les données du problème. Le problème inverse est également étudié numériquement, en utilisant le schéma de différences finies Crank-Nicolson combiné à la technique du prédicteur-correcteur. Nous avons présenté des exemples numériques pour valider l'efficacité de ce schéma.

Mots-Clés : Méthode de Fourier, Méthode de point fixe de Schauder, Problème spectral non auto-adjoint, Schéma de Crank-Nicolson.

In this memoir, we have studied an inverse problem for the identification of a coefficient of thermal diffusivity as a function of time and the distribution of temperature in a one-dimensional diffusion equation with an integral condition when a heat exchange takes place through the material border. We have shown that the inverse problem is well posed under certain regularity conditions on the data of the problem. The inverse problem is also studied numerically, using the Crank – Nicolson finite difference scheme combined with the predictor-corrector technique. We have presented numerical examples to validate the effectiveness of this scheme.

Keywords : Fourier method, Schauder fixed point method, Non-self-adjoint spectral problem, Crank-Nicolson scheme.