

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA**

FACULTE DE TECHNOLOGIE  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE  
N° : 2021/ME .....



DOMAINE : SCIENCES ET TECHNOLOGIE  
FILIERE : ELECTRONIQUE  
OPTION : MICRO-ELECTRONIQUE

**Mémoire Présenté Pour L'obtention**  
**Du Diplôme De Master Académique**

**Par : MERZOUG NACER**  
**KHIER AMINA**

**Intitulé**

**Contribution à l'étude d'un nouveau type de**  
**capteurs à base d'une structure périodique en**  
**cristaux phononiques**

**Soutenu devant le jury composé de :**

<b>Pr. KHEDROUCHE Djamel</b>	Université M'sila	Président
<b>Dr. KAHLOUCHE Ahmed</b>	Université M'sila	Encadreur
<b>Pr. HOCINI Abd essalem</b>	Université M'sila	Examineur

**Année Universitaire : 2020 /2021**

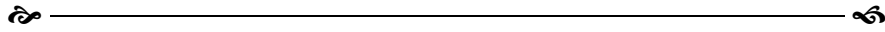
بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## Résumé :

Les structures à bandes interdites phononiques sont des matériaux composites périodiques dont les propriétés élastiques sont modulées dans l'espace. En effet, les structures multicouches offrent une nouvelle classe de capteurs. Lorsque ces structures sont utilisées comme capteurs, leur comportement aux ondes acoustiques/élastiques dépend des variations des paramètres d'entrées, notamment la densité et la vitesse de propagation. Ces changements peuvent être détectés en mesurant un pic de transmission isolé à l'intérieur de la bande interdite.

Notre travail consiste à l'étude de la structure  $[(\text{Plomb/Epoxy})^2/\text{Défaut}/(\text{Plomb/Epoxy})^2]$  afin de montrer la possibilité d'exploiter une telle structure dans le domaine de détection des liquides. En utilisant la méthode de la matrice de transfert (TMM), les résultats obtenus montrent clairement que la fréquence de résonance du pic de transmission mesuré est très sensible aux paramètres d'entrées. Cela prouve qu'une telle structure offre une nouvelle plate-forme pour les capteurs de liquide.

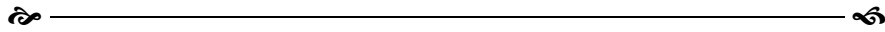
**Mots clés :** Bande interdite phononique 1D, Ondes acoustique, capteurs de liquide, TMM.



## خلاصة:

هياكل فجوة النطاق الصوتي عبارة عن مواد مركبة دورية يتم تعديل خصائصها المرنة في الفضاء. إن الهياكل متعددة الطبقات تقدم فئة جديدة من أجهزة الاستشعار. عند استخدام هذه الهياكل كمستشعرات، فإن سلوكها تجاه الموجات الصوتية يعتمد على الاختلافات في المدخلات، ولا سيما كثافة وسرعة الانتشار. يمكن الكشف عن هذه التغييرات بقياس تردد ذروة الإرسال داخل فجوة النطاق.

يُدرج عملنا في دراسة الهيكل  $[(\text{Plomb/Epoxy})^2/\text{Défaut}/(\text{Plomb/Epoxy})^2]$  من أجل إظهار إمكانية استغلال مثل هذه البنية في مجال الكشف عن السوائل. باستخدام طريقة مصفوفة النقل (TMM)، تُظهر النتائج المتحصل عليها بوضوح أن تردد الرنين شديد الحساسية للقيم المدخلة. هذا يثبت أن مثل هذه البنيات يوفر منصة جديدة لأجهزة استشعار السوائل. **كلمات مفتاحية:** فجوة النطاق الصوتي 1D، موجات صوتية، مجسات السوائل، طريقة مصفوفة النقل.



## Abstract:

Phononic band gap structures are periodic composite materials whose elastic properties are modulated in space. Indeed, multilayer structures offer a new class of sensors. When these structures are used as sensors, their behavior to acoustic / elastic waves depends on variations in input parameters, including density and speed of sound. These changes can be detected by measuring an isolated transmission peak within the band gap.

Our work consists of the study of the structure  $[(\text{Lead / Epoxy})^2 / \text{Defect} / (\text{Lead / Epoxy})^2]$  in order to show the possibility of exploiting such a structure in the field of liquid detection. Using the transfer matrix method (TMM), the results obtained clearly show that the resonant frequency of the measured transmission peak is very sensitive to the input parameters. This proves that such a structure offers a new platform for liquid sensors.

**Keywords:** 1D Phononic band gap, Acoustic waves, liquid sensors, TMM.

## *Remerciements*

*Nous rendons nos profondes gratitudee à dieu qui nous a aidés à réaliser ce modeste travail.*

*Nous tenons de remercier sincèrement Monsieur,*

*Dr. KAHLLOUCHE Ahmed pour avoir assuré l'encadrement de ce travail. Sa disponibilité, son expérience, son savoir scientifique et ses qualités humaines ont été déterminants dans l'aboutissement de ce travail.*

*Nos remerciements s'adressent à tous les membres du jury qui ont accepté de juger mon travail.*

*Nos sincères gratitudee à tous ce qui nous ont enseigne.*

*Enfin, nous remercions tous ceux qui ont contribué de près ou de loin, pour Leurs soutiens moraux ou matériels.*



*Dédicaces*

*Je dédie ce travail*

*A ma très chère mère*

*Pour son amour, ses encouragements et ses  
sacrifices*

*A mon très cher père*

*Pour son soutien, son affection et la confiance  
qu'il m'a accordé*

*A mes très chers frères*

*Yacine et Anouar*

*A tous les membres de ma famille*

*A tous mes amis*

*Et tous ceux qui m'aiment ...*

*A vous tous,*

*Je vous dédie ce travail en témoignage de mon  
profond respect et de toute ma gratitude.*

**Amina**



## *Dédicaces*

### *A ma très chère mère*

*Quoi que je fasse ou que je dise, je ne serai point te remercier comme il se doit. Ton affection me couvre, ta bienveillance me guide et ta présence à mes côtés a toujours été ma source de force pour affronter les différents obstacles.*

### *A ma chère femme*

*Pour la grande patience, l'encouragement, la confiance qu'elle m'a témoignée. Et tous ceux qui me sont chers Amdjed et Jouairia*

*A mes très chers frères, sœurs et leurs enfants*

*A tous les amis et les camarades,*

*Surtout mon ami et mon frère SACI Azouz.*

*A la mémoire de mon très cher père*

*Qui n'a pas vu l'aboutissement de mon travail mais je sais que tu aurais été très fier de moi aujourd'hui.*

*A vous tous,*

***Nacer***

# Sommaire

<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	1
<b>CHAPITRE I :</b> <b>Généralités sur les cristaux phononiques</b>	
<b>INTRODUCTION</b> .....	5
<b>I.1. LES CRISTAUX PHONONIQUE</b> .....	5
<b>I.1.1. Définitions</b> .....	5
<b>I.1.2. Historique sur les cristaux phononiques</b> .....	6
<b>I.1.3. Comparaison avec d'autres structures cristallines</b> .....	6
<b>I.3. PROPAGATION D'ONDES ACOUSTIQUES</b> .....	9
<b>I.3.1. Ondes longitudinales</b> .....	10
<b>I.3.2. Ondes Transversales</b> .....	10
<b>I.4. DIFFERENTS TYPES DES CRISTAUX PHONONIQUES</b> .....	11
<b>I.4.1. Cristaux Phononiques unidimensionnels (CPns-1D)</b> .....	11
<b>I.4.2. Cristaux Phononiques bidimensionnels (CPns-2D)</b> .....	12
<b>I.4.3. Cristaux Phononiques tridimensionnels (CPns-3D)</b> .....	13
<b>I.5. CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES ET PHYSIQUES D'UN CRISTAL PHONONIQUE 1D</b> .....	13
<b>I.5.1. Le contraste d'impédance acoustique</b> .....	14
<b>I.5.2. Les périodes</b> .....	14
<b>I.5.3. Le facteur de remplissage <math>ff</math></b> .....	14
<b>I.6. APPLICATION DES CRISTAUX PHONONIQUES 1D</b> .....	15
<b>I.6.1. Dans le domaine des capteurs phononiques</b> .....	15
<b>I.6.2. Dans le domaine des barrières phoniques</b> .....	16
<b>I.6.3. Cavités résonantes ; Résonateurs acoustiques et Filtrage</b> .....	17
<b>CONCLUSION</b> .....	18
<b>CHAPITRE II :</b> <b>Méthodes numériques de simulation</b>	
<b>INTRODUCTION</b> .....	20
<b>II.1. METHODE DES DIFFERENCES FINIES DANS LE DOMAINE TEMPORAL</b> .....	20
<b>II.1.1. Principe de la méthode FDTD</b> .....	21
<b>II.1.2. Application de FDTD pour le calcul des bandes</b> .....	22
<b>II.1.3. Calcul du coefficient de réflexion et de transmission</b> .....	22
<b>II.1.4. Conditions PML (Perfectly Matched Layers)</b> .....	23
<b>II.1.5. Avantages et limitation de la méthode FDTD</b> .....	24
<b>II.2. METHODE DES ELEMENTS FINIS FEM</b> .....	25
<b>II.2.1. Principe de la méthode FEM</b> .....	25
<b>II.2.2. Intérêts Avantages de la méthode des éléments finis</b> .....	26
<b>II.2.3. Limitations</b> .....	27
<b>II.2.4. Domaines d'application de la méthode FEM</b> .....	27
<b>II.3. METHODE DE DECOMPOSITION EN ONDES PLANES PWE</b> .....	27

II.3.1. Principe de la PWE.....	28
II.3.2. Avantages et inconvénients de la méthode.....	29
<b>II.4. METHODE DES MATRICES DE TRANSFERT TMM.....</b>	<b>30</b>
II.4.1. Super-réseaux unidimensionnels.....	30
II.4.2. Formalisme matriciel.....	31
II.4.2.1. Propagation dans une couche.....	31
II.4.2.2. Propagation dans une bicouche.....	32
II.4.2.3. Propagation des Amplitudes.....	33
II.4.2.4. Transmission via une bicouche.....	34
II.4.2.5. Transmission via N bicouches.....	35
II.4.2.6. Transmission par N bicouches avec un défaut.....	35
II.4.2.7. Transmission à travers N bicouches avec couches quart d'onde.....	36
II.4.3. Avantages et inconvénients du TMM.....	38
<b>CONCLUSION.....</b>	<b>39</b>
<b>CHAPITRE III :</b>	
<b>Résultats de simulation et discussions</b>	
<b>INTRODUCTION.....</b>	<b>41</b>
<b>III.1. STRUCTURE ETUDIEE.....</b>	<b>41</b>
<b>III.2. SPECTRE DE REFLEXION ET DE TRANSMISSION.....</b>	<b>42</b>
<b>III.3. EVOLUTION DE LA BANDE INTERDITE PHONONIQUE.....</b>	<b>43</b>
III.3.1. Influence du nombre de couches.....	43
III.3.2. Influence du facteur de remplissage.....	45
III.3.3. L'effet du matériau de couverture.....	47
<b>III.4. APPLICATIONS DU CAPTEURS PHONONIQUE 1D DANS LE DOMAINE DE DETECTION.....</b>	<b>49</b>
III.4.1. Présentation de la structure.....	49
III.4.3. Application à la détection d'un liquide .....	49
III.4.2. Application à la détection de la largeur de défaut.....	51
III.4.4. Application à la détection de la pression.....	53
III.4.5. Application à la détection de la température.....	54
III.4.6. Calcul du facteur de qualité.....	56
<b>CONCLUSION.....</b>	<b>57</b>
<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>59</b>

---

**Liste des tableaux**
**Chapitre I**

<b>Tableau I.1</b> : Propriétés clés pour l'étude des structures de bandes dans les matériaux tridimensionnels isotropes.....	9
---	---

**Chapitre III**

<b>Tableau III.1</b> : Masse volumiques et vitesses de propagation des matériaux constituant le cristal phononique unidimensionnel Plomb/Epoxyde.....	42
<b>Tableau III. 2</b> : Présentation des différents paramètres géométriques et physiques du cristal phononique parfait (PnC-1D).....	42
<b>Tableau III. 3</b> : Paramètres de fréquence entre les nombres d'inclusion des deux matériaux A et B du cristal et largeur de la bande interdite phononique.....	44
<b>Tableau III.4</b> : Résultats de simulation pour différentes valeurs du facteur de remplissage obtenus par la méthode TMM.....	46
<b>Tableau III.5</b> : Paramètres physique des matériaux de couverture.....	47
<b>Tableau III.6</b> : Paramètres géométriques et physiques des matériaux utilisés dans la structure du cristal.....	50
<b>Tableau III.7</b> : Paramètres géométriques et physiques des liquides utilisés comme un défaut avec $D=0.25$ cm.....	50
<b>Tableau III.8</b> : Influence de la largeur de la couche de défaut sur la fréquence de résonance et le taux de transmission.....	51
<b>Tableau III.9</b> : Paramètres physiques de biodiesel selon la pression appliquée.....	53
<b>Tableau III.10</b> : Influence de la pression appliquée sur la fréquence e résonance et le taux de transmission.....	53
<b>Tableau III.11</b> : Paramètres physiques de biodiesel selon la température.....	54
<b>Tableau III.12</b> : Valeurs de la fréquence de résonance et le taux de transmission en fonction de la température.....	55
<b>Tableau III.13</b> Influence du facteur de qualité en fonction de la température.....	56

## Liste de figures

## Chapitre I

<b>Figure I.1:</b> (a) Schémas de cristal phononique de différentes dimensionnalités. (b) Un exemple de structure de bande de phonons.....	5
<b>Figure I.2:</b> (a) Cristal phononique pour les sons (b) Cristal phononique pour les hyper-sons, (c) un cristal phononique pour la chaleur est formé dans une matrice de silicium de trous d'air avec $a = 34$ nm.....	6
<b>Figure I.3:</b> Schéma du dispositif phononique à ondes de surface.....	8
<b>Figure I.4:</b> Représentation Schématique d'un solide traversé par une onde longitudinale.....	10
<b>Figure I.5:</b> Représentation schématique d'une onde transverse.....	10
<b>Figure I.6:</b> Quelques représentations schématiques de cristaux phononiques Unidimensionnels, bidimensionnels et tridimensionnels.....	11
<b>Figure I.7 :</b> Représentation schématique d'un cristal phononique unidimensionnel.....	12
<b>Figure I.8 :</b> Représentation schématique d'un cristal phononique à deux dimensions (a), Réseau carré et (b) Réseau triangulaire.....	12
<b>Figure I.9 :</b> Différentes structures 3D: structure cubique (1), le tas de bois (2), la structure multicouches (3), les opales ou opales inversées (4) et la Yablonovite (5) .....	13
<b>Figure I.10:</b> Les périodes d'un cristal phononique unidimensionnel.....	14
<b>Figure I.11:</b> Transmissions mesurées (lignes pleines) et calculées (lignes pointillées) en fonction de la fréquence pour (a) une cavité résonante, (b) deux cavités alignées dans la direction de propagation, (c) deux cavités alignées dans la direction perpendiculaire à la propagation et (d) une série de cavités formant un guide. (e) pression calculée dans une série de cavités formant un guide identique à la figure (d) selon.....	17

## Chapitre II

<b>Figure II.1 :</b> Exemple de spectre de transmission dans un cristal phononique bidimensionnel pour un vecteur d'onde fixé par la méthode FDTD.....	22
<b>Figure II.2:</b> Schéma d'un cristal phononique fini 2D pour le calcul des courbes de coefficients de transmission.....	23
<b>Figure II.3 :</b> Un super-réseau 1D avec des couches alternées avec des impédances $Z_1$ et $Z_2$ .....	30
<b>Figure II.4 :</b> Une bicouche 1D avec des impédances $Z_1$ et $Z_2$ avec des couches externes d'impédances $Z_0$ et $Z_L$ . ( $i$ : incidente, $r$ : réfléchie et $t$ : transmise).....	34
<b>Figure II.5:</b> Un système 1D composé de N bicouches.....	35
<b>Figure II.6.</b> Un système 1D composé de N bicouches et d'un défaut central de largeur $d_C$ et d'impédance $Z_C$ .....	35
<b>Figure II.7:</b> Coefficient de transmission et réflexion en fonction la fréquence normalisé pour 1D-PnC, (Lead/Epoxy) <sup>5</sup> . (a) Courbe de transmission. (b) courbe de réflexion. Une bande interdite apparaît entre 0.40 et $\sim 1.45$ .....	38

## Chapitre III

<b>Figure III.1:</b> Représentation schématique du cristal phononique parfait (PnC-1D) composé du Plomb et de l'Epoxy.....	41
<b>Figure III.2:</b> Coefficients de transmission et de réflexion des ondes longitudinale en fonction de fréquences réduites pour un cristal 1D : <b>(a)</b> Transmission, <b>(b)</b> Réflexion.....	43
<b>Figure III.3:</b> Spectre de transmission en fonction le nombre de couches, (a) pour N=4, (b) pour N=6, (c) pour N=8, (d) pour N=10 couches.....	44
<b>Figure III. 4 :</b> Variations des propriétés de la bande phononique en fonction le nombre de couches Plomb/Epoxy.....	45
<b>Figure III. 5:</b> Spectre de transmission pour une onde longitudinale à incidence normale: (a) pour $ff=10\%$ , (b) pour $ff=40\%$ , (c) Pour $ff=60\%$ et (d) pour $ff=80\%$ .....	46
<b>Figure III.6:</b> (a) Variations de la largeur de la bande en fonction $ff$ (%). <b>(b)</b> Variation de la fréquence centrale de la bande phononique en fonction $ff$ (%)......	47
<b>Figure III.7 :</b> Spectre de transmission en fonction de fréquence réduite pour une onde acoustique longitudinale pour différents matériaux de couverture.....	48
<b>Figure III.8:</b> Représentation schématique d'un cristal phononique 1D avec défaut au centre de largeur D.....	49
<b>Figure III.9:</b> Spectre de transmission en fonction de la fréquence réduite pour une onde longitudinale d'un Cristal Phononique 1D Lead/Epoxy) <sup>2</sup> /Défaut/(Lead/Epoxy) <sup>2</sup> .....	51
<b>Figure III.10 :</b> coefficient de transmission en fonction de fréquence dans le cas de CnP 1D pour (a) pour D= 0.25 cm, (b) pour D=0.50 cm, (c) pour D=1.00 cm et (d) pour D=1.50cm.....	52
<b>Figure III.11:</b> Spectre de transmission en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de pression.....	53
<b>Figure III.12 :</b> Variations de la fréquence de résonance et le taux de transmission en fonction de la pression.....	54
<b>Figure III.13 :</b> <b>(a)</b> Spectre de transmission en fonction de la fréquence pour différentes Températures, <b>(b)</b> Variations de la fréquence de résonance en fonction température.....	55
<b>Figure III.14 :</b> l'évolution du facteur de qualité en fonction de la température.....	56



# **Introduction générale**

## INTRODUCTION GENERALE

Les cristaux phononiques forment une nouvelle voie dans le domaine des ondes acoustiques et élastiques qui reçoit de plus en plus un grand intérêt [1]. Les cristaux phononiques sont des structures artificielles présentant des variations périodiques de leur densité et de leurs constants élastiques suivant une, deux ou trois dimensions de l'espace. En tant que tels, ils sont capables d'orienter, de contrôler et de manipuler la propagation des ondes acoustique dans certaines directions et gammes de fréquences, par le biais de réflexions de Bragg où par le phénomène de résonance locale des éléments mis en réseau. La principale propriété de ces matériaux est l'apparition des bandes interdites. Ce nom a été choisi par analogie avec les cristaux photoniques. Ces matériaux permettent alors sous certaines conditions géométriques et physiques d'interdire la propagation des ondes acoustiques. Il s'agit alors, comme en physique des solides et des cristaux photoniques, d'un phénomène de bande interdite. Les structures multicouches sont formées par l'empilement d'une série de couches minces avec un décalage d'impédance acoustique important entre les couches consécutives et avec grandes dimensions latérales par rapport à leur épaisseur [2].

Les cristaux phononiques couvrent une large gamme d'échelles, des structures périodiques de la taille d'un mètre pour le son dans l'air aux structures de taille nanométrique pour le traitement de l'information ou le contrôle thermique des phonons dans les circuits intégrés.

Les cristaux phononiques 1D sont formés par l'empilement d'une série de couches minces avec un décalage d'impédance acoustique important entre les couches consécutives et avec grandes dimensions latérales par rapport à leur épaisseur, les structures multicouches permettent la réflexion sélective des ondes et la génération de bandes interdites, ils peuvent être utilisés pour développer un nouveau type de technologie acoustique résonnante pour l'application dans le domaine de détection [3].

Le capteur à cristal phononique est une nouvelle technologie pour les applications de détection à haute performance. Le travail présenté est une contribution à l'étude d'un nouveau type de capteurs de liquide dont, la configuration du capteur est basée sur l'insertion d'une couche défectueuse remplie de biodiesel au centre de la structure périodique unidimensionnel (1D- PnC). La méthode de la matrice de transfert (TMM) a été utilisée pour la modélisation numérique du spectre d'ondes acoustiques à travers la structure du capteur. Dans ce contexte s'inscrit notre travail. Ce mémoire de master a été structuré en trois chapitres :

Le premier chapitre de ce manuscrit est entièrement consacré aux cristaux phononiques, nous présentons tout d'abord un bref historique sur ces nouvelles structures, puis, nous présentons une comparaison entre les cristaux électroniques, photoniques et phononiques.

En plus de mentionner ses différents types et ensuite, nous sommes intéressés à donner quelques notions sur les cristaux unidimensionnels dans ses caractéristiques physique et géométriques en plus de certaines de ses applications dans le domaine des capteurs, le domaine de l'isolation sonore, les cavités résonantes et le filtrage.

Dans le second chapitre, nous décrivons les différentes méthodes théoriques utilisés généralement pour l'étude et la modélisation des structures périodiques notamment les structures multicouches. Les méthodes discutées dans ce chapitre sont la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD), la méthode de décomposition en ondes planes (PWE), la méthode des éléments finis FEM pour calculer les coefficients de transmission et de réflexion et la méthode des matrices de transfert (TMM).

Au troisième chapitre, notre étude portait sur l'étude d'une structure phononique à une dimension solide/solide constituée d'inclusions de Plomb dans l'Epoxy (Lead/Epoxy)<sup>N</sup>. Il est divisé en deux parties : la première partie est entièrement dédiée à l'étude de l'influence de quelques paramètres physiques et géométriques sur l'évolution de la bande interdite phononique.

Ensuite, en second temps et en utilisant un code écrit avec le logiciel MATLAB à partir des éléments de la méthode des matrices de transfert (TMM), nous nous intéresserons à l'étude de l'évolution du pic de résonance apparaît à l'intérieur de la bande interdite en fonction de quelques paramètres tels que : par l'épaisseur de la couche du défaut remplie de biodiesel, la température et la pression appliquées au cristal étudié (Lead/Epoxy)<sup>2</sup>/Liquide/(Lead/Epoxy)<sup>2</sup>.

Finalement, nous terminerons ce manuscrit par une conclusion générale et quelques perspectives.

# Chapitre I

## Généralités sur les cristaux phononiques

## INTRODUCTION

Récemment, le cristal phononique (CPn) a reçu une grande attention en raison de sa capacité à autoriser ou bloquer la propagation des ondes mécaniques, Ceci de par la "nouvelle physique" liée à la présence plutôt de trois modes propagatifs acoustiques au lieu de deux dans les cristaux photoniques.

Les Cristaux Phononiques sont également appelés cristaux à bande interdite acoustique, cristaux à bande interdite élastique ou cristaux à bande interdite sonique. Le point commun entre ces termes est l'existence de bandes interdites phononiques pour les ondes mécaniques, à l'intérieur desquelles la propagation des ondes à bande interdite est effectivement interdite. La variation périodique de la densité et / ou des constants élastiques de la structure change périodiquement. Cela modifie la vitesse du son dans le cristal, ce qui conduit à son tour à la formation des bandes interdites phononiques ou des bandes d'arrêt [2].

Au cours de ce chapitre, nous sommes focalisés en premier temps à fournir quelques notions fondamentales sur les cristaux phononiques, leurs différents types, caractéristiques principales géométriques et physiques, la propagation des ondes acoustiques et enfin, nous rappelons quelques applications de ces cristaux.

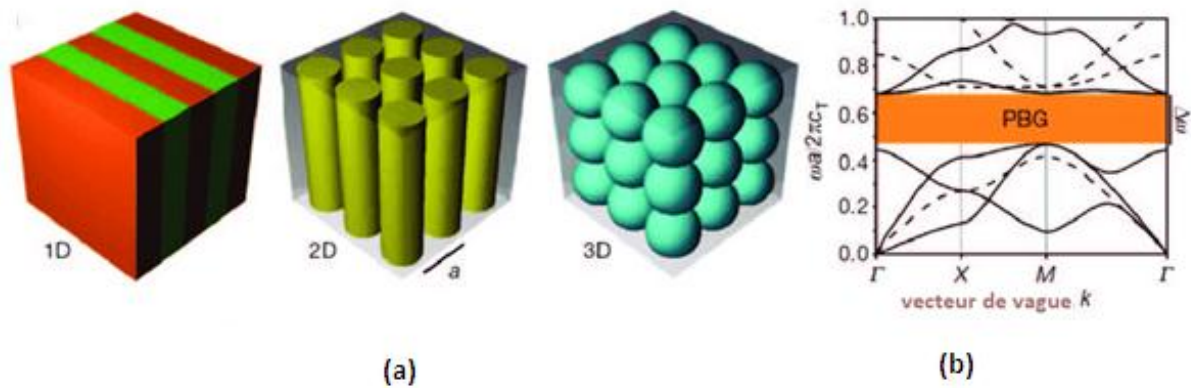
### I.1. LES CRISTAUX PHONONIQUE

#### I.1.1. Définitions

Les cristaux phononiques sont des matériaux périodiques spéciaux très prometteurs pour contrôler et manipuler la propagation des ondes élastiques ou acoustiques, ils sont capables de bloquer la propagation des ondes dans certaines directions et gammes de fréquences, par le biais de réflexions de Bragg où par le phénomène de résonance locale des éléments mis en réseau.

Ce nom a été choisi par analogie avec les cristaux photoniques, des structures similaires mais agissant sur la lumière. Du point de vue quantique, un phonon est une vibration élastique élémentaire d'un morceau de matière, tout comme le photon est une particule élémentaire de lumière, l'idée du cristal phononique est de fabriquer un matériau artificiel structuré périodiquement, par exemple par assemblage d'au moins deux matériaux différents. Intuitivement, plus les propriétés acoustiques des matériaux mis en jeu sont contrastées, plus les phénomènes d'interférence d'ondes sont importants [4].

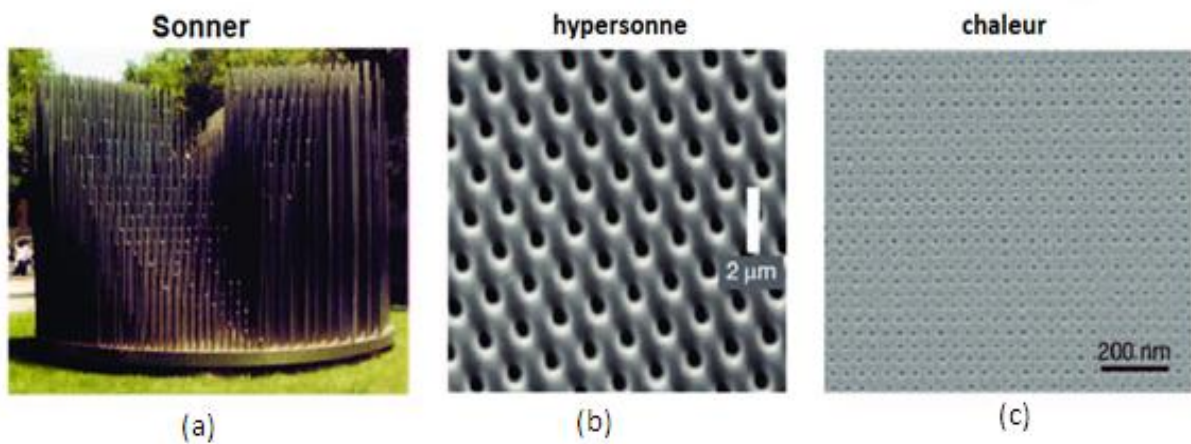
La figure I.1 illustre le schéma de différentes dimensionnalités d'un cristal phononique ainsi que le diagramme de dispersion de la bande interdite phononique marquée par la zone orange.



**Figure I.1:** (a) Schémas de cristal phononique de différentes dimensionnalités.

(b) Un exemple de structure de bande de phonons [1].

La figure I.2 présente trois exemples de cristaux phononiques efficaces à différentes échelles de longueur d'onde. Pour les sons constitués par des tiges en acier dans l'air, pour les hyper-sons est constitué de trous d'air dans une matrice époxy avec la périodicité du réseau  $a = 1,36 \mu\text{m}$  et celui pour la chaleur est formé par des trous d'air ( $a = 34 \text{ nm}$ ) dans une matrice de silicium [1].



**Figure I.2:** (a) Cristal phononique pour les sons (b) Cristal phononique pour les hyper-sons, (c) un cristal phononique pour la chaleur est formé dans une matrice de silicium de trous d'air avec  $a = 34 \text{ nm}$  [1].

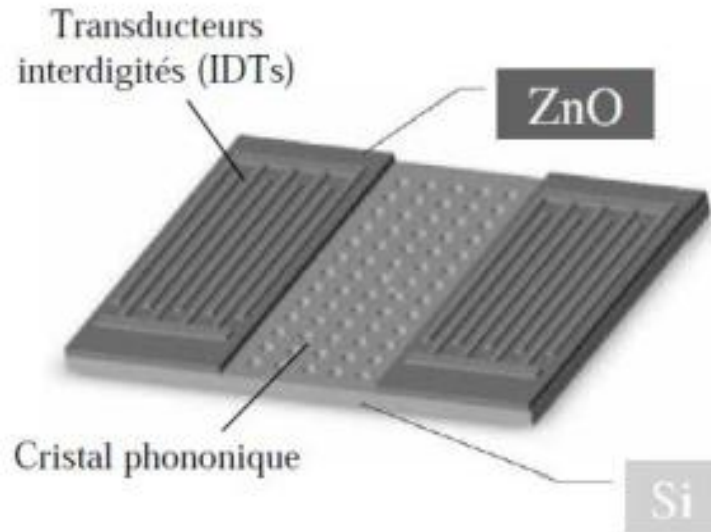
### I.1.2. Historique sur les cristaux phononiques :

Le concept de cristal phononique fut introduit pour la première fois en 1993, par deux équipes, l'une constituée de M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski et B. Djafari-Rouhani [5] et l'autre d'E. N. Economou et M. Sigalas [6].

L'idée est de produire des gaps acoustiques absolus pour certaines structures et certains matériaux, c'est-à-dire des bandes interdites quelle que soit la direction de propagation de l'onde élastique incidente. La structure se comporte comme un miroir réfléchissant, pour une onde dont la fréquence est dans le domaine de la bande interdite. L'intérêt premier de ces structures a été de créer des défauts pour confiner et plus généralement pour contrôler la propagation du son. Elles permettent des applications comme le guidage d'ondes, l'isolation acoustique...

Si la présence d'une bande interdite dans les cristaux phononiques ouvre des perspectives d'applications pour le filtrage fréquentiel, il est aussi possible d'utiliser d'autres propriétés inhabituelles de ces structures associées aux bandes passantes. Ce constat ouvre de manière plus générale la voie au concept d'ingénierie de dispersion, qui cherche à exploiter de manière plus globale la possibilité de structurer artificiellement des matériaux pour en maîtriser les propriétés. Les travaux menés en la matière ont conduit à l'émergence des métamatériaux acoustiques ou élastiques. Les propriétés particulières de ces matériaux artificiels peuvent leur être conférées par l'existence de variations locales de leurs propriétés acoustiques ou encore par l'utilisation d'éléments constitutifs présentant des résonances acoustiques ou élastiques, dites locales, à des fréquences telles que la longueur d'onde effective dans le milieu ambiant est grande comparativement aux dimensions de ces éléments. Ces résonances, souvent assez étroites, sont indépendantes de la périodicité du réseau. Ces métamatériaux peuvent ainsi présenter, de manière très avantageuse dans certains contextes, des dimensions caractéristiques bien inférieures à la longueur d'onde [7].

En 2005, l'équipe de Wu a pu étudier la propagation élastique de surface dans un CP bidimensionnel, conçu à une échelle micrométrique (périodicité de  $10\mu m$ ) et constitué d'un arrangement carré de trous d'air dans un substrat de silicium. La fabrication de cette structure a été réalisée grâce à la technologie MEMS, et l'excitation ainsi que la détection de l'onde de surface ont été faites au moyen des transducteurs interdigités sur une couche mince piézoélectrique en Z (Figure I.3). Avec des paramètres géométriques bien choisis. La bande interdite est prédite théoriquement entre  $194,64\text{ MHz}$  et  $223,53\text{ MHz}$ . Ce dispositif est le premier filtre à base de cristaux phononiques, ce qui constitue une première voie pour des applications radio fréquence à base d'ondes acoustiques de surface [8].



**Figure I.3:** Schéma du dispositif phononique à ondes de surface [8].

### I.1.3. Comparaison avec d'autres structures cristallines

Nous avons mentionné en introduction que les cristaux phononiques ont beaucoup en commun avec les cristaux photoniques, il y a de fortes analogies entre la propagation des électrons dans les cristaux ordinaires et les ondes électromagnétiques et élastiques dans ces cristaux.

Bien que la structure de bandes phononiques d'un cristal à gap phononique est analogue à la structure de bande d'un cristal à gap photonique, celle-ci est aussi analogue à la structure de bande électronique d'un semi-conducteur.

Les cristaux phononiques ont des propriétés qui concordent avec celles des cristaux photoniques, toutefois il existe une certaine nuance entre eux. Les cristaux photoniques peuvent être caractérisés par deux paramètres indépendants, à savoir le rapport de la fraction diélectrique et la fraction volumique occupée par un de ces composants ; tandis que pour les cristaux phononiques plusieurs paramètres peuvent déterminer la propagation des ondes, tels que : le rapport des vitesses transversales et longitudinales, la densité, la fraction volumique. D'une manière générale, dans les deux cas la propagation des ondes dépend de la structure [9].

Le tableau I.1 illustre les propriétés fondamentales régissant la propagation des ondes électroniques, les ondes électromagnétiques et les ondes élastiques dans les structures périodiques tridimensionnelles isotropes [9].

Propriété	Cristal électronique	Cristal photonique	Cristal phononique
<b>Matériaux</b>	Cristallin (naturel ou obtenu par croissance)	Composé de deux matériaux diélectriques	Composé de deux matériaux élastiques
<b>Paramètres</b>	Constantes universelles, nombres atomiques	Constantes diélectriques des constituants	Densités, vitesse du son dans les constituants
<b>Constante de maille</b>	1 - 5Å (microscopique)	0.1 µm - 1 cm (mésoscopique ou macroscopique)	Mésoscopique ou macroscopique
<b>Ondes</b>	de Broglie (électrons) $\psi$	Électromagnétiques ou lumineuses (photons) E,B	Vibratoires ou sonores (phonons) u
<b>Polarisations</b>	Spin (haut et bas)	Transverse : $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ ( $\nabla \cdot \mathbf{E} \neq 0$ )	Trans. -longit. ( $\nabla \cdot \mathbf{u} \neq 0$ , $\nabla \times \mathbf{u} \neq 0$ )
<b>Équation différentielle</b>	$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\mathbf{r})\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$	$\nabla^2\mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = \frac{\epsilon(\mathbf{r})}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) \right] \right\}$
<b>Particules libres</b>	$W = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (électrons)	$\omega = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}} k$ (photons)	$\omega = c_{\ell} k$ (phonons)
<b>Bande interdite</b>	Augmente avec le potentiel dans le cristal ; pas d'état électronique possible	Augmente avec $ \epsilon_a - \epsilon_b $ ; pas de photons, pas de lumière	Augmente avec $ \rho_a - \rho_b $ ; pas de vibration, pas de son
<b>Gamme spectrale</b>	Ondes radio, micro-ondes, optique, rayons X	Micro-ondes, optique	$\omega \leq \text{qq GHz}$

**Tableau I.1 :** Propriétés clés pour l'étude des structures de bandes dans les matériaux tridimensionnels isotropes.

### I.3. PROPAGATION D'ONDES ACOUSTIQUES

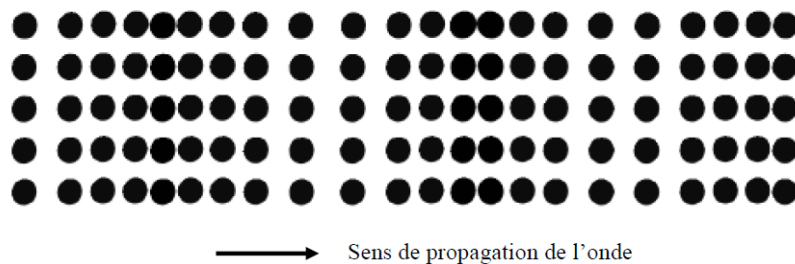
Au cours des deux dernières décennies, la propagation des ondes acoustiques dans des structures périodiques composées de multi-composants a reçu beaucoup d'attention en raison des propriétés physiques renouvelées et des applications potentielles dans une variété de domaines, tels que l'isolation du bruit et des vibrations, les filtres de fréquence dans la communication sans fil, super lentille conception et etc....

La propagation d'une onde acoustique se traduit par des vibrations progressives des atomes composant le milieu élastique. Ce comportement vibratoire est dû aux forces d'inertie et celles de rappel élastique qui concourent entre elles en agissant sur les particules du milieu support de la

propagation dans les propriétés physiques du milieu considéré. Les ondes avec ces deux types de polarisations sont simultanément présentes dans les solides élastiques et les vitesses de propagation associées sont respectivement dénommées vitesse longitudinale et vitesse transverse.

### I.3.1. Ondes longitudinales

Les ondes élastiques et acoustiques sont dites longitudinales ou également appelées ondes de compression, lorsque le mouvement des particules est fait en parallèle à la direction de propagation. C'est la polarisation dominante dans les fluides c. à. d, les gaz et les liquides (figure (I.4)).

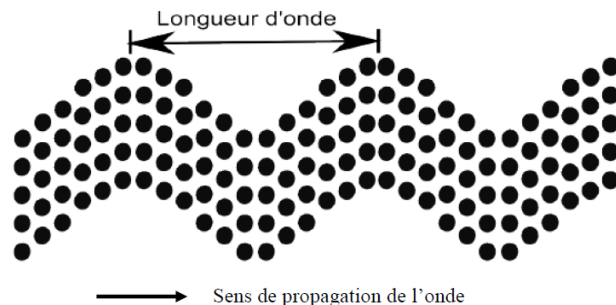


**Figure I.4:** Représentation Schématique d'un solide traversé par une onde longitudinale

### I.3.2. Ondes Transversales

Les ondes élastiques et acoustiques transversales, plus communément appelées aussi ondes de cisaillement. Ce type d'ondes sont composées de déplacements perpendiculaires à la direction de propagation (Figure I.5). Par conséquent le glissement des plans parallèles ne donne lieu à aucune variation de volume puisque les distances entre les plans sont conservées.

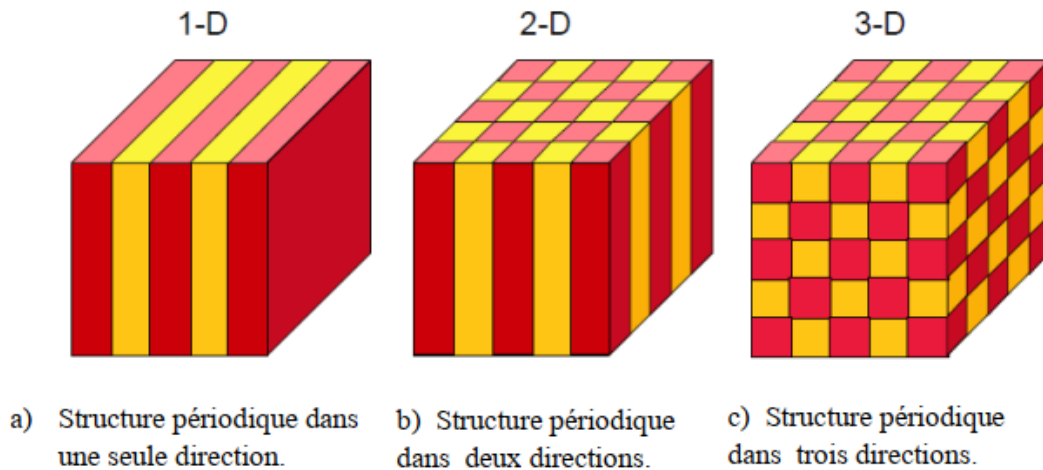
Pour les ondes transverses, la vibration des particules se fait dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation.



**Figure I.5:** Représentation schématique d'une onde transverse.

## I.4. DIFFERENTS TYPES DES CRISTAUX PHONONIQUES

Les cristaux phononiques sont des matériaux composites macroscopiques présentant une périodicité spatiale suivant une, deux ou trois dimension de l'espace comme schématisé sur de (Figure I.6). Selon la dimensionnalité des structures on peut distinguer trois familles de cristaux phononiques : Les cristaux unidimensionnels (1D), les cristaux bidimensionnels (2D) et les cristaux tridimensionnels (3D).

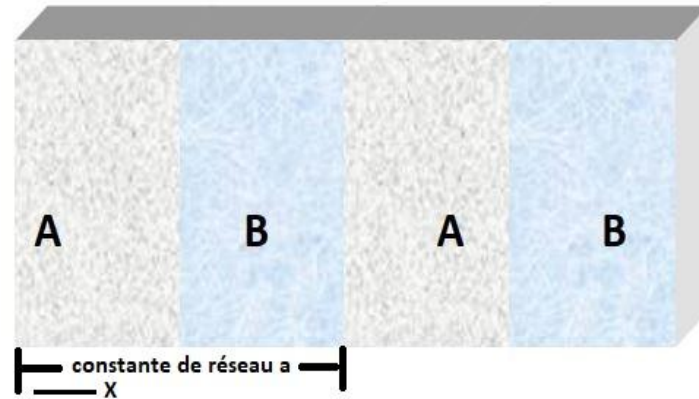


**Figure I.6:** Quelques représentations schématiques de cristaux phononiques Unidimensionnels, bidimensionnels et tridimensionnels.

### I.4.1. Cristaux Phononiques unidimensionnels (CPns-1D)

Un cristal phononique unidimensionnel est un composite stratifié obtenu en empilant en alternance des couches de matériaux de caractéristiques physiques différentes et sont les plus anciennes, elles ont été déjà longtemps étudiées et utilisées comme miroirs diélectriques ou filtres optiques. En acoustiques, elles consistent en une alternance de couches élastiques d'épaisseur  $d$  suivant une seule direction. Les bandes interdites de cette structure, appelée également miroir de Bragg, sont sensibles à l'angle d'incidence de l'onde.

Ces cristaux phononiques unidimensionnels conduisent à de nombreuses applications dans l'isolation acoustique à basse fréquence. En raison de leurs structures, il est facile d'obtenir de grandes bandes interdites. La Figure I.7 montre un cristal phononique unidimensionnel composé de deux matériaux différents A et B [9].

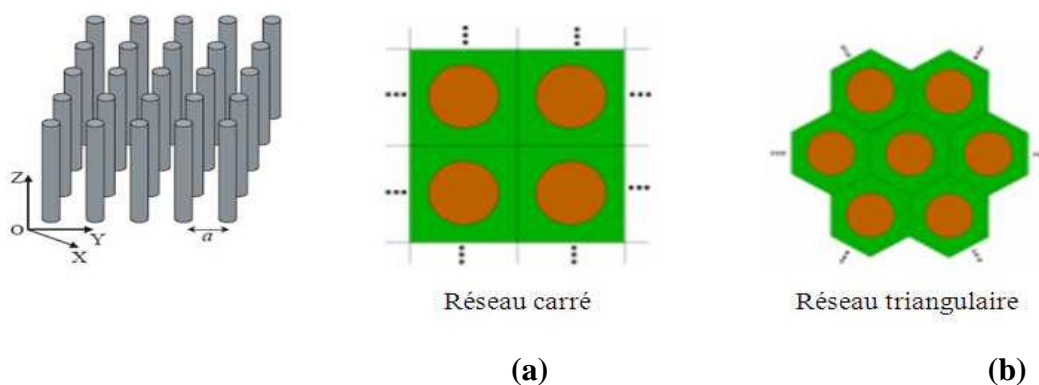


**Figure I.7 :** Représentation schématique d'un cristal phononique unidimensionnel

#### I.4.2. Cristaux Phononiques bidimensionnels (CPns-2D)

Les cristaux phononiques bidimensionnels (2D) sont des structures dont les propriétés élastiques varient périodiquement suivant deux dimensions de l'espace et reste invariante dans la troisième dimension, les inclusions sont des cylindres de section quelconque que l'on peut disposer suivant plusieurs types de réseaux tels que : le réseau carré, triangulaire ou hexagonale. Les inclusions peuvent aussi être composées d'un matériau différent de celui de la matrice.

L'essentiel est que la diffusion des ondes acoustiques et/ou élastiques sur ces inclusions soit très efficace. Les cristaux phononiques bidimensionnels se regroupent principalement suivant les réseaux schématisés sur la Figure I.8.

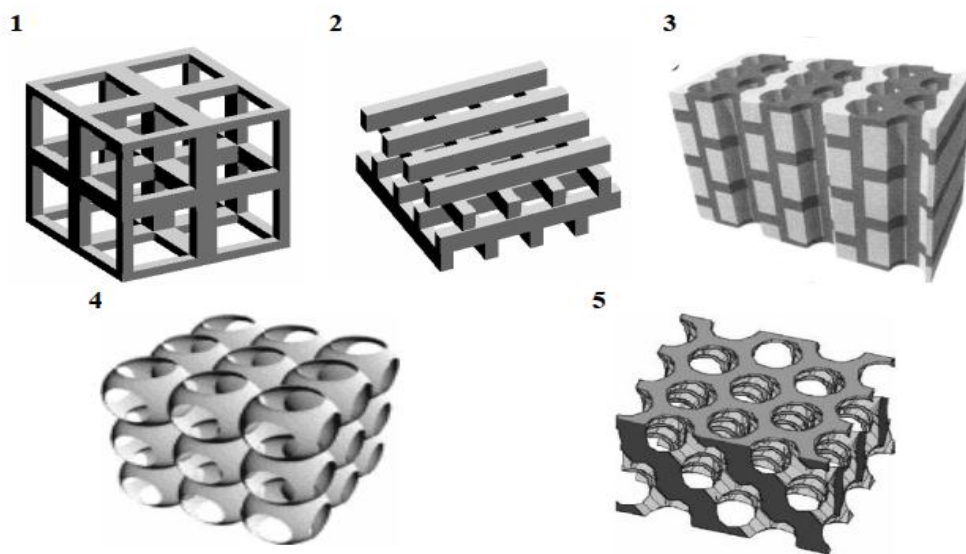


**Figure I.8 :** Représentation schématique d'un cristal phononique à deux dimensions

(a), Réseau carré et (b) Réseau triangulaire [9].

### I.4.3. Cristaux Phononiques tridimensionnels (CPns-3D)

Les cristaux phononiques tridimensionnels sont des structures généralement artificielles périodiques suivant les trois directions de l'espace, Ils décrivent comment les forces de radiation acoustiques peuvent guider l'assemblage de particules colloïdales qui servent alors d'éléments microscopiques composant des métamatériaux acoustiques ou des cristaux phononiques. Ils démontrent diverses structures colloïdales de symétrie orthorhombique assemblées à l'aide d'ondes de pression stationnaires dont la fréquence est de l'ordre du mégahertz (MHz). Ces structures permettent un ajustement rapide des propriétés acoustiques et constituent une nouvelle plateforme pour les applications des métamatériaux dynamiques (Figure I.9).



**Figure I.9** : Différentes structures 3D: structure cubique (1), le tas de bois (2), la structure multicouches (3), les opales ou opales inversées (4) et la Yablonovite (5) [9].

## I.5. CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES ET PHYSIQUES D'UN CRISTAL PHONONIQUE 1D

Les cristaux phononiques sont des matériaux composites périodiques artificiels caractérisés par les différentes propriétés physiques des matériaux qui le composent en particulier par le contraste d'impédance acoustique, le type du système cristallin selon lequel ces matériaux sont organisés et les volumes relatifs qu'ils occupent chaque matériau dans la cellule élémentaire du cristal ( le facteur de remplissage), Pour un cristal phononique unidimensionnel, nous pouvons expliquer ses propriétés comme par:

### I.5.1. Le contraste d'impédance acoustique

Soit un cristal phononique 1D composé de deux matériaux A et B, l'impédance acoustique pour chaque matériau est égale au produit de sa densité par la vitesse de propagation d'une onde acoustique dans ce matériau. Le contraste d'impédance acoustique, est le rapport entre les impédances acoustiques des deux matériaux, c'est-à-dire  $\frac{Z_A}{Z_B}$  [10].

$$\begin{cases} Z_A = \rho_A * C_A \\ Z_B = \rho_B * C_B \end{cases} \quad \text{I.1}$$

$\rho_A$  : la densité du matériau A

$C_A$  : la vitesse de propagation de l'onde dans le matériau A.

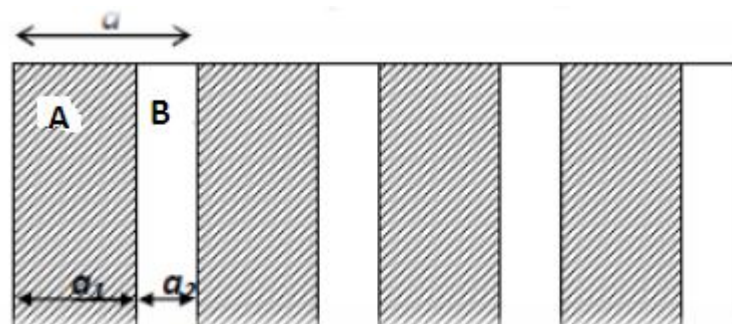
$\rho_B$  : la densité du matériau B

$C_B$  : la vitesse de propagation de l'onde dans le matériau B

### I.5.2. Les périodes

Ces paramètres géométriques, choisis selon le domaine de fréquence étudié, influent sur les caractéristiques de la bande interdite phononique en particulier la largeur et la location de la bande interdite. La période  $a = (a_1 + a_2)$

Avec : les paramètres  $a_1$ ,  $\rho_1$  et  $C_1$  représentent l'épaisseur, la masse volumique et la vitesse de propagation de l'onde acoustique dans la première couche (Matériau A). Alors que les paramètres  $a_2$ ,  $\rho_2$  et  $C_2$  représentent l'épaisseur, la masse volumique et la vitesse de propagation de l'onde acoustique dans la seconde couche (Matériau B).



**Figure I.10:** Les périodes d'un cristal phononique unidimensionnel

### I.5.3. Le facteur de remplissage $ff$

Il est défini comme le rapport entre le volume occupé par le matériau de haute densité dans la cellule élémentaire du cristal et le volume de cellule de cette dernière.

La largeur, la position et le nombre de bandes interdites dépendent du facteur de remplissage (de la fraction volumique des inclusions dans le cristal).

Peut être comparé au largeur du potentiel périodique. S'il est pris pour le matériau de haut indice par exemple, il est défini comme le rapport entre le volume occupé par ce matériau dans la cellule élémentaire du cristal et le volume de cellule de cette dernière. L'influence de ces différents paramètres sur le comportement d'une structure Phononique peut être comprise par analogie avec un potentiel périodique induit de L'arrangement des atomes dans un semi-conducteur [11].

## **I.6. APPLICATION DES CRISTAUX PHONONIQUES 1D**

Ces dernières années ont vu le nombre de publications scientifiques sur les cristaux phononiques croître de façon spectaculaire. Cet intérêt s'explique par les propriétés exceptionnelles que possèdent ces structures et la variété d'applications potentielles qui en résulte. Une des premières applications identifiées a été l'isolation sonore liée à l'existence de bandes de fréquences interdites de propagation.

A des fréquences supérieures, nous pouvons également citer le développement de composants pour l'électronique de télécommunication (filtres sélectifs, multiplexeurs/démultiplexeurs, oscillateurs...) ou bien la réalisation de lentilles haute résolution pour l'imagerie exploitant les propriétés de réfraction négative.

### **I.6.1. Dans le domaine des capteurs phononiques**

Ces dernières années la détection d'espèces chimiques ou biologiques ainsi que l'évaluation de leurs quantités ou leurs concentrations représentent un enjeu de plus en plus important dans de nombreux domaines (environnemental, industriel, médical, militaire, biologique, sécurité alimentaire). Les analyseurs sont généralement des systèmes relativement complexes associant différents éléments mécaniques, chimiques et électriques. L'ensemble est souvent coûteux, encombrant et complexe, ce qui les rend peu aptes à des mesures sur sites. De plus, ces instruments sont souvent affligés d'un temps de réponse long soit par la technique de détection elle-même soit par la nécessité de manipulation des échantillons. C'est dans ce contexte que le développement de capteurs miniaturisés, biocompatibles, avec une réponse en temps réel et plus simple d'utilisation est apparu comme une priorité. Parmi ces capteurs sensibles citons les capteurs à base de cristaux phononiques que nous allons présenter dans le paragraphe suivant.

Les cristaux phononiques offrent une nouvelle plateforme alternative pour détecter les propriétés des matériaux avec une sensibilité élevée. Le capteur vise à déterminer les propriétés du fluide telles que sa nature, sa concentration ou sa température, en utilisant des caractéristiques

spécifiques dans les spectres de transmission phononique. La dépendance de ces creux ou pics de fréquence où la transmission a lieu est corrélée aux propriétés du matériau, en particulier à la densité et à la vitesse du son dans le fluide.

Des exemples sont des capteurs acoustiques de gaz pour la surveillance de la qualité de l'air, instruments de précision en analyse (bio) chimique ou par ultrasons capteurs de niveau et de débit en milieu industriel. Ça peut aussi s'attendre à ce que le capteur phononique ait un impact important dans la mesure, la surveillance ou l'analyse de systèmes complexes. Ceci s'applique en particulier aux biocapteurs ou capteurs médicaux ainsi qu'aux capteurs chimiques pour microréacteurs. Le capteur exploite une approche pour caractériser des molécules complexes comme les protéines, alternative aux unités de mesure spectroscopiques avancées.

Le phénomène de détection a été étudié dans des structures multicouches unidimensionnelles. Un tel capteur est constitué d'un arrangement périodique séquentiel de couches liquides et solides le long d'une direction, où l'une des couches de liquide est remplie d'analyte d'intérêt. Le spectre de transmission du système est analysé par le formalisme de matrice de transfert, où un état de défaut peut être identifié par une brusque diminution de la réflectance du cristal phononique parfait. Cette configuration est mise en évidence pour détecter des variations dans les concentrations de 1-propanol et le 2-propanol dans l'eau. Etant donné que la vitesse du son dans un mélange binaire liquide, tel que le mélange eau-propanol, varie en fonction de la concentration, une relation analytique entre la position du pic de transmission observée et la vitesse du son serait bénéfique dans la mesure de celle-ci dans un mélange de concentration connue. En fait, une dépendance linéaire entre le décalage de fréquence de la position du pic et la vitesse du son dans le mélange eau-propanol à de faibles concentrations est rapportée [12].

### **I.6.2. Dans le domaine des barrières phoniques**

Des barrières phoniques sont des structures extérieures conçues pour protéger les utilisateurs sensibles du sol de la pollution sonore. Les écrans acoustiques sont la méthode la plus efficace pour réduire le trafic et les sources de bruit industriel.

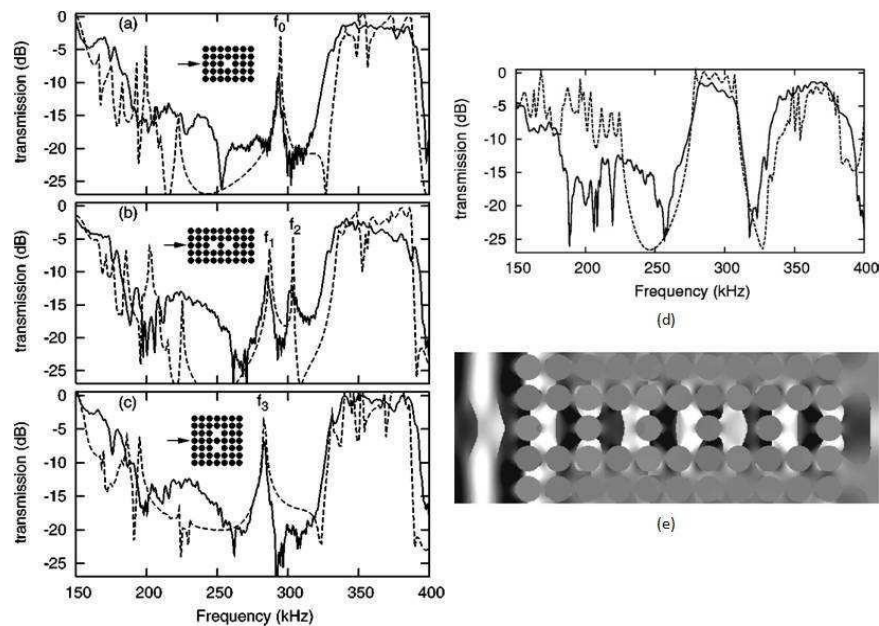
Était un a première application qui a été suggérée par Kushwaha et ses collègues est celle de l'isolation sonore. En effet, nous avons vu que pour toutes les fréquences contenues dans une bande interdite complète, un cristal phononique se comporte comme un véritable bouclier, renvoyant toutes les ondes qui le frappent. C'est ainsi qu'il est parfaitement possible de concevoir des murs barrière phonique pour les autoroutes qui fonctionnent suivant ce principe. Il est alors nécessaire d'isoler l'espace qui se trouve derrière le mur de tout ou partie des fréquences sonores. Dans une telle application, les périodicités mises en jeu sont de l'ordre du mètre, et tout le jeu de

la conception réside dans la possibilité de diminuer cette dimension sans que la bande de fréquence couverte soit trop élevée, l'oreille humaine étant sensible aux fréquences sonores comprises entre 20 et 20000 Hertz typiquement.

### I.6.3. Cavités résonantes ; Résonateurs acoustiques et Filtrage

Il est possible de modifier localement la nature du matériau et plus concrètement en agissant sur la valeur des propriétés élastique du matériau.

Au lieu d'enlever une ligne d'inclusion, on vient maintenant enlever ou modifier une unique inclusion. Toute onde présente dans ce défaut se reflète sur le cristal phononique entourant le défaut et est donc confinée dans la cavité, qu'on peut qualifier de résonante. L'expérience montée par Khelif comportant des cylindres d'acier immergés dans l'eau prouve là encore ce phénomène. Comme le montre (la figure I.11), lorsqu'on enlève une inclusion, on observe un pic de transmission dans la bande d'arrêt, une résonance.



**Figure I.11:** Transmissions mesurées (lignes pleines) et calculées (lignes pointillées) en fonction de la fréquence pour (a) une cavité résonante, (b) deux cavités alignées dans la direction de propagation, (c) deux cavités alignées dans la direction perpendiculaire à la propagation et (d) une série de cavités formant un guide. (e) pression calculée dans une série de cavités formant un guide identique à la figure (d) selon

Le travail effectué par Khelif s'intéresse aussi à ce qui arrive lorsqu'on met deux de ces cavités l'une à côté de l'autre. On remarque que, si elles sont alignées avec la direction de propagation, on a l'apparition de deux pics. En couplant judicieusement ces cavités on obtient une bande passante dans la bande d'arrêt. Par contre, si elles sont alignées dans le sens

perpendiculaire à la propagation, la résonance est légèrement décalée en fréquence, mais elle est toujours seule [10].

La propriété de filtrage est la capacité de séparer et sélectionner des éléments à partir d'un flux. Il s'agit de séparer les ondes acoustiques ayant des fréquences déterminées à partir d'un paquet de fréquences initiales. En effet, en exploitant la bande interdite phononique.

## CONCLUSION

Les cristaux phononiques forment un nouveau domaine de la physique appliquée qui depuis vingt ans environ a reçu beaucoup d'intérêt de la part des chercheurs. Ce travail est une contribution à l'analyse théorique de quelques propriétés des cristaux phononiques.

Tout d'abord, nous avons présenté les cristaux phononiques en commençant par quelques concepts fondamentaux. La notion de cristal phononique a été définie et illustrée à travers plusieurs exemples de réalisations, à la fois à l'échelle cristal phononique unidimensionnelles (1D), ou d'autre échelle.

Nous avons également étudié en raison de ses propriétés physiques et géométriques également propagation d'onde acoustique, et discuté de ses applications dans certains domaines. Nous avons également évoqué sa contribution aux capteurs. Nous avons terminé ce chapitre par des notions fondamentales concernant ultrasons et leur application.

# Chapitre II

## **Méthodes numériques de simulation**

## INTRODUCTION

Avec l'augmentation de la complexité des systèmes, il est devenu nécessaire de prédire puis développer de nouveaux modèles rigoureux les plus réalistes possibles. Cette "prédiction" est basée sur des équations mathématiques dont la recherche de solutions a tant suscité et suscite encore une grande préoccupation de la part des scientifiques. Par conséquent, plusieurs méthodes et techniques numériques ont été développées, mais elles avaient montré aussitôt leurs limites faute de moyens de calcul, laissant ainsi plus de place aux études analytiques. C'est durant ces trente dernières années que l'intérêt des chercheurs pour ces méthodes de calcul s'est accru avec le développement des ordinateurs et l'augmentation des capacités des calculateurs. Les méthodes numériques se sont ainsi développées, au moment où d'autres ont vu le jour, permettant de la sorte de traiter des problèmes ayant des géométries de plus en plus complexes. Les études numériques ont finalement englobé la quasi-totalité des domaines scientifiques.

Plusieurs méthodes de calculs numériques ont été développées pour simuler et étudier numériquement la propagation d'ondes élastiques et acoustiques dans des cristaux phononiques. Parmi ces méthodes on trouve, la méthode de décomposition en ondes planes (PWE : Plane Wave Expansion en anglais) adaptée pour les structures périodiques. La méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD : Finite Difference Time Domain en anglais) et la méthode des éléments finis (FEM pour Finite Element Method en anglais) lesquelles sont largement adaptées aux structures finies. Comme leurs noms l'indiquent, ces méthodes reposent sur la discrétisation spatiale et temporelle des équations aux dérivées partielles. Une autre méthode, également basée sur l'approche de la décomposition, a été développée la méthode des matrices de transfert (TMM pour Transfer Matrix Method en anglais).

### II.1. METHODE DES DIFFERENCES FINIES DANS LE DOMAINE TEMPORAL

La méthode des différences finies dans le domaine temporel FDTD (Finite Difference Time Domain) est une approche numérique permettant la résolution des équations de Maxwell portant sur les variables spatiales et temporelle.

La méthode FDTD a été introduite pour les cristaux phononiques par Sigalas et Garcia, pour pallier aux problèmes de convergence numérique initialement rencontrés lors du calcul de diagrammes de bandes pour des systèmes mixtes (inclusions liquides dans une matrice solide ou inversement) par la méthode de décomposition en ondes planes [10]. Elle a été préalablement exploitée pour la simulation des structures périodiques, en particulier pour les cristaux

photoniques, à l'image des travaux réalisés par Chan et al. Ou encore de Fan et al. Le principe consiste de façon très sommaire à discrétiser dans le domaine spatial comme temporel les équations constitutives du problème ; à fixer des conditions aux limites adaptées et à calculer de manière explicite l'évolution dans le domaine temporel d'une grandeur physique, à considérer par exemple le champ électrique ou magnétique dans le cas d'un cristal photonique, ou le champ de déplacement ou de vitesse dans celui d'un cristal phononique [10].

### II.1.1. Principe de la méthode FDTD

La méthode FDTD est une méthode qui consiste à discrétiser le temps et l'espace et à résoudre les équations différentielles de manière itérative.

La résolution d'équation de la propagation de l'onde élastique 1D se fait de la manière suivante : L'espace est discrétisé en maillage avec un pas  $\Delta x$  et les équations sont résolues à chaque pas de temps  $\Delta t$ . Tout d'abord, la déformation est calculée à partir du déplacement  $u$  pour chaque point de grille  $i$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{t}) = \frac{u_{i+1}(\mathbf{t}) - u_i(\mathbf{t})}{\Delta x} \quad \text{II.1}$$

Ensuite, la contrainte  $\tau$  est déduite de la déformation :

$$\boldsymbol{\tau}_i(\mathbf{t}) = Y_i(\mathbf{t})\boldsymbol{\varepsilon}_i(\mathbf{t}) \quad \text{II.2}$$

En discrétisant la deuxième loi de Newton, qui donnée par l'équation :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial z} \quad \text{II.3}$$

(Où  $v(z, t)$  est la vitesse du particule,  $t$  est le temps,  $\rho$  est la densité,  $\tau(z, t)$  est la contrainte et  $z$  la position), pour chaque point de grille, on obtient:

$$\frac{v_i(t+\Delta t) - v_i(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\tau_i(t) - \tau_{i-1}(t)}{\Delta x} \right) \quad \text{II.4}$$

Ainsi, la vitesse  $v$  est mise à jour avec :

$$v_i(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) = v_i(\mathbf{t}) + F_i(\mathbf{t}) \frac{\Delta t}{\rho} \quad \text{II.5}$$

$$\text{Où la force } F \text{ donnée par : } F_i(\mathbf{t}) = \frac{\tau_i(t) - \tau_{i-1}(t)}{\Delta x} \quad \text{II.6}$$

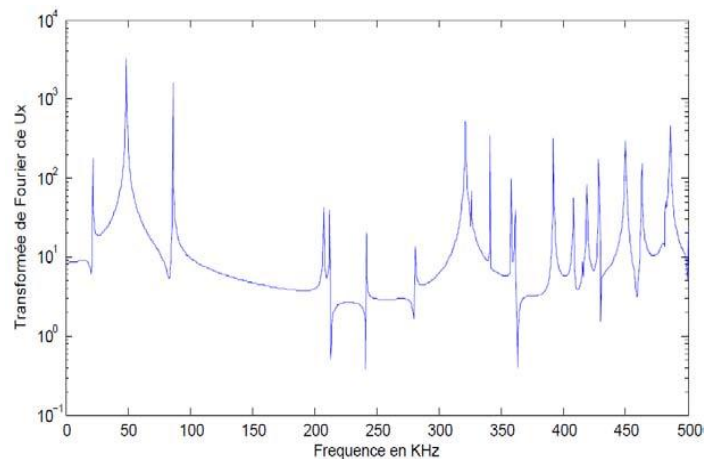
$$\text{Enfin, le déplacement est mis à jour par: } u_i(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) = u_i(\mathbf{t}) + v_i(\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t})\Delta t \quad \text{II.7}$$

Les valeurs de :  $\tau_i$ ,  $u_i$  et  $v_i$  sont enregistrées pour une analyse post-calcul et le calcul complet de ces valeurs est à nouveau effectué pour le pas de temps suivant.

### II.1.2. Application de FDTD pour le calcul des bandes

La première étape dans la résolution des équations de mouvement consiste à isoler une cellule de périodicité de la structure phononique en appliquant la condition périodique de Bloch, introduite en FDTD par Hsieh et Al [13]. Si le calcul de structure de bandes dans la PWE et la FEM se ramène à la résolution d'un problème matriciel de recherche de valeurs propres, l'approche adoptée dans la FDTD est bien différente.

En effet, dans le calcul des courbes de dispersion par la FDTD, les modes de vibration de la structure phononique sont déterminés pour chaque valeur de vecteur d'onde  $\vec{k}$ , pour se faire, une source d'excitation à large bande fréquentielle est introduite à un endroit de la cellule. Une onde acoustique est ainsi générée par cette source et se propage dans la cellule unité en conformément aux conditions de Bloch. Après plusieurs itérations temporelles, les modes de vibration de la cellule apparaissent. En relevant les valeurs du champ de déplacement en fonction du temps sur un point de la cellule, les modes peuvent être obtenus à partir des pics de résonance du spectre du champ de déplacement. La figure II.1 montre un exemple de spectre de champ de déplacement pour une structure phononique bidimensionnelle infinie, avec des pics de modes longitudinaux, calculé par transformée de Fourier. Les valeurs des fréquences des pics sont ainsi relevées pour chaque valeur du vecteur d'onde, ce qui permet de déterminer la structure de bandes du CP [3].



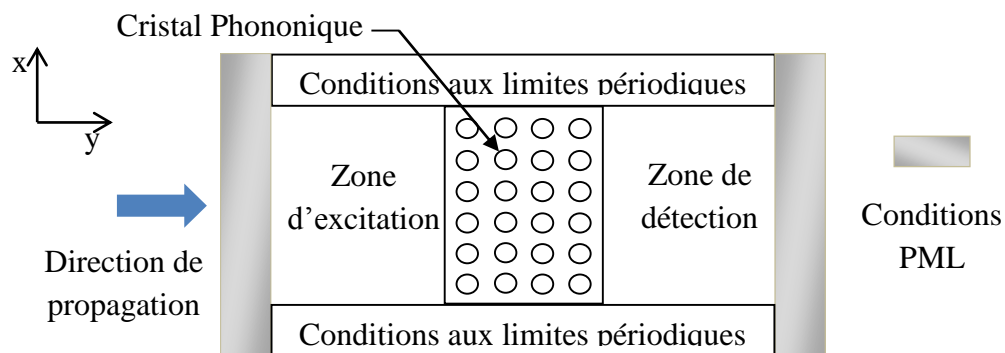
**Figure II.1 :** Exemple de spectre de transmission dans un cristal phononique bidimensionnel pour un vecteur d'onde fixé par la méthode FDTD [3].

### II.1.3. Calcul du coefficient de réflexion et de transmission

La transmission est la capacité de l'onde à traverser une structure périodique à une fréquence donnée. Elle se calcule en mettant en place une source générant des ondes à large bande de fréquences qui vont traverser le cristal phononique ou photonique pour être interceptées

à leur sortie en enregistrant les valeurs de champ de déplacement ou les champs électromagnétiques en fonction du temps. Afin de comprendre le processus de calcul du coefficient de transmission, nous prenons le cas d'une structure 2D (figure II.2). L'espace est délimité en trois zones : deux zones homogènes séparées par le cristal phononique.

La première, située avant le cristal phononique est celle de l'excitation à partir de laquelle une onde acoustique progressive est lancée. La direction  $y$  correspond alors à la direction de propagation de l'onde élastique. La seconde zone, après le cristal phononique, est celle de la détection où est collecté le champ de déplacement en fonction du temps. Les composantes des déplacements sont progressivement enregistrées au cours du temps au niveau du détecteur et converties en fréquence par transformée de Fourier. Enfin, la normalisation de ces courbes avec l'onde incidente permet d'obtenir la courbe d'évolution des coefficients de transmission en fonction de la fréquence.



**Figure II.2:** Schéma d'un cristal phononique fini 2D pour le calcul des courbes de coefficients de transmission.

#### II.1.4. Conditions PML (Perfectly Matched Layers)

La PML est un domaine artificiel créé pour le calcul numérique afin de traiter les problèmes de propagation d'ondes dans les milieux infinis. Sachant qu'en simulation numérique, les domaines conçus ne peuvent pas être infinis, l'idée est de mettre en place des conditions aux limites absorbantes aux frontières du domaine étudié.

L'objectif est de pouvoir empêcher l'onde de se réfléchir au niveau de ces frontières. Les ondes passent ainsi l'interface entre le domaine non PML et le domaine PML et sont absorbées au niveau de ce dernier. La formulation mathématique de la PML en FDTD a été introduite pour la première fois par Bérenger et al [14] en 1994 pour les ondes électromagnétiques régies par les équations de Maxwell. Elle a été ensuite reformulée par Chew et Liu [15] pour les ondes élastiques en ajoutant une propriété d'amortissement au niveau des discrétisations FDTD du

domaine PML. Chagla et al [16] ont mis en place une extension de la PML pour étudier les cristaux phononiques piézoélectriques bidimensionnels.

### II.1.5. Avantages et limitation de la méthode FDTD

La méthode FDTD est relativement simple à mettre en œuvre et rapide puisque le nombre d'opérations arithmétiques mises en œuvre à chaque itération est faible. Elle met en jeu, des concepts et des outils de résolutions élémentaires, cette méthode permet de :

- Obtenir en une seule simulation des informations temporelles et spectrales sur une structure.
- Offrir la possibilité d'obtenir la distribution du champ à différents temps.
- Modéliser des structures aux géométries complexes dont les matériaux peuvent être anisotropes ou inhomogènes.

La méthode FDTD nécessite l'utilisation d'une grille cartésienne ; cela entraîne des difficultés pour faire des raffinements locaux. En particulier, les géométries courbées doivent être approchées par des courbes en escalier.

La FDTD possède des limitations telles que :

- Le schéma de Yee impose une discrétisation en mailles régulières.
- Il faut des longueurs d'arêtes entre  $\lambda/16$  et  $\lambda/20$  pour avoir la convergence en maillage.
- Il est difficile de prendre en compte des matériaux dispersifs.
- Les conditions aux limites approchées introduisent une approximation qui peut avoir une influence sur la précision du calcul.
- La FDTD étant un schéma explicite, le pas temporel maximal est relié au pas spatial par une condition de stabilité.
- Le pas de maillage et par conséquent le pas sur le temps sont liés à la plus petite longueur d'onde  $\lambda$  considérée. Un maillage typique aura au moins 10 mailles par longueur d'onde pour garantir une précision acceptable sur la solution. Donc, pour traiter un objet de taille  $100\lambda$ , il faudra un maillage  $1000 \times 1000 \times 1000$ , soit 6 milliards d'inconnues scalaires, d'où un coût mémoire très important sur de gros maillages.

Le principal inconvénient de la FDTD est qu'elle nécessite de longs temps de calculs et un espace mémoire important, en particulier pour les calculs 3D.

## II.2. METHODE DES ELEMENTS FINIS FEM

La méthode des éléments finis FEM (Finit Element Method), est largement utilisée dans la simulation numérique pour la résolution des équations aux dérivées partielles, décrivant les phénomènes physiques. Historiquement, ses premières utilisations concernent les problèmes liés aux structures mécaniques nécessitant la recherche des solutions de contraintes et de déformations dans les milieux élastiques. Tel est aussi le cas de l'étude de propagation des ondes acoustiques/élastiques dans les milieux phononiques. En effet, la méthode s'apprête facilement à l'application dans l'élaboration des problèmes en valeurs propres permettant le calcul des structures de bandes. Parmi ses applications en phononique, on peut citer les travaux de Khelif et al [17] qui l'ont utilisée pour calculer les courbes de dispersion d'un cristal phononique bidimensionnel constitué d'inclusions cylindriques dans une plaque. L'ouverture de bandes interdites ainsi que le guidage des ondes élastiques dans ces structures phononiques ont été aussi étudiés par Djafari-Rouhani et al [18] en utilisant la méthode des éléments finis. T. Chen et T T. Wu [19] se sont intéressés aussi aux structures de bandes et au guidage des ondes élastiques, mais dans un nouveau type de cristal phononique constitué de cylindres déposés périodiquement sur une plaque d'aluminium. Dans toutes ces études, la FEM a montré son efficacité en termes de convergence et de temps de calcul, comparée à la méthode PWE, notamment dans le cas des plaques finies.

### II.2.1. Principe de la méthode FEM

La méthode des éléments finis est adaptée pour résoudre presque tous les types d'équations aux dérivées partielles régissant un problème physique quelconque, en particulier les équations relatives à la propagation des ondes élastiques. Pour une onde acoustique ou élastique se propageant dans un milieu cubique ou isotrope, les équations de propagation s'écrivent comme suit [3]:

$$\begin{cases} -\rho\omega^2 u_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{11} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_{12} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{44} \frac{\partial u_x}{\partial y} + c_{44} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( c_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} + c_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ -\rho\omega^2 u_y = \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{44} \frac{\partial u_x}{\partial y} + c_{44} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{11} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_{12} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( c_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} + c_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ -\rho\omega^2 u_z = \frac{\partial}{\partial x} \left( c_{44} \frac{\partial u_x}{\partial z} + c_{44} \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( c_{44} \frac{\partial u_y}{\partial z} + c_{44} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( c_{12} \frac{\partial u_x}{\partial x} + c_{12} \frac{\partial u_y}{\partial y} + c_{11} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \end{cases} \quad \text{II.8}$$

Où les fonctions inconnues sont les composantes du champ de déplacement  $(\mathbf{u}_i)_{i \in \{x,y,z\}}$ . A ce système d'équations sont ajoutées les conditions aux limites qui contraignent les solutions recherchées.

Afin de décrire plus aisément la méthode des éléments finis, nous partirons d'une formulation plus générale en écrivant le système (II.8) plutôt sous la forme suivante :

$$-\nabla(C\nabla u) = \omega^2 u$$

II.9

Cette équation est à résoudre sur un domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^3$ , avec les conditions aux limites sur la frontière du domaine  $\Omega$ . On précise que l'adhérence de  $\Omega$ , notée  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , est un ensemble compact.

Le principe de la méthode des éléments finis peut se résumer ainsi :

- L'écriture sous la forme variationnelle : les équations aux dérivées partielles sont écrites sous une forme variationnelle vérifiée pour des fonctions test appartenant à un espace vectoriel bien défini  $V$ . Cette forme s'appelle la forme faible du problème.
- La discrétisation : la solution du problème variationnelle est décomposée dans la base d'un espace vectoriel de dimension finie  $V_N \in V$ . Les éléments de cette base sont appelés les fonctions de forme.

La formulation variationnelle du problème est ensuite exprimée en fonction des fonctions de forme de l'espace  $V_N$  et le système est finalement écrit sous forme matricielle. La résolution  $N$  du système matriciel permet d'obtenir la fonction solution du problème.

Ce système d'équations sont ajoutées les conditions aux limites qui contraignent les solutions recherchées [3].

### II.2.2. Intérêts Avantages de la méthode des éléments finis

Parmi les intérêts de cette méthode est que les domaines peuvent avoir des tailles très contrastées et des formes quelconques, ainsi que les matériaux étudiés peuvent être de natures très différentes : anisotropes, métaux parfaitement conducteurs, hétérogènes etc. En plus, les matériaux peuvent être dispersifs : leurs paramètres peuvent dépendre de la fréquence de calcul. Et en fin, l'espace mémoire et le temps de calcul peuvent être optimisé, car les matrices stockées sont creuses.

L'avantage de la MEF permet de représenter un grand nombre de formes de structures à l'aide du modèle analytique général commun. En plus, la faculté de définir des maillages très irréguliers et depuis l'origine. Elle peut accepter des lois complexes de propriétés intrinsèques des matériaux en comparaison aux possibilités des méthodes classiques de résolution, et qui offrent plus vastes perspectives en analyse non linéaire.

### II.2.3. Limitations

Les contraintes géométriques sur le maillage sont dues aux conditions Maître esclave. Aussi, cela nécessite de mailler très finement dans les zones étroites. En plus, quand les matériaux sont dispersifs la taille du problème de calcul de modes propres est multipliée par un entier qui dépend de l'expression de la permittivité.

### II.2.4. Domaines d'application de la méthode FEM

Les domaines d'application de la méthode des éléments finis sont très larges et très variés. En général pour les champs d'application de cette méthode sont : l'électromagnétisme, l'électrostatique, l'analyse thermique, la mécanique des milieux continus solides et la mécanique des milieux continus fluides.

## II.3. METHODE DE DECOMPOSITION EN ONDES PLANES PWE

La décomposition en ondes planes, communément appelée PWE, est la méthode la plus utilisée par la communauté scientifique travaillant dans les domaines de la photonique et la phononique, où les systèmes étudiés sont généralement périodiques. L'une de ses premières applications a été son utilisation pour obtenir les états d'énergie électroniques dans les cristaux métalliques périodiques [20]. Elle a été ensuite largement utilisée en photonique [21] puis en phononique pour le calcul des structures de bandes.

Dans le domaine de la phononique, du fait de la périodicité des structures étudiées, le champ de déplacement et les paramètres d'élasticité sont décomposés en ondes planes périodiques suivant les directions de la périodicité du CP. Le théorème de Bloch est appliqué afin de ramener l'étude au niveau d'une cellule constituant l'élément de périodicité du système en exprimant les conditions aux limites périodiques. Le système d'équations de mouvement est ensuite développé et ramené à un problème classique de recherche de valeurs propres. Ce dernier permet de calculer les modes de propagation des ondes et de tracer la structure de bandes.

Durant les deux dernières décennies, la PWE a largement montré son efficacité dans le calcul des structures de bandes phononiques pour différents types de systèmes : structures bidimensionnelles solides composites ou solide-air [22], CP à une ou deux dimensions, constitués d'une plaque avec inclusions périodiques, pour la propagation d'ondes de Lamb [23], systèmes présentant un ou plusieurs défauts [24], ainsi que le guidage des ondes dans des systèmes finis [25]. La PWE a aussi fait ses preuves dans l'étude des milieux anisotropes [26] ou dispersifs pour les ondes de surfaces ainsi que les milieux piézoélectriques [27]. Elle a également

été modifiée et améliorée afin de calculer la structure de bandes complexes pour les ondes évanescentes.

### II.3.1. Principe de la PWE

La méthode PWE s'est imposée comme l'un des outils de modélisation privilégié des cristaux phononiques et figure par ailleurs parmi les premiers formalismes à avoir été employés afin de mettre théoriquement en évidence l'existence de bandes interdites pour les ondes élastiques. Elle permet de représenter de façon assez directe, du point de vue du formalisme mathématique comme de la mise en œuvre numérique, la propagation de champs de déplacement dans un milieu périodique. Elle est d'ailleurs bien connue en acoustique où elle est employée pour simuler des structures périodiques de type transducteurs composites qui trouvent leurs applications dans le domaine de l'imagerie médicale par exemple [28].

Le principe de base de la méthode de décomposition en ondes planes consiste à décomposer en séries de Fourier les champs propagatifs dans le domaine fréquentiel, c'est à- dire dans le référentiel défini par le réseau réciproque du cristal. Kushwaha et al. [1] ont appliqué cette méthode dans le cas d'un réseau bidimensionnel, en limitant toutefois dans un premier temps leur analyse à des milieux isotropes et à des champs de déplacement purement transverses.

Dans cette configuration, les polarisations dans le plan et hors plan du champ de déplacement peuvent être découplées. Dans un solide homogène et isotrope le champ de déplacement ou vecteur de déplacement élastique dépend du temps  $t$  et de la position  $r$ , il peut se décomposer sous la forme [29] :

$$\rho(\vec{r}) \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \nabla (\rho(\vec{r}) c_l(\vec{r})^2 \nabla \cdot \vec{u}) \quad \text{II.10}$$

Où  $\rho$ ,  $c_l$  est définie pour être la constante élastique  $C_{11}$ . On peut maintenant développer  $C_{11}$ , et la densité par une série de Fourier, c'est dû au rapport périodique de nature des deux dimensions du cristal phononique.

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \sigma(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad \text{II.11}$$

$$C_{11}(\vec{r}) = \sum_{\vec{G}} \beta(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad \text{II.12}$$

Où  $\vec{G}$  et  $\vec{r}$  sont les vecteurs en réseaux directe et réciproque respectivement. En supposant une onde plane de solution et la périodicité de la moyenne ; on peut invoquer Bloch de résoudre pour de théorème, pour lesquelles le champ de déplacement est :

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \sum_{\vec{G}} \vec{u}_k(\vec{G}) e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad \text{II.13}$$

Ici  $\mathbf{k}$  est le vecteur Bloch à deux dimensions, on peut formuler un ensemble infini d'équations pour lesquelles les valeurs propres,  $\omega(\mathbf{K})$ , et vecteurs propres,  $u_k(\mathbf{G})$ , peut être trouvée :

$$\sum_{\vec{G}} [\sigma(\vec{G} - \vec{G}')(\vec{k} + \vec{G}) \cdot (\vec{k} - \vec{G}') - \beta(\vec{G} - \vec{G}')\omega^2] \vec{u}_k(\vec{G}) = \mathbf{0} \quad \text{II.14}$$

On peut maintenant étudier les deux dimensions pour un cristal phononique en réseau réciproque avec la fraction de remplissage  $f$ . La densité et les constants élastiques prennent la forme :

$$\mathbf{q}(\vec{G}) = \begin{cases} \mathbf{x}\mathbf{f} + \mathbf{y}(\mathbf{1} - \mathbf{f}) \equiv \bar{\mathbf{z}}, & \text{for } \vec{G} = \mathbf{0} \\ (\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{F}(\vec{G}) \equiv \Delta\bar{\mathbf{z}}\mathbf{F}(\vec{G}), & \text{for } \vec{G} \neq \mathbf{0} \end{cases} \quad \text{II.15}$$

Où  $\mathbf{q}$  est représenté par  $\sigma$  ou  $\beta$  et  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  représentent la densité ou constants élastiques pour les inclusions et matrix. Le facteur de structure  $\mathbf{F}(\mathbf{G})$  est donnée par :

$$\mathbf{F}(\vec{G}) = \frac{1}{A} \int_A \mathbf{id}^2 \mathbf{r} e^{i\vec{G} \cdot \vec{r}} \quad \text{II.16}$$

Où  $A$  est le domaine de l'inclusion unit cellule et l'intégration s'effectue sur l'inclusion. On peut maintenant réfute Eq. II.14 comme :

$$\sum_{\vec{G} \neq \vec{G}'} \mathbf{F}(\vec{G} - \vec{G}') [\Delta\alpha(\vec{k} + \vec{G}) \cdot (\vec{k} + \vec{G}') - \Delta\beta\omega^2] \vec{u}_k(\vec{G}') + [\bar{\sigma}|\vec{k} + \vec{G}|^2 - \bar{\beta}\omega^2] \vec{u}_k(\vec{G}) \quad \text{II.17}$$

La formulation antérieure de vagues dans un matériau périodique démontre qu'il peut être résolu numériquement pour déterminer les fréquences propres et vecteurs propres pour un ensemble donné de vecteurs d'onde.

Il est de pratique courante pour trouver les fréquences propres pour les vecteurs d'onde qui sont dans la zone de Brillouin irréductible. Afin d'obtenir une bonne convergence avec cette méthode, le nombre d'ondes planes doit être bien choisir [30].

### II.3.2. Avantages et inconvénients de la méthode

Les décompositions de cette méthode sont des solutions exactes. La méthode est particulièrement bien adaptée au problème des solutions modales. Les problèmes de grande taille peuvent être résolus en utilisant des techniques itératives, comme la méthode du gradient conjugué.

Que ce soit pour le problème aux valeurs propres normal ou généralisé, un petit nombre seulement d'indices de bande dans le diagramme est nécessaire, reposant souvent sur les côtés de la zone de Brillouin. Ceci correspond aux solutions des modes propres en utilisant des techniques itératives et non à la diagonalisation de toute la matrice.

Il arrive que de faux modes apparaissent. Les problèmes de grande taille s'exécutent, où  $n$  est le nombre d'ondes planes utilisées dans le problème. La méthode est donc assez consommatrice à la fois de temps et d'espace mémoire.

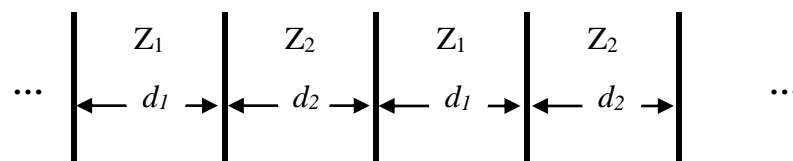
Parmi les alternatives figurent la méthode spectrale et les méthodes utilisant FDTD qui sont plus simples et plus indépendants du modèle [31].

## II.4. METHODE DES MATRICES DE TRANSFERT TMM

Pour résoudre un problème de propagation d'ondes dans un milieu multicouche, il faut résoudre les équations locales (méthode des ondes partielles – tenseur de Christoffel ou formalisme de Stroh) et les conditions d'interface. Dans les milieux stratifiés le nombre d'interfaces peut être grand et il est donc utile d'introduire une matrice globale représentative. L'intérêt est d'exprimer un vecteur (défini à l'extrémité supérieure du stratifié) en fonction du même vecteur (défini à l'extrémité inférieure du stratifié) en utilisant cette matrice globale qui est le produit des matrices locales obtenues en exprimant la continuité des contraintes et déplacements à chaque interface. Les méthodes diffèrent par le choix des variables composant le vecteur. Il existe ainsi la matrice de transfert de Thomson-Haskell et la matrice d'impédance de surface nommée aussi Stiffness Matrix Method. La difficulté est numérique. Ceci est d'autant plus vrai que le nombre d'éléments est grand et que la longueur d'onde est grande devant la taille de ces éléments. La résolution est facilitée par un bon adimensionnement du problème et un bon conditionnement de la matrice [32]. Si le milieu multicouche est périodique, le formalisme précédent permet d'introduire la notion d'onde de Bloch (périodicité 2D et 3D) ou d'onde de Floquet (périodicité 1D). Si le milieu est continûment variable, un développement en série de Peano permet d'exprimer analytiquement la solution [33].

### II.4.1. Super-réseaux unidimensionnels

Les cristaux phononiques que nous étudions ici sont des super-réseaux constitués d'une succession de couches, comme sur la figure II.3. Les deux types de couche, 1 et 2, ont des épaisseurs respectives  $d_1$  et  $d_2$ , et des impédances respectives  $Z_1$  et  $Z_2$ .



**Figure II.3** : Un super-réseau 1D avec des couches alternées avec des impédances  $Z_1$  et  $Z_2$ .

Nous écrivons d'abord les équations fondamentales de l'acoustique :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho(x) \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial P}{\partial t} = -Y(x) \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}, c = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad \text{II.18}$$

Où ( $P$ ) est la pression, ( $v$ ) est la vitesse des particules, ( $\rho$ ) est la masse volumique et ( $Y$ ) est le module de Young. Ces équations sont équivalentes à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial x} = \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \tau = Y(x) \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad \text{II.19}$$

Où ( $\tau = -p$ ) est la contrainte et ( $u$ ) est le déplacement des particules.

Pour une onde harmonique, la solution générique de ce système d'équations pour une couche d'impédance  $Z_i$  est une onde plane, composée d'une onde incidente d'amplitude  $A$  et d'une onde réfléchie d'amplitude  $B$ . Dans ce cas, en considérant  $p = Ve^{j\omega t}$  et  $v = Ve^{j\omega t}$ , nous pouvons écrire la solution ainsi : [34]

$$\begin{cases} P = Z_i A(\omega) e^{-jkx} - Z_i B(\omega) e^{jkx} \\ V = A(\omega) e^{-jkx} + B(\omega) e^{jkx} \end{cases} \quad \text{II.20}$$

#### II.4.2. Formalisme matriciel

La méthode de la matrice de transfert utilisera la solution décrite par l'équation (II.20) écrite comme un produit d'une matrice et un vecteur. Ce formalisme va nous permettre d'écrire les solutions de propagation des ondes dans des structures multicouches avec ou sans défauts.

Nous montrerons que des cas particuliers, tel que les couches quart d'onde ont un comportement plus simple et plus intéressant.

##### II.4.2.1. Propagation dans une couche

À partir de l'équation (II.20), la propagation dans une couche, de la position  $x = 0$  à la position  $x$  peut être écrite comme un produit de matrices :

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} Z_i e^{-jk_i x} & -Z_i e^{jk_i x} \\ e^{-jk_i x} & e^{jk_i x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} Z_i & -Z_i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-jk_i x} & 0 \\ 0 & e^{jk_i x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 \quad \text{II.21}$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_x = F_i H_i \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 \quad \text{II.22}$$

$$\text{Avec : } F_i = \begin{bmatrix} Z_i & -Z_i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ et } H_i = \begin{bmatrix} e^{-jk_i x} & 0 \\ 0 & e^{jk_i x} \end{bmatrix} \quad \text{II.23}$$

Dans l'équation (II.23),  $H_i$  décrit la propagation des ondes dans la couche  $i$  à une distance  $x$ . On peut également noter que :

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_0 = F_i \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 \quad \text{II.24}$$

$$\text{Alors : } \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 = F_i^{-1} \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_0 \text{ avec : } F_i^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_i} & \mathbf{1} \\ -\frac{1}{Z_i} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad \text{II.25}$$

De cette façon, on obtient pour la propagation à travers une couche d'impédance  $Z_i$  et une longueur  $x$  :

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_x = F_i H_i F_i^{-1} \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_0 = M_i \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_0 \quad \text{II.26}$$

$$\text{Avec : } M_i = F_i H_i F_i^{-1} \begin{bmatrix} \cos(k_i x) & -jZ_i \sin(k_i x) \\ -\frac{1}{Z_i} \sin(k_i x) & \cos(k_i x) \end{bmatrix} \quad \text{II.28}$$

#### II.4.2.2. Propagation dans une bicouche

Pour écrire la propagation dans une bicouche, nous utilisons la propriété de continuité de P et V aux interfaces:

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{x^+} = \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{x^-} \quad \text{II.29}$$

Où  $x^+$  appartient à Z2 et  $x^-$  appartient à Z1.

Ainsi, nous avons :

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{d_1+d_2} = M_2 M_1 \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_0 = M \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_0 \quad \text{II.30}$$

Avec :

$$M = \begin{bmatrix} \cos(k_2 k_2) & -jZ_2 \sin(k_2 k_2) \\ -\frac{j}{Z_2} \sin(k_2 k_2) & \cos(k_2 k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(k_1 k_1) & -jZ_1 \sin(k_1 k_1) \\ -\frac{j}{Z_1} \sin(k_1 k_1) & \cos(k_1 k_1) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos(k_1 k_1) \cos(k_2 k_2) - \frac{Z_2}{Z_1} \sin(k_1 k_1) \sin(k_2 k_2) & -jZ_1 \cos(k_2 k_2) \sin(k_1 k_1) - jZ_2 \sin(k_2 k_2) \cos(k_1 k_1) \\ -\frac{j}{Z_2} \cos(k_1 k_1) \sin(k_2 k_2) - \frac{j}{Z_1} \cos(k_2 k_2) \sin(k_1 k_1) & -\frac{Z_1}{Z_2} \sin(k_1 k_1) \sin(k_2 k_2) - \frac{Z_2}{Z_1} \sin(k_1 k_1) \sin(k_2 k_2) \end{bmatrix}$$

Ou sous forme condensée :

$$M = (F_2 H_2 F_2^{-1})(F_1 H_1 F_1^{-1}) \quad \text{II.31}$$

Dans un milieu périodique ( $d = d_1 + d_2$ ), les modes de propagation sont les modes de Bloch et les valeurs propres de M sont donnés par :

$$Y_1 = e^{jkd} \quad \text{II.32}$$

$$Y_2 = e^{-jkd} \quad \text{II.33}$$

La trace de la matrice  $M$  est :

$$\text{Tr}(M) = Y_1 + Y_2 = 2\cos(kd) \quad \text{II.34}$$

La loi de dispersion du milieu infini périodique bicouche peut s'écrire :

$$\cos(kd) = \frac{1}{2}\text{Tr}(M) = \cos(k_1d_1)\cos(k_2d_2) - \frac{1}{2}\left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1}\right)\sin(k_1d_1)\sin(k_2d_2) \quad \text{II.35}$$

À l'aide de l'équation (II.35), nous pouvons calculer les courbes de dispersion de milieux stratifiés tels que la structure décrite dans le chapitre III.

Pour un super-réseau 1D, la première zone de Brillouin s'étend pour les vecteurs d'onde  $k$  entre  $-\pi/d$  et  $+\pi/d$ . Compte tenu du terme  $F_2^{-1}F_1$  apparaissant dans l'équation (II.31), nous pouvons maintenant donner une interprétation physique des matrices  $F_i$  :

$$F_2^{-1}F_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_2} & 1 \\ -\frac{1}{Z_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 & -Z_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{Z_1+Z_2}{2Z_2} \begin{bmatrix} 1 & rp \\ rp & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{tp} \begin{bmatrix} 1 & \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} \\ \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} & 1 \end{bmatrix} = M_{12}^t \quad \text{II.36}$$

$$\text{Ou : } rp = \frac{Z_2-Z_1}{Z_1+Z_2} \quad \text{II.37}$$

Est le coefficient de réflexion entre un milieu d'impédance  $Z_1$  et un de l'impédance  $Z_2$ .

$$\text{et : } tp = \frac{2Z_2}{Z_1+Z_2} \quad \text{II.38}$$

Est le coefficient de transmission du même support, il semble donc que  $M_{12}^t$  représente la matrice de transfert via une interface entre le support 1 et le support 2.

### II.4.2.3. Propagation des Amplitudes

On peut aussi relier les amplitudes  $A$  et  $B$  en position  $d$  aux amplitudes  $A$  et  $B$  en position  $0$  avec :

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{d_1^-} = F_1 H_1 \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 \quad \text{II.39}$$

$$\text{et } \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{d_1^+} = \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{d_1^-} \quad \text{II.40}$$

Manent :

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{d_1^+} = F_1 H_1 \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_{d_1^+} = F_2^{-1} \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{d_1^+} \quad \text{II.41}$$

Après propagation à travers la  $Z_2$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{d^+} = \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}_{d^-} = (F_2 H_2)(F_2^{-1} F_1 H_1) \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 \quad \text{II.42}$$

et enfin :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_{d^+} = (F_1^{-1} F_2 H_2)(F_2^{-1} F_1 H_1) \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 = C_1 \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 \quad \text{II.43}$$

Ou nous avons introduit les notations suivantes :

$$C_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{bmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \alpha = (\cos(k_2 d_2) - jS \sin(k_2 d_2)) e^{-jk_2 d_2} \\ \beta = jD_{12} \sin(k_2 d_2) e^{jk_1 d_1} \\ S = \frac{1}{2} \left( \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \\ D_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{Z_1}{Z_2} - \frac{Z_2}{Z_1} \right) \end{cases} \quad \text{II.44}$$

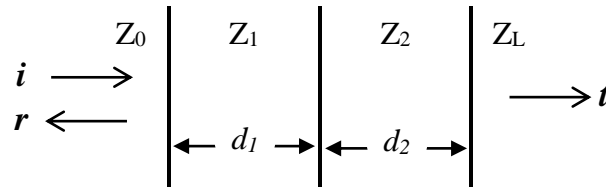
Ainsi, nous avons exprimé les valeurs des amplitudes  $A$  et  $B$  en position  $d$  comme un produit entre une matrice et le vecteur des valeurs initiales de ces amplitudes, on remarque que :

$$\det(C_1) = \alpha\alpha^* - \beta\beta^* = 1 \quad \text{II.45}$$

$$\text{et : } \frac{1}{2} \text{Tr}(C_1) \frac{\alpha + \alpha^*}{2} = \text{Re}(\alpha) = \cos(k_1 d_1) \cos(k_2 d_2) - S \sin(k_1 d_1) \sin(k_2 d_2) = \frac{1}{2} \text{Tr}(M) \quad \text{II.46}$$

#### II.4.2.4. Transmission via une bicouche

Nous étudions maintenant la propagation d'une onde élastique à travers la bicouche décrite sur la figure II.4 avec le formalisme des paragraphes précédents. On veut ici calculer les coefficients de transmission et réflexion à travers une telle structure bicouche.



**Figure II.4 :** Une bicouche 1D avec des impédances  $Z_1$  et  $Z_2$  avec des couches externes d'impédances  $Z_0$  et  $Z_L$ . ( $i$  : incidente,  $r$  : réfléchie et  $t$  : transmise)

Pour  $Z_0$  et  $Z_L$  arbitraires, nous dérivons en utilisant l'équation (II.43) l'ensemble d'équations suivant:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_L = (F_L^{-1} F_1) C_1 (F_1^{-1} F_0) \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 = M \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 \quad \text{II.47}$$

Maintenant, en utilisant le fait qu'aucune onde n'entre dans la bicouche à partir du support de sortie d'impédance  $Z_L$ , c'est-à-dire  $B_L = 0$ , nous obtenir les coefficients de transmission ( $t$ ) et de réflexion ( $r$ ) qui sont donnés par  $t = A_L / A_0$  et  $r = B_0 / A_0$ :

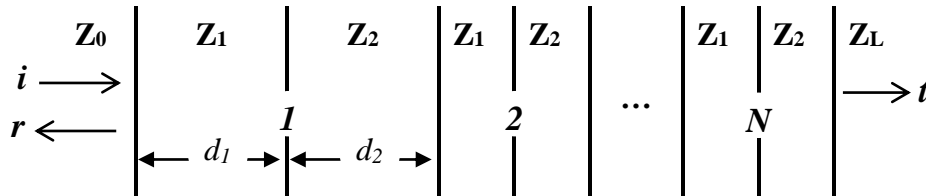
$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix}_0 \quad \text{II.48}$$

En résolvant le système d'équations, nous obtenons :

$$r = M_{21}/M_{22} \quad \text{et} \quad t = \det(M)/M_{22} \quad \text{II.49}$$

#### II.4.2.5. Transmission via N bicouches

Nous étudions maintenant la propagation d'une onde élastique à travers un système composé de N bicouches, comme indiqué sur Figure II.5.



**Figure II.5:** Un système 1D composé de N bicouches.

Pour un système de N bicouches, on peut écrire :

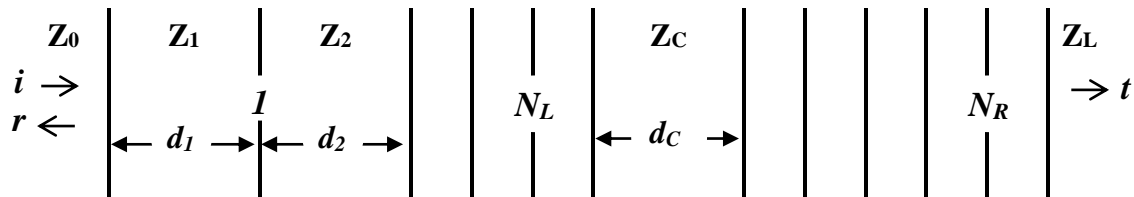
$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_{LN} = C_1 \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_{L(N-1)} = C_1^N \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_0 \quad \text{II.50}$$

Ainsi, en considérant une couche d'entrée d'impédance  $Z_0$  et une couche de sortie d'impédance  $Z_L$ , la transmission est donné par:

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = M^T \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} : M^T = (F_L^{-1} F_1) C_1^N (F_L^{-1} F_0) \quad \text{II.51}$$

#### II.4.2.6. Transmission par N bicouches avec un défaut

Nous étudions maintenant la propagation d'une onde élastique à travers le système suivant composé de N bicouches et d'un défaut central, comme représenté sur la figure II.6



**Figure II.6.** Un système 1D composé de N bicouches et d'un défaut central de largeur  $d_C$  et d'impédance  $Z_C$ .

Dans ce cas la transmission est donnée par :

$$\begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix} = M^T \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad M^T = M^{TR} H_C M^{TL} \quad \text{II.52}$$

$$\text{Avec } \begin{cases} M^{TL} = (F_C^{-1}F_1)C_1^{NL}(F_1^{-1}F_0) \\ M^{TR} = (F_L^{-1}F_2)C_2^{NR}(F_2^{-1}F_C) \\ C_2 = (F_2^{-1}F_1H_1)(F_1^{-1}F_2H_2) \end{cases} \quad \text{II.53}$$

#### II.4.2.7. Transmission à travers N bicouches avec couches quart d'onde

Nous voulons obtenir une expression analytique simple du coefficient de transmission d'une onde à travers N bicouches, avec couches d'épaisseur égale au quart de la longueur d'onde. Cela nous permettra de trouver le lien entre le facteur de qualité du résonateur décrit dans la section II.4.2.6, c'est-à-dire un super-réseau avec un défaut, et le nombre de bicouches et le décalage d'impédance entre les couches de la structure.

Nous présentons d'abord deux résultats préliminaires :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha + \beta & 0 \\ 0 & \alpha - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{II.54}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \\ \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 & \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 \end{bmatrix} \quad \text{II.55}$$

Puisque nous utilisons des couches quart d'onde, nous réécrivons la matrice  $C_1$  de l'équation (II.44) en utilisant :

$$d_1 = \frac{\lambda_1}{4} \text{ et } d_2 = \frac{\lambda_2}{4} \text{ ou équivalent: } k_1 d_1 = k_2 d_2 = \frac{\pi}{2} \quad \text{II.56}$$

Donc, nous obtenons :

$$C_1 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \alpha = -S \\ \beta = -D_{12} \\ S = \frac{1}{2} \left( \frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \\ D_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{Z_1}{Z_2} - \frac{Z_2}{Z_1} \right) \end{cases} \quad \text{II.57}$$

$$\text{dans ce cas : } \det(C_1) = \alpha^2 - \beta^2 = 1 \quad \text{II.58}$$

$$\text{et : } \alpha + \beta = \frac{Z_1}{Z_2}, \alpha - \beta = \frac{Z_2}{Z_1} \quad \text{II.59}$$

En utilisant l'équation II.54, nous obtenons :

$$C_1^N = \begin{bmatrix} \alpha_N & \beta_N \\ \beta_N & \alpha_N \end{bmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} \alpha_N = \frac{(\alpha+\beta)^N + (\alpha-\beta)^N}{2} \\ \beta_N = \frac{(\alpha+\beta)^N - (\alpha-\beta)^N}{2} \end{cases} \quad \text{II.60}$$

nous notons que :

$$\det(C_1^N) = \alpha_N^2 - \beta_N^2 = (\det(C_1))^N = 1 \quad \text{II.61}$$

$$\text{Et : } \alpha_N + \beta_N = (\alpha + \beta)^N, \alpha_N - \beta_N = (\alpha - \beta)^N \quad \text{II.62}$$

Dans le cas général, sans hypothèse sur les valeurs de  $Z_0$  et  $Z_L$ , d'après l'équation (II.51) les coefficients de réflexion et de transmission sont donnés par :

$$\mathbf{r} = -\frac{M_{21}^T}{M_{22}^T}, \text{ et } \mathbf{t} = \frac{\det(M^T)}{M_{22}^T} \quad \text{II.63}$$

en utilisant les expressions II.22, II.23 et II.25 :

$$\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{F}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_1} & \mathbf{1} \\ -\frac{1}{Z_1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_0 & -Z_0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} + \frac{Z_0}{Z_1} & \mathbf{1} - \frac{Z_0}{Z_1} \\ \mathbf{1} - \frac{Z_0}{Z_1} & \mathbf{1} + \frac{Z_0}{Z_1} \end{bmatrix} \quad \text{II.64}$$

Donc, étant donné leurs formes, selon l'équation (II.55),  $C_1^N$  et  $(F_1^{-1}F_0)$  font la navette.

Donc:

$$\mathbf{M}^T = (\mathbf{F}_L^{-1}\mathbf{F}_1)\mathbf{C}_1^N(\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{F}_0) = (\mathbf{F}_L^{-1}\mathbf{F}_1)(\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{F}_0)\mathbf{C}_1^N = (\mathbf{F}_L^{-1}\mathbf{F}_0)\mathbf{C}_1^N \quad \text{II.65}$$

Et nous obtenons :

$$\mathbf{F}_L^{-1}\mathbf{F}_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_L} & \mathbf{1} \\ -\frac{1}{Z_L} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_0 & -Z_0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} + \frac{Z_0}{Z_L} & \mathbf{1} - \frac{Z_0}{Z_L} \\ \mathbf{1} - \frac{Z_0}{Z_L} & \mathbf{1} + \frac{Z_0}{Z_L} \end{bmatrix} \quad \text{II.66}$$

conduisant à l'expression suivante de la matrice de transmission  $M^T$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^T &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{1} + \frac{Z_0}{Z_L} & \mathbf{1} - \frac{Z_0}{Z_L} \\ \mathbf{1} - \frac{Z_0}{Z_L} & \mathbf{1} + \frac{Z_0}{Z_L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_N & \beta_N \\ \beta_N & \alpha_N \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha_N + \beta_N + (\alpha_N - \beta_N) \frac{Z_0}{Z_L} & \alpha_N + \beta_N + (\beta_N - \alpha_N) \frac{Z_0}{Z_L} \\ \alpha_N + \beta_N + (\beta_N - \alpha_N) \frac{Z_0}{Z_L} & \alpha_N + \beta_N + (\alpha_N - \beta_N) \frac{Z_0}{Z_L} \end{bmatrix} \quad \text{II.67} \end{aligned}$$

En introduisant ces expressions dans l'équation (II.63), le coefficient de transmission devient:

$$\mathbf{t} = \frac{\det M^T}{M_{22}^T} \text{ où } \det M^T = \det F_L^{-1} \det F_0 \det C_1^N = \frac{Z_0}{Z_L} \text{ et } M_{22}^T = \frac{1}{2} \left( (n)^N + \left( \frac{1}{n} \right)^N \frac{Z_0}{Z_L} \right) \quad \text{II.68}$$

avec l'introduit les notations suivantes:

$$\alpha + \beta = \frac{Z_1}{Z_2} = n \text{ et } \alpha - \beta = \frac{Z_2}{Z_1} = \frac{1}{n} \quad \text{II.69}$$

Alors l'expression de  $\mathbf{t}$  sera :

$$\mathbf{t} = \frac{Z_0}{Z_L} \frac{2}{(n)^N + \left( \frac{1}{n} \right)^N \frac{Z_0}{Z_L}} = \frac{2Z_0}{Z_L n^N + \frac{Z_0}{n^N}} = \frac{2n^N}{\frac{Z_L}{Z_0} n^{2N} + 1} \quad \text{II.70}$$

Le coefficient de transmission en énergie peut s'écrire :

$$T = \frac{Z_L}{Z_0} t^2 = \frac{Z_L}{Z_0} \frac{4n^{2N}}{\left(\frac{Z_L}{Z_0} n^{2N+1} + 1\right)^2} \quad \text{II.71}$$

On peut noter que dans le cas particulier où  $Z_0 = Z_L$ , lorsqu'on regarde l'énergie, le coefficient de transmission est:

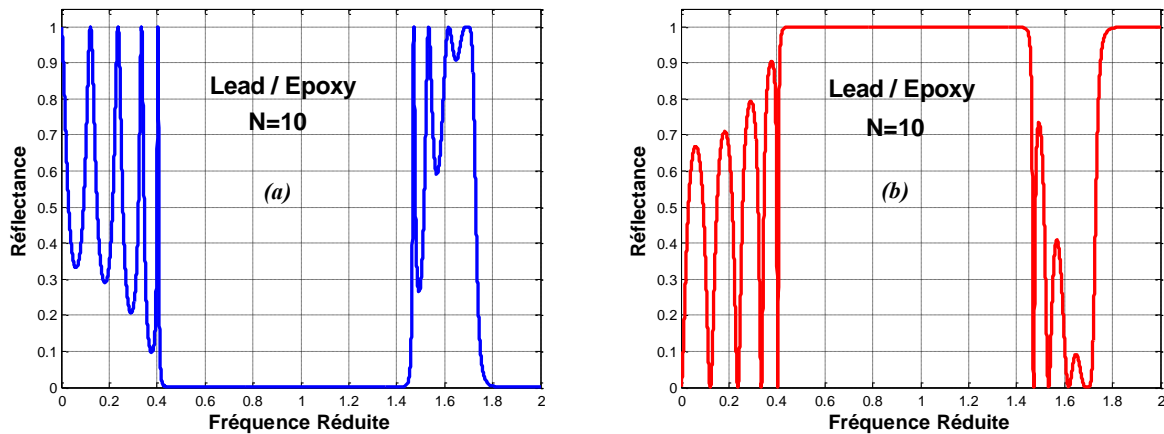
$$T = t^2 = \frac{4n^{2N}}{(1+n^{2N})^2} \quad \text{II.72}$$

Où N est le nombre de bicouches, donc 2N est le nombre des couches.

Maintenant, si l'on considère le cas où  $Z_0 = Z_2$  et  $Z_L = Z_1$  alors le coefficient de transmission en énergie devient:

$$T = \frac{4n^{2N+1}}{(1+n^{2N+1})^2} \quad \text{II.73}$$

La figure II.7 représente un exemple pour le calcul du spectre de transmission et de réflexion en fonction la fréquence normalisée pour un cristal phononique 1D composé de 5 bicouches de (lead/époxy). On peut observer que le comportement du cristal vis à vis la propagation des ondes acoustiques à incidence normale provoque l'apparition des bandes interdites.



**Figure II.7:** Coefficient de transmission et réflexion en fonction la fréquence normalisé pour 1D-PnC, (Lead/Epoxy)<sup>5</sup>. (a) Courbe de transmission. (b) courbe de réflexion. Une bande interdite apparaît entre 0.40 et ~1.45.

### II.4.3. Avantages et inconvénients du TMM

La méthode de matrice de transfert a de nombreux avantages. C'est un algorithme très utile, très approprié pour les calculs de réflectivité et de transmission de structures multicouches. Cette méthode peut être appliquée aux matériaux sans pertes, avec pertes et aux matériaux absorbants.

La méthode de matrice de transfert peut également gérer n'importe quel nombre de couches dans une structure multicouche. De plus, ces couches peuvent être ordonnées de n'importe quelle manière et il n'est pas nécessaire qu'elles soient périodiques. Même si elles sont périodiques, la cellule unitaire répétée ne doit pas être composée de deux couches seulement, mais d'un nombre quelconque de couches. Il n'y a également aucune restriction sur l'épaisseur de n'importe quelle couche. L'épaisseur et les paramètres physiques de chaque couche peuvent être définis indépendamment. Cela rend la méthode TMM la plus appropriée pour la modélisation des structures formées par différentes multicouches périodiques. La méthode de matrice de transfert permet aussi de gérer les structures présentant un contraste élevé entre les couches.

La méthode de matrice de transfert a également quelques inconvénients. Par exemple, il suppose que le plan perpendiculaire à la direction de propagation est infini, ce qui signifie que chaque couche dans une structure multicouche s'étend indéfiniment dans ses deux dimensions. Bien sûr, c'est irréaliste, donc les couches qui sont modélisées doivent être assez larges pour éviter les erreurs de cette hypothèse. La méthode de matrice de transfert calcule le champ dans toute la structure en le propageant d'une couche à l'autre par des relations matricielles.

Un autre inconvénient du TMM est qu'elle est limitée à la propagation d'onde continue et ne peut pas gérer la propagation d'impulsions. Pour modéliser les impulsions, la méthode de matrice de transfert doit être combinée avec la transformée de Fourier [35].

## CONCLUSION

Les méthodes numériques d'analyse et de simulation telles que la méthode FDTD, FEM, PWE et TMM sont devenues des techniques incontournables pour simuler le comportement des structures périodiques notamment les cristaux phononiques vis-à-vis la propagation des ondes élastiques dans ces cristaux. Ainsi, à partir des équations de mouvement élastique, elles ont permis aux chercheurs d'accéder aux calculs des courbes de dispersion de ces systèmes.

Chacune de ces méthodes numériques d'analyse, ayant une formulation différente, présente des avantages et des inconvénients, et est plus ou moins adaptée à l'étude de tel ou tel autre système. Dans ce travail, notre intérêt est basé sur la méthode des matrices de transfert TMM puisqu'elle représente la méthode la plus adaptée aux structures multicouches. Elle nous permet de calculer les coefficients de transmission et de réflexions lors de la propagation d'une onde acoustique / élastique à incidence normale.

# **Chapitre III**

## **Résultats de simulation et discussions**

## INTRODUCTION

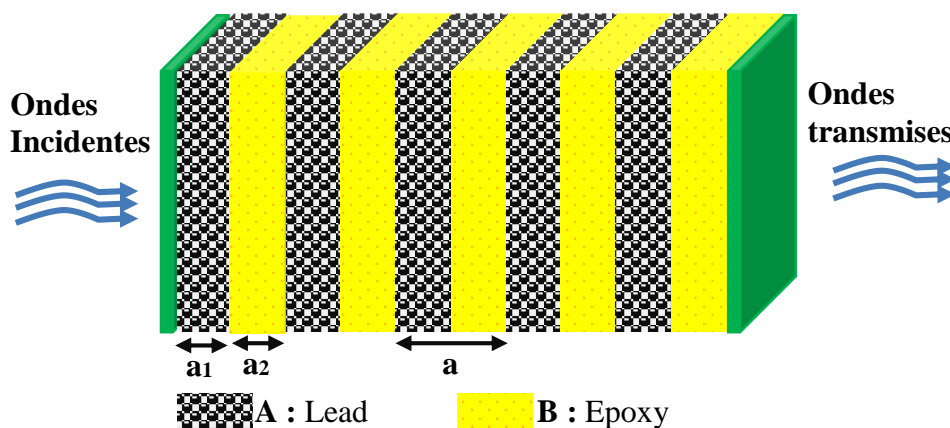
Au cours de ce chapitre on va étudier en premier temps l'évolution de la bande interdite pour un cristal phononique 1D parfait constitué de multicouche de type solide/solide. C'est à propos de l'alternance de N couches de lead et N couches époxyde afin de comprendre le comportement des ondes acoustiques ou élastiques propageant dans ces cristaux.

Pour cela, on va utiliser code concernant les éléments de la méthode matrices de transfert des (TMM) écrit en Matlab afin de comprendre les conditions d'ouverture des bandes interdites phononiques. En second temps, notre intérêt sera porté sur l'étude d'un cristal phononique unidimensionnel avec défaut. L'étude de l'influence des différents paramètres physiques (la masse volumique et la vitesse de propagation) et les géométriques tels que le facteur de remplissage et le nombre de couches sur les variations du spectre de transmission.

### III.1. STRUCTURE ETUDIEE

Dans cette section, nous allons examiner la propagation des ondes élastiques longitudinales à incidence normal à travers un cristal phononique unidimensionnel (1D-PnC) par la méthode de la matrice de transfert (TMM).

La figure III.1 illustre la structure proposée avec son unité élémentaire. La structure est un cristal phononique 1D fini composé de deux matériaux de propriétés élastiques différentes ; le matériau A est le Plomb (Lead) et le matériau B est l'Epoxy. Le cristal est formé par l'empilement de N bicouches (**Plomb/Epoxy**)<sup>N</sup>. La période du réseau est  $a=a_1+a_2$ .



**Figure III.1:** Représentation schématique du cristal phononique parfait (PnC-1D) composé du Plomb et de l'Epoxy.

Où :  $a_1$  : l'épaisseur de la première couche Plomb (lead).

$a_2$  : l'épaisseur de la seconde couche d'Epoxy.

Les propriétés acoustiques des matériaux de l'Epoxyde et du Plomb constituant le cristal phononique unidimensionnel sont illustrées par le tableau III.1.

Matériau	Plomb	Epoxyde	Nylon
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	11400	1180	1110
Vitesse transversale $C_T$ (m/s)	800	1160	1100
Vitesse longitudinal $C_L$ (m/s)	1960	2535	2600

**Tableau III.1:** Masse volumiques et vitesses de propagation des matériaux constituant le cristal phononique unidimensionnel Plomb/Epoxyde [47].

### III.2. SPECTRE DE REFLEXION ET DE TRANSMISSION

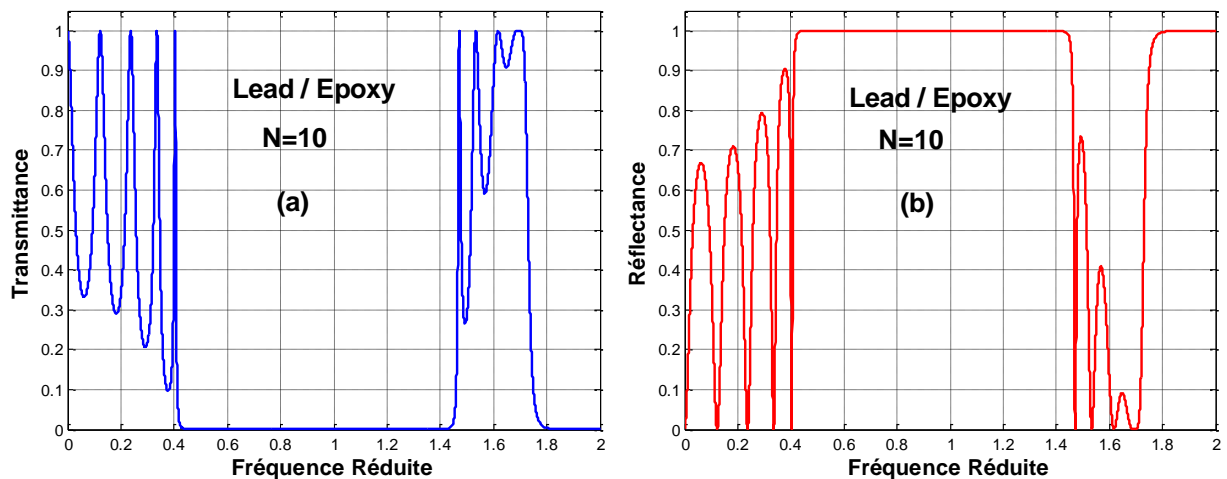
Pour obtenir les coefficients de transmission et de réflexion, on va utiliser un code écrit en Matlab de la méthode des matrices de transfert (TMM). Dans le tableau (III.2) nous avons reporté les paramètres géométriques et élastiques de la structure multicouche (Plomb/Epoxy)<sup>N</sup>.

Nombre de couches (N)	10
Densité de la couche A (kg/m <sup>3</sup> )	11400
Densité de la couche B (kg/m <sup>3</sup> )	1180
Vitesse de propagation ( $C_L$ ) dans la couche A (m/s)	1960
Vitesse de propagation ( $C_L$ ) dans la couche B (m/s)	2535
l'épaisseur de la couche A (cm)	0.50
l'épaisseur de la couche B (cm)	0.50

**Tableau III. 2:** Présentation des différents paramètres géométriques et physiques du cristal phononique parfait (PnC-1D).

Les résultats de simulation que nous avons obtenus sont représentés sur les figures III.2 (a) et (b). Les spectres représentent respectivement le coefficient de transmission et le coefficient de réflexion en fonction de la fréquence réduite pour la propagation d'une onde longitudinale à travers la structure multicouche décrite au paragraphe précédent.

D'après les deux spectres, nous remarquons clairement que le cristal phononique considéré présente une bande interdite phononique dont laquelle le taux de transmission égale à 0 sur la gamme des fréquences réduites comprise entre 0.40 et 1.45.



**Figure III.2:** Coefficients de transmission et de réflexion des ondes longitudinale en fonction de fréquences réduites pour un cristal 1D : (a) Transmission, (b) Réflexion.

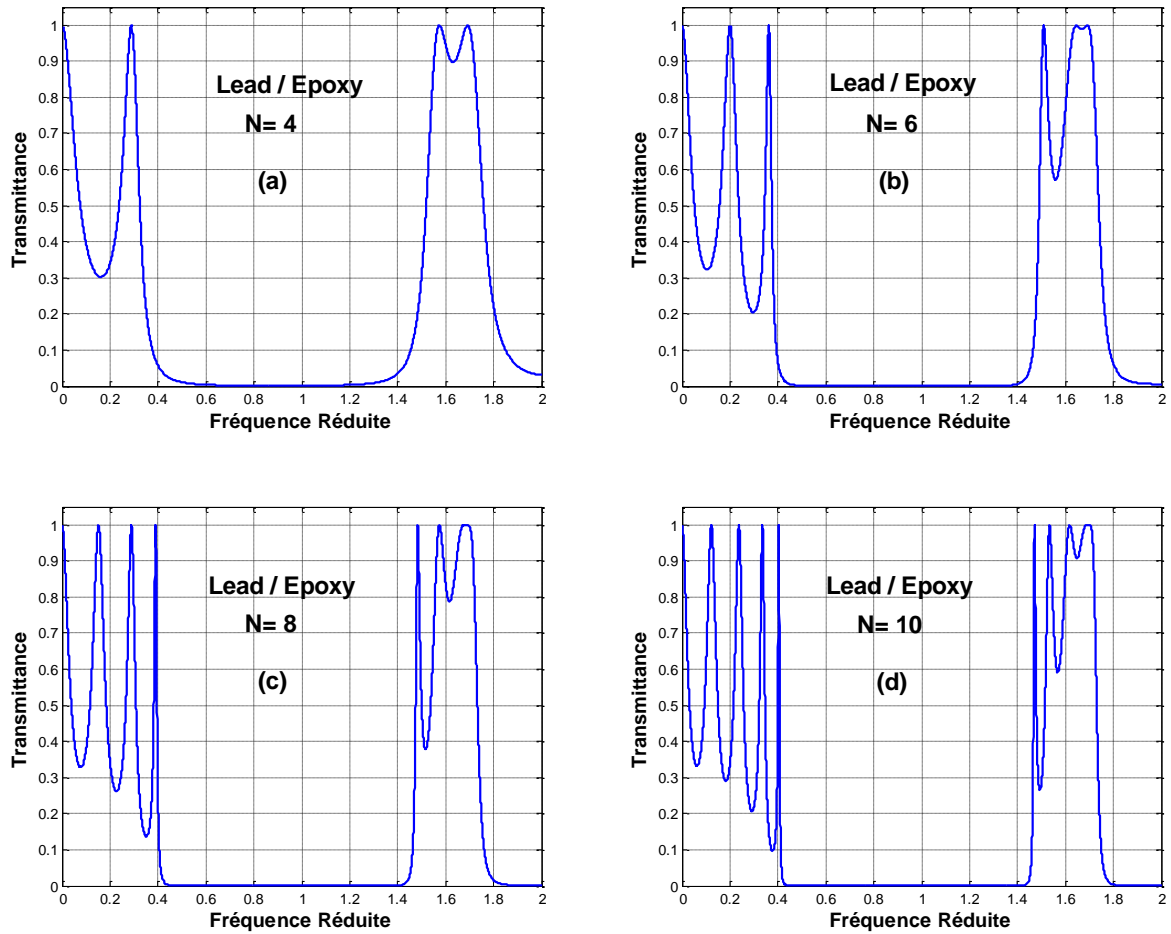
### III.3. EVOLUTION DE LA BANDE INTERDITE PHONONIQUE

L'étude de la bande interdite présente une phase importante et indispensable avant de passer à la conception du capteur à cristal phononique. Pour cela, dans la section suivante, on va analyser et étudier l'influence de certains paramètres géométriques et physiques sur les variations de la bande interdite ouverte afin d'optimiser ces paramètres.

#### III.3.1. Influence du nombre de couches

Pour voir l'influence du nombre de couches sur la location et la largeur de la bande interdite phononique. Nous avons fixé tout d'abord les épaisseurs de la couche du plomb et celle de la couche de l'Epoxy, les propriétés physiques de la structure proposée sont aussi fixées. Ensuite, on fait changer uniquement le nombre de bicouches (N). En utilisant le même code de la méthode des matrices de transfert TMM, nous allons effectuer une série de simulations.

Les figure III.3 (a), (b), (c) et (d) montrent quatre coefficients de transmission en fonction le nombre de cellules élémentaires (de bi-couches) utilisées dans la construction du cristal phononique 1D, ils sont obtenus pour N=4, N=6, N=8 et N=10 respectivement.



**Figure III.3:** Spectre de transmission en fonction le nombre de couches ;

(a) pour  $N=4$ , (b) pour  $N=6$ , (c) pour  $N=8$ , (d) pour  $N=10$  couches.

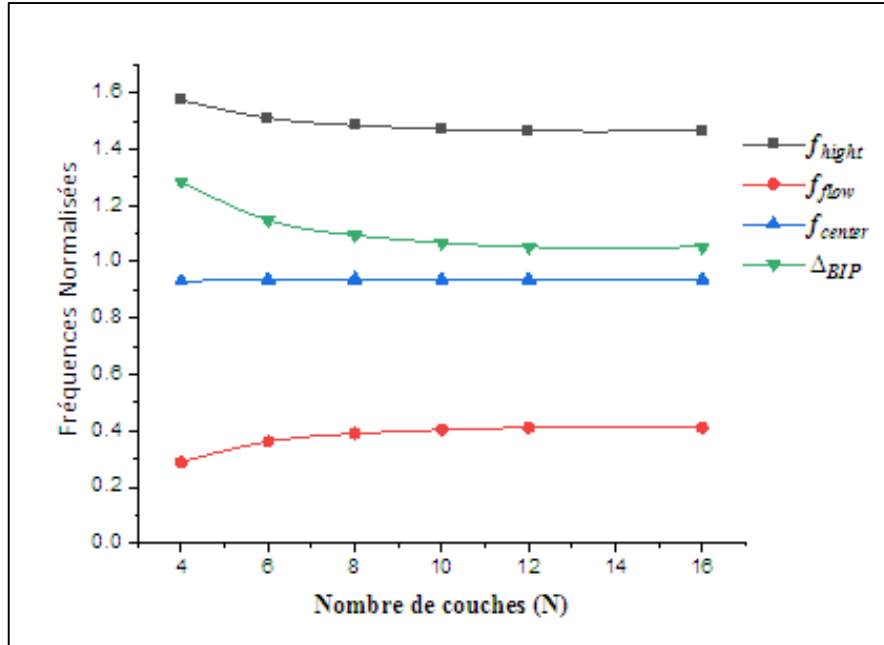
D'après les résultats obtenus, il est clair que plus le nombre des cellules élémentaires ( $N$ ) est élevé, plus la bande ouverte est plus raide. D'autre part, le nombre de pics au voisinage de la bande phononique devient important en nombre et en taux de transmission.

Le tableau III.3 donne les résultats de simulation qu'on a obtenue en utilisant le même code de la méthode TMM.

Nombre de couches	4	6	8	10	12
$f_{\text{high}}$	1,5740	1,5100	1,4840	1,4710	1,4640
$f_{\text{low}}$	0,2890	0,3618	0,3902	0,4036	0,4110
$f_{\text{center}}$	0,9315	0,9359	0,9371	0,9373	0,9375
$\Delta BIP$	1,2850	1,1482	1,0938	1,0674	1,0530

**Tableau III. 3:** Paramètres de fréquence entre les nombres d'inclusion des deux matériaux A et B du cristal et largeur de la bande interdite phononique.

La figure III.4 illustre l'évolution de la fréquence centrale de la bande interdite phononique (courbe en bleu) ainsi que la variation de la largeur de bande ouverte (courbe en verte) en fonction de nombre couches A et B. On constate clairement lorsque le nombre de couche devient supérieur à dix la largeur de la bande reste constante ce qui explique notre choix de  $N=10$  dans les paragraphes suivants.



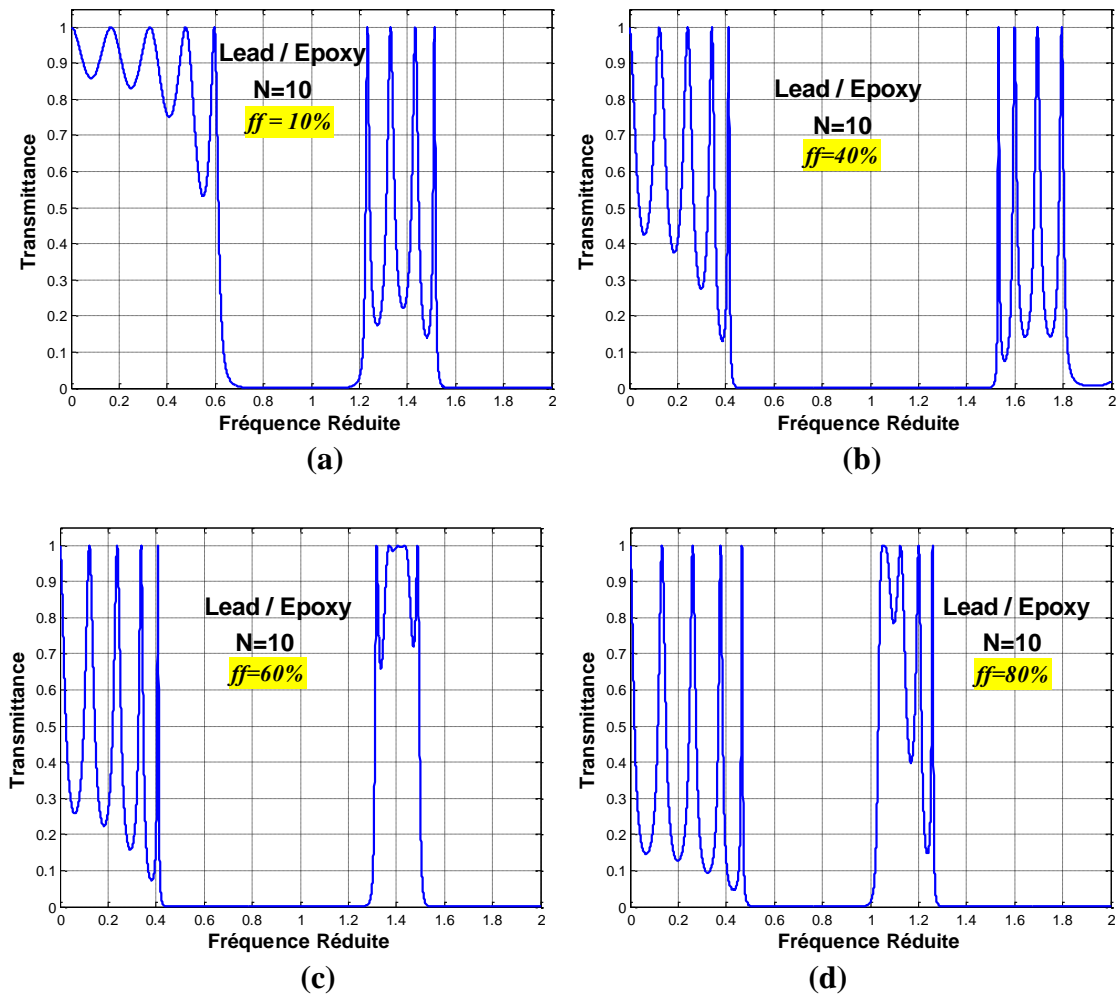
**Figure III. 4 :** Variations des propriétés de la bande phononique en fonction le nombre de couches Plomb/Epoxy.

### III.3.2. Influence du facteur de remplissage

Il est intéressant d'étudier l'influence des paramètres géométriques sur les variations de la bande interdite phononique et notamment le facteur de remplissage, et puisque nous étudions un cristal unidimensionnel donc le facteur de remplissage est défini comme étant le rapport entre l'épaisseur de l'inclusion (Lead) sur le période ; l'épaisseur de la cellule élémentaire est :  $a=a_1+a_2=1$  cm. Le facteur de remplissage est donné par :

$$ff = a_1 / (a_1 + a_2)$$

Dans ce paragraphe, on a fixé les paramètres élastiques et la période du cristal. Cette dernière est un cristal phononique 1D composé de dix couches ( $N=10$ ) alternées [Plomb/Epoxyde]<sup>5</sup>.



**Figure III. 5:** Spectre de transmission pour une onde longitudinale à incidence normale: (a) pour  $ff=10\%$ , (b) pour  $ff=40\%$ , (c) Pour  $ff=60\%$  et (d) pour  $ff=80\%$ .

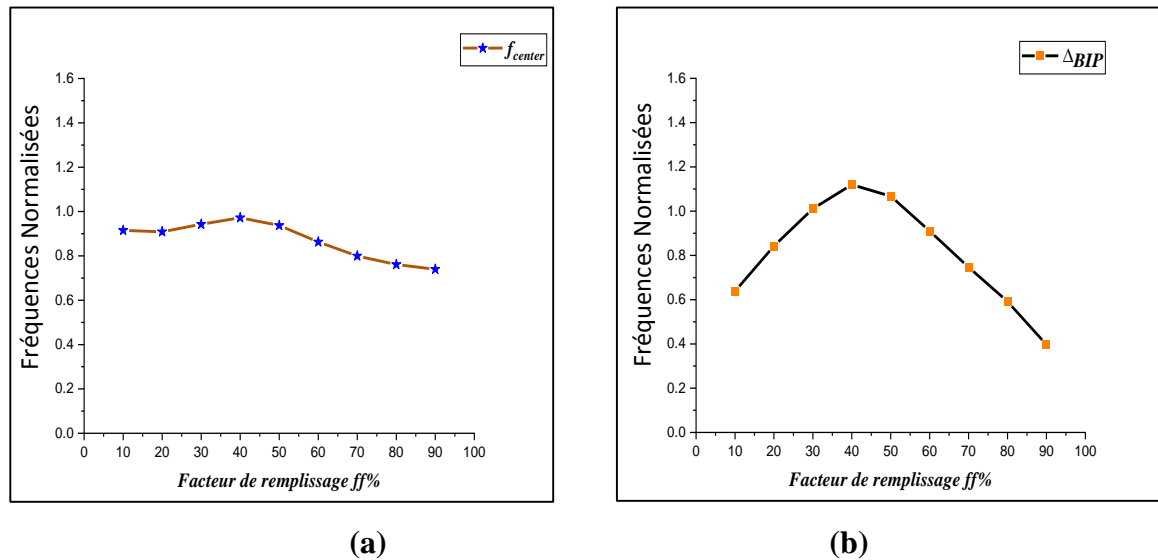
Afin d'étudier l'influence du facteur de remplissage sur les caractéristiques des bandes ouvertes, nous avons effectué une série de simulations pour différentes valeurs du facteur de remplissage de 10% à 90%.

Le tableau III.4 reporte les différentes valeurs de simulation qu'on a obtenues en utilisant la méthode de la matrice de transfert TMM.

$ff\%$	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$f_{\text{high}}$	1,2340	1,3300	1,4480	1,5320	1,4710	1,3180	1,1730	1,0570	0,9380
$f_{\text{low}}$	0,5960	0,4876	0,4370	0,4124	0,4034	0,4078	0,4264	0,4654	0,5416
$f_{\text{center}}$	0,9150	0,9088	0,9425	0,9722	0,9372	0,8629	0,7997	0,7612	0,7398
$\Delta BIP$	0,6380	0,8424	1,0110	1,1196	1,0676	0,9102	0,7466	0,5916	0,3964

**Tableau III.4:** Résultats de simulation pour différentes valeurs du facteur de remplissage obtenus par la méthode TMM.

La figure III.6 (a) montre les évolutions la fréquence centrale en fonction le facteur de remplissage ce qui nous permet de déterminer la position de la bande ouverte. Alors que sur la figure III.6. (b) nous avons représenté les variations de la largeur de la première bande interdite phononique en fonction le facteur de remplissage. Il est clair que pour  $ff=40\%$  on obtient une large bande interdite autour d'une fréquence centrale normalisée de pulsation  $\Omega=wa/C_{t(B)}$  ;  $c$ 'est la fréquence correspondante à la propagation de l'onde longitudinale dans la couche de l'Epoxy.



**Figure III.6:** (a) Variations de la largeur de la bande en fonction  $ff$  (%). (b) Variation de la fréquence centrale de la bande phononique en fonction  $ff$  (%).

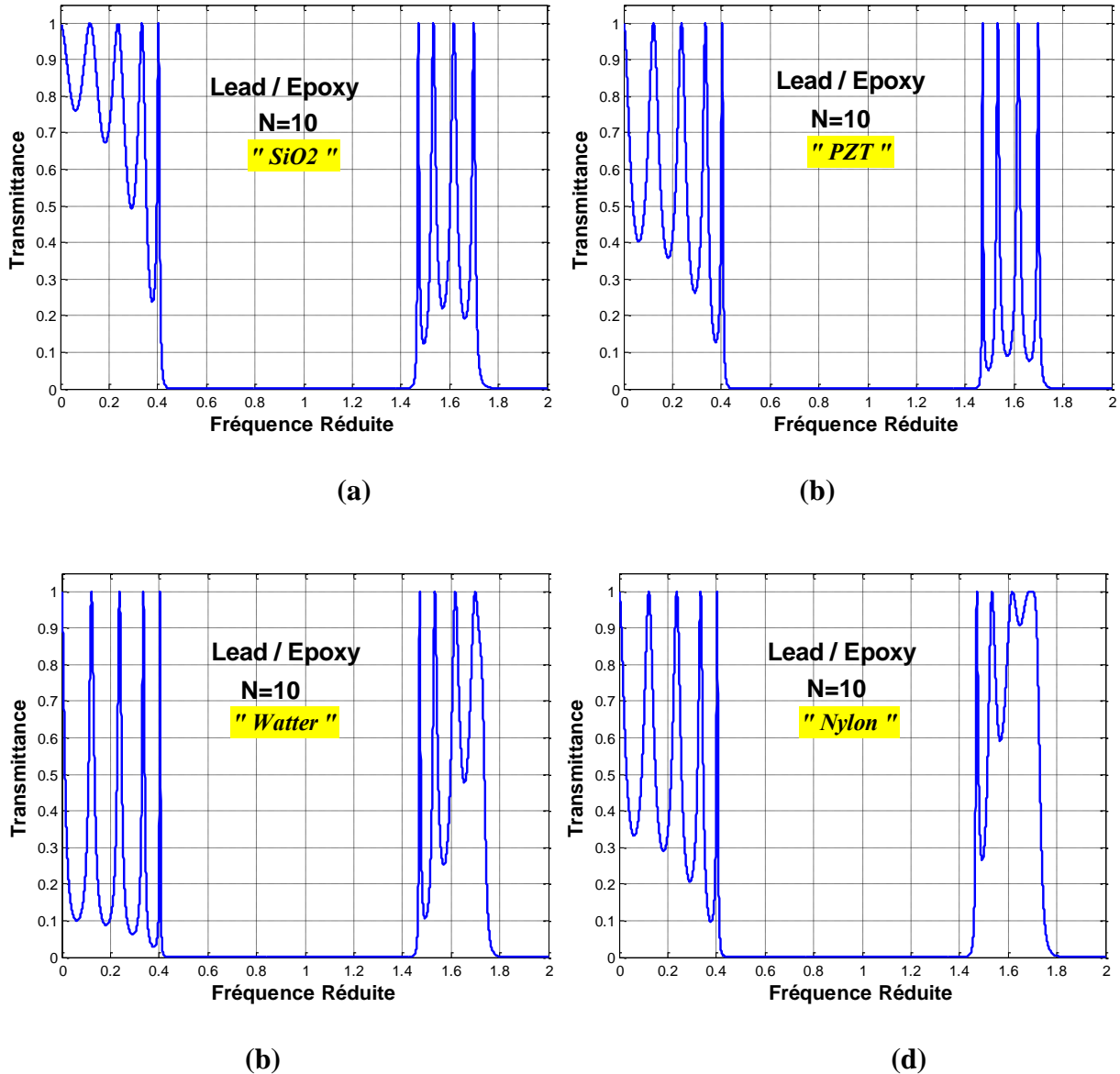
### III.3.3. L'effet du matériau de couverture

Dans ce paragraphe, nous sommes intéressés à l'étude de l'influence de l'impédance acoustique du couverture sur la propagation des ondes acoustiques longitudinales à incidence normal à travers la structure proposée [Matériau de couverture/(plomb/Epoxy)<sup>5</sup>/Matériau de couverture] sur les caractéristiques de bandes ouvertes. Les simulations sont effectuées par la méthode TMM. Le tableau III.5 illustre les propriétés physiques des différents matériaux de couverture utilisés : Nylon, SiO<sub>2</sub>, PZT et Water.

Matériau	Nylon	SiO <sub>2</sub>	PZT	Water
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1110	2600	7500	998
Vitesse transversale $C_T$ (m/s)	1100	3370	...	0
Vitesse longitudinal $C_L$ (m/s)	2600	5840	3330	1483

**Tableau III.5 :** Paramètres physique des matériaux de couverture.

Sur les figures III.7 (a), (b), (c) et (d), nous avons reportés les coefficients de transmission en fonction de la fréquence pour quatre matériaux de couverture : Le Nylon, le SiO<sub>2</sub>, le PZT et l'eau.



**Figure III.7 :** Spectre de transmission en fonction de fréquence réduite pour une onde acoustique longitudinale pour différents matériaux de couverture.

Nous observons que plus le matériau de couverture possède une impédance acoustique élevée, le nombre de pics transmis dans la bande passante aux voisinages de la bande interdite phononique est important. D'autre part, le taux de transmission des pics transmis diminue en fonction l'impédance acoustique. Par conséquent, le comportement des ondes aux bords de la bande interdite peut être utilisé pour détecter les propriétés des matériaux de couverture.

### III.4. APPLICATIONS DU CAPTEURS PHONONIQUE 1D DANS LE DOMAINE DE DETECTION

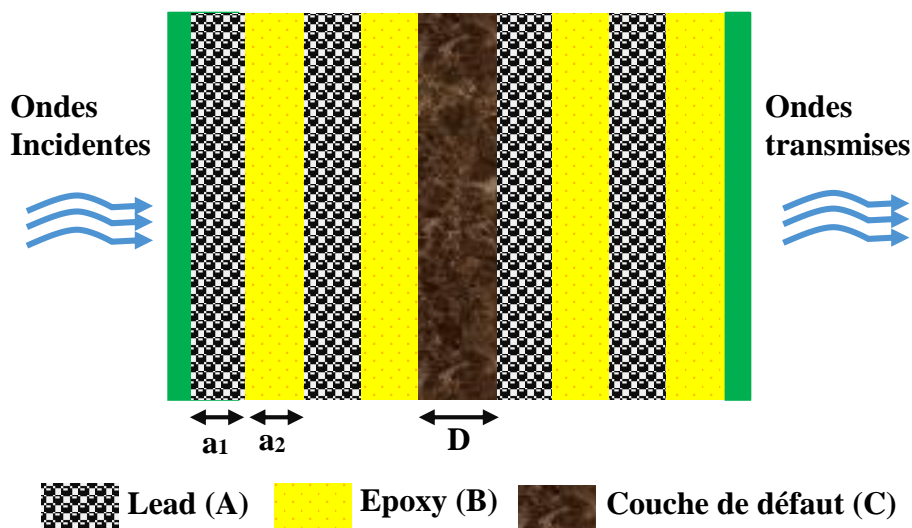
Les cristaux phononiques, sont présentés comme une nouvelle plateforme dans la détection des propriétés acoustiques des liquides. La faible taille des cavités nécessaire à la détection est un atout sachant que, dans de nombreuses situations, la quantité de liquide à tester est extrêmement restreinte.

Afin de tester l'efficacité de notre système nous avons rempli la couche centrale du cristal phononique par des liquides à différentes propriétés acoustiques.

#### III.4.1. Présentation de la structure

Nous nous intéressons à la transmission à travers un cristal 1D formé par empilement périodique de 8 couches de deux matériaux le plomb (couche A en gris hachurée) et l'Epoxy (couche B en jaune). Les deux couches ont les épaisseurs  $a_1$  et  $a_2$  respectivement. Le matériau de couverture est le Nylon (couche en verte).

Cette structure est soumise à une onde acoustique longitudinale à incidence normale, au milieu de la structure périodique est insérée la couche de défaut C (un liquide) de largeur D, la structure étudiée est schématisé sur la figure III.8.



**Figure III.8:** Représentation schématique d'un cristal phononique 1D avec défaut au centre de largeur D.

#### III.4.3. Application à la détection d'un liquide

Les structures phononiques multicouches présentent une nouvelle plateforme dans le domaine de détection. Dans cette section, nous allons utiliser la structure proposée  $[\text{Lead/Epoxy}]^2/\text{Défaut}/(\text{Lead/Epoxy})^2$  pour détecter les liquides.

Le tableau III.6 montre les conditions de simulation avec les valeurs des propriétés géométriques et physiques pour chaque couche de la structure périodique considérée : la couche du plomb, l'Epoxy et la couche de couverture.

Matériau	Nylon	Lead	Epoxy
Masse volumique $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	1110	11400	1180
Vitesse transversale $C_T$ (m/s)	1100	800	1160
Vitesse longitudinal $C_L$ (m/s)	2600	1960	2535
Epaisseur (cm)		0.50	0.50

**Tableau III.6 :** Paramètres géométriques et physiques des matériaux utilisés dans la structure du cristal.

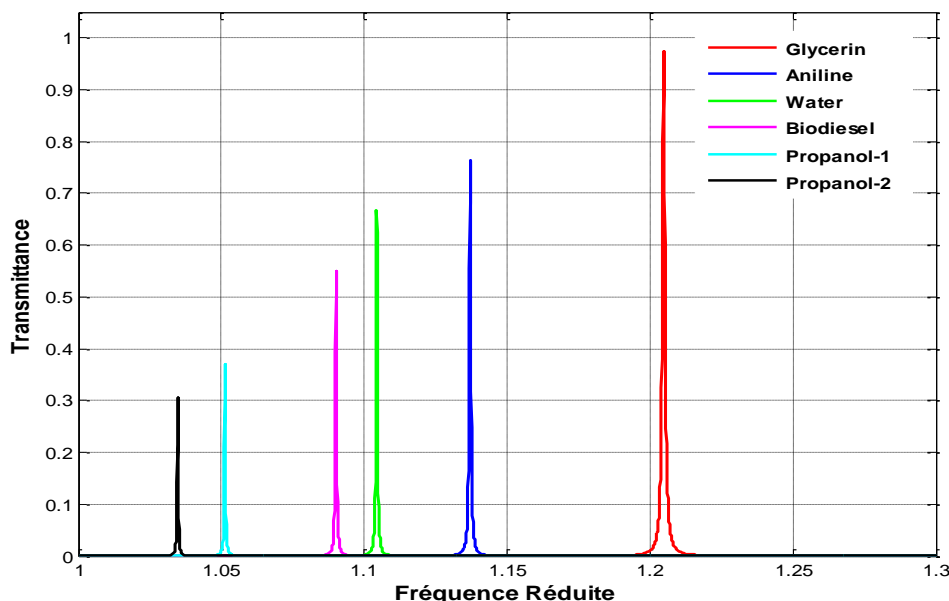
Le tableau III.7 résume les valeurs des propriétés physiques pour chaque liquide injecté dans la couche du défaut telles que la densité et la vitesse de propagation longitudinale.

Matériaux	Densité (kg/m <sup>3</sup> )	Vitesse acoustique longitudinale $c_l$ (m/s)	D (cm)
<b>Glycérine</b>	1259	1920	0.25
<b>Aniline</b>	1021.7	1640	0.25
<b>Water</b>	998	1483	0.25
<b>Biodiesel</b>	890	1425	0.25
<b>1-Propanol</b>	804	1220	0.25
<b>2-Propanol</b>	777	1126	0.25

**Tableau III.7 :** Paramètres géométriques et physiques des liquides utilisés comme un défaut avec  $D=0.25$  cm [36].

Sur la figure III.9, nous avons reporté les résultats de simulation obtenus en utilisant le code de la méthode TMM écrit par MATLAB. Il est clair l'existence d'un pic de transmission importante pour chaque liquide injecté dans le défaut.

D'après les résultats, il est clair que l'insertion d'une couche de liquide au centre de structure provoque l'apparition d'un mode de propagation dû au défaut, ce mode est représenté par un pic transmise d'ont le taux de transmission change avec la nature de liquide utilisé.



**Figure III.9:** Spectre de transmission en fonction de la fréquence réduite pour une onde longitudinale d'un Cristal Phononique 1D Lead/Epoxy<sup>2</sup>/Défaut/(Lead/Epoxy)<sup>2</sup>.

#### III.4.2. Application à la détection de la largeur de défaut

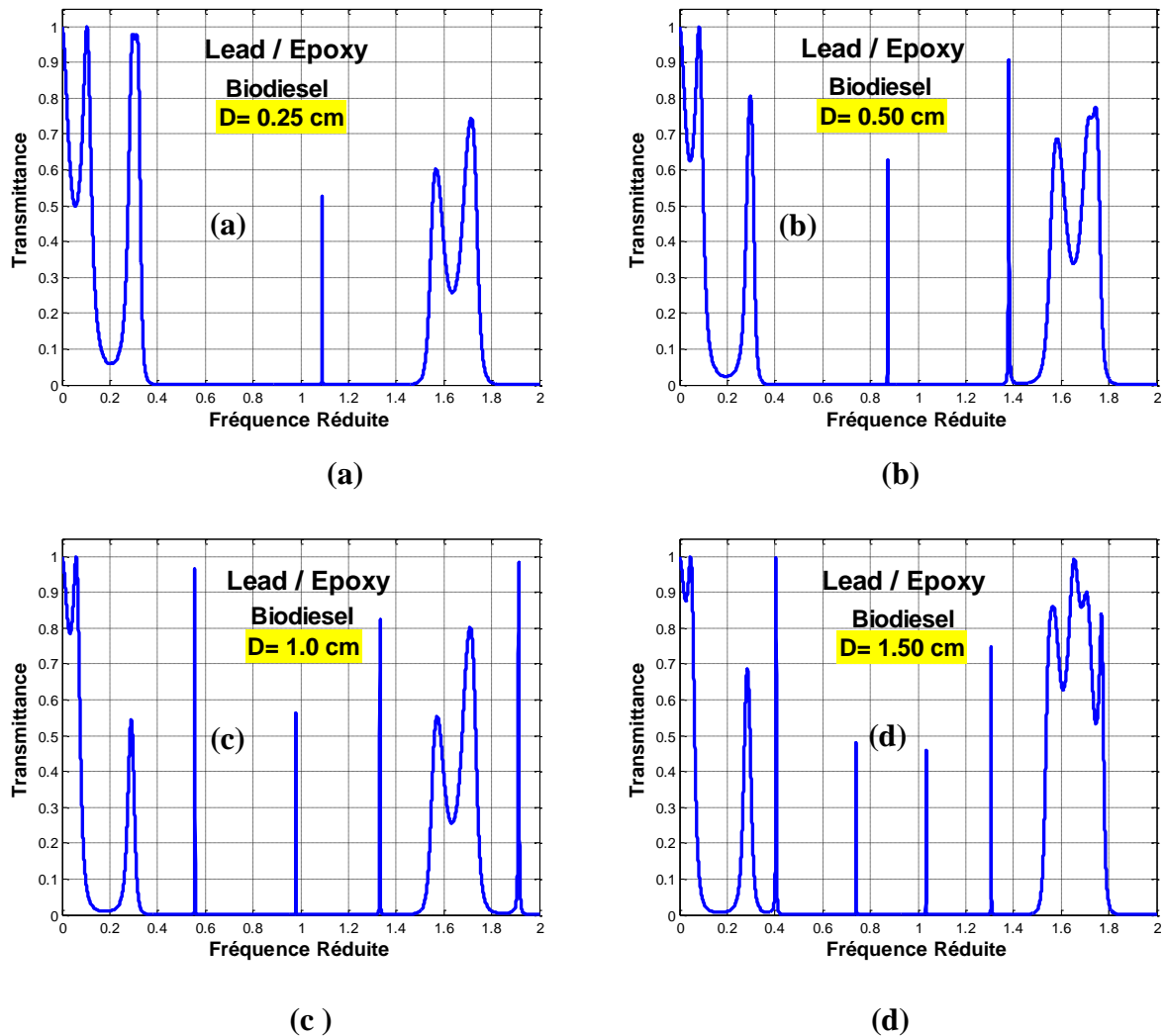
Dans ce qui suit, nous allons utiliser le Biodiesel comme un défaut, et nous étudierons l'effet de la largeur de la couche de liquide insérée au milieu de notre structure sur le spectre de transmission d'une onde longitudinale à incidence normale qui se propage à travers le cristal (Lead/Epoxy)<sup>2</sup>/Défaut/(Lead/Epoxy)<sup>2</sup>.

Dans le tableau III.8, nous avons reporté le taux de transmission et la fréquence de résonance du mode de défaut pour différentes valeurs de l'épaisseur de la couche du défaut.

D (cm)	Nombres de modes	Taux de transmission	Fréquence de résonance Réduite
0.25	1	0.5267	1.0902
		0.6270	0.8716
0.50	2	0.9062	1.3804
		0.9662	0.5572
		0.5631	0.9784
1.00	3	0.8250	1.3320
		0.9960	0.4048
		0.4804	0.7412
		0.4602	1.0328
1.50	4	0.7481	1.3072

**Tableau III.8 :** Influence de la largeur de la couche de défaut sur la fréquence de résonance et le taux de transmission.

La figure III.10 représente les spectres de transmission pour quatre valeurs de la largeur du défaut (pour  $D=0.25$  cm,  $D=0.5$  cm,  $D=1.0$  cm et  $D=1.5$  cm).



**Figure III.10 :** coefficient de transmission en fonction de fréquence dans le cas de CnP 1D pour (a) pour  $D= 0.25$  cm, (b) pour  $D=0.50$  cm, (c) pour  $D=1.00$  cm et (d) pour  $D=1.50$  cm.

Les spectres de transmission obtenus montrent l'effet de variation de la largeur de la couche défectueuse remplie par le Biodiesel, il est clair que chaque spectre présente un pic ou plusieurs pics à des fréquences de résonances et taux de transmissions différents. Plus la couche du défaut est large, le nombre de pics transmis augmentent.

### III.4.4. Application à la détection de la pression

Maintenant nous allons étudier la détection de cristal phononique 1D, lorsqu'il est sous pression. Le tableau III.9 montre les paramètres physiques de Biodiesel selon les valeurs des pressions appliquées.

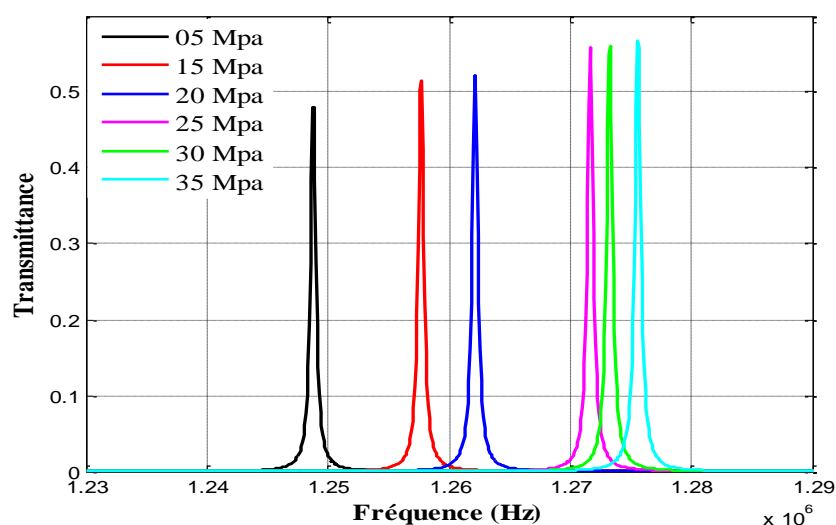
Pression (Mpa)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )	$C_i$ (m/s)
05	872	1355
15	879	1395
20	881	1415
25	884	1458
30	886	1465
35	889	1475

**Tableau III.9 :** Paramètres physiques de biodiesel selon la pression appliquée [36].

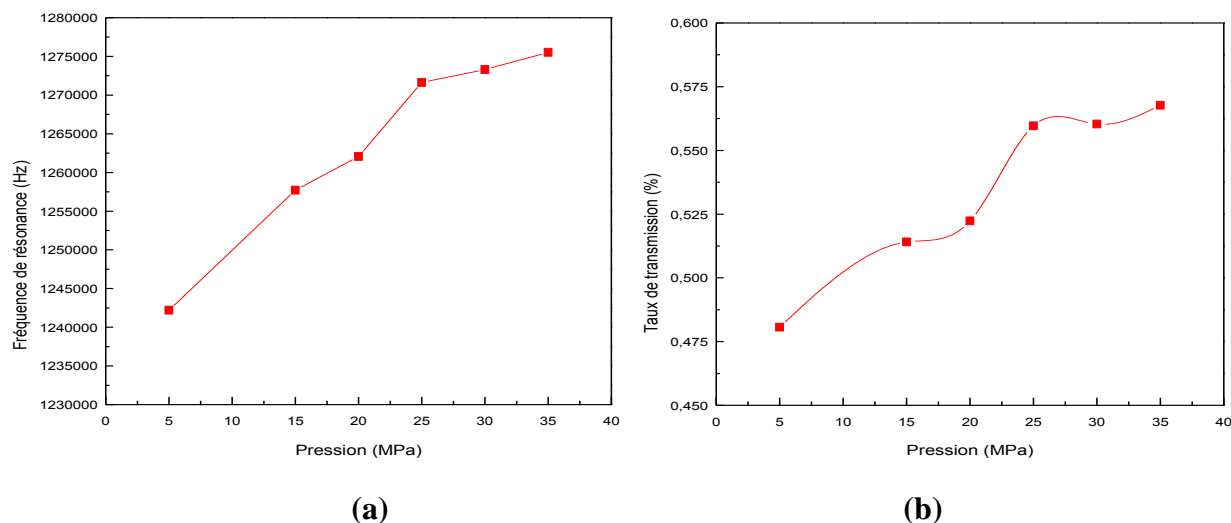
Le tableau III.10, donne la densité et la vitesse de propagation d'une onde acoustique à travers la structure proposée à différentes pressions. Ainsi que, les résultats de simulation (le Taux de transmission et la fréquence de résonance) obtenus par la méthode TMM sont illustrés.

Pression (Mpa)	Taux de transmission	Fréquence de résonance
5	0,4806	1242210
15	0,5141	1257718
20	0,5223	1262080
25	0,5596	1271638
30	0.5603	1273309
35	0.5677	1275536

**Tableau III.10 :** Influence de la pression appliquée sur la fréquence de résonance et le taux de transmission.



**Figure III.11 :** Spectre de transmission en fonction de la fréquence pour différentes valeurs de pression.



**Figure III.12 :** Variations de la fréquence de résonance et le taux de transmission en fonction de la pression.

La figure III.11 montre l'existence d'un pic de transmission importante pour différente pression appliquée sur la structure PnC-1D (le Biodiesel injecté dans la couche de défaut C). Il est clair que, plus la pression augmente la fréquence de résonance du pic décale vers les fréquences élevées. Les figures III.12 (a) et (b) représentent respectivement la variation de la fréquence de résonance et le taux de transmission en fonction de la pression appliquée, ce décalage de fréquence de résonance peut être utilisé pour la détection de la pression du liquide.

#### III.4.5. Application à la détection de la température

Jusqu'à maintenant, les courbes de transmission ont été présentées en fonction de la fréquence réduite, donc sans dimensions réelles de la structure. Dans ce qui suit, nous allons nous intéresser à une application spécifique, en travaillant dans le domaine des capteurs. Le paramètre de structure du cristal est alors défini de manière à obtenir une excitation des modes phononique résonants du liquide autour les fréquences de 0.2 à 2 MHz,  $a_1=a_2=0.5$  mm et  $D=0.25$ mm. Le tableau III.11 montre les paramètres physiques de Biodiesel à différentes valeurs de température.

T (°C)	$C_l$ (m/s)	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
<b>30 (T° Ambiante)</b>	1390	880
<b>50</b>	1310	865
<b>60</b>	1270	853
<b>70</b>	1240	850
<b>80</b>	1210	842
<b>90</b>	1170	832

**Tableau III.11 :** Paramètres physiques de biodiesel selon la température [36].

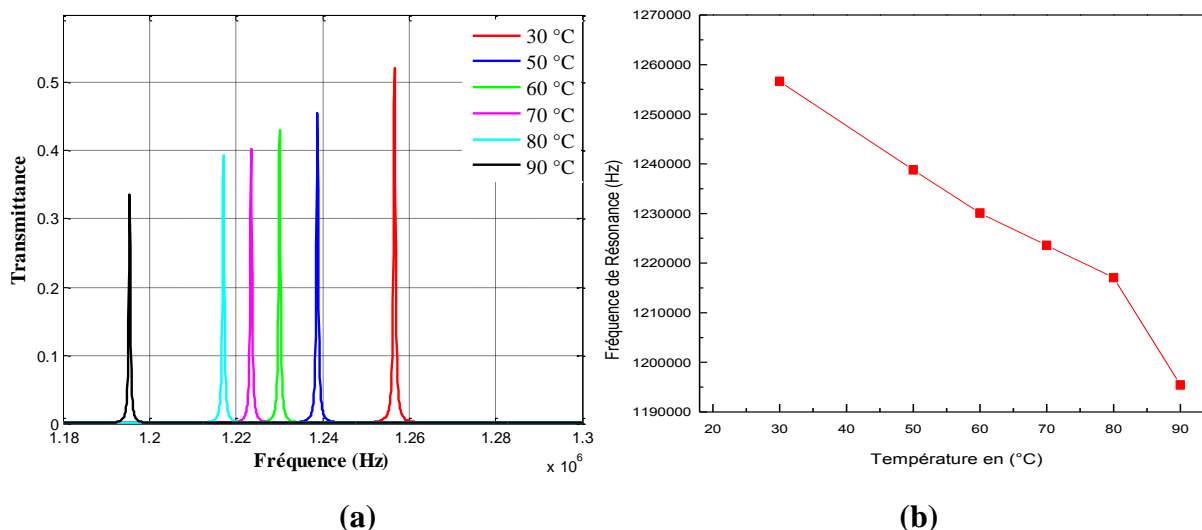
Les résultats de simulations obtenus en utilisant la méthode de la matrice de transfert sont reportés dans le tableau III.12

Température (°c)	30	50	60	70	80	90
Taux de transmission	0,5220	0,4548	0,4308	0,4028	0,3941	0,3355
Fréquence de résonance	1256605	1238787	1230064	1223568	1217072	1195450

**Tableau III.12 :** Valeurs de la fréquence de résonance et le taux de transmission en fonction de la température.

La figure III.13 (a) présente le spectre de transmission en fonction de la fréquence pour différentes températures, elle montre l'existence d'un pic de transmission importante pour chaque valeur de la température du liquide (Biodiesel) injecté dans la couche de défaut. Il est clair que plus la température augmente, le pic de transmission due à l'existence du défaut décale vers les basses fréquences, même le taux diminué.

La figure III.13 (b) représente la variation de la fréquence de résonance en fonction de la température.



**Figure III.13 :** (a) Spectre de transmission en fonction de la fréquence pour différentes Températures, (b) Variations de la fréquence de résonance en fonction température.

### III. 4. 6. Calcul du facteur de qualité

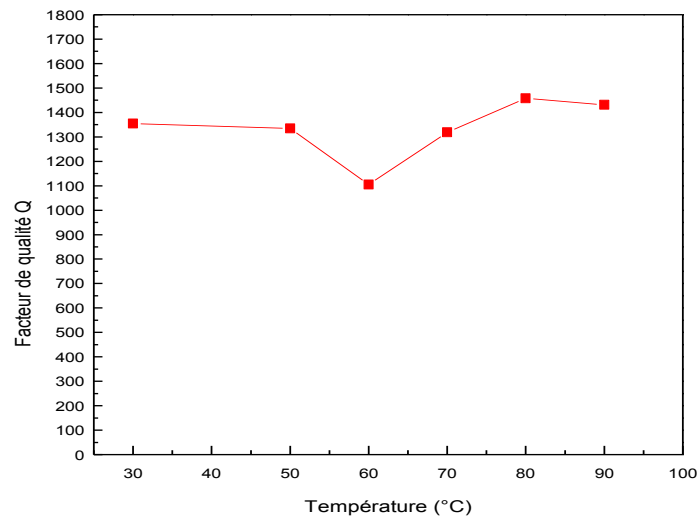
Le paramètre important qui peut déterminer les performances de n'importe quel capteur est le facteur de qualité  $Q$  donné par l'expression suivante:  $Q = \frac{f_r}{f_{FWHM}}$ .

Où :  $f_r$  est la fréquence de résonance du pic et  $f_{FWHM}$  est la largeur à mi- hauteur de pic.

Le tableau III.13 donne les résultats de simulations de la fréquence de résonance et la de la fréquence à mi-hauteur  $F_{FWHM}$  pour différentes températures.

T (°C)	$f_r$ (Hz)	$f_{FWHM}$ (Hz)	$Q$
30 (T° Ambiante)	1256605	928,000	1354,100
50	1238787	928,000	1334,900
60	1230064	1113,600	1104,583
70	1223568	928,000	1318,500
80	1217072	835,200	1457,222
90	1195450	835,200	1431,333

**Tableau III.13** Influence du facteur de qualité en fonction de la température.



**Figure III.14** : l'évolution du facteur de qualité en fonction de la température.

D'après les résultats de simulation reportés sur la figure III.14, il est très clair que les valeurs du facteur de qualité, obtenues par la méthode TMM sont considérables par rapport à celles trouvées dans la littérature [37]. La valeur de  $Q$  est à 1354,100 à 30 °C considérée comme une température de référence, puis elle passe à 1457,222 à 80°C.

## CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons eu l'occasion d'étudier la transmission d'une onde acoustique longitudinale à incidence normale à travers une structure multicouches formé par l'empilement alterné de N couches de Plomb et l'époxy. Tout d'abord, nous nous sommes intéressés à l'étude d'une structure parfaite, les résultats de simulations montrent clairement l'ouverture de bandes phononiques sous certaines conditions et que les propriétés de ces bandes d'arrêt dépendent fortement des conditions géométriques et physiques en particulier le contraste en impédance acoustique et le facteur de remplissage.

Ensuite, nous avons étudié un cristal phononique 1D imparfait dans laquelle un défaut est inséré au centre de la structure. En modifiant les propriétés physiques et géométriques du défaut, nous avons montré que la fréquence de résonance et le taux de transmission des modes résonants sont très sensibles aux variations de la largeur du défaut et la nature du liquide injecté dans la couche de défaut. Ce qui nous permet de conclure que les structures multicouches avec défaut physique présentent une nouvelle plateforme dans le domaine de détection.

Enfin, nous avons étudiée et simulé l'influence de quelques paramètres tels que la température et la pression sur les variations de la fréquence de résonance du mode résonant dans le cas d'une structure de type  $(\text{Plom/Epoxy})^2/\text{Biodiesel}/(\text{Plom/Epoxy})^2$ . Les résultats obtenus approuvent que la structure proposée puisse être utilisée comme un capteur de température et de pression.

# **Conclusion générale**

### CONCLUSION GENERALE

En structurant la matière périodiquement suivant une, deux ou trois directions de l'espace, il est possible d'orienter ou de contrôler ou même d'empêcher la propagation des ondes acoustiques ou élastiques dans certaines directions et gammes de fréquences. Ces réseaux périodiques constitués de matériaux composites sont qualifiés de cristaux phononiques. En effet, ces matériaux présentent actuellement un domaine de recherche très important et en évolution permanente notamment dans le domaine de détection. Un grand nombre de structures périodiques a été étudié et des approches théoriques variées ont été développées. Toutes ont mis en évidence l'existence de propriétés physiques telles que la présence de bandes interdites, des bandes de fréquences où aucune propagation d'onde n'est permise dans ces structures.

En effet, du fait que le spectre des ondes acoustiques s'étale sur une large gamme en fréquence. Cela offre de nombreuses applications potentielles allant de l'isolation sonore au filtrage et traitement du signal acoustique en passant par les guides et la détection des propriétés des liquides. Le travail présenté dans ce mémoire de master, s'inscrit dans le cadre d'une contribution à l'étude théorique et numérique de la propagation d'une onde acoustique longitudinale à travers une structure multicouche unidimensionnelle à base d'un cristal phononique 1D de type solide/solide lequel est formé par l'empilement de deux couches de Plomb et de l'Epoxy.

En premier lieu, nous nous intéressons à l'étude d'une structure multicouche parfaite de défauts et formé par l'empilement de N bicouches Lead/Epoxy, En utilisant un code écrit en Matlab de la méthode de la matrice de transfert TMM, nous avons montré à travers la simulation que les paramètres géométriques notamment le nombre de couches, l'épaisseur de chaque couche et le facteur de remplissage jouent un rôle important sur l'ouverture et la location des bandes interdites phononiques. D'autres part, nous avons montré que les paramètres physiques en particulier le contraste entre les masses volumiques, les vitesses de propagation dans les couches constituants le cristal jouent aussi un rôle important sur les caractéristiques de la bande ouverte notamment sur sa largeur.

Ensuite, nous avons étudié un cristal phononique PnC-1D imparfait de type (Plom/Epoxy)<sup>2</sup>/Défaut/(Plom/Epoxy)<sup>2</sup>. Le défaut est inséré au centre de la structure et rempli par le liquide a analysé. En modifiant les propriétés physiques et géométriques de la couche du

défaut ainsi que les propriétés physiques du liquide injecté dans le défaut, nous avons montré que la fréquence de résonance et le taux de transmission des modes résonants sont très sensibles aux variations de la largeur du défaut et la nature du liquide injecté dans la couche de défaut. Ce qui nous permet de conclure que les structures multicouches avec défaut physique présentent une nouvelle plateforme dans le domaine de détection.

Enfin, nous avons étudiée et simulé l'influence de quelques paramètres tels que la température et la pression sur les variations de la fréquence de résonance du mode résonant dans le cas d'une structure de type (Plom/Epoxy)<sup>2</sup>/Biodiesel/(Plom/Epoxy)<sup>2</sup>. Les résultats obtenus approuvent que la structure proposée puisse être utilisée comme un capteur de température et de pression.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski et B. Djafari-Rouhani, Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.* 71, 2022 (1993).
- [2] ALI BOUGRESSI : Application du concept des réseaux acoustiques à bandes interdites pour l'isolation sismique d'un site.
- [3] M. Oudich. Contribution à l'étude des cristaux phononiques à résonance locale dans les régimes sonique et hypersonique : approches théorique et expérimentale. Université Henri Poincaré - Nancy 1, 2011.
- [4] M. N. Armenise et al. *Phys. Procedia* 3, 357 (2010).
- [5] [https://www.researchgate.net/figure/a-Schematics-of-phononic-crystal-of-different-dimensions-b-An-example-of\\_fig1\\_321572865](https://www.researchgate.net/figure/a-Schematics-of-phononic-crystal-of-different-dimensions-b-An-example-of_fig1_321572865)
- [6] Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, J.O. Vasseur, H. Larabi, Y. Tinel, 'Etude par la méthode FDTD de la propagation des ondes acoustiques dans les cristaux phononiques', Journée de calcul intensif, CRI, Septembre 2005, Villeneuve d'Ascq.
- [7] H. Larabi, Y. Pennec, B. Djafari-Rouhani, and J. O. Vasseur, 'Multicoaxial cylindrical inclusions in locally resonant phononic crystals', *Phys. Rev. E* 75, 066601 (2007).
- [8] <https://www.techniques-ingenieur.fr/base-documentaire/electronique-photonique/th13/materiaux-pour-l-electronique-et-dispositifs-associes-42271210/acousto-optique-et-composants-associes-e1955/>
- [9] T.Wu, G.Hung, and S.Y.Kristallogr. 220, 840, (2005).
- [10] S. kheffache : propagation d'onde élastiques dans les cristaux phononiques bidimensionnels, TIZI\_ OUZOU, 2011.
- [11] S. Bouhedja, doctorat d'état en physique, université mentouri constantine, étude des vitesses des ondes de surface et de l'atténuation du mode de rayleigh via un capteur fonctionnant en champ noir.
- [12] samira AMOUDACH « cristaux phononiques accordables ; application au domaine de capteur Option doctorat physique de matériaux promotion (2015/2016).
- [13] P-F. Heisch, T-T. Wu, and J-H Sun, *Trans. Ultrason. Ferro- electr. Freq. Control* 53, 148 (2006).
- [14] Bérenger, J. *Comput. Phys.* 114, 185 (1994)
- [15] W. C. Chew, and Q. H. Liu, *J. Comput. Acoust.* 4, 341 (1996)
- [16] F. Chagla, C. Cabani, and P. M. Smith, *Proc.- IEEE Ultrason. Symp.* 517 (2004)
- [17] A. Khelif, B. Aoubiza, S. Mohammadi, A. Adibi, and V. Laude, *Phys. Rev. E* 74, 046610 (2006)

## Bibliographie

---

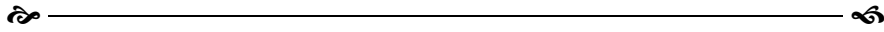
- [18] B. Djafari-Rouhani, J. O. Vasseur, A. C. Hladky-Hennion, P. Deymier, F. Duval, B. Dubus, and Y. Pennec,
- [19] T-C. Wu, T-T. Wu, and J-C Hsu, *Phys. Rev. B* **79**, 104306 (2009)
- [20] C. Herring, *Phys. Rev.* **57**, 1169 (1940)
- [21] R. D. Meade, K. D. Brommer, A. M. Rappe, and J. D. Joannopoulos, *Appl. Phys. Lett.* **61**, 495 (1992).
- [22] M. M. Sigalas, and E. N. Economou, *Europhys. Lett.* **36** 241-246 (1996)
- [23] Z. Hou, and B. M. Assouar, *J. Phys. D : Appl. Phys.* **42** 085103 (2009)
- [24] L-Y. Wu, L-W. Chen, and C-M. Liu, *Phys. Lett. A* **373** 1189 (2009).
- [25] J. O. Vasseur, P. A. Deymier, B. Djafari-Rouhani, Y. Pennec, and A-C. Hladky-Hennion. *Phys. Rev. B* **77**, 085415 (2008)
- [26] T-T. Wu, Z-G. Huang, and S. Lin, *Phys. Rev. B* **69**, 094301 (2004)
- [27] Y. Tanaka, and S-I. Tamura, *Phys. Rev. B* **58**, 7958 (1998)
- [28] Guerder, Pierre-Yves , "Theoretical and Numerical Study of Nonlinear Phononic Crystals", The University of Arizona , Download date: 21/09/2018
- [29] Stefan A. Bringuier, acoustic logic gates implemented using a phase-controlling phononic crystal, masters of Science in the graduate college, the University of Arizona, 2011
- [30] M. Sigalas and N. Garcia, *J. Appl. Phys.* **87**(6), 3122 (2000)
- [31] Nasri omar, Mémoire Académique , universite mohamed boudiaf - M'sila , «Etude théorique et numérique d'une structure périodique pour l'isolation phonique» , Année universitaire : 2016 /2017
- [32] ZHANG V. Y., GRYBA T., ORELLANA J. M., COLLET B., Surface Impedance Matrix for the Study of Acoustical Propagation in Multilayered Structures, *Acta Acustica united with Acustica*, **88** (2), 218-230 (2002)
- [33] BRUNEAU M., POTEL C., *Matériaux et acoustique* (Tomes 1 et 2), Lavoisier (2006).
- [34] Guerder, Pierre-Yves, "Theoretical and Numerical Study of Nonlinear Phononic
- [35] Seri Asmaa, « propriétés optique des cristaux photonique unidimensionnels » université de Abdelhamid Ben Badis, Mostaganem.
- [36] Mehaney, A. Biodiesel Physical Properties Detection Using One-Dimensional Phononic Crystal Sensor. *Acoust. Phys.* **65**, 374–378 (2019). <https://doi.org/10.1134/S1063771019040122>.
- [37] R. Lucklum, M. Zubtsov, and S. V. Arango, in *Proc. ASME 2014 Int. Mechanical Engineering Congress and Exposition IMECE 2014* (Montreal, November 14–20, 2014).

## Résumé :

Les structures à bandes interdites phononiques sont des matériaux composites périodiques dont les propriétés élastiques sont modulées dans l'espace. En effet, les structures multicouches offrent une nouvelle classe de capteurs. Lorsque ces structures sont utilisées comme capteurs, leur comportement aux ondes acoustiques/élastiques dépend des variations des paramètres d'entrées, notamment la densité et la vitesse de propagation. Ces changements peuvent être détectés en mesurant un pic de transmission isolé à l'intérieur de la bande interdite.

Notre travail consiste à l'étude de la structure  $[(\text{Plomb}/\text{Epoxy})^2/\text{Défaut}/(\text{Plomb}/\text{Epoxy})^2]$  afin de montrer la possibilité d'exploiter une telle structure dans le domaine de détection des liquides. En utilisant la méthode de la matrice de transfert (TMM), les résultats obtenus montrent clairement que la fréquence de résonance du pic de transmission mesuré est très sensible aux paramètres d'entrées. Cela prouve qu'une telle structure offre une nouvelle plate-forme pour les capteurs de liquide.

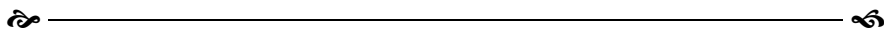
**Mots clés :** Bande interdite phononique 1D, Ondes acoustique, capteurs de liquide, TMM.



## خلاصة:

هياكل فجوة النطاق الصوتي عبارة عن مواد مركبة دورية يتم تعديل خصائصها المرنة في الفضاء. إن الهياكل متعددة الطبقات تقدم فئة جديدة من أجهزة الاستشعار. عند استخدام هذه الهياكل كمستشعرات، فإن سلوكها تجاه الموجات الصوتية يعتمد على الاختلافات في المدخلات، ولا سيما كثافة وسرعة الانتشار. يمكن الكشف عن هذه التغييرات بقياس تردد ذروة الإرسال داخل فجوة النطاق.

يُدرج عملنا في دراسة الهيكل  $[(\text{Plomb}/\text{Epoxy})^2/\text{Défaut}/(\text{Plomb}/\text{Epoxy})^2]$  من أجل إظهار إمكانية استغلال مثل هذه البنية في مجال الكشف عن السوائل. باستخدام طريقة مصفوفة النقل (TMM)، تُظهر النتائج المتحصل عليها بوضوح أن تردد الرنين شديد الحساسية للقيم المدخلة. هذا يثبت أن مثل هذه البنيات يوفر منصة جديدة لأجهزة استشعار السوائل. **كلمات مفتاحية:** فجوة النطاق الصوتي 1D، موجات صوتية، مجسات السوائل، طريقة مصفوفة النقل.



## Abstract:

Phononic band gap structures are periodic composite materials whose elastic properties are modulated in space. Indeed, multilayer structures offer a new class of sensors. When these structures are used as sensors, their behavior to acoustic / elastic waves depends on variations in input parameters, including density and speed of sound. These changes can be detected by measuring an isolated transmission peak within the band gap.

Our work consists of the study of the structure  $[(\text{Lead} / \text{Epoxy})^2 / \text{Defect} / (\text{Lead} / \text{Epoxy})^2]$  in order to show the possibility of exploiting such a structure in the field of liquid detection. Using the transfer matrix method (TMM), the results obtained clearly show that the resonant frequency of the measured transmission peak is very sensitive to the input parameters. This proves that such a structure offers a new platform for liquid sensors.

**Keywords:** 1D Phononic band gap, Acoustic waves, liquid sensors, TMM.