



# UNIVERSITE DE M'SILA

FACULTE DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE

Département de Mathématiques

## MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

**Domaine** : Mathématiques et Informatique

**Filière** : Mathématiques

**Option** : Mathématiques Appliquées et Discrètes

**Par**

**CHOUDEK RAFAA**

**Sujet**

**Contour d'Image et Diffusion non Linéaire**

**Dirigé par :**

**Mr le professeur**

**BENHAMIDOUCHE Noredine**

**Promotion: 2011/2012**

# Remerciement

En préambule à ce mémoire, je voudrais bien d'adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de ces formidables années universitaires.

Je tiens à remercier sincèrement le professeur **Mr BENHAMIDOUCHE Noured-dine**, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et sans lui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie particulièrement **Mr LEHIMEUR Noured-dine**, et **Mr KARA Ra-beh**, qui m'ont aidé, m'ont toujours soutenu et encouragé.

Je n'oublie pas mes parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenue et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

Merci à tous et à toutes.

# Introduction

Beaucoup de mathématiciens ont été attirés par le traitement d'images et la vision par ordinateur dans ces dernières années. Ceci a été déclenché par des méthodes mathématiquement bien fondées utilisant par exemple, les ondelettes ou les équations différentielles partielles non linéaires. Le but de ce mémoire est de donner une introduction à ce champ, pour savoir les méthodes qui se basent sur les techniques de diffusion non linéaire. Ce champ a évolué d'une manière très fructueuse. Il est étroitement relié à un genre spécifié d'analyse multi-échelles appelé "scale-espace" [W83], et il a été d'abord employé pour lisser l'image avec le perfectionnement des bords simultanés.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre donne des généralités et des définitions sur le traitement d'images et sur les EDPs. Puis dans le deuxième chapitre nous avons essayé de faire une comparaison entre le filtrage linéaire et le filtrage non linéaire. Premièrement nous avons montré la relation entre la théorie de scale-space et le filtrage linéaire, et aussi avec l'équation de la chaleur. En raison des inconvénients du filtrage linéaire, ce qui nous a amené de trouver des autres méthodes pour le perfectionnement du contour d'image. La méthode a été présentée par Perona et Malik [PM], introduite dans la deuxième section de ce chapitre, où nous avons donné le principe de ce modèle et nous avons fait une petite comparaison entre le filtrage basé sur ce modèle et le filtrage linéaire. Finalement, dans le troisième chapitre, nous avons introduit un nouveau modèle du perfectionnement du contour d'image, basé sur le modèle d'évolution présenté par Sethian et Malladi [MS], où nous avons employé la théorie d'équations de diffusion non linéaires. Il s'avère que le problème de valeur initiale standard résolu dans cette théorie ne s'adapte pas à nos applications [BV]. Un nouveau problème aux frontières libres avec des données singulières sur les frontières a été présenté et résolu au moyen d'un certain nombre de transformations non triviales disponibles pour des problèmes de diffusion non linéaires.

# Chapitre 1

## Généralités et Définitions

### 1.1 La société de l'image

Notre société est souvent désignée comme étant une "société de l'information". Elle pourrait aussi bien être définie comme une "société de l'image". Ce n'est pas seulement parce que l'image est un outil très puissant et utilisée comme moyen de communication, mais aussi parce qu'elle est un moyen simple, compact, et étendu à représenter le monde physique. Si on y pense, il est en effet frappant de constater à quel point les images sont omniprésentes dans notre vie, et combien nous comptons sur elles.

Les progrès réalisés dans les dispositifs d'acquisition font partie de l'origine d'un tel phénomène. Une énorme quantité d'informations numériques est disponible. La deuxième origine est naturellement l'augmentation de la capacité des ordinateurs qui nous permettent de traiter de plus en plus des données. Cela a entraîné une nouvelle discipline connue sous le nom de vision par ordinateur.

Par exemple, l'imagerie médicale a fait un usage considérable des images depuis les premiers jours. De nombreux dispositifs qui existent sont basés sur les ultrasons, rayons  $X$ , scanners, ... etc. Les images produites par ceux-ci peuvent en suite être traitées pour perfectionner leur qualité, améliorer certaines fonctionnalités, ou de combiner efficacement les différentes informations (fusion).

Un autre domaine important qui nous concerne directement est la télédétection. Ceci désigne les applications où nous avons besoin d'analyser, de mesurer, d'interpréter des scènes à distance.

En plus des applications de surveillance de la défense, de la vidéo et l'analyse du

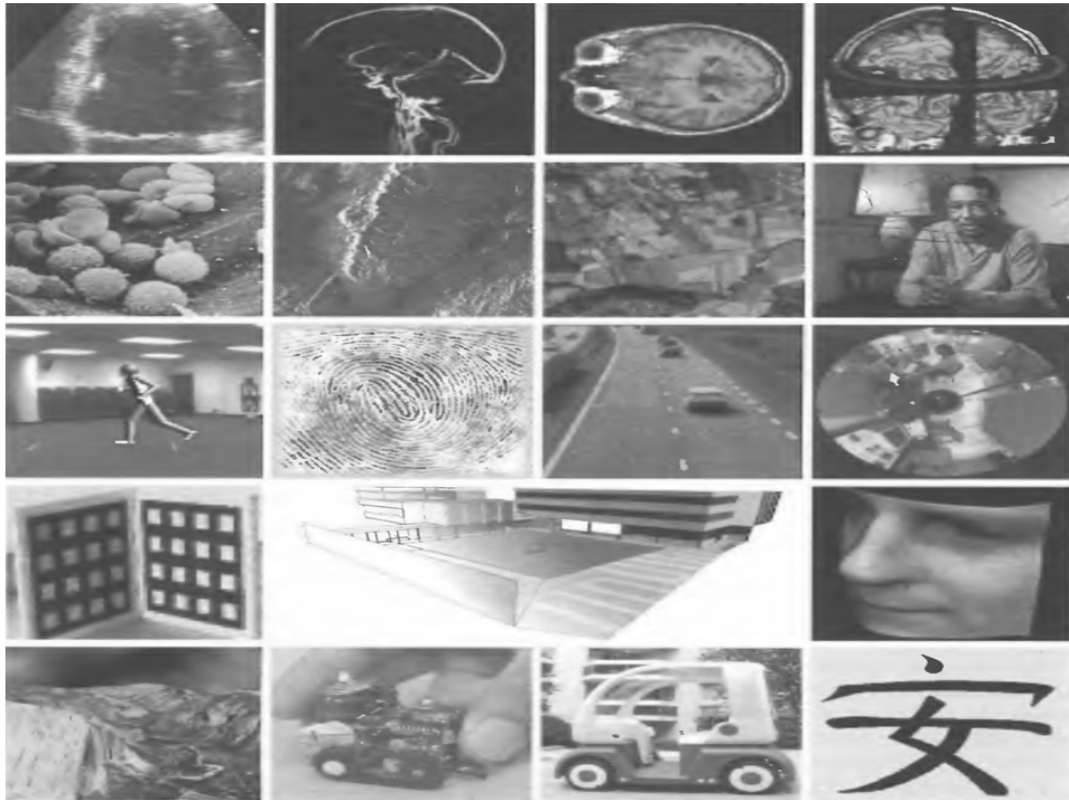


FIG. 1-1 – Illustration de quelques applications ou systèmes qui emploient l’analyse d’image.

trafic routier, l’observation des ressources de la terre est un autre domaine important. Le traitement d’image fournit des outils pour suivre et quantifier les changements dans les forêts, l’approvisionnement en eau, l’urbanisation, la pollution, . . . etc. Il est également, largement utilisé pour la prévision du temps à analyser d’énormes quantités de données.

Au-delà de ces thèmes généraux, on pourrait aussi parler de beaucoup de différentes applications de traitement d’image où est impliqué. Il s’agit notamment de « world wide web », la reconnaissance de caractères, de la reconstruction en 3-D de scènes ou d’objets à partir d’images, contrôle de la qualité, la robotique, analyse des empreintes digitales, et des bases de données d’art virtuel.

Sans nécessairement le savoir, nous sommes des consommateurs (utilisateurs) de traitement d’image quotidiennement.

## 1.2 Qu'est ce qu'un traitement d'image numérique ?

Une image peut être définie comme une fonction bidimensionnelle  $u(x, y)$ , où  $x$  et  $y$  sont des coordonnées spatiales, et l'amplitude de  $u$  à toute paire de coordonnées  $(x, y)$  s'appelle l'intensité ou le niveau de gris de l'image à ce point. Quand  $x, y$ , et les valeurs de  $u$  sont tous d'amplitude des quantités finies et discrètes, nous appelons l'image une image numérique. Le champ du traitement d'images numériques se rapporte à traiter des images numériques à l'aide d'un ordinateur numérique. Notant qu'une image numérique se compose de nombre fini d'éléments, qui a un endroit particulier et l'évalue. Ces éléments désignés sous le nom : des *éléments d'image*, des *pels*, et des *Pixels*. Le *Pixel* est le terme le plus employé couramment pour dénoter les éléments d'une image numérique.

La vision est la plus avancée de nos sens, ainsi il n'est pas étonnant que les images jouent le rôle le plus important simple dans la perception humaine. Cependant, à la différence des humains, qui sont limités à la bande visuelle du spectre électromagnétique, couverture de machines de formation image presque le spectre entier de fin de support, s'étendant du gamma aux ondes radio. Elles peuvent opérer des images produites par des sources que des humains ne sont pas accoutumés à l'association aux images. Celles-ci incluent l'ultrason, la microscopie électronique, et les images générées par ordinateur. Ainsi, au traitement d'images numérique entoure un champ des applications larges et divers.

Il n'y a aucun accord général parmi des auteurs concernant où les arrêts au traitement d'images et d'autres secteurs relatifs, tels que l'analyse d'image et la vision par ordinateur, commencent. Parfois une distinction est faite par la définition au traitement d'images comme discipline dans laquelle l'entrée et le rendement d'un processus sont des images. Nous pensons ceci pour être une limitation et une frontière quelque peu artificielle. Par exemple, sous cette définition, même la tâche insignifiante de calculer l'intensité moyenne d'une image (qui rapporte un nombre simple) ne serait pas considérée une opération au traitement d'images. D'une part, il y a des champs tels que la vision par ordinateur dont l'objectif ultime est d'utiliser des ordinateurs pour émuler la vision humaine, y compris apprendre et pouvoir faire des inférences et agir basés sur les entrées visuelles. Ce secteur lui-même est une branche de l'intelligence artificielle (IA) dont l'objectif est d'émuler l'intelligence humaine. Le champ de l'IA est à ses parties d'enfance en termes

de développement, avec le progrès ayant été beaucoup plus lent qu'à l'origine prévu. Le secteur de l'analyse d'image (également appelée l'arrangement d'image) est entre la vision par ordinateur et le traitement d'images. Il n'y a aucune frontière définie dans le continuum du traitement d'images à une extrémité à la vision par ordinateur à l'autre. Cependant, un paradigme utile est de considérer trois types de processus automatisés dans ce continuum : bas-moyen, et à haut niveau processus. Les processus de bas niveau comportent des opérations primitives telles que le prétraitement d'image pour réduire le bruit, le perfectionnement de contraste, et l'affilage d'image. Un processus de bas niveau est caractérisé par le fait que ses entrées et sorties sont des images. Le traitement à moyen-niveau sur des images implique des tâches telles que la segmentation (divisant une image dans des régions ou des objets), la description de ces objets de les ramener à une forme appropriée au traitement par ordinateur, et la classification (identification) de différents objets. Un processus à moyen-niveau est caractérisé par le fait que ses entrées sont généralement des images, mais ses sorties sont des attributs extraits à partir de ces images (par exemple, bords, contours, et l'identité de différents objets). En conclusion, le traitement de plus haut niveau implique « de sembler raisonnable » d'un ensemble d'objets identifiés, comme dans l'analyse d'image, et, à la fin lointaine du continuum, remplissant les fonctions cognitives normalement liées à la vision.

Basé sur les commentaires précédents, nous voyons qu'un endroit logique de chevauchement entre le traitement d'images et l'analyse d'image est le secteur de l'identification de différents régions ou objets dans une image. Ainsi, ce que nous appelons dans ce contexte le traitement d'images numériques entoure des processus dont les entrées et les sorties sont des images.

### **1.3 A propos Des Equations aux dérivées Partielles (EDP)**

De nombreuses approches ont été développées pour traiter les images numériques, et il est difficile de dire lequel est le plus naturel que l'autre. Traitement de l'image a une longue histoire. Peut être la plus ancienne des méthodes proviennent de 1-D des techniques de traitement du signal. Elles s'appuient sur la théorie du filtre (linéaire ou non linéaire), sur

l'analyse spectrale, ou sur quelques concepts de base de probabilité et de statistique.

Aujourd'hui, des outils plus sophistiqués ont été développés. Trois grands axes se dégagent : La modélisation stochastique, ondelettes et équations aux dérivées partielles (EDP). La modélisation stochastique est largement basée sur la théorie des champs aléatoires de Markov. Elle traite directement des images numériques. La théorie d'ondelette est héritée du traitement des signaux et compte sur des techniques de décomposition (voir [CH]). Nous ne considérons pas ici ces approches et de se concentrer sur les méthodes se basent sur les EDPs. Ils ont été aménagés intensivement en analyse d'images depuis les années 1990. De nombreux livres sont maintenant disponibles, voir par exemple [AK, Wck, DAS].

Dans notre mémoire nous nous intéressons seulement aux équations de diffusion.

### 1.3.1 La diffusion comme un phénomène physique

La plupart des personnes ont une impression intuitive de diffusion comme processus physique, qui équilibre des différences de concentration sans création ou destruction de masse. Cette observation physique peut être facilement moulée dans une formulation mathématique.

La propriété d'équilibration est exprimée par la loi de Fick : [WZYL]

$$j = -D\nabla u \tag{1.1}$$

Cette équation déclare qu'un  $\nabla u$  le gradient de concentration cause un flux  $j$  qui vise à compenser ce gradient. La relation entre le  $\nabla u$  et le  $j$  est décrite par le tenseur de diffusion  $D$ , (une matrice symétrique définie positive). Le cas où  $j$  et  $\nabla u$  sont parallèles s'appelle isotrope. Alors nous pouvons remplacer le tenseur de diffusion par une diffusivité scalaire positive  $G$ . Dans le cas anisotrope général,  $j$  et  $\nabla u$  ne sont pas parallèles.

L'observation que la diffusion transporte seulement la masse sans destruction d'elle ou la création de la nouvelle masse est exprimée par l'équation de continuité

$$u_t = -\operatorname{div} j \tag{1.2}$$

où  $t$  dénote le temps et  $\operatorname{div}$  dénote la divergence.

Si nous branchons la loi de Fick à l'équation de continuité nous obtenons l'équation de diffusion

$$u_t = \operatorname{div}(D\nabla u). \quad (1.3)$$

Cette équation apparaît dans beaucoup de procédés de transport physique. Dans le cadre de transfert de chaleur, elle s'appelle l'équation de la chaleur. Dans le traitement d'image, nous pouvons identifier la concentration par la valeur de gris à un certain endroit. Si le tenseur de diffusion  $D$  est constant dans un domaine entier d'image, on parle de la diffusion homogène et un filtrage dépendant de l'espace s'appelle non linéaire. Souvent le tenseur de diffusion est une fonction de la structure différentielle de l'image en évolution elle-même. Une telle rétraction mène aux filtres non linéaires de diffusion. La diffusion qui ne dépend pas à l'image en évolution s'appelle linéaire.

### 1.3.2 L'auto similarité

Il est extrêmement difficile d'analyser des équations différentielles partielles non linéaires, d'une façon exacte. Pour des données initiales / aux bords, il est rare de trouver une solution exacte explicite d'un problème physique. Ainsi, une ressource à la solution numérique est inévitable mais il est important d'avoir une certaine solution approximative ou asymptotique qui peut être employée pour fournir un certain appui ou vérification de la solution numérique. C'est ici que les soit-disant solutions auto similaires (qui incluent des solutions de produit en tant que cas spéciaux) viennent dans maniable. Pour des problèmes linéaires, ces solutions spéciales peuvent être superposées et par conséquent, certaines classes des problèmes de valeur initiale / aux bords peuvent être explicitement résolues sous forme d'une série. Pour les problèmes non linéaires auxquels, aucune superposition n'est possible, on recherche les propriétés invariables des équations différentielles partielles. La symétrie des équations différentielles partielles sont exploitées pour trouver les solutions soit-disant auto similaires. Transformations finies et infinitésimales ou le soit-disant changement d'aide d'approche directe un PDE à EDO correspondante. Celles-ci imposent quelques conditions aux paramètres apparaissant dans le problème. Les solutions de ces EDOs (non linéaires) peuvent correspondre en tant que tels à quelques fonctions généralisées comme des conditions initiales pour les EDPs.[SS].

Les trois formes des solutions auto similaires les plus utilisées dans le traitement ma-

thématique sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, t) = t^{-\alpha} \varphi\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \\ u(x, t) = (T - t)^{-\alpha} \varphi\left(\frac{x}{(T-t)^\beta}\right) \dots\dots \text{tels que : } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ sont des exposants à déterminer} \\ u(x, t) = c(t) \varphi\left(\frac{x}{a(t)}\right) \end{array} \right.$$

**Théorème 1** Soit  $P(x, t, u_t, u_x, \dots) = 0$  une EDP alors  $P$  admet une solution auto-similaire si et seulement si elle est invariante sur l'action de dilatation (invariance d'échelle). c-à-d., si l'on remplace  $u$  par  $a^\lambda u$ ,  $x$  par  $a^s x$  et  $t$  par  $a^\delta t$ , on aura :

$$p(a^s x, a^\delta t, a^\lambda u, \dots) = 0$$

En d'autre terme : si  $u(x, t)$  est une solution de  $P$  alors  $a^\lambda u(a^s x, a^\delta t)$  est également une solution de  $P$  sous conditions sur  $\lambda$ ,  $s$ , et  $\delta$ .

Avec les règles de dérivation :

$$\frac{\partial a^\lambda u}{\partial a^\delta t} = a^{\lambda-\delta} \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial a^\lambda u}{\partial (a^s x)} = a^{\lambda-s} \frac{\partial u}{\partial x}$$

■

# Chapitre 2

## Le filtrage linéaire contre le filtrage non linéaire

### 2.1 Filtrage linéaire

La méthode étudiée la plus simple pour lisser les images est d'appliquer un procédé de diffusion linéaire. Un formalisme propre pour le problème de la description multi-échelles de l'image est l'idée de « scale-space filtering » présentée par Witken en 1983 [W83]. L'idée essentielle de cette approche est tout à fait simple : "Inclure l'image originale dans un famille des images dérivée  $u(x, y, t)$  obtenues par convolution de l'image originale  $u_0(x, y)$  avec un noyau gaussien de variable  $t$  "

$$u(x, y, t) = u_0(x, y) * G(x, y, t) \quad (2.1)$$

Comme précisé par Koendreink et Hummel, cette famille des images dérivées peuvent être vu (d'une manière équivalente) comme solution d'équation de diffusion linéaire (l'équation de la chaleur) :

$$u_t = \Delta u \quad (2.2)$$

avec la condition initiale  $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$  l'image originale. Où  $\Delta$  dénote l'opérateur laplacien spatial.

Dans ce chapitre nous expliquerons la relation entre la diffusion linéaire et le filtrage par convolution avec un gaussien. Mais après tout ça nous aurons besoin de quelques définitions que nous utiliserons dans l'analyse.

### 2.1.1 La transformée de Fourier

Nous allons utiliser la fonction exponentielle complexe pour écrire la représentation de la transformée de Fourier sous forme complexe. Cette nouvelle représentation dispose d'une paire de transformations importantes. Comme nous le verrons dans cette section, le concept de transformée paires offre un moyen commode d'indiquer les propriétés fondamentales de fonctionnement de la transformée de Fourier, qui sont très utiles dans la résolution de problèmes aux limites.

La transformée de Fourier d'une fonction  $f$  lisse par morceaux et intégrable, est donnée par :

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx \quad (-\infty < w < \infty) \quad (2.3)$$

et sa transformée de Fourier inverse est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx} dw \quad (-\infty < x < \infty) \quad (2.4)$$

Il existe autres conventions pour la transformée de Fourier. Par exemple, nous pourrions choisir  $\hat{f}(w) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx$ , puis la transformée de Fourier inverse devient  $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w)e^{iwx} dw$ . Dans la définition de  $f$ , nous avons utilisé  $x$  comme une variable d'intégration, au lieu de  $t$ . Les symboles  $\mathcal{F}(f)(w)$  et  $\mathcal{F}^{-1}(f)(x)$  sont également utilisés pour désigner la transformée de Fourier et son inverse, respectivement. Parfois, pour être plus précis, nous allons écrire  $\mathcal{F}(f(x))(w)$  au lieu de  $\mathcal{F}(f)(w)$ . Si  $f$  n'est pas continue en  $x$ , le côté gauche de (2.4) doit être remplacé par  $(f(x+) + f(x-))/2$ . L'intégrale de la transformée de Fourier inverse ne peut pas exister en tant que deux faces intégrale impropre, en général, cette intégrale doit être calculée comme une valeur principale de Cauchy :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a \hat{f}(w)e^{iwx} dw. \quad (2.5)$$

Mettre  $w = 0$  dans (2.3), nous constatons que

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (2.6)$$

Ainsi, la valeur de la transformée de Fourier à  $w = 0$  est égale à la surface signée entre le graphe de  $f(x)$  et l'axe des  $x$ , multipliée par un facteur de  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ .

La transformée de Fourier défini par (2.3) prend une fonction  $f$  et produit une nouvelle fonction  $\hat{f}$ , et la transformation inverse récupère la fonction d'origine  $f$  de  $\hat{f}$ . Ce procédé fait de paire de transformer est un outil puissant pour la résolution d'équations aux dérivées partielle, l'idée est de "transformée de Fourier" une équation donnée en une seule qui peut être plus facile à résoudre. Après avoir résolu l'équation transformée impliquant  $\hat{f}$ , on retrouve la solution du problème d'origine avec la transformation inverse. Pour nous aider dans le traitement des équations transformées, nous développons les propriétés fonctionnelles de la transformée de Fourier.

### Propriétés opérationnelles

Nous allons étudier le comportement de la transformée de Fourier dans le cadre des opérations communes sur les fonctions : combinaison linéaire, la différenciation, et la convolution.

#### **Théorème 2** *Linéarité*

*La transformée de Fourier est une opération linéaire, C'est-à-dire, pour deux fonctions intégrables  $f$  et  $g$  et les deux nombres réels  $a$  et  $b$  :  $\mathcal{F}(af + bg) = a\mathcal{F}(f) + b\mathcal{F}(g)$ . ■*

#### **Théorème 3** *Transformée de Fourier de dérivées*

1. *Supposons que  $f(x)$  est lisse par morceaux,  $f(x)$  et  $f'(x)$  sont intégrables, et  $f(x) \rightarrow 0$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ , alors  $\mathcal{F}(f') = iw\mathcal{F}(f)$ .*
2. *Si de plus  $f''(x)$  est intégrable, et  $f'(x)$  est lisse par morceaux et tend vers 0, si  $|x| \rightarrow \infty$  alors :  $\mathcal{F}(f'') = -w^2\mathcal{F}(f)$ .*
3. *En général, si  $f$  et  $f^{(k)}(x) / k = 1, 2, \dots, n-1$  sont lisses par morceaux et tendent vers 0 lorsque  $|x| \rightarrow \infty$  et  $f$  et ses dérivés d'ordre  $n$  sont intégrables, alors :  $\mathcal{F}(f^{(n)}) = (iw)^n \mathcal{F}(f)$ .*

■

**Théorème 4** *Dérivées de transformées de Fourier*

1. Supposons que  $f(x)$  et  $xf(x)$  sont intégrables, alors :

$$\mathcal{F}(xf(x))(w) = i \left[ \hat{f} \right]' (w) = i \frac{d}{dw} \mathcal{F}(f)(w).$$

2. En général, si  $f(x)$  et  $xf(x)$  sont intégrables, alors :  $\mathcal{F}(x^n f(x))(w) = i^n \left[ \hat{f} \right]^{(n)} (w)$ .

■

Les démonstrations de ses théorèmes sont évidents. pour plus de détails voir [GW].

**Convolution des fonctions**

**Définition 5** *Convolution des fonctions*

La convolution de deux fonctions  $f$  et  $g$  est défini par :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt. \tag{2.7}$$

La convolution de  $f$  et  $g$  est une opération binaire, qui combine la translation, la multiplication des fonctions, et l'intégration. Nous observons que la convolution est une opération commutative, c'est-à-dire  $f * g(x) = g * f(x)$ . Cela fait suite en faisant un changement de variables ( $t \rightarrow (t - x)$ ) dans (2.7).

**Théorème 6** *Transformée de Fourier des convolutions*

Supposons que  $f$  et  $g$  sont intégrables alors :  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ . ■

**Exemple 7** *Transformée de Fourier d'une gaussienne :  $e^{-ax^2/2}$*

Soit  $f(x) = e^{-ax^2/2}$ , où  $a$  est un réel strictement positif. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f)(w) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2} e^{-iwx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{a/2}x + \frac{i}{\sqrt{2a}}w)^2} dx = \frac{e^{-\frac{w^2}{2a}}}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \end{aligned}$$

On fait un changement de variable simple  $z = \sqrt{a/2}x + \frac{i}{\sqrt{2a}}w$ , nous obtenons :

$$\mathcal{F}(f)(w) = \frac{e^{-\frac{w^2}{ea}}}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \quad (2.8)$$

Et d'après l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

alors nous obtenons :

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2/2})(w) = \frac{e^{-\frac{w^2}{ea}}}{\sqrt{a}}$$

## 2.1.2 La transformée de Fourier et l'équation de la chaleur en dimension 1

Nous observons que l'équation de la chaleur implique une dérivée par rapport à la variable de temps  $t$ , et deux dérivées par rapport à la variable de l'espace  $x$ .

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases} \quad (2.9)$$

En raison de la présence de deux variables, il faut veiller à identifier la variable par rapport à laquelle la transformée de Fourier est calculée. Par exemple, pour  $t$  fixé, la fonction  $u(x, t)$  devient une fonction de la variable spatiale  $x$ , et en tant que telle, nous pouvons prendre sa transformée de Fourier par rapport à la variable  $x$ . On note cette transformation par  $\hat{u}(w, t)$ . Ainsi :

$$\mathcal{F}(u(x, t))(w) = \hat{u}(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-iwx} dx. \quad (2.10)$$

Nous aurons besoin des faits suivants (Nous prouvons utiliser la définition de la transformée de Fourier) :

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(w, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, t) e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t} [u(x, t) e^{-iwx}] dx \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-iwx} dx \right] = \frac{\partial}{\partial t} [\hat{u}(w, t)]. \end{aligned}$$

$$\hat{u}_{xx}(w, t) = -w^2 \hat{u}(w, t). \quad (\text{en appliquant le th\u00e9or\u00e8me 2.2})$$

Nous savons que  $u_t - c^2 u_{xx} = 0$  et  $u(x, 0) = \phi(x)$ . La transform\u00e9e de Fourier de ces deux \u00e9quations est donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\hat{u}(w, t)] + c^2 w^2 \hat{u}(w, t) = 0 \text{ et } \hat{u}(w, 0) = \hat{\phi}(w).$$

Observons que nous avons obtenu une \u00e9quation diff\u00e9rentielle de 1<sup>er</sup> ordre en  $t$ . La solution g\u00e9n\u00e9rale de cette \u00e9quation est :

$$\hat{u}(w, t) = A(w) e^{-c^2 w^2 t}$$

o\u00f9  $A(w)$  est un constant qui d\u00e9pend de  $w$ , mise en  $t = 0$  et en utilisant la transform\u00e9e de la condition initiale, nous obtenons :

$$\hat{u}(w, 0) = A(w) = \hat{\phi}(w)$$

par cons\u00e9quent,

$$\hat{u}(w, t) = \hat{\phi}(w) e^{-c^2 w^2 t} \tag{2.11}$$

En prenant la transform\u00e9e de Fourier inverse, nous obtenons la solution :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} dw. \tag{2.12}$$

La formule (2.12) nous donne la solution du probl\u00e8me de la valeur initiale sous la forme d'une int\u00e9grale. Dans la suite, nous allons calculer cette int\u00e9grale et de donner la r\u00e9ponse comme une convolution de  $\phi$  et une fonction d\u00e9termin\u00e9e et connue comme le noyau de Gauss.

Notre objectif ici est d'\u00e9valuer la transform\u00e9e de Fourier inverse en termes de  $\phi$ . Nous constatons de (2.11) que  $\hat{u}$  est le produit de deux transform\u00e9es de Fourier l'un d'eux \u00e9tant  $\hat{\phi}$  et l'autre  $e^{-c^2 w^2 t}$ . Rappelons que les produits de transform\u00e9es de Fourier correspondent aux convolutions (th\u00e9or\u00e8me 6), nous voyons que  $u$  est le produit de convolution de  $\phi$  avec la fonction dont la transform\u00e9e de Fourier est  $e^{-c^2 w^2 t}$ . Comme nous avons d\u00e9j\u00e0 vu (l'exemple

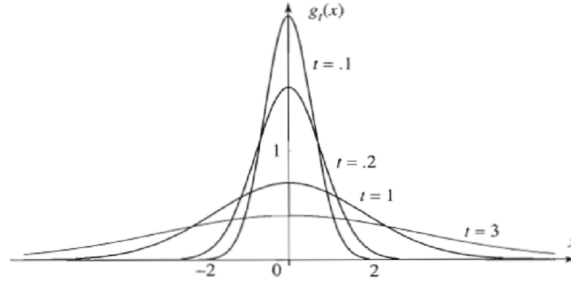


FIG. 2-1 – Noyau de Gauss

7), cette fonction est :  $G_t(x) = \frac{1}{c\sqrt{2t}}e^{-x^2/4c^2t}$  dite le noyau de Gauss.

(Nous pensons que le noyau de Gauss  $G_t(x)$  comme une famille de fonctions de  $x$ , une fonction pour chaque  $t > 0$  (figure 2.1)). Ce qui nous amène au résultat suivant qui s'avère important.

**Théorème 8** *Solution de l'équation de la chaleur comme CONVOLUTION*

La solution de l'équation de la chaleur (2.9) avec une condition initiale  $u(x, 0) = \phi(x)$  est la convolution de  $\phi$  avec le noyau de Gauss. Plus explicitement :

$$u(x, t) = \frac{1}{c\sqrt{2t}}e^{-x^2/4c^2t} * \phi(x) = \frac{1}{2c\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(s)e^{-(x-s)^2/4c^2t} ds \quad (2.13)$$

■

Quelques commentaires sont dans la formule pour ce qui concerne (2.13).

- Parce que le noyau de Gauss (en fonction de  $x$ ) décroît à 0 très rapidement quand  $x \rightarrow \pm\infty$ , la formule (2.13) peut être évaluée dans de nombreux cas intéressants, même si  $\phi$  n'a pas nécessairement une transformée de Fourier ; par exemple, lorsque  $\phi$  est bornée ou est un polynôme.
- Parce que la formule (2.13) consiste à diviser par  $\sqrt{t}$  et  $t$ , nous ne pouvons pas simplement brancher  $t = 0$  dans cette formule afin de vérifier la condition initiale  $u(x, 0) = \phi(x)$ . Alors, dans quel sens la solution (2.13) satisfait à la condition initiale ? Ecrivons la solution (2.13),  $u(x, t) = G_t(x) * \phi(x)$ , où  $G_t(x)$  est le noyau de Gauss. La solution satisfait la condition initiale dans le sens suivant : [GW]

$$\lim_{t \rightarrow 0} G_t(x) * \phi(x) = \phi(x)$$

### 2.1.3 L'équation de la chaleur en dimension 2

Considérons l'équation de diffusion linéaire (équation de la chaleur) en deux dimensions en coordonnées cartésiennes :

$$u_t = c^2 \Delta u \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.14)$$

Considérons les relations intégrales suivantes qui définissent la Transformée de Fourier en D-2 en coordonnées cartésiennes. Nous allons appeler la fonction  $\hat{u}$  le Transformée de Fourier de notre fonction d'origine  $u$  :

$$\begin{aligned} \hat{u}(w_1, w_2, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) e^{-i2\pi(w_1x+w_2y)} dx dy \\ u(x, y, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(w_1, w_2, t) e^{i2\pi(w_1x+w_2y)} dw_1 dw_2 \end{aligned}$$

Il existe autres conventions pour la transformée de Fourier. Par exemple, nous pourrions choisir :

$$\begin{aligned} \hat{u}(w_1, w_2, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) e^{-i(w_1x+w_2y)} dx dy \\ u(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(w_1, w_2, t) e^{i(w_1x+w_2y)} dw_1 dw_2 \end{aligned} \quad (2.15)$$

En général, nous définissons la Transformée de Fourier en dimension  $n$  par :

$$\begin{aligned} \hat{u}(w_1, w_2, \dots, w_n, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) e^{-i(w_1x_1+w_2x_2+\dots+w_nx_n)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \\ u(x_1, x_2, \dots, x_n, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(w_1, w_2, \dots, w_n, t) e^{i(w_1x_1+w_2x_2+\dots+w_nx_n)} dw_1 dw_2 \dots dw_n \end{aligned}$$

Passons maintenant à la résolution de l'équation (2.14) avec la condition initiale  $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ , En utilisant la transformée de Fourier définie par (2.15).

Nous avons, La transformée de Fourier de la dérivée de  $u$  par rapport à  $t$  est :

$$\begin{aligned}\hat{u}_t(w_1, w_2, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x, y, t) e^{-i(w_1x+w_2y)} dx dy \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) e^{-i(w_1x+w_2y)} dx dy \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial t} [\hat{u}(w_1, w_2, t)].\end{aligned}$$

et la transformée de Fourier de la deuxième dérivée par rapport à  $x$  est :

$$\begin{aligned}\hat{u}_{xx}(w_1, w_2, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, y, t) e^{-i(w_1x+w_2y)} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x, y, t) e^{-i(w_1x+w_2y)} dx \right] dy\end{aligned}$$

l'intégration par partie nous donne :

$$\hat{u}_{xx}(w_1, w_2, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ u_x(x, y, t) e^{-i(w_1x+w_2y)} \Big|_{-\infty}^{\infty} + iw_1 \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, y, t) e^{-i(w_1x+w_2y)} dx \right] dy$$

Le terme  $u_x(x, y, t) e^{-i(w_1x+w_2y)}$  se compose d'une fonction  $f$  oscillante avec le temps  $t$ . Mais si la fonction  $f$  est bornée alors  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ , (comme n'importe quel signal physique doit être, et même dans notre cas :  $u = l'image = signal\ bidimensionnel$ ).

Alors, nous obtenons :

$$\hat{u}_{xx}(w_1, w_2, t) = iw_1 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_x(x, y, t) e^{-i(w_1x+w_2y)} dx dy$$

Intégrons par partie une autre fois, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\hat{u}_{xx}(w_1, w_2, t) &= (iw_1)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) e^{-i(w_1x+w_2y)} dx dy \\ &= (iw_1)^2 \hat{u}(x, y, t)\end{aligned}$$

De la même manière, nous obtenons la transformée de Fourier de la deuxième dérivée par rapport à  $y$  :

$$\hat{u}_{yy}(w_1, w_2, t) = (iw_2)^2 \hat{u}(x, y, t)$$

Maintenant nous remplaçons dans l'équation (2.14) :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\hat{u}(w_1, w_2, t)] + c^2(w_1^2 + w_2^2)^2 \hat{u}(w_1, w_2, t) = 0$$

Finalement nous avons obtenu une équation différentielle de 1<sup>er</sup> ordre en  $t$ . La solution générale de cette équation est :

$$\hat{u}(w_1, w_2, t) = A(w_1, w_2) e^{-c^2(w_1^2 + w_2^2)^2 t}$$

où  $A(w_1, w_2)$  est un constant qui dépend de  $w_1$  et  $w_2$ , mise en  $t = 0$  et en utilisant la transformée de Fourier de la condition initiale, nous obtenons :

$$\hat{u}(w_1, w_2, 0) = A(w_1, w_2) = \hat{u}_0(w_1, w_2)$$

par conséquent,

$$\hat{u}(w_1, w_2, t) = \hat{u}_0(w_1, w_2) e^{-c^2(w_1^2 + w_2^2)^2 t} \quad (2.16)$$

Nous observons que  $\hat{u}$  est le produit de deux transformées de Fourier, l'une étant  $\hat{u}_0(w_1, w_2)$  et l'autre  $e^{-c^2(w_1^2 + w_2^2)^2 t}$ . Rappelons que les produits de transformées de Fourier correspondent aux convolutions (théorème 6), nous voyons que  $u$  est le produit de convolution de  $u_0(w_1, w_2)$  avec la fonction dont la transformée de Fourier est  $e^{-c^2(w_1^2 + w_2^2)^2 t}$ .

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(e^{-c^2(w_1^2 + w_2^2)^2 t})(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2(w_1^2 + w_2^2)^2 t} e^{i(w_1 x_1 + w_2 x_2)} dw_1 dw_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 w_1^2 t} e^{i w_1 x_1} dw_1 \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 w_2^2 t} e^{i w_2 x_2} dw_2 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(c\sqrt{t}w_1 + \frac{i}{2c\sqrt{t}}x_1)^2} dw_1 \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(c\sqrt{t}w_2 + \frac{i}{2c\sqrt{t}}x_2)^2} dw_2 \right) \end{aligned}$$

On fait un changement de variable simple  $z_i = (c\sqrt{t}w_i + \frac{i}{2c\sqrt{t}}x_i)$ , nous obtenons :

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-c^2(w_1^2 + w_2^2)^2 t})(x_1, x_2) = \left( \frac{e^{-\frac{x_1^2}{4ct}}}{2c\sqrt{t}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_1^2} dz \right) \left( \frac{e^{-\frac{x_2^2}{4ct}}}{2c\sqrt{t}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z_2^2} dz \right)$$

Et d'après l'intégrale de Gauss :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$$

alors nous obtenons :

$$\mathcal{F}^{-1}(e^{-c^2(w_1^2+w_2^2)^2t})(x_1, x_2) = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{4ct}}}{2c\sqrt{t\pi}} \frac{e^{-\frac{x_2^2}{4ct}}}{2c\sqrt{t\pi}} = \frac{e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{4ct}}}{4c^2t\pi}$$

Donc la fonction dont la transformée de Fourier est  $e^{-c^2(w_1^2+w_2^2)^2t}$  est :  $G_t(x_1, x_2) = \frac{e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2)}{4ct}}}{4c^2t\pi}$   
dite le noyau de Gauss en D-2.

Finalement, la solution de l'équation (2.14) avec la condition initiale  $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$  est donné par :

$$u(x, y, t) = u_0(x, y) * G_t(x, y) \quad (2.17)$$

Nous pouvons dire maintenant que nous avons montré l'existence de la solution de l'équation de la chaleur en D-2.

Passons maintenant à la démonstration de l'unicité.

**Théorème 9** *L'unicité de la solution*

Soient  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  alors il existe au plus une solution  $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  du problème de valeur initiale :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{sur } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u(x, 0) = g & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.18)$$

■

Pour démontrer le théorème 9, nous utilisons le principe du maximum donné par le théorème suivant :

**Théorème 10** *Le principe du maximum pour l'équation de la chaleur*

Supposons que  $u \in C_1^2(\bar{\Omega}_T \setminus \Gamma_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$  une solution de (2.18) alors  $\max_{\bar{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u$

■

**Preuve 11** *Supposons qu'il existe deux solutions  $u$  et  $v$  de (2.18). Soit  $w = u - v$ , donc  $w$  est une solution de :*

$$\begin{cases} w_t = \Delta w & \text{sur } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ w(x, 0) = 0 & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Nous notons  $\Omega_T = \mathbb{R}^n \times (0, T]$ ,  $\Gamma_T = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  et  $\bar{\Omega}_T = \Omega_T \cup \Gamma_T$

Par le principe du maximum :

$$\max_{\bar{\Omega}_T} w(x, t) = \max_{\Gamma_T} w(x, t) = 0.$$

Par conséquent  $w(x, t) \leq 0$  dans  $\bar{\Omega}_T$ , ce qui implique  $u(x, t) \leq v(x, t)$  dans  $\bar{\Omega}_T$ .

Ensuite, soit  $w' = v - u$ , alors  $w'$  est aussi une solution de l'équation ci-dessus et nous avons par le principe du maximum :

$$\max_{\bar{\Omega}_T} w'(x, t) = \max_{\Gamma_T} w'(x, t) = 0.$$

Par conséquent  $w'(x, t) \leq 0$  dans  $\bar{\Omega}_T$ , ce qui implique  $v(x, t) \leq u(x, t)$  dans  $\bar{\Omega}_T$ .

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{aligned} u(x, t) &\leq v(x, t) & (x, t) \in \bar{\Omega}_T \\ v(x, t) &\leq u(x, t) & (x, t) \in \bar{\Omega}_T \end{aligned}$$

Nous concluons que  $u = v$  dans  $\bar{\Omega}_T$ . ■

## 2.1.4 L'équation de la chaleur et le filtrage linéaire

L'équation la plus ancienne étudiée dans le traitement de l'image est l'équation de la chaleur parabolique linéaire :

$$\begin{cases} u_t(x, y, t) = \Delta u(x, y, t) \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{cases} \quad (2.19)$$

Notant que nous avons ici  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . En fait, nous considérons que  $u_0(x, y)$  est défini, en premier sur  $[0, 1]^2$ . Par symétrie, nous l'étendrons à  $[-1, +1]^2$ , puis dans l'ensemble  $\mathbb{R}^2$  par périodicité. Ce moyen d'étendrement de  $u_0(x, y)$  est classique en traitement d'images. La motivation sera plus claire dans la suite. Si  $u_0(x, y)$  prolongée de cette manière satisfait en outre  $\int |u_0(x, y)| dx < \infty$ , nous disons que  $u_0 \in L^1_{loc}$ .

La motivation pour introduire une telle équation est venue de la remarque suivante : la résolution de (2, 18) est équivalente à la réalisation d'un filtrage Gaussien linéaire,

qui a été largement utilisé en traitement du signal. ( $u$  est l'image filtrée,  $u_0$  est l'image originale). Plus précisément, soit  $u_0(x, y)$  être dans  $L^1_{loc}$ . Ensuite, la solution explicite de (2, 19), (comme nous avons vu dans la section précédente avec  $c = 1$ ), est donnée par :

$$u(x, y, t) = (G_{\sqrt{2t}} * u_0)(x, y)$$

où  $G_\sigma(x, y)$  représente le noyau gaussien en D-2 :

$$G_\sigma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2\sigma^2}} \quad (2.20)$$

La convolution par un noyau positif est le fonctionnement de base au filtrage linéaire de l'image. Il correspond au filtre passe-bas. Cette formule donne la correspondance entre le temps  $t$  et le paramètre d'échelle  $\sigma$  du noyau gaussien. Par conséquent, une structure de l'ordre  $\sigma$  exige pour arrêter le procédé de diffusion au temps  $T = \frac{1}{2}\sigma^2$ .

L'action du noyau Gaussien peut aussi être interprétée dans le domaine fréquentiel. Nous avons défini la transformée de Fourier

$$\mathcal{F}(u)(w_1, w_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) e^{-i(w_1x+w_2y)} dx dy$$

Il est bien connu que

$$\mathcal{F}(G_\sigma * u)(w_1, w_2) = \mathcal{F}(G_\sigma)(w_1, w_2) \mathcal{F}(u)(w_1, w_2)$$

et depuis

$$\mathcal{F}(G_\sigma)(w_1, w_2) = e^{-\frac{(w_1^2+w_2^2)}{2/\sigma^2}}$$

alors

$$\mathcal{F}(G_\sigma * u)(w_1, w_2) = \left( e^{-\frac{(w_1^2+w_2^2)}{2/\sigma^2}} \right) \mathcal{F}(u)(w_1, w_2)$$

à savoir, la convolution par une Gaussienne est un filtre passe-bas qui empêche les hautes fréquences (oscillations dans le domaine spatial).



FIG. 2-2 – L'image originale (à haut-gauche) et ses versions filtrées par un filtre linéaire (gaussien)

### Le filtre gaussien

Le filtre gaussien est une question très importante tant pour des raisons théoriques et pratiques. Ici, nous filtrons l'image en utilisant un noyau discret dérivés d'une forme à symétrie radiale de la fonction Gaussienne continue en D-2 définie par (2.20).

Les approximations discrètes à cette fonction continue sont spécifiées en utilisant deux paramètres libres :

1. La taille désirée du noyau (comme un filtre de masque  $N \times N$ );
2. La valeur de  $\sigma$ , l'écart type de la gaussienne.

Voici quelques exemples de filtrage des images par le filter gaussien. La figure (2.2).

Nous remarquons que le filtre linéaire est très efficace sur l'élimination du bruit, mais ce filtre (la propagation par l'équation de diffusion linéaire) ne permet pas une conservation des bords de l'image qui s'en retrouve donc altérée. Nous allons donc étudier d'autres méthodes afin de traiter ce problème.

## 2.2 Filtrage non linéaire "Le modèle de Perona-Malik"

Comme nous avons pu le constater, le filtrage linéaire (par l'équation de la chaleur) présente un défaut majeur pour l'analyse et le classification d'images : les contours sont endommagés par la diffusion de pixels avoisinants. Le problème qui se pose est donc : comment conserver les contours tout en éliminant le bruit sur une image ?

Le modèle proposé par Perona et Malik [PM] en 1990, répond a ce problème par un prise en compte du gradient.

### 2.2.1 Principe et définition

Proposé par Perona et Malik, ce modèle tend à préserver les contours de l'image en pondérant une fonction de diffusion (diffusion de la chaleur par exemple) par une fonction décroissante normalisée  $g$  ayant pour variable la norme du gradient. Ainsi, quand le gradient est nul la fonction de diffusion opère normalement sur la valeur du pixel (qui se trouve alors dans une zone de valeur uniforme) et quand celui ci est important (pixel situé sur un contour, zone à forte variation de valeur) la fonction de diffusion est «court-circuitée» par la fonction de conservation proche de zéro aux point de fort gradient.

On définit donc l'équation de Perona-Malik comme suit :

$$u_t = \operatorname{div}(g(\|\nabla u\|) \nabla u) \quad (2.21)$$

Avec la condition initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$  (l'image originale). où  $\operatorname{div}$  dénote l'opérateur de divergence,  $u$  est l'image (l'intensité de l'image) filtrée a l'étape de temps  $t$ ,  $\nabla u$  est le gradient spatial de  $u$ ,  $g$  est la fonction de diffusivité.  $g$  devrait être une fonction non négative et décroissante, approchant zéro à l'infini de sorte que le procédé de diffusion ait lieu seulement à l'intérieur des régions et n'affecte pas les bords, où la grandeur de gradient est suffisamment grande. Dans ce mémoire, seulement des diffusivité évaluées scalairement seront discutées.

### 2.2.2 Perfectionnement des bords (contours)

Les techniques de diffusion non linéaires préservent non seulement l'acuité des bords, elles peuvent également l'augmenter. Supposons que notre étape comme les bords sont

parallèles à l'axe des  $y$  et le profil d'intensité le long de l'axe des  $x$  est présenté par  $I(x)$ .

Définissons la fonction de flux :  $\phi(x) = g(x)x$ , où  $g(x)$  est la fonction de diffusivité. Au lieu de la fonction de diffusivité, la fonction de flux est employée souvent pour la facilité de l'arrangement.

Pour étudier le perfectionnement des bords, nous devons comprendre comment et sous quelle condition la pente des bords évolue avec le temps  $t$ . En d'autre terme, nous devons trouver la fonction  $\frac{\partial I_x}{\partial t}$ . Ici le temps se rapporte à l'étape d'itération.

Dans le cas d'un signal de D-1, l'équation de diffusion peut être réécrite en terme de flux comme suit :

$$I_t = \phi'(I_x)(I_{xx}) \quad (2.22)$$

Augmentons le côté droit de l'équation (2.21) comme suit :

$$\text{div}(g(x, t)I_x) = \frac{\partial}{\partial x}(g(x, t)I_x) = \frac{\partial g(I_x)}{\partial x}I_x + g(I_x)I_{xx} \quad (2.23)$$

La dérivée du gradient des bords ou de la pente en ce qui concerne  $t$  est donné par :

$$\frac{\partial}{\partial t}(I_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi'(I_x)I_{xx}) \quad (2.24)$$

Si la fonction des bords est suffisamment lisse (smooth), l'ordre de la différentiation peut être changé comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial x}(I_t) = \frac{\partial}{\partial t}(I_x) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi'(I_x)I_{xx}) \quad (2.25)$$

Alors le taux de changement de la pente peut être exprimé par :

$$\frac{\partial I_x}{\partial t} = \phi''(I_x)I_{xx}^2 + \phi'(I_x)I_{xxx} \quad (2.26)$$

Si les bords sont placés le long de la direction de  $x$ , suivant les indicateur de la figure (2.3), (à haut-gauche), puis autour de point d'inflexions la deuxième dérivée ( $I_{xx} = 0$ ) et ( $I_{xxx} = 0$ ), (à bas-gauche). Ainsi le signe de  $\phi'(I_x)$  détermine le comportement des bords autour du point d'inflexion, et si  $\phi'(I_x) > 0$  la pente des bords diminue et si  $\phi'(I_x) < 0$  la pente augment avec le temps.

Une des deux fonctions de diffusivité proposées par Perona et Malik a la forme sui-

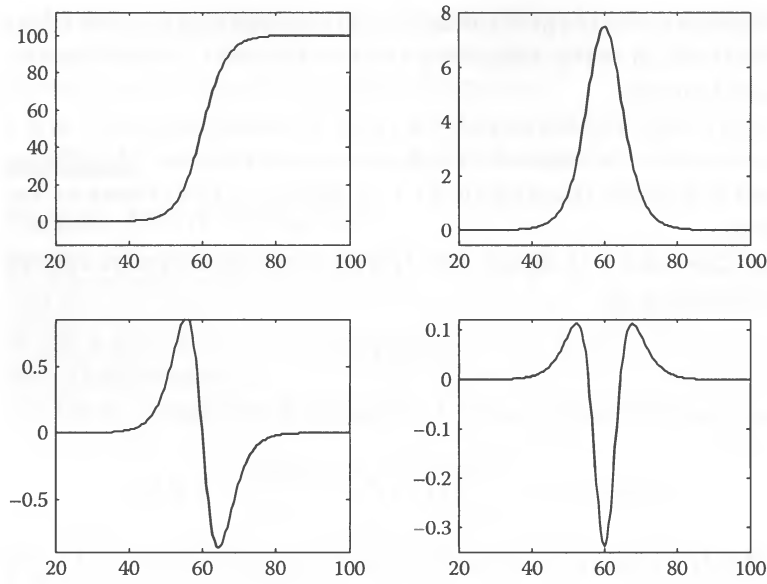


FIG. 2-3 – La fonction de bords et ses dérivées, première, deuxième et troisième, à haut-gauche, à haut-droit, à bas-gauche, et à bas-droit, resp

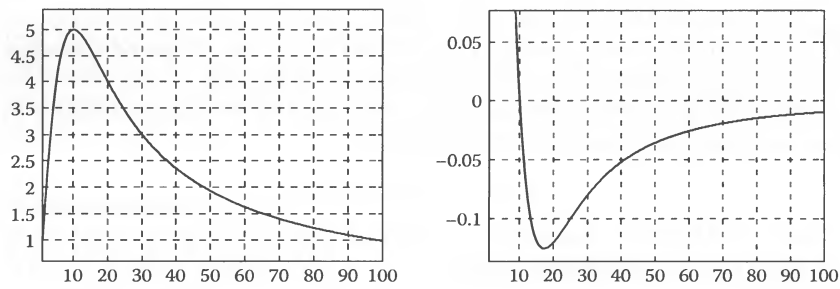


FIG. 2-4 – La fonction du flux (à gauche) et sa dérivée (à droite)

vante :

$$g(x) = 1/(1 + (x + \delta)^2) \quad (2.27)$$

où  $\delta$  est le paramètre de seuil ou de contraste de bruit, la dérivée de la fonction de flux est négative quand  $\phi'(I_x) < \delta$  et positive quand  $\phi'(I_x) > \delta$ . La figure (2.4) montre les courbes du flux et de sa dérivée pour  $\delta = 10$ . Comme vu dans cette figure, la dérivée du flux pour les valeur moins que le seuil est positive, et elle est négative quand ils sont plus grands que le seuil.

La figure (2.5) montre les courbes du profil de bords et le changement de sa pente avec le temps en fonction de la position. Sur la courbe de  $\frac{\partial I_x}{\partial t}$  (dénotée par la ligne tirée).

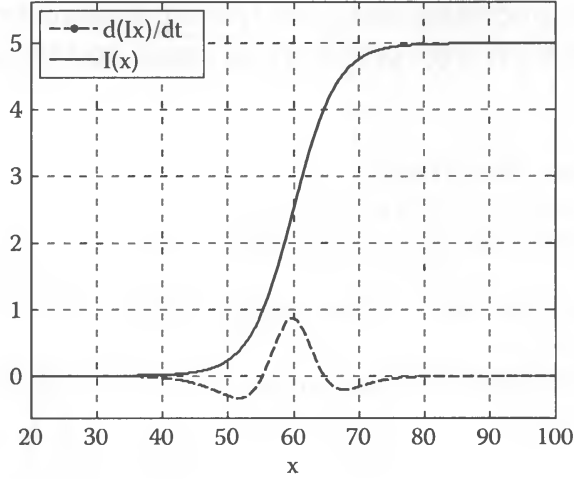


FIG. 2-5 – Une fonction de bords et le taux du gradient de bords

Le lobe central positif dénote que la pente du bord augmente autour derrière du point d’inflexion des bords pendant que le procédé de diffusion continue, tandis que les lobes négatifs signifient une diminution de pente.

Dans le cas bidimensionnel l’équation (2.22) est remplacé par :

$$I_t = \phi'(I_x)I_{\eta\eta} + g(|I_x|^2)I_{\xi\xi} \quad (2.28)$$

où  $\xi$  et  $\eta$  dénotent les directions perpendiculaire et parallèle sur  $I_x$  resp. voir les détails dans [AGLM].

### 2.2.3 Le filtrage linéaire contre le filtrage non linéaire

Si nous employons la fonction de diffusivité constante (c.-à-d  $g(x) = 1$ ) Alors la diffusion (le filtrage) va être linéaire, et l’équation de diffusion sera de la forme (2.2). Ici nous voudrions montrer la différence entre le filtrage linéaire et le filtrage non linéaire, et leur impact sur l’acuité de bords.

La figure (2.6) montre les courbes de fonction de bords en D-1 et ses versions filtrées par un filtre linéaire brouille les bords, tandis que le filtrage non linéaire préserve l’acuité de bords.

La figure (2.7) montre une image originale (en D-2) et ses versions filtrées par un filtre linéaire brouille les bords, tandis que le filtrage non linéaire préserve l’acuité de bords.

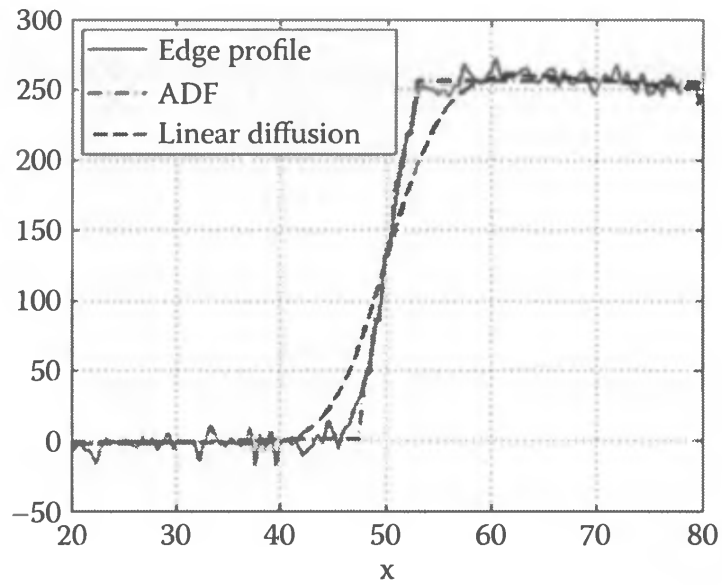


FIG. 2-6 – Une fonction de bords en D-1 et ses versions filtrées par un filtre linéaire et par un filtre non linéaire.

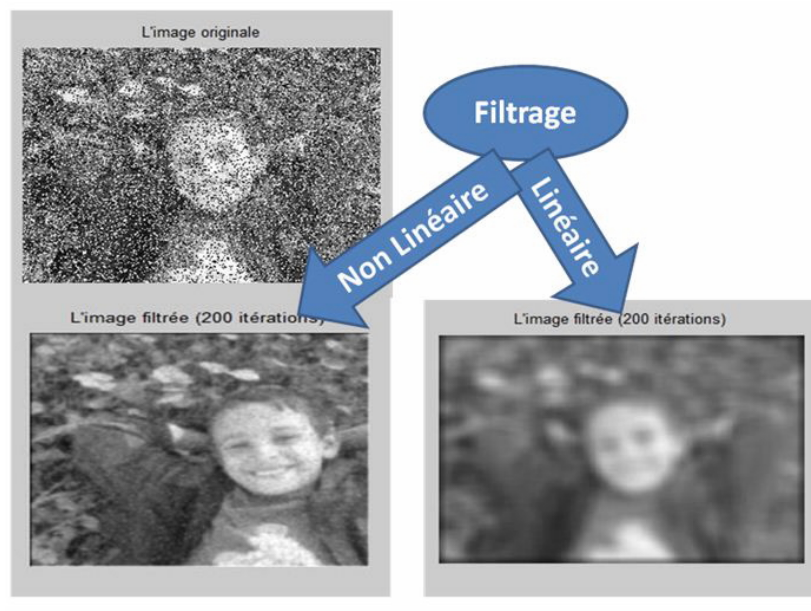


FIG. 2-7 – Une image originale et ses versions filtrées par un filtre non linéaire et par un filtre linéaire, à haut-gauche, à bas-gauche, et à bas-droit, resp

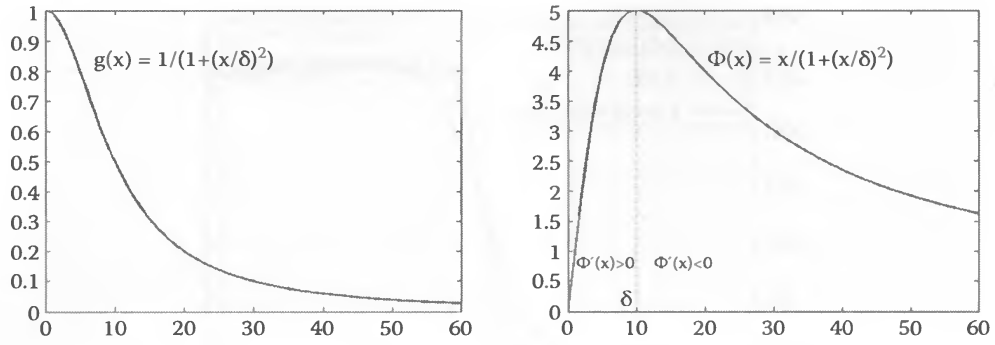


FIG. 2-8 – La fonction de diffusivité (à gauche) et sa fonction de flux (à droit).

## 2.2.4 La fonction de diffusivité

La capacité du perfectionnement des bords par un filtre de diffusion anisotrope (non linéaire) dépend de la fonction de diffusivité et du seuil de bruit, qui est également connu comme seuil de contraste.

La figure (2.8) montre que la fonction de diffusivité donnée par l'équation (2.27) est positive et strictement décroissante, elle s'approche 0 pendant que  $x$  s'approche  $\infty$ , et sa fonction de flux atteint son maximum au seuil de bruit. Rappelons que  $\phi'(x) > 0$  quand  $\phi(x) < \delta$  et  $\phi'(x) < 0$  quand  $\phi(x) > \delta$ . Par conséquent, la diffusion est vers l'avant pour  $\phi(x) < \delta$  et elle est vers l'arrière pour  $\phi(x) > \delta$ .

La fonction de diffusivité joue un rôle critique dans l'exécution du filtrage par diffusion non linéaire. Ainsi, différentes fonctions de diffusivité ont été proposées. La période d'affaiblissement (chute), en particulier, d'une fonction de diffusivité effectue sa capacité du perfectionner de bords. Les fonctions de diffusivités les plus utilisées généralement sont :

Les fonctions de diffusivité les plus utilisées généralement	
$g_1(x)$	$= 1/(1 + x^2/\delta^2)$
$g_2(x)$	$= \exp(-x^2/\delta^2)$
$g_3(x)$	$= \begin{cases} 1 - \exp[-3.15/(x/\delta)^4], & \text{pour } x > 0 \\ 1 & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$
$g_4(x)$	$= 0.5 \cdot ((\tanh(0.2 \cdot (\delta - x))) + 1)$
$g_5(x)$	$= \begin{cases} \frac{1}{2} - [1 - (x/\delta)^2]^2, & \text{pour }  x  > \delta \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$

Le modèle de Perona-Malik a plusieurs difficultés, pratiques et théoriques :

1. Supposant que le signal est bruyant, avec le bruit blanc par exemple. Alors les grands gradients  $\|\nabla u\|$  sont présentés par le bruit. D'ailleurs,  $\nabla u$  est dans la théorie illimitée. Ainsi, le lissage conditionnel présenté par le modèle ne donnera pas des bons résultats, puisque tous ces bords de bruit seront gardés.
2. La deuxième difficulté est résultée de l'équation elle-même. La fonction  $g$  dans (2.21) doit être considérée soigneusement pour obtenir la théorie disponible. En effet, afin d'obtenir l'existence et l'unicité des solutions,  $g$  doit vérifier que  $sg(s)$  est non décroissante. Dans la pratique nous découvrons que, si pour quelques fonctions  $g$  avec  $sg(s)$  sont non croissantes, les images très étroites pourraient produire les solutions divergentes et donc les bords différents.

# Chapitre 3

## Un modèle pour le perfectionnement du contour d'image

Une technique appropriée du traitement d'image se base sur la formation d'EDP de type d'évolution pour l'intensité d'image  $u(x, y)$ , ou brièvement (l'image), cette fonction est également appelée le niveau de gris, prend des valeurs entre 0 et 1,  $u \in [0; 1]$ , et elle est définie sur un domaine bidimensionnel de l'image.

Le modèle habituel d'évolution mène à une équation non linéaire de type parabolique, probablement dégénérée ou singulière, la non linéarité est créée par la loi rapportant le flux d'intensité de l'image par l'intensité de l'image.

Il a été observé par Perona et Malik, que, pour un choix approprié de cette non linéarité fondamentale, est apparu un effet de perfectionnement des bords d'image, qui a un grand intérêt dans l'application au traitement, au bruitage, et au débruitage des images.

Le modèle de diffusion anisotrope de Perona et Malik a une influence profonde dans le domaine, étant la source de beaucoup de derniers développements, dont : le modèle proposé par Malladi et Sethian [MS], ce modèle mène après la graduation appropriée à l'équation suivante pour l'intensité d'image :

$$u_t = (1 + \|\nabla u\|^2)^{\frac{1+p}{2}} \kappa \quad (3.1)$$

où  $\nabla u$  dénote le gradient spatial de  $u$ ,  $\kappa$  dénote la courbure de la surface  $z = u(x, y)$ , et  $p$  est un paramètre constant.

L'équation représente le mouvement par la courbure (écoulement de la courbure) peut

être écrite comme suit [BV] :

$$u_t = \frac{(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy}}{(1 + u_x^2 + u_y^2)^{1+\alpha}} \quad (3.2)$$

où  $\alpha = -p/2$ .

Le comportement asymptotique de ce modèle fait dans [MS], montre le perfectionnement des contrastes d'intensité par la formulation des régions de grands gradients d'intensité, c.-à-d. le composant normal du gradient d'intensité d'image devient tout à fait grand. Ce phénomène a été analysé dans [B01], où une autre simplification du modèle a été proposée afin de se concentrer sur la couche limite, où les grands gradients se concentrent.

Une discussion locale autour d'un point pointu de gradient (a sharp gradient point) et le choix de l'axe des abscisses comme direction normale à la couche limite, nous pouvons négliger l'effet des dérivées de  $y$  en celles qui concernent les dérivées de  $x$  dans (3.2). De cette façon nous obtenons l'équation réduite :

$$u_t = \frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{1+\alpha}} \quad (3.3)$$

Le problème mathématique consiste en résolvant cette équation avec les données appropriées de la frontière, en sachant que :  $u = 0$  au côté gauche du contour, et  $u = 1$  au côté droit (soit qu'une distance finie ou infinie), avec une condition initiale :  $u(x, 0) = u_0(x)$ , satisfaisant  $0 < u_0 < 1$  et  $u'_0 > 0$  dans un intervalle  $I = [a, b]$  et valeurs constantes autrement, zéro à gauche et 1 à droite. Comme a été précisé dans [B01]. le perfectionnement du contour prend une place dans ce modèle (avec des paramètres appropriés) pour tout  $\alpha \geq 0$  : le gradient spatial des solutions ( $u_x$ ) augmente avec le temps et leur support rétrécit.

En effet, nous montrons au-dessous d'un tel comportement qui peut être observé dans la gamme plus étendue d'exposant  $\alpha > 1/2$ . Les conditions sur  $u_0$  peuvent être relaxé, mais d'autre part des problèmes surgissent. Ainsi, la restriction moins rigoureuse de taille ( $0 \leq u_0 \leq 1$ ) où le manque du monotonie crée les solutions de rechange intéressantes, qui également seront brièvement discutées.

Remarquons que ce n'est pas le seul modèle qui emploie des équations de diffusion non linéaire pour le traitement d'image et le perfectionnement.

Dans la gamme des exposants  $\alpha \geq 0$ , l'équation (3.3) tombe dans la classe des équations

paraboliques dégénérées avec la dégénérescence à  $(u_x = \infty)$ , avec précision la valeur limite qui est concernée au perfectionnement de contour.

Une recherche sur le phénomène du perfectionnement de gradient dans l'équation effectuée dans le document [B01], en le rapportant à la convergence vers l'asymptotique auto-similaire d'un modèle approximatif. Elle disparaît comme suit : l'évolution observée des solutions vers une arrangement avec des grands gradients le rend admissible de simplifier plus l'expression  $(1 + u_x^2)$  dans l'équation (3.3) à  $u_x^2$ . De sorte que l'équation réduite appropriée devienne :

$$u_t = u_x^{-2(1+\alpha)} u_{xx} \quad (3.4)$$

Avec ces préliminaires nous sommes prêts à commencer la construction et l'analyse des solutions pour une classe générale des équations qui sont normales pour notre application.

### 3.1 L'équation de diffusion non linéaire

Nous allons maintenant à la construction de la théorie mathématique du problème d'évolution unidimensionnel avec les conditions initiales et les conditions aux bords du type mentionné au-dessus. Mais en remplaçant la classe spéciale de l'équation (3.3) par la classe large d'équations de diffusion non linéaire de la forme :

$$u_t = (\Phi(u_x))_x \quad (3.5)$$

La fonction non linéaire  $\Phi$  exprime la dépendance du flux d'image au gradient de l'intensité d'image. Elle peut s'appeler la loi de flux de notre processus, ou bien la fonction constitutive. Dans cet arrangement général  $\Phi$  peut être n'importe quelle fonction réelle croissante définie dans un intervalle approprié des gradients. Nous supposons pour la convenance que :

( $H_1$ )  $\Phi(s)$  est  $C^\infty$  très petite et croissante dans les intervalles  $0 < s < \infty$  et  $-\infty < s < 0$ , tenons compte d'un comportement tout à fait arbitraire si  $s \rightarrow 0$  ou  $|s| \rightarrow \infty$ .

Selon Barenblatt et Vazquez [BV] ce niveau de généralité, au lieu d'obscurcir le problème, fait plus évidemment, la relation entre la diffusion non linéaires et le perfectionnement du contour. Des prétentions légèrement plus générales peuvent être faites sur  $\Phi$ , mais elles

ne sont pas essentielles pour nos buts actuels.

Nous voulons caractériser la classe de ces  $\Phi$  pour lesquels nous pouvons construire des solutions avec le perfectionnement de gradient. Nous voulons également décrire les taux auxquels la formation des profils prend une place, ce fait justifiant et prolongeant des résultats de [B01] aux équations réelles comme (3.3) et à des données générales. Le problème mathématique que nous posons consiste à résoudre l'équation parabolique non linéaire (3.5) avec la condition initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$  satisfie  $0 \leq u_0 \leq 1$ , et autres condition appropriées, avec les données aux bords  $u = 0$  au côté gauche du contour et  $u = 1$  au côté droit. En regardant la condition initiale, nous remarquons que nous sommes principalement intéressés par les solutions monotones c.-à-d  $u_x \geq 0$ , pour l'équation (3.3), et cette condition suivra naturellement d'un état semblable (similaire) de monotonie sur les données initiale. Quand aux conditions aux bords, elles s'avèrent selon la forme de  $\Phi$ , la frontière peut être choisie pour situer à l'infini ou à distance finie. Ce dernier cas sera celui d'intérêt pour nous, et alors le problème doit être correctement posé comme problème de frontière libre.

Rappelons l'exemples le plus simple de  $\Phi$  et certaines de difficultés que nous rencontrerons. En effet un exemple tout à fait important et simple est la fonction puissance, que nous écrivons comme suit :  $\Phi(s) = (1/m)s^m$  définie pour  $s \geq 0$ . De sorte qu'il soit conformé à (3.4) avec  $m = -1 - 2\alpha$  depuis  $\Phi'(s) = s^m$ . Il n y a en principe aucune raison de limiter la généralité de l'exposant  $m$  dans le traitement mathématique pour suivre, et ceci mènera au comportement très différent saisi à côté de cette famille, le cas  $m = 0$  est inclus sous la forme  $\Phi(s) = \log(s)$ , c.-à-d.  $\Phi'(s) = 1/s$ . Noter que dans les cas  $m < 0$  la fonction  $\Phi$  est négative mais la quantité importante pour le caractère parabolique de l'équation c.-à-d.  $\Phi'(u_x)$  est toujours positive. Finalement, nous notons que l'équation (3.3) correspond à  $\Phi'(s) = (1 + s^2)^{-(1+\alpha)}$ , elle se dégénére si ( $s \rightarrow \infty$ ) dans la gamme décrite  $\alpha \geq 0$ , de même si  $\alpha > -1$  mais l'équation est parfaitement parabolique dans les régions lié au  $u_x$ .

### 3.1.1 Les solutions non monotones

Les rapports ci-dessus sont faits sur la prétention que les solutions sont monotones,  $u_x \geq 0$ , qui n'est pas justifiée dans notre arrangement du problème, mais il limite la généralité mathématique. Quand à considérer les solutions non monotones sont usuelles

dans la littérature de diffusion non linéaire pour prolonger la puissance de non linéarité à l'argument ( $s = u_x < 0$ ) de la manière symétrique le plus simple  $\Phi(s) = (1/m) |s|^{m-1} s$ . Ce que donne  $\Phi'(s) = |s|^{m-1}$ , toujours non négative. Cette définition ne pose aucun problème quand  $m > 0$ , et les solutions avec les signes changeant existent et correspondent aux données initiales à la même propriété. Cependant, nous sommes intéressés par les exposants  $m < 0$  (Diffusion très rapide) où  $\Phi'$  est singulière à  $s = 0$  et la fonction  $\Phi$  n'est pas plus monotone. La difficulté a été étudiée dans [RV02] en menant à la conséquence que les solutions avec les signes changeant n'existent pas, même dans le sens faible quand  $m \leq 0$ . C'est une conséquence de la singularité de l'équation (3.3) au niveau  $u_x = 0$  et n'affecte pas à l'équation (3.3). En raison de cet obstacle, nous nous concentrons ici sur le problème avec les solutions monotones.

## 3.2 Deuxième formulation de l'équation de Diffusion non linéaire

Dans l'équation (3.5) si nous posons  $v = u_x$  nous obtenons l'équation satisfaite par le gradient d'intensité d'image :

$$v_t = \Phi(v)_{xx} \quad (3.6)$$

Elle s'appelle habituellement l'équation de filtration non linéaire, et elle est la classe la plus standard des EDNL étudiées dans les littératures. Inversement, nous pouvons récupérer la formulation de  $u$  d'une solution  $v(x, t)$  pour (3.6) au moyen de la règle :

$$u(x, t) = c + \int_{\Gamma} v dx + \Phi(v)_x dt \quad (3.7)$$

Intégré au long de toute courbe  $\Gamma$  dans le domaine de définition de  $v$  qui joint un point fixé  $(x_0, t_0)$  au point général  $(x, t)$ . Le constant  $c$  est la valeur de  $u$  à  $(x_0, t_0)$  choisi à la volonté en principe. Le calcul est justifié pour les solutions lisses  $v$  et  $\Phi$  lisse, mais se tient dans un contexte beaucoup plus large.

Les solutions monotones  $u$  de (3.5) se traduisent aux solution non négatives  $v$  pour (3.6) et réciproquement. Dans ce contexte ,  $u$  est habituellement vue comme fonction de masse pour  $v$ , depuis quand nous prenons  $\Gamma$  être un segment de la ligne  $t = t_0$  la formule

(3.7) devient :

$$u(x, t_0) - u(x_0, t_0) = \int_{x_0}^x v(y, t_0) dy$$

Le phénomène du perfectionnement de gradient peut être alors traduit en langage habituel de diffusion en tant que concentration de masse. Nous maintiendrons dans la suite l'intensité de dénomination ou l'intensité d'image pour la solution  $u$  de (3.5) et nous voyons la solution  $v = u_x$  de (3.6) comme gradient d'intensité. Dans ce contexte  $\Phi(u_x) = \Phi(v)$  est le flux d'intensité. Finalement,  $\Phi'(u_x) = \Phi'(v)$  est la diffusivité.

### 3.3 Solutions du problème de Dirichlet-solutions de type I

Nous essayons maintenant d'appliquer la théorie plus standard d'équation de diffusion non linéaire pour résoudre le problème d'évolution motivé par l'application dans la section au-dessus.

Nous montrons après, que cette exécution peut être effectuée d'une manière plutôt standard pour une classe large de  $\Phi$ , mais un tel processus donne une évolution sans l'effet de concentration, par conséquent, elle sera inutile pour nos buts dans le traitement d'image.

#### 3.3.1 L'arrangement le plus simple

Généralisant les propriétés bien connues de l'équation de la chaleur (le choix  $\Phi(s) = s$ ), nous considérons le premier cas où  $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$  et  $\Phi'$  sa nulle pas. Nous posons le problème de Cauchy pour l'équation (3.5) à la ligne  $x \in \mathbb{R}$  pour  $t > 0$  avec une donnée initiale bornée  $0 \leq u_0 \leq 1$ , et nous obtenons une unique solution lisse  $u(x, t)$  définie sur  $Q = \mathbb{R} \times (0, \infty)$  où  $0 < u < 1$ ,  $u$  est lisse pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $t \geq \tau > 0$ . Nous pouvons aussi travailler avec l'équation (3.6) : puis, si  $v_0 = u_{0,x}$  est localement intégrable (une mesure de Radon fera aussi) et tel que :  $\int_{\mathbb{R}} v_0(x) dx = 1$ , la solution  $v(x, t)$  est lisse dans  $Q$  est satisfait quelque type des conditions d'intégrabilité,  $\int_{\mathbb{R}} v(x, t) dx = 1$ . Pour les solutions  $v \geq 0$  ceci s'appelle la conservation de masse. Utilisant la formule (3.7) nous obtenons une solution lisse  $u(x, t)$

dans  $Q$  tel que la condition initiale :

$$u(x, 0) = u_0(x) = \int_{-\infty}^x v_0(y) dy$$

pris avec les conditions aux limites

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = 1,$$

tenir localement uniformément à temps. En d'autres termes,  $v_0 \geq 0$  implique que  $u_x = v \geq 0$ , qui implique par le principe du maximum fort, que  $u_x > 0$ . Il suit cela  $0 < u(x, t) < 1$  dans  $Q$ . Notons que, en raison de la régularité de condition sur  $\Phi$ , ces solutions sont lisses à  $(x, t)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $t > 0$ , même si les données initiales n'existent pas.

### 3.3.2 Dispersion des solutions avec le temps

Au premier regard, le type de solution que nous avons construite apparaît de résoudre notre problème d'image. Cependant, il manque d'un composant de base, c.-à-d. : la concentration finale du gradient d'intensité. Au contraire, si nous considérons l'équation de la chaleur  $u_t = u_{xx}$ , les solutions peuvent être exprimées en termes de fonction d'erreur, étendre avec le temps et les gradients tend vers zéro. Par exemple, si  $v_0 = u_{0,x}$  est intégrable, alors  $v(x, t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow 0$  à un taux d'ordre de  $t^{-1/2}$ , et prises une forme gaussienne de l'espace :

$$v(x, t)t^{1/2} \sim \exp(-x^2/4t).$$

Si nous supposons que la solution auto-similaire de l'équation de la chaleur est de la forme :  $v(x, t) = t^\lambda \varphi(\xi)$  avec  $\xi = xt^{-\beta}$ , alors :

$$\begin{aligned} v_t &= t^{\lambda-1}(\lambda\varphi(\xi) - \beta\xi\varphi'(\xi)) \\ v_{xx} &= t^{\lambda-2\beta}\varphi''(\xi) \end{aligned}$$

Remplaçons dans l'équation de la chaleur, nous obtenons

$$\lambda\varphi(\xi) - \beta\xi\varphi'(\xi) = t^{1-2\beta}\varphi''(\xi) \quad (3.8)$$

Si nous dérivons par rapport à  $t$ , nous obtenons

$$0 = (1 - 2\beta)t^{-2\beta}\varphi''(\xi) \Rightarrow 1 - 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 1/2.$$

Et nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v(x, t) dx &= 1 \Rightarrow t^\lambda \int_{\mathbb{R}} \varphi(xt^{-\beta}) dx = 1 \Rightarrow t^{\lambda+\beta} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) d\xi = 1 \\ &\Rightarrow \lambda = -\beta = -1/2 \end{aligned}$$

Donc l'équation (3.8) devienne :

$$-\frac{1}{2}\varphi(\xi) - \frac{1}{2}\xi\varphi'(\xi) = \varphi''(\xi) \iff -\frac{1}{2}(\xi\varphi(\xi))' = \varphi''(\xi)$$

Par intégration

$$-\frac{1}{2}\xi\varphi(\xi) = \varphi'(\xi) + cst$$

si  $cst = 0$ , alors nous obtenons :

$$-\frac{1}{2}\xi = \frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)} \Rightarrow \varphi(\xi) = c \exp(-\xi^2/4)$$

Finalement, la solution de l'équation de la chaleur dans ce cas est :

$$v(x, t) = ct^{-1/2} \exp(-x^2/4t)$$

dite la solution naturelle de l'équation de la chaleur.

Et un résultat similaire (avec des taux possiblement différents) s'applique à des données plus générales  $u_0$  ayant des limites définies à  $\pm\infty$ , et à toutes les fonctions  $\Phi$  de la classe ci-dessus.

### 3.3.3 Extension des solutions de type I

Même si ce n'est pas la classe des solutions que nous avons recherchées nous poursuivons un peu plus loin l'analyse, puisque c'est la classe standard trouvée dans les études de la diffusion non linéaire ou de la propagation thermique.

La classe des fonction constitutives  $\Phi$  pour qu'il existe des solutions d'une classe ( $0 \leq$

$u \leq 1$ ) avec un caractère dispersif peut être étendu pour inclure un choix tout à fait général de  $\Phi$  sur l'état de tenir compte d'un concept convenablement généralisé de solution. Ainsi elle est bien connue après Bénéilan, Crandall et d'autres que nous pouvons prendre  $\Phi$  Comme n'importe quelle fonction non décroissante continue, et le problème de Cauchy est bien-posé dans la classe soi-disant de solution lisse avec les données de  $L^1(\mathbb{R})$ . En effet, on peut permettre à  $\Phi$  être discontinue mais ce sera sans intérêt particulier ici. Au contraire, nous garderons l'acception (prétention) de la régularité et de la monotonie strict pour ( $0 < s < \infty$ ), pour la simplicité de la présentation (et puisque elle satisfait dans l'application que nous traitons).

Commentons les propriétés principales des solutions pour cette classe des équations pour le cas de puissance non linéaire  $\Phi(s) = (1/m) s^m, s \geq 0$ , mentionné ci-dessus. Nous pouvons considérer que  $m$  est un paramètre réel, positif en principe mais pas nécessairement comme nous verrons. La définition est étendue à solution avec des valeurs négatives, comme dans la formule  $\Phi(s) = (1/m) |s|^{m-1} s$ . Ainsi, pour  $m > 0$  l'équation  $v_t = (v^m)_{xx}$  (Ou meilleur  $v_t = (|v|^{m-1} v)_{xx}$ ) produit d'un semi groupe positif des contractions dans l'espace  $L^1(\mathbb{R})$ . En d'autre terme, pour toute  $v_0 \in L^1(\mathbb{R})$  il existe une unique fonction  $v \in C([0, \infty : L^1(\mathbb{R})), v \geq 0$  avec  $v^m \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  tel que l'équation est satisfaite au sens de distributions dans  $Q = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ , les données initiales sont rentrés au sens de  $L^1(\mathbb{R})$ , et  $v_0 \mapsto v(\cdot, t)$  est un  $L^1 - contraction$ . D'ailleurs, la masse totale est conservée

$$\int_0^\infty v(x, t) dx = \int_0^\infty v_0 dx.$$

Dans notre application nous devons encore imposer la condition supplémentaire de la masse totale 1. Et alors nous récupérons l'intensité d'image au moyen de la formule

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^x v(x', t) dx'$$

et l'intensité  $u = 0$  à  $(-\infty)$  et  $(u = 1)$  à  $(+\infty)$ .

Les solutions  $v(x, t)$  avec la masse finie mettent vers zéro uniformément sont :

$$v(x, t) \sim t^\lambda \quad \text{où } \lambda = -1/(m + 1)$$

la notation de l'équation (3.4) signifie  $\lambda = 1/2\alpha, (m = -1 - 2\alpha)$ . en effet, le taux

asymptotique vient de la comparaison avec le source-type de solution auto similaire qui prend la forme :

$$v(x, t) = t^\lambda \varphi(xt^\lambda), \text{ avec } \lambda = -1/(m + 1)$$

Puisque, si nous supposons que la solution auto similaire de l'équation (3.6) est de la forme :  $v(x, t) = t^\lambda \varphi(\xi)$  avec  $\xi = xt^{-\beta}$ , alors :

$$\begin{aligned} v_t &= t^{\lambda-1}(\lambda\varphi(\xi) - \beta\xi\varphi'(\xi)) \\ (v^m)_{xx} &= mt^{\lambda m-2\beta} \left[ \varphi''(\xi)\varphi^{m-1}(\xi) + (m-1)(\varphi'(\xi))^2 \varphi^{m-2}(\xi) \right] \end{aligned}$$

Remplaçons dans l'équation (3.6), nous obtenons

$$\lambda\varphi(\xi) - \beta\xi\varphi'(\xi) = t^{1+\lambda(m-1)-2\beta} \left[ \varphi''(\xi)\varphi^{m-1}(\xi) + (m-1)(\varphi'(\xi))^2 \varphi^{m-2}(\xi) \right]$$

Si nous dérivons par rapport à  $t$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + \lambda(m-1) - 2\beta) t^{\lambda(m-1)-2\beta} \left[ \varphi''(\xi)\varphi^{m-1}(\xi) + (m-1)(\varphi'(\xi))^2 \varphi^{m-2}(\xi) \right] \\ \Rightarrow 1 + \lambda(m-1) - 2\beta &= 0. \end{aligned}$$

Et nous avons aussi :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v(x, t) dx &= 1 \Rightarrow t^\lambda \int_{\mathbb{R}} \varphi(xt^{-\beta}) dx = 1 \Rightarrow t^{\lambda+\beta} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) d\xi = 1 \\ \Rightarrow \lambda &= -\beta \end{aligned}$$

alors :

$$1 + \lambda(m-1) - 2\beta = 0 \iff \lambda = -1/(m+1)$$

donc les solutions ont pris la forme

$$v(x, t) = t^\lambda \varphi(xt^\lambda), \text{ avec } \lambda = -1/(m+1)$$

pour une certaine fonction symétrique de profil  $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$  tels que :  $G(\xi) \rightarrow 0$  si  $\xi \rightarrow \infty$ .

Cette formule suggère que le comportement soit maintenu tant que  $\lambda < 0$ , par conséquent,

tant que  $m > -1$  et ceci s'avère être vrais. En effet, cette gamme d'exposant est optimale puisqu'il n'y a aucune solution avec l'intégrale finie pour  $m \leq -1$ .

Regardons un peu plus proche le genre de données initiale voulons considérer dans la généralité la plus loin. Rappelons que nous voulons  $u_0$  être croissante et bornée entre 0 et 1, par conséquent,  $v_0 = u'_0$  doit être définie et localement intégrable, ou soit tout au plus une mesure, dans un intervalle  $(a, b)$  avec la divergence possible aux points finaux, mais de toute façon avec intégrable finie. L'existence des solutions (avec  $v_0$  est étendu tout de  $\mathbb{R}$  avec valeur 0 autrement) n'offre aucun problème dans toute la gamme  $m > -1$ , et les solutions sont bornées pour tout  $t > 0$ . Mais les grandes valeurs seront l'origine de la nouvelle classe des solutions à discuter dans les sections suivantes.

Par intégration nous obtenons une solution du problème :

$$(P_I) \quad \begin{cases} u_t = (\Phi(u_x))_x & \text{dans } Q = \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ u(x, t) \geq 0, \end{cases}$$

où  $u_0$  est n'importe quelle fonction réelle continue non décroissante satisfaisant  $u_0 = 0$  si  $x = -\infty$  et  $u_0 = 1$  si  $x = \infty$ . Ceci nous l'appelons comme solution de type I. Noter que l'intégration du profil auto similaire donne pour  $u$  la forme  $u(x, t) = F(xt^\lambda)$ , tel que  $F$  est une primitive de  $\varphi$  avec  $F(-\infty) = 0$  et  $F(\infty) = M$ . Cela nous voulons normaliser à  $M = 1$ .

**Théorème 12** *Considérons la valeur initiale pour l'équation (3.5) posé dans  $Q = \mathbb{R} \times (0, \infty)$  avec la fonction de puissance  $\Phi(s) = (1/m) s^m$ . Si  $m > -1$  alors pour chaque  $u_0$  non décroissante avec  $u_0(-\infty) = 0$ , et  $u_0(\infty) = 1$ , il existe une unique solution faible continue dans le sens  $u(x, t) \geq 0$  tel que  $u(\cdot, t)$  varié entre 0 et 1, comme gammes de  $x$  sur la ligne  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $m \leq 0$  la dernière condition est essentielle pour assurer l'unicité. Cette classe de solutions ont gradients bornés pour temps strictement positif ( $t \geq \tau > 0$ ), et elles étendent dans l'espace pendant que le temps avance et la formule asymptotique d'affaiblissement  $v(x, t) = t^\lambda$  où  $\lambda = -1/(m + 1)$  se tient pour  $v = u_x$ .*

*Au contraire, si  $m \leq -1$  n'existe aucune solution pour ce problème de valeur initiale avec les données aux bords. ■*

### 3.3.4 L'existence des interfaces pointues

Il y a une sous-classe intéressante des équations (3.5) ou (3.6) où les interfaces pointues apparaissent. Regardons d'abord la non linéarité de puissance. En effet, pour les exposants  $m > 1$  les solutions du problème de Cauchy pour l'équation (3.5) avec une donnée initiale ayant un support compact gardera cette propriété pour tous le temps, tant que la propagation infinie se produit toujours quand ( $m \leq 1$ ). Dans le premier cas, donné une fonction intégrable  $u_0 \geq 0$  avec intégrale 1, la solution du problème peut être vu comme une solution classique de l'équation (3.5) dans un domaine :

$$\Omega = \{(x, t) : l(t) < x < r(t)\},$$

avec une condition initiale  $u(x, 0) = u_0(x)$ , et les conditions aux bords

$$\begin{cases} u(x, t) = 0, & \Phi(u_x) = 0 & \text{pour } x = l(t) \\ u(x, t) = 1, & \Phi(u_x) = 0 & \text{pour } x = r(t) \end{cases}$$

Les lignes  $x = l(t)$  et  $x = r(t)$  sont appelées les interfaces ou les frontières libres et elles sont complètement déterminées par les conditions spécifiées au-dessus. Ils sont connues pour être des fonctions lisses de  $t$  et ils divergent si  $t \rightarrow \infty$  comme  $O(t^\gamma)$ , de ce fait donnant une évaluation quantitative de l'effet de dispersion. Nous remarquons dans le dépassement que la présence des interfaces signifie également que l'équation n'est pas uniformément parabolique à ces points, et par conséquent, les solutions ont limité la régularité.

D'autre part, quand  $m \leq 1$  le même problème de Cauchy mène aux solutions positives avec  $l(t) = -\infty$  et  $r(t) = \infty$ . La propriété du flux nul est équivalente à l'imposant  $u_x = 0$  à  $\pm\infty$ , un état tout à fait normal en raison des valeurs  $u = 0, 1$  à  $\pm\infty$ . Cette condition est automatique pour  $m > 0$ . Cependant, pour  $m \leq 0$  nous pouvons avoir de nouvelles solutions avec la masse totale décroissante, c.-à-d., telle que

$$\frac{d}{dt} \int v(x, t) dx < 0,$$

et ils peuvent être même forcés pour disparaître identiquement le temps infini en contrôlant le flux sortant à  $x = \pm\infty$ . Dans la version intégrée ils mèneraient aux solutions avec une gamme grise restreinte.

## 3.4 Formulations conjuguées-Solutions de type II

Nous passons maintenant à la question principale de ce chapitre et de ce mémoire, la construction des solutions avec de grands gradients, appropriée pour le problème de perfectionnement de contour.

### 3.4.1 Le problème aux frontières libres

**Définition 13** *Le problème aux frontières libres est formulé comme suit :*

Soit  $u_0(x)$  une fonction croissante donnée et définie dans un intervalle  $(a, b)$  avec  $u(a+) = 0, u(b-) = 1$ , chercher une fonction continue  $u(x, t)$  et des courbes continues  $x = l(t)$  et  $x = r(t)$  tel que :

1.  $l(0) = a, r(0) = b$ , et  $l(t) < r(t)$  pour  $t \in (0, T)$ .
2.  $u$  résout le problème suivant dans  $\Omega = \{(x, t) : 0 < t < T, l(t) < x < r(t)\}$  :

$$(P_{II}) \quad \begin{cases} u_t = (\Phi(u_x))_x & \text{dans } \Omega \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{pour } a \leq x \leq b \\ u(l(t), t) = 0, u_x(l(t), t) = +\infty & \text{pour } 0 < t < T \\ u(r(t), t) = 1, u_x(r(t), t) = +\infty & \text{pour } 0 < t < T \end{cases} \quad (3.9)$$

où le triplet  $(u, l, r)$  est appelé une solution de type II.

La régularité exigée de  $u$  comme solution du problème dépendra de la généralité des données. Au moins  $u$  sera continu dans la fermeture du  $\Omega$ . En outre, pour éviter la généralité inutile nous supposons que  $u$  est lisse à l'intérieur du  $\Omega$ . En conclusion, la condition de la monotonie n'est pas intrinsèque du point de vue mathématique, mais elle adapte à l'application et tient compte de l'usage des formulations conjuguées puissantes. Le résultat qui est prouvé par G.I.Barenblatt et J.L.Vazquez dedans [BV] est comme suit :

**Théorème 14** *Soit  $\Phi$  est une fonction de flux, définie, lisse et  $\Phi'(s) > 0$  pour tout  $s > 0$ . On suppose que  $\Phi(\infty)$  est finie. Alors pour toute fonction croissante  $u_0(x)$  définie dans un intervalle  $[a, b]$  avec  $u(a) = 0, u(b) = 1$  et  $u'_0 \geq c > 0$ , il existe une unique fonction  $u(x, t)$  qu'est définie dans  $\Omega$ , lisse et strictement monotone à  $x$  pour  $0 < u < 1$ , et il existe des courbes  $l(t)$  et  $r(t)$  tel que le triplet  $(u, l, r)$  résout le problème  $(P_{II})$  dans  $\Omega$ . Et encore,  $u_x \geq c > 0$  toujours quand  $0 < u < 1$ . ■*

### 3.4.2 Formulation conjuguée

En traitant les solutions monotones  $u_x > 0$ , nous pouvons inverser les variables  $x$  et  $u$ , et nous écrivons  $x = X(u, t)$ . Alors  $u_x \cdot x_u = 1$ , et d'après quelques calculs, nous obtenons l'équation différentielle partielle satisfait par  $x$  comme une fonction de  $u$  et  $t$  :

$$x_t = (\Psi(x_u))_u, \quad (3.10)$$

où  $\Psi$  est la fonction conjuguée du flux (la conjuguée de  $\Phi$ ), définie pour  $s > 0$  comme suit :

$$\Psi(s) = -\Phi(1/s).$$

C'est dû au fait que :

$$\frac{d}{dt}x = \frac{d}{dt}(x(u(x, t), t)) = u_t x_u + x_t = 0.$$

ce qui signifie :

$$x_t = -x_u u_t = -x_u (\Phi(u_x))_x = \frac{-1}{u_x} (\Phi(u_x))_u u_x = (-\Phi(\frac{1}{x_u}))_u.$$

La différentiation de l'équation (3.10) en ce qui concerne  $u$  provoque l'équation conjuguée différenciée pour  $w = \frac{\partial X}{\partial u}$  comme une fonction de  $u$  et  $t$  :

$$w_t = (\Psi(w))_{uu}, \quad (3.11)$$

Nous complétons la liste d'équations relatives avec l'équation différenciée directe pour  $v = \partial u / \partial x$ , déjà vue :

$$v_t = (\Phi(v))_{xx} \quad (3.12)$$

et alors  $v = 1/w$ . En effet, nous avons

$$v(x, t) = \frac{1}{w(u, t)}, u(x, t) = c + \int_{\Gamma} (v dx + \Phi(v)_x dt)$$

Nous voyons maintenant comment employer les formulations conjuguées pour résoudre le problème original. Nous supposons que  $\Phi$  est une fonction de flux définie pour tout  $s > 0$

et tel que  $\Phi(\infty)$  est finie, par exemple,  $\Phi(\infty) = 0$ . Alors  $\Psi(s)$  est continue à  $s = 0$  et  $\Psi(0) = 0$ . C'est la classe des fonctions de flux pour que le problème conjugué vu plus simple.

1. Puisque nous sommes intéressés à résoudre le problème conjugué comme une étape auxiliaire pour le problème  $(P_{II})$  nous rapporterons la valeur initiale pour la fonction  $w(u, t)$  à  $w_0$  comme suit :

En supposant que  $u_0$  est continue et strictement monotone dans l'intervalle  $I = \{a < x < b\}$ , avec  $u_0(a) = 0$ ,  $u_0(b) = 1$ , et  $C^1$  lisse à l'intérieur de  $I$  avec  $du_0/dx$  bornée au-dessous par zéro, nous définissons la fonction inverse  $x = h(u) = u_0^{-1}(u) : [0, 1] \rightarrow [a, b]$ .

$$w_0(u) = \frac{1}{u_{0,x}(h(u))}, \quad (3.13)$$

qu'est définie pour  $0 \leq u \leq 1$  et elle est positive, bornée et très petit à l'intérieur, c-à-d., pour  $u \in (a, b)$ .

2. Nous résolvons alors le problème conjugué

$$(P_c) \quad \begin{cases} w_t = \Phi(w)_{uu} & \text{pour } 0 < u < 1, t > 0 \\ w(u, 0) = w_0(u) & \text{pour } 0 \leq u \leq 1 \\ w(u, t) = 0, & \text{pour } u = 0, 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

Comme une donnée initiale, nous choisissons une fonction non négative et bornée  $w_0$ . Avec ces conditions le problème  $(P_c)$  a une solution unique en propriété bien connue de la théorie parabolique non linéaire décrite dans la section précédente.

Mais noter que maintenant nous traitons le problème homogène de Dirichlet. La solution peut être obtenue comme limite des solutions  $w_\varepsilon(u, t) \geq \varepsilon$  de problèmes non dégénérés avec condition initiale  $w_{0,\varepsilon}(u) = w_0(u) + \varepsilon, \varepsilon > 0$ . Dans la limite monotone nous obtenons :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} w_\varepsilon(u, t) = w(x, t)$$

qu'est non négative, continue et bornée. Avec la prétention additionnelle que  $w_0$  est localement bornée à partir de zéro, on la montre facilement que la solution  $w(u, t)$  est positive, par conséquent classique, dans une bande

$$S_T = \{(u, t) : 0 < u < 1, 0 < t < T\}.$$

3. Après, nous passons à la version intégrée en utilisant la formule

$$z(u, t) = \int_{\Gamma} w du + \Psi(w)_u dt, \quad (3.15)$$

où  $\Gamma$  est n'importe quelle courbe lisse par morceaux de l'espace  $(u, t)$  à partir d'un point fixé, par exemple  $u = 1/2, t = 0$  et arrivée à un point général  $(u, t)$ . De cette façon nous obtenons une solution de l'équation intégrée  $z_t = (\Phi(z_u))_u$ , Comme nous avons fait dans le cas des paires originales de formulations. Noter que

$$z(1, t) - z(0, t) = \int w du \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow T.$$

D'ailleurs, grâce au fait  $\partial z / \partial u = w > 0$ , nous pouvons inverser la dépendance entre  $z$  et  $u$  pour obtenir une fonction  $u = u(z, t)$  qui est facilement montré pour satisfaire l'équation

$$u_t = (\Phi(u_z))_z.$$

En outre,  $u$  est une fonction monotone de  $z$  et elle prend les valeurs  $u = 0$  et  $u = 1$  respectivement aux points finaux gauche et droit du domaine de définition

$$\Omega_z = \{l(t) < z < r(t)\}, \quad l(t) = z(0, t), \quad r(t) = z(1, t).$$

où  $z(., t)$  est la fonction définie dans (3.15). Par conséquent,  $u(z, t)$  est un candidat pour résoudre notre problème original si nous identifions la variable indépendante  $z$  avec  $x - c$ , où  $c$  est déterminé par la relation  $u_0(c) = 1/2$ .

Afin de nous vérifier que nous avons résolu le problème original ( $P_{II}$ ) devons encore vérifier quelques conditions particulières. Il est clair que  $v = u_x$  soit lié à  $w$  original par la formule

$$v(x, t) = \frac{1}{w(u, t)},$$

qu'il énonce simplement la règle dérivée pour la fonction inverse, et  $u$  dans le deuxième membre est donnée par  $u(z, t), z = x - c$ , comme expliqué avant. Voici venir un aspect important : puisque  $w$  prend les valeurs limites zéro,  $v(x, t)$  diverge aux points finaux de son domaine de définition,  $\Omega$ . En d'autres termes, les solutions du problème original  $u = u(x, t)$  apprécient la propriété des gradients infinis aux points finaux de la bande où

ils sont définis. Depuis  $\Phi(\infty) = 0$  ceci signifie également que le flux nul à ces points, une condition raisonnable, qui explique pourquoi cette condition doit être imposée au  $\Phi$ .

Comme pour la condition initiale, nous avons la formule de la masse

$$x = \int_{1/2}^u w_0(u) du + c, \quad \text{avec } u_0(c) = \frac{1}{2}, \quad (3.16)$$

de sorte que  $x$  s'étende sur un intervalle  $[a, b]$  quand  $u$  va de 0 à 1, c-à-d.,  $a = z(0, 0) + c$ ,  $b = z(1, 0) + c$ . Cette règle est accompagnée de la règle  $u = \int_{l(t)}^x v(x, t) dx$ . D'ailleurs, dans le cas particulier que  $w_0(u)$  est symétrique, nous avons  $c(t) = c_0 = 1/2$ . Maintenant  $x(u, t)$  peut être calculé par :

$$x = x = \int_{1/2}^u w(u, t) du + c. \quad (3.17)$$

### 3.4.3 L'unicité

L'unicité de notre classe des solutions monotones fonctionne à côté de traduire n'importe quels couples des solutions du problème ( $P_{II}$ ) avec les mêmes données initiales dans la formulation conjuguée. Elles continuent à avoir les mêmes données initiales. L'unicité des solutions faibles est bien connue pour cette équation. Le théorème est prouvé.

## 3.5 Les solutions auto-similaires du cas d'une fonction de puissance

Dans le cas de puissance, où  $\Phi(s) = \frac{1}{m} s^m$ , la condition asymptotique " $\Phi(\infty)$  est finie" signifie que  $m < 0$ . Alors  $\Psi(s) = \frac{1}{q} s^q$  avec  $q = -m > 0$ . Rappelons que nous considérons seulement les solutions monotones de (3.5) et les solutions non négatives de (3.6), et  $q = 1 + 2\alpha$  dans la notation de la première section de ce chapitre. Donc  $\alpha > -1/2$  signifie que  $q > 0$ .

Il existe une seule solution du problème ( $P_c$ ) avec la donnée initiale, comme dans la section précédente. Le grand comportement de temps dépend de l'exposant. Pour  $q \geq 1$  les solutions sont définies et non triviales globalement à temps, alors que pour  $0 < q < 1$  ils existent seulement dans un intervalle fini  $0 < t < T$  et  $w(x, t) \rightarrow 0$  uniformément si  $t \rightarrow T$ .

**le cas  $\alpha = 0$ , par conséquent  $q = 1$ .** l'équation conjuguée est l'équation de la chaleur linéaire. Il est bien connu que les solutions comportent pour les grands temps comme :

$$w(x, t) \sim C_1 W(u, t) \equiv C_1 e^{-\lambda t} f_1(u),$$

où  $\lambda = \pi^2$ ,  $f_1(u) = \sin(\pi u)$ , et  $C_1 > 0$  est un constant depend de la donnée initiale. Ici et dans la suite nous dénotons par les majuscules les quantités correspondant aux solutions auto similaires.

Nous obtenons l'étape intermédiaire

$$x - c = z(u, t) \sim Z(u, t) \equiv -C e^{-\lambda t} \cos(\pi u),$$

avec  $C = C_1/\pi$ . Cette formule peut être vue comme une expression implicite de  $u = u(x, t)$  définie dans l'espace entre les interfaces. Notons que  $u = 1/2$  pour  $x = c$  et tout  $t > 0$ . Supposons que  $c = 0$  nous obtenons pour la solution auto similaire

$$U(x, t) = F(xe^{\pi^2 t}/C),$$

où  $F'$  comporte comme  $d^{-1/2}$  près des points limites ou des interfaces,  $d$  étant la distance à ces points. D'ailleurs, les interfaces

$$R(t) = C R_1(t), \quad L(t) = -C R_1(t), \quad \text{avec } R_1(t) = e^{-\pi^2 t}.$$

Ces évaluations deviennent la première approximation d'ordre quand nous considérons les solutions générales :

$$u(x, t) \sim F(xe^{\pi^2 t}/C), \quad r(t), l(t) \sim c \pm C R_1(t).$$

Les gradients sont donnés par

$$u_x(x, t) = \frac{1}{w} \sim \frac{1}{C} e^{\lambda t} \frac{1}{\sin(\pi u)}.$$

Ils explosent exponentiellement à  $t \rightarrow \infty$ , et comme  $O(d^{-1/2})$  aux interfaces, où  $d$  est la distance aux interfaces.

**Le cas  $\alpha > 0$ , par conséquent  $q > 1$ .** Ce cas est traité dans [B01] par la méthode directe d'auto similarité. Nous récupérons le comportement de solutions générales du problème conjugué. Nous avons une expression asymptotique auto similaire sous forme de séparations des variables :

$$w(u, t) \sim W(u, t) \equiv t^{-1/(q-1)} f_q(u),$$

où  $f_q(u) > 0$  est la unique solution du problème elliptique associé

$$(f_q)'' + \mu f = 0 \quad \text{dans } [0, 1], \quad \mu = \frac{q}{q-1}$$

et  $f = 0$  aux points limites. Dans ce cas il n'y a aucun constant libre, c.-à-d., le comportement est universel. Nous obtenons les évaluations asymptotiques intermédiaires

$$x - c = z(u, t) \sim t^{-1/(q-1)} g_q(u).$$

Cette formule se définit implicitement  $u = u(x, t)$  dans l'espace entre les interfaces comme suit :

$$u \sim Fq((x - c)t^{1/(q-1)}).$$

Depuis  $f(u)$  comporte exactement comme  $O(u^{1/q})$  près de point limite  $u = 0$ , et comme  $O((1 - u)^{1/q})$  près  $u = 1$ , il suit après l'intégration et l'inversion que  $u = F$  se comporte comme  $O(d^{q/(q+1)})$ , où  $d$  est la distance entre les interfaces. Elles sont données par :

$$l(t) = c - C_q t^{-1/(q-1)}, \quad r(t) = c + C_q t^{-1/(q-1)}.$$

Le gradient est donné par :

$$u_x(x, t) \sim t^{1/(q-1)} \frac{1}{f_q(u)},$$

et il s'explode comme  $O(t^{1/2\alpha})$  à  $t \rightarrow \infty$ , et comme  $O(d^{-\gamma})$  aux interfaces, où  $\gamma = 1/(q + 1) = 1/(2\alpha + 2)$ .

**Le cas  $-1/2 < \alpha < 0$ , par conséquent  $0 < q < 1$ .** C'est un nouveau cas, non inclus dans la modélisation de [MS] et [B01]. Nous obtenons les solutions du problème conjugué qui existent pour un temps fini  $T$  et comporte à  $t \rightarrow T$  comme la formule de séparation

des variables :

$$w(u, t) \sim (T - t)^{-1/(q-1)} f_q(u),$$

où  $f_q(u) > 0$  est l'unique solution du problème elliptique associé

$$(f_q)'' + \mu f = 0 \quad \text{dans } [0, 1], \quad \mu = \frac{q}{q-1}$$

et  $f = 0$  aux points limites, avec aucun constant libre, Nous obtenons par integration

$$x - c = z(u, t) \sim (T - t)^{-1/(q-1)} g_q(u).$$

Cette formule définit implicitement  $u = u(x, t)$  dans l'espace entre les interfaces convergentes

$$l(t) = c - C_q (T - t)^{-1/(q-1)}, \quad r(t) = c + C_q (T - t)^{-1/(q-1)}.$$

Le gradient est donné par :

$$u_x(x, t) \sim (T - t)^{1/(q-1)} \frac{1}{f_q(u)},$$

et il s'explode comme  $O((T - t)^{1/2\alpha})$  à  $t \rightarrow \infty$ , et comme  $O(d^{-\gamma})$  aux interfaces, où  $\gamma = 1/(q + 1) = 1/(2\alpha + 2)$ .

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons examiné quelques modèles dans la théorie mathématique du traitement d'images. En particulier, nous avons analysé deux types de filtrage : le filtrage linéaire et le filtrage non linéaire. Il semblerait que le filtrage par la diffusion non linéaire présenté par Barenblett et Vazquez [BV], présente des meilleurs résultats pour les images naturelles, en effet, le bruit est éliminé et les contours sont bien conservés.

Nous avons établi le bien-posé du problème aux frontières libres qui représente une version unidimensionnelle du modèle pour le perfectionnement du contour d'image. Les résultats s'appliquent à une grande classe d'équations, qui élargit les résultats obtenus dans [B01] et [MS]. Nous avons effectué une classification des solutions et de leurs propriétés selon les propriétés de la fonction constitutive.

Nous avons utilisé la théorie d'équations de diffusion non linéaires. Ces équations sont utilisées typiquement en décrivant des processus de diffusion de masse ou de propagation thermique. Ici elles s'apparaissent dans le traitement d'images.

L'analyse est exécutée techniquement au moyen d'une série de transformations remarquables qui mènent au problème conjugué, il est plus facile de l'analyser.

# Bibliographie

- [AGLM] L.Alvarez, F.Guichard, P.L.Lions, J.M.Morel, Axioms and fundamental equations in image processing, *Arch. Rotional Mech. Anal*, vol 123, 199-257, (1993).
- [AK] G.Aubert, P.Kornprobst, Mathematical Problems In Image Processing, Partial Differential Equations and the Calculs of variations, *Applied Mathematical science 147, springer*, (2006).
- [B01] G.I.Barenblatt, Self-similar intermediate asymptotics for nonlinear degenerate parabolic free-boundary problems that occur in image processing, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 98 (2001), no.23, 12878–12881.
- [BV] G.I.Barenblatt, J.L.Vazquez, Nonlinear diffusion and image contour enhancement, (2008), no. 1, 31-54.
- [CH] T.F.Chan, J.Shen, Image processing and analysis, variational, PDE, wavelet and stochastic methods, *SIAM*, (2005).
- [DAK] O.Demirkaya, M.H.Asyali, P.K.Sahoo, Image Processing With Matlab, Applications In Medcine and Biology, *CRC press Taylor & Francis Group*, (2009).
- [GW] C.Gaquet, P.Witonski, Analyse de Fourier et applications, filtrage, calcul numérique et ondelettes, *Dunod*, (2001).
- [MS] R.Malladi, J.A.Setian, Image Processing : Flows under Min/Max curvature and Mean Curvature, *Graphical Models and Image Processing*, 58, 2 (1996), 127-141.
- [PM] P.Perona, J.Malik, scale space and edge detection using anisotropic diffusion, *IEEE Transactions of Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol 12, 629-639, (1990).
- [RV02] A.Rodriguez, J.L.Vazquez, Obstructions to existence in fast-diffusion equations, *J.Diff. Eqns.* 184 (2002), 348–385.

- [SS] P.L.Sachdev, C.Srinivasa Rao, Large Time Asymptotics for Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations, Springer, LLc (2010).
- [W83] A.P.Witken, Scale-space filtering, proc. *IJCAI, Karlsruhe*, (1983), pp. 1019-1021.
- [Wck] J.Weickert, Anisotropic Diffusion In Image Processing, B.G. *Teubner Stuttgart*, (1998).
- [WZYL] Z.Wu, J.Zhao, J.Yin, H.Li, Nonlinear Diffusion Equations, *World scientific*, (2001).