



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET
POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Équation aux dérivées partielles et application

Thème

Systeme d'équation elliptique non variationnel

Présentée par :
M^r AMROUNE MERYEM

Membres du jury :

Président :	Dahman Bouafia	MCB, Université de M'sila
Encadreur :	Brahim Bougherara	MCA, Université de M'sila
Examineur :	Rabeh Mecheter	MAA, Université de M'sila

Année universitaire 2019/2020

Remerciement

Nous remercions tout d'abord et avant tout le tout puissant **ALLAH** qui nous a réussi à achever ce travail .

Je tiens remercier vivement mon promoteur Mr **Brahim Bougherara** pour sa guidance et son soutien indéfectible durant la préparation de ce mémoire, dès le début sa confiance mon égard et mon travail ma donnée une énergie et une inspiration de soulever toutes les difficultés.

Je remercie les membres du jury pour avoir consenti à lire ce modeste travail , ainsi que tout ce qui ont participé de près comme de loin à l'élaboration de mémoire .

Par ailleurs, mes remerciements sa dressent aussi de nombreux professeurs qui ont eu pour moi, une importance certaine de ma formation et tous les membres

du département des mathématiques.

Je remercie également ceux qui mont aidé de près ou loin à réaliser ce travail.

Merci

Dédicaces

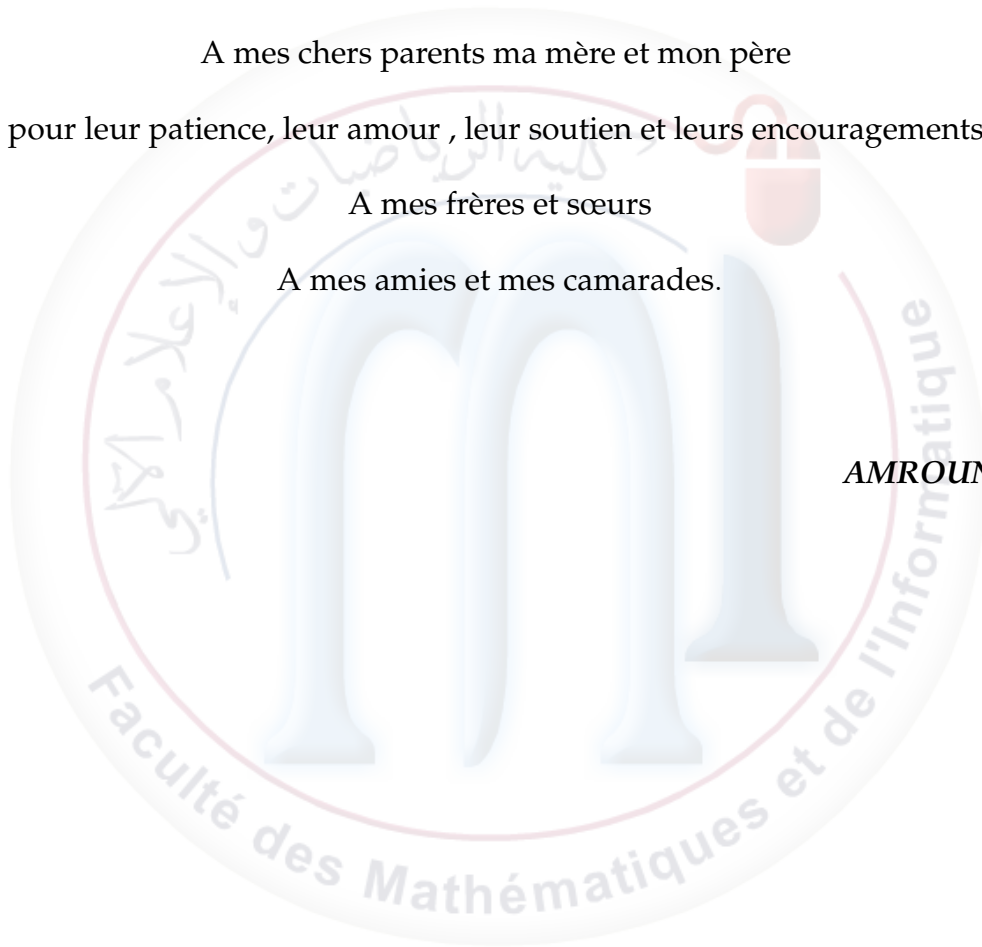
Je dédie ce travail

A mes chers parents ma mère et mon père
pour leur patience, leur amour , leur soutien et leurs encouragements.

A mes frères et sœurs

A mes amies et mes camarades.

AMROUNE MERYEM



Notations

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce mémoire :

- N : Un entier supérieur ou égal à 1.
- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$: est un ouvert .
- $\bar{\Omega}$: La fermeture de Ω .
- $\partial\Omega$: La frontière Ω .
- dist : Distance .
- $B(x, r)$: La boule ouverte de centre x et de rayon r .
- $\bar{B}(x, r)$: La boule fermé de centre x et de rayon r .
- Id : L'application identité.
- $\det(.)$: Déterminant.
- $X \setminus A$: Complémentaires de A à X .
- $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$: est de classe C^1 .
- $f'(x)$: La différentielle de f en x .
- $f|_{\Omega \cap F}$: Restriction de l'application f sur $\Omega \cap F$.
- $C(\bar{\Omega})$: Espace de fonctions continues sur Ω .

Table des matières

Introduction	5
1 Introduction de degré topologique	7
1.1 Le degré topologique de Brouwer	7
1.1.1 Définition de degré topologique de Brouwer	7
1.1.2 Quelques propriétés	8
1.2 Le degré topologique de Leray-Schauder	8
1.2.1 Préliminaire	8
1.2.2 Définition de degré topologique de Leray-Schauder	9
1.2.3 Quelques propriétés	10
1.2.4 Construction du degré de Leray-Schauder	14
1.3 Applications	19
2 Estimation a priori	21
2.1 Système d'équations elliptiques semi-linéaires	21
2.2 Estimation a priori pour $n=3$	22
2.3 Estimations pour $n > 3$	31
3 Existence de la soliton du problème via le degrés topologique	36
3.1 Préliminaire	36
3.2 Résultat principale	37
3.3 Preuve de théorème 3.5 et 3.6	38
Référence	51

Introduction

On s'intéresse dans cet mémoire à l'étude d'un système elliptique non linéaire suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u, v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta v = g(u, v) \text{ dans } \Omega \\ u, v \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (I)$$

On démontre l'existence d'une solution positive $(u, v) \in C^2(\Omega)$ de système (I) en utilisant la théorie de degré topologique de Leray-Schauder. Ce types des problèmes à été étudiés de manière intensive dans la littérature, voir [1-4,6-7,14-16]. Le système (I) résulte de l'étude de divers phénomènes non linéaires, tels que la formation de motifs, l'évolution de la population.

Le système (I) apparaît dans l'étude de différent modales et physique et biologique tels que la formation de motifs, l'évolution de la population.

Dans cet mémoire , nous intéressons à la questions de l'existence d'une paire de fonction lisses u et v satisfaisant (I) .

Notre intérêt réside en partie dans le fait que les systèmes semi-linéaires tels que (I) n'ont pas besoin d'avoir une structure variationnelle. Plus précisément, nous établirons des estimations a priori et l'existence de solutions positives au système elliptique qui applique le théorème de degré topologique de Leray-Schauder.

Le mémoire est divisé en trois chapitres comme suivant :

Dans la première chapitre : on a présenté la notion de degré topologique. On a commencé par le degré topologique de Brouwer en dimension finie et puis on a donnés la définition de degré topologique de Leray-Schauder qui généralise la définition de degré de Brouwer en dimension infinie. On a donné leurs propriétés fondamentales et utiles dans cette étude ainsi des application simple de degré sur le théorème de point fixe.

Dans le deuxième chapitre : on a démontré des estimations a priori pour les solutions essentielles de système I. La question d'estimation a priori est le point de difficulté dans l'application de degré topologique car ce dernier impose le non existence de la solution à la frontière de do-

maine d'étude. On a utilise la méthode de below-up introduit par Gidas-Spruck [9] qui sert à réduire le système I après un changement d'échelé vers un système de type Lane-Emden qui n'admet pas des solutions triviales.

Dans le dernier chapitre : est consacré a l'existence de la solution de système (I) . On applique le degré topologique de Leray-Schauder, et en utilisant les estimation a priori obtenue dans le chapitre 1 et les résultats de régularité de la solution d'équations elliptique, on démontre l'existence d'une solution positive non triviale (u, v) de classe $C^2(\Omega)$ du système (I) .



INTRODUCTION DE DEGRÉ TOPOLOGIQUE

Dans le première de ce chapitre de ce mémoire nous exposerons un rappel sur quelques définition et propriété générale sur le degré topologique de Brouwer et le degré topologique de Leray-Schauder

1.1 Le degré topologique de Brouwer

1.1.1 Définition de degré topologique de Brouwer

Notation : Soit $N \geq 1$ et \mathcal{A} l'ensemble des triplets (f, Ω, y) , où Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $y \in \mathbb{R}^N$ et $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et telle que $y \notin f(\partial\Omega)$. C'est à dire

$$\mathcal{A} = \{(f, \Omega, y) \text{ telque : } f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ est continue, } y \notin f(\partial\Omega)\}$$

Définition 1.1. Soient X et Y deux espaces topologiques, f et g deux applications continues de X dans Y . On dit que f et g sont homotopies s'il existe $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ continue telle que $F(x, 0) = f(x)$ et $F(x, 1) = g(x)$ pour tout x de X .

Théorème 1.1. Il existe une seule application $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}$, qui vérifie les propriétés suivantes :

1. (**Normalisation**) : si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N et $y \in \Omega$ alors

$$d(\text{Id}, \Omega, y) = 1.$$

2. (**Additivité**) : si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $y \in \mathbb{R}^N$, $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est continue et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tels que

$$y \notin f(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)), \text{ alors}$$

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y).$$

3. (**Invariance par homotopie**) : si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^N , $h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ et $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sont continues et, $\forall t \in [0, 1], y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$, alors

$$d(h(0, \cdot), \Omega, y(0)) = d(h(1, \cdot), \Omega, y(1)).$$

Définition 1.2. L'application d définie dans le théorème 1.1 est appelé le degré topologique de Brouwer.

1.1.2 Quelques propriétés

Proposition 1.1. Le degré topologique de Brouwer vérifie les propriétés suivantes :

i) Si $(f, \Omega, y) \neq 0$ alors l'équation " $f(x) = y$ " admet au moi une solution $x \in \Omega$.

ii) Pour tout $z \in \mathbb{R}^N$, $d(f, \Omega, y) = d(f - z, \Omega, y - z)$.

iii) Soit $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et $r = \text{dist}(y, f(\partial\Omega)) > 0$. Si $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ continue et $z \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $\sup_{\partial\Omega} (|g - f|) + |y - z| < r$, alors

$$d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, z).$$

iv) $d(f, \Omega, \cdot)$ est constant sur les composantes connexes de $\mathbb{R}^N \setminus f(\partial\Omega)$.

v) Pour tout $z \in \mathbb{R}^N$, $d(f, \Omega, y) = d(f(\cdot - z), z + \Omega, y)$.

Proposition 1.2. On a

1. Si $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$ alors

$$d(A, B(0, \delta), 0) = \text{sgn}(\det(A))$$

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} d(f'(z), B(0, \delta), 0).$$

où $\delta > 0$ est assez petit.

2. Si $f \in C(\bar{\Omega})^N$ alors

$$d(f, \Omega, y) = d^\infty(g, \Omega, y), \text{ où } g \in C^\infty(\bar{\Omega})^N.$$

telle que $\sup_{\bar{\Omega}} |g - f| < r$, avec $r = \text{dist}(y, f(\partial\Omega))$.

Preuve : voir[1]

1.2 Le degré topologique de Leray-Schauder

1.2.1 Préliminaire

Nous souhaitons maintenant construire un degré ayant la même finalité que le degré de Brouwer, mais en dimension infinie, c'est à dire on prend une équation de la forme $f(x) = y$, où f est continue d'un Banach E dans lui-même, a au moins une solution x .

On se rend cependant vite compte, sur un exemple, qu'il n'y a aucun espoir en dimension infinie de construire un degré topologique pour toute application continue (et même pas toute application linéaire!).

Exemple 1.1. Considérons $E = \ell^\infty$, l'espace des suites $x = (x_n)_{n \geq 1}$ bornées, et

$$\begin{aligned} S : E &\rightarrow E \\ x &\mapsto S(x) = (0, x_1, x_2, \dots) \end{aligned}$$

Soit $h : [0, 1] \times \bar{\Omega} \rightarrow E$, l'homotopie entre Id et S définie par

$$h(t, x) = tx + (1 - t)S(x) = (tx_1, tx_2 + (1 - t)x_1, tx_3 + (1 - t)x_2, \dots)$$

pour tout $t \in [0, 1]$,

La seule solution de $h(t, x) = 0$ est la suite nulle.

Si un degré (normalisé, additif et invariant par homotopie) existait pour toutes les applications continues sur E , donc

$$1 = d(Id, B(0, 1), 0) = d(S, B(0, 1), 0).$$

Il suffit démontre que :

$$d(S, B(0, 1), 0) = d(S, B(0, 1), z)$$

On a

$$\|z\| < r = \text{dist}(0, S(\partial B(0, 1))) = \text{dist}(0, \partial B(0, 1)) = 1$$

Toujours en utilisant l'invariance par homotopie du degré, on aurait encore

$$d(S, B(0, 1), z) = 1, \forall z \in E \text{ proche de } 0;$$

En particulier, tout z proche de 0 aurait un antécédent par S , ce qui est clairement faux : $z = (\varepsilon, 0, 0, \dots)$ n'a pas d'antécédent par S dès que $\varepsilon \neq 0$.

1.2.2 Définition de degré topologique de Leray-Schauder

Le degré topologique en dimension infinie ne peut pas donc être défini pour toutes les applications continues d'un Banach E dans lui-même : il faut restreindre les fonctions que l'on considère. Il existe plusieurs degrés en dimension infinie, qui ont justement pour principale différence la classe de fonctions à laquelle chacun s'applique ; le degré que nous allons étudier ici, appelé degré de Leray-Schauder, est construit sur les applications qui diffèrent de l'identité par une application compacte.

Définition 1.3. Soient E et F deux espaces des Banach et A un fermé de F .

Une application $f : A \rightarrow E$ est dite compacte si

1. Elle est continue .
2. Pour tout $R > 0$, $f(A \cap \overline{B}(0, R))$ est relativement compact dans E . De manière équivalente, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ bornée dans A , on peut extraire de $(f(x_n))_{n \geq 1}$ une suite qui converge dans E .

Notation : Soit E un Banach et \mathcal{A}_c l'ensemble des triplets $(Id - f, \Omega, y)$ où Ω est un ouvert borné de E , $y \in E$ et $f : \overline{\Omega} \rightarrow E$ est compacte et telle que $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$.

$$\mathcal{A}_c = \{(f, \Omega, y) \mid y \in E, f : \overline{\Omega} \rightarrow E \text{ est compacte, } y \notin (Id - f)(\partial\Omega)\}.$$

Théorème 1.2. Il existe une application $d : \mathcal{A}_c \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que :

1. (**Normalisation**) : si Ω est un ouvert borné de E et $y \in \Omega$ alors

$$d(Id, \Omega, y) = 1.$$

2. (**Additivité**) : si Ω est un ouvert borné de E , $y \in E$, $f : \overline{\Omega} \rightarrow E$ est compacte et Ω_1, Ω_2 sont des ouverts disjoints inclus dans Ω tels que $y \notin (Id - f)(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, alors

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y).$$

3. (**Invariance par homotopie**) : si Ω est un ouvert borné de E ,

$h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow E$ est compacte, $y : [0, 1] \rightarrow E$ est continue , $\forall t \in [0, 1], y(t) \notin (Id - h)(t, \cdot)(\partial\Omega)$, alors

$$d(Id - h(0, \cdot), \Omega, y(0)) = d(Id - h(1, \cdot), \Omega, y(1)).$$

Définition 1.4. L'application d définie dans le théorème 1.2 est appelé le degré topologique de Leray-Schauder.

1.2.3 Quelques propriétés

Lemme 1.1. Soient F et E des espaces de Banach et A un fermé de F . Si $f : A \rightarrow E$ est compacte et si X est un fermé borné dans A alors : $(Id - f)(X)$ est fermé

Preuve

On pose $y_n = x_n - f(x_n)$ est une suite de $(Id - f)(X)$ qui converge vers un y , alors comme $(x_n)_{n \geq 1} \in X$ est borné on peut extraire de $(f(x_n))_{n \geq 1}$ une suite qui converge ; cela montre que $x_n = y_n + f(x_n)$ converge elle-même vers un $x \in X$ (X est fermé) et, par continuité

$$y = x - f(x) \in (Id - f)(X).$$

On donne maintenant quelques propriétés important concernent le de degré de Leray-Schauder :

Propriétés 1.1. Le degré topologique de Leray-Schauder vérifie les propriétés suivantes :

- i) Si $(Id - f, \Omega, y) \neq 0$ alors il existe $x \in \Omega$ tel que $x - f(x) = y$.
- ii) Pour tout $z \in E$, $d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f - z, \Omega, y - z)$.
- iii) Soit $(Id - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_c$ et $r = \text{dist}(y, (Id - f)(\partial\Omega)) > 0$. Si $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^N$ compacte et $z \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $\sup_{\partial\Omega} (\|g - f\|) + \|y - z\| < r$, alors

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - g, \Omega, z).$$

- iv) $d(Id - f, \Omega, \cdot)$ est constant sur les composantes connexes de $E \setminus (Id - f)(\partial\Omega)$.
- v) Pour tout $z \in E$, $d(Id - f, \Omega, y) = d((Id - f)(\cdot - z), z + \Omega, y)$.

Preuve de proposition 1.1 :

- i) On montre que si $(Id - f, \Omega, y) \neq 0$ alors $\exists x \in \Omega$ tel que $x - f(x) = y$.

$Id - f = y$ admet des solutions si $d(Id - f, \Omega, y) \neq 0$

Par absurde, on a :

$$\begin{aligned} d(Id - f, \Omega, y) = 0 &\Rightarrow \forall x \in \Omega (Id - f)(x) \neq y \\ &\Rightarrow y \notin (Id - f)(\Omega) \text{ et par l'hypothèse } y \notin (Id - f)(\partial\Omega) \\ &\Rightarrow y \notin (Id - f)(\bar{\Omega}) \text{ avec } (\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega) \end{aligned}$$

Comme $\Omega_1 = \Omega_2 = \phi$ disjoints et inclus dans Ω .

On a

$$y \notin (Id - f)(\bar{\Omega}) = (Id - f)(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$$

Donc par l'additivité de degré topologique on obtient :

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_1, y) + d(Id - f, \Omega_2, y)$$

D'autre part, on pose que $\Omega = \phi \Rightarrow (Id - f)(\bar{\phi} \setminus (\phi \cup \phi))$ on a :

$$d(Id - f, \phi, y) = d(Id - f, \phi, y) + d(Id - f, \phi, y)$$

Donc

$$d(Id - f, \phi, y) = 0$$

On peut déduire que

$$d(Id - f, \Omega, y) = 0$$

Alors $(Id - f)(x) = y$ admet des solution si $d(Id - f, \Omega, y) \neq 0$.

ii) On montre que

$$\forall z \in E, d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f - z, \Omega, y - z).$$

On considéré un homotopie h et y entre $(Id - f, y)$ et $(Id - f - z, y - z)$ définie par :

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times \bar{\Omega} &\longrightarrow E \\ (t, x) &\longmapsto h(t, x) = (1 - t)(Id - f)(x) + t((Id - f)(x) - z). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y : [0, 1] &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto y(t) = (1 - t)y + t(y - z). \end{aligned}$$

On montre que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega), \forall t \in [0, 1]$. Par absurde, on suppose que

$$\exists t \in [0, 1], \exists x \in \partial\Omega : y(t) = h(t, x)$$

Donc

$$(1 - t)y + t(y - z) = (1 - t)(Id - f)(x) + t((Id - f)(x) - z)$$

Alors

$$y = (Id - f)(x), x \in \partial\Omega$$

Contradiction(d'après l'invariance par homotopie on a le résultat.) (car $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$).

iii) On considéré un homotopie h et y entre $(Id - f, y)$ et $(Id - g, z)$ définie par :

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times \bar{\Omega} &\longrightarrow E \\ (t, x) &\longmapsto h(t, x) = (1 - t)(Id - f)(x) + t(Id - g)(x). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y : [0, 1] &\longrightarrow E \\ t &\longmapsto y(t) = (1 - t)y + tz. \end{aligned}$$

On montre que $y(t) \notin h(t, \partial\Omega), \forall t \in [0, 1]$. Par absurde, on suppose que

$$\exists t \in [0, 1], \exists x \in \partial\Omega : y(t) = h(t, x)$$

On a

$$\begin{aligned}
 y(t) = h(t, x) &\Leftrightarrow (1-t)y + tz = (1-t)(Id - f)(x) + t(Id - g)(x) \\
 &\Leftrightarrow y - (Id - f)(x) = t [((Id - g)(x) - (Id - f)(x)) + (y - z)] \\
 &\Rightarrow |y - (Id - f)(x)| \leq t [|g(x) - f(x)| + |y - z|] \\
 &\Rightarrow |y - (Id - f)(x)| \leq tr(\text{car } |g(x) - f(x)| + |y - z| < r) \\
 &\Rightarrow |y - (Id - f)(x)| < r(\text{car } t < 1).
 \end{aligned}$$

mais

$$(|y - (Id - f)(x)| > \inf_{x \in \partial\Omega} d(y, (Id - f)(x)) = \text{dist}(y, (Id - f)(\partial\Omega)) = r)$$

contradiction avec l'hypothèse $\sup_{\partial\Omega} (\|g - f\|) + \|y - z\| < r$.

Alors d'après l'invariance par homotopie

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - g, \Omega, z)$$

iv)

On montre que $d(Id - f, \Omega, y)$ est constant sur les composantes connexes de $E \setminus (Id - f)(\partial\Omega)$.

On pose :

$$\begin{aligned}
 H : E \setminus (Id - f)(\partial\Omega) &\rightarrow \mathbb{Z} \\
 y &\mapsto d(Id - f, \Omega, y).
 \end{aligned}$$

D'après la propriété iii), pour $r > 0$ assez petit

On a

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega, z) \text{ pour tout } y, z \text{ tq } \|y - z\| < r$$

D'où on a

$$H(y) = H(z) \forall y, z \in E \setminus (Id - f)(\partial\Omega) \text{ avec } \|y - z\| < r$$

Donc H est continue. Comme \mathbb{Z} est un espace discrète (avec la topologie induite de \mathbb{R}). Alors

H est constant sur tout composante connexe de $E \setminus (Id - f)(\partial\Omega)$

Ce que prouve la propriété iv).

v)

Soit $(Id - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ et notons $T_{Id-f, \Omega, y}(z) = d(Id - f(\cdot - z), z + \Omega, y)$. Comme $\partial(z + \Omega) = z + \partial\Omega$, il est clair que $y \notin Id - f(\partial(z + \Omega) - z)$ pour tout $z \in \mathbb{R}^N$ et que $T_{Id-f, \Omega, y}$ est donc définie sur \mathbb{R}^N .

Nous allons montrer que $T_{Id-f, \Omega, y}$ est localement constante; comme \mathbb{R}^N est connexe, cela impliquera que $T_{Id-f, \Omega, y}$ est constante sur \mathbb{R}^N et cela prouvera donc v). Comme $T_{Id-f, \Omega, y}(z_0 + z) = T_{Id-f(\cdot - z_0), z_0 + \Omega, y}(z)$,

il suffit de montrer que $T_{f,\Omega,y}$ est constante au voisinage de 0 pour tout $(Id - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}$ pour en déduire qu'elle est constante au voisinage de tout point z_0 de \mathbb{R}^N (en utilisant la constance au voisinage de 0 de $T_{Id-f(\cdot, -z_0), z_0 + \Omega, y}$).

Soit $\Omega_s = \{x \in \Omega \mid \text{dist}(x, \partial\Omega) > s\}$, ouvert inclus dans Ω . Comme $y \notin Id - f(\partial\Omega)$, il existe $s > 0$ tel que $y \notin Id - f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s})$. Comme $\Omega_s \supset \Omega_{2s}$, on a aussi $y \notin Id - f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s})$ et par additivité du degré avec les ouverts Ω_s et ϕ disjoints inclus dans Ω , et puisque $d(Id - f, \phi, y) = 0$, on en déduit

$$d(Id - f, \Omega, y) = d(Id - f, \Omega_s, y). \quad (1.1)$$

Par ailleurs, dès que $z \in B(0, s)$, on a $\Omega_s \subset z + \Omega$ et $y \notin Id - f((\overline{z + \Omega} \setminus \Omega_s) - z)$ (car $(\overline{z + \Omega} \setminus \Omega_s) - z = \overline{\Omega} \setminus (\Omega_s - z) \subset \overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s}$ et $y \notin Id - f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s})$); l'additivité du degré donne donc aussi

$$d(Id - f(\cdot - z), z + \Omega, y) = d(Id - f(\cdot - z), \Omega_s, y) \text{ pour } |z| < s. \quad (1.2)$$

Fixons $z \in B(0, s)$ et considérons l'homotopie $h(t, x) = Id - f(x - tz)$ sur $\overline{\Omega}_s$ entre $Id - f$ et $Id - f(\cdot - z)$ (pour tout $t \in [0, 1]$, on a $\overline{\Omega}_s - tz \subset \overline{\Omega}$ et h est donc bien définie). Pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x \in \partial\Omega_s$,

On a $\text{dist}(x, \partial\Omega) = s$, ce qui assure que

$$\text{dist}(x - tz, \partial\Omega) \leq \text{dist}(x, \partial\Omega) + |tz| \leq 2s$$

On en déduit que $x - tz \in \overline{\Omega} \setminus \Omega_{2s}$, et donc que $y \neq Id - f(x - tz)$, c'est à dire $y \notin h(t, \partial\Omega_s)$ pour tout $t \in [0, 1]$. L'invariance par homotopie donne donc

$$d(Id - f, \Omega_s, y) = d(Id - f(\cdot - z), \Omega_s, y)$$

Ceci pour tout $z \in B(0, s)$, ce qui permet de conclure grâce (1.1) et (1.2).

1.2.4 Construction du degré de Leray-Schauder

Dans cette section, on donne la preuve du théorème 1.2, d'existence de degré de Leray-Schauder par construction. La preuve se décompose en deux étapes :

Étape 1 : Degré de Brouwer dans un espace vectoriel de dimension finie

Dans le parti précédente, Le degré topologique de Brouwer a été construit sur \mathbb{R}^N . Dans la suite, nous allons avoir besoin, pour tout espace vectoriel F normé de dimension finie, d'un

degré topologique d_F sur F .

L'idée est très simple : comme F est de dimension finie, disons N , il existe un isomorphisme $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow F$. En définissant \mathcal{A}_F comme l'ensemble des triplets (f, Ω, y) tels que Ω est un ouvert borné de F , $y \in F$ et $f : \Omega \rightarrow F$ est continue et vérifie $y \notin f(\partial\Omega)$, on constate que pour tout $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_F$

$$\mathcal{A}_F = \{(f, \Omega, y) / f : \Omega \rightarrow F \text{ est continue, } y \notin f(\partial\Omega)\}$$

Proposition 1.3. Pour tout $(f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_F$ on a

$$(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(\Omega), \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)) \in \mathcal{A}$$

Preuve

$$\varphi^{-1}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^N \xrightarrow{\varphi} \overline{\Omega} \subset F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathbb{R}^N$$

Alors

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : \varphi^{-1}(\overline{\Omega}) \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

D'autre part

Soit $x \in \partial\Omega \subset F$, alors $\exists t \in \varphi^{-1}(\overline{\Omega}) \Rightarrow x = \varphi(t)$. donc

$$\begin{aligned} f(x) \neq y &\iff f(\varphi(t)) \neq y, \forall t \in \varphi^{-1}(\overline{\Omega}) \\ &\iff \varphi^{-1}(f(\varphi(t))) \neq \varphi^{-1}(y), \forall t \in \partial(\varphi^{-1}(\Omega)) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} y \notin f(\partial\Omega) &\iff \varphi^{-1}(y) \notin \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(\partial\varphi^{-1}(\Omega)) \\ &\iff (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(\partial\Omega)) \end{aligned}$$

Donc

$$(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)) \in \mathcal{A}.$$

Définition 1.5. Le degré de Brouwer sur F est définie par :

$$d_F(f, \Omega, y) = d(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(\Omega), \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)).$$

Où " d " est degré de Brouwer dans \mathbb{R}^N . Alors d_F vérifie les propriétés de normalisation, d'additivité et d'invariance par homotopie.

Proposition 1.4. Le degré de Brouwer $d_F(f, \Omega, y)$ est indépendant du choix de φ

Preuve

On a par définition :

$$d_F(f, \Omega, y) = d(\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, \varphi^{-1}(\Omega), \varphi^{-1}(y)) \quad (1.3)$$

On démontre que d_F ne dépend pas du choix de φ . Il suffit de montrer que d_F est unique.

Soit \tilde{d}_F un autre degré sur F .

On pose

$$g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi, U = \varphi^{-1}(\Omega), z = \varphi^{-1}(y)$$

On a donc

$$d_F(\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}, \varphi(U), \varphi(z)) = d(g, U, z) \quad (1.4)$$

Alors comme ci-dessus :

$$\tilde{d}(g, U, z) = \tilde{d}_F(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(U), \varphi(z)) \quad (1.5)$$

définit un degré topologique sur \mathbb{R}^N . Grâce à l'unicité de degré de Brouwer d , on obtient :

$$\tilde{d}(g, U, z) = d(g, U, z)$$

D'où, par (1.4) et (1.5)

$$\tilde{d}_F(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(U), \varphi(z)) = d_F(\varphi \circ g \circ \varphi^{-1}, \varphi(U), \varphi(z))$$

Donc

$$\tilde{d}_F(f, \Omega, y) = d_F(f, \Omega, y)$$

Donc d_F ne dépend pas du choix de φ et d_F a forcément l'écriture (1.3).

Proposition 1.5. Soit G un espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace de G . Soit Ω un ouvert borné de G , $y \in F$ et $f : \Omega \rightarrow F$ une application continue telle que $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$. Alors

$$d_G(Id - f, \Omega, y) = d_F(Id - f|_{\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y).$$

Étape 2 : Du degré de Brouwer au degré de Leray-Schauder

Définition 1.6. Soient F et E des espaces de Banach et A un fermé de F . On dit que une application $f : A \rightarrow E$ est de rang fini si :

1. f est continue.
2. $f(A)$ est inclus dans un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Proposition 1.6. Soient F et E des Banach et A un fermé borné dans F . Si $f : A \rightarrow E$ est une application compacte alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g : A \rightarrow E$ de rang fini tel que $\sup_A \|g - f\| \leq \varepsilon$.

Nous pouvons maintenant construire le degré de Leray-Schauder, à partir du degré de Brouwer. Nous connaissons le degré sur une certaine classe I d'applications (celles définies sur un espace de dimension finie et à valeurs dans lui même espace); pour définir le degré pour une application "générale" (i.e. perturbation compacte de l'identité en ce qui nous concerne), nous allons simplement dire qu'il est égal au degré de n'importe quelle application de I proche de notre application "générale", en montrant que cette définition est cohérente (c'est à dire que deux applications de I proches de notre application "générale" ont même degré).

Soit $(Id - f, \Omega, y) \in \mathcal{A}_c$ et $r = \text{dist}(y, (Id - f)(\partial\Omega)) > 0$ car $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$ c'est à dire $y \neq x - f(x), \forall x \in \partial\Omega$

Par absurde

$$r = \text{dist}(y, (Id - f)(\partial\Omega)) = 0 \Rightarrow y \in \overline{(Id - f)(\partial\Omega)}$$

D'après le lemme 1.1

$$y \notin \overline{(Id - f)(\partial\Omega)} = (Id - f)(\partial\Omega)$$

mais $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$, contradiction

Soit $g : \bar{\Omega} \rightarrow E$ une application de rang fini telle que $\sup_{\bar{\Omega}} \|g - f\| < r$ (d'après la proposition 1.6 il est clair que $y \notin (Id - f)(\partial\Omega)$ car :

$$y \notin (Id - f)(\partial\Omega) \text{ c'est dire } y \neq x - g(x), \forall x \in \partial\Omega$$

Par absurde :

$$\begin{aligned} \exists x \in \partial\Omega : \quad y &= x - g(x) \\ &= x - f(x) + f(x) - g(x) \\ y - (x - f(x)) &= f(x) - g(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|y - (x - f(x))\| &\geq \inf_{x \in \partial\Omega} \|y - (x - f(x))\| \\ &= d(y, (Id - f)(\partial\Omega)) \\ &= r \end{aligned}$$

et on a

$$\|f(x) - g(x)\| < r, \text{ contradiction.}$$

Notons F un espace de dimension finie qui contient l'image de g et y telle que

$$\begin{aligned} g : \overline{\Omega} \subset F &\longrightarrow F \\ g|_{\overline{\Omega \cap F}} : \overline{\Omega \cap F} \subset F &\longrightarrow F \end{aligned}$$

Par définition on a :

$$d(\text{Id} - f, \Omega, y) = d_F(\text{Id} - g|_{\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y)$$

Il suffit de montrer que cette définition ne dépend pas de g .

Soit $g_1 : \overline{\Omega} \longrightarrow F_1$ une application de rang fini tel que $\|f - g_1\| < r$ avec F_1 un autre espace de dimension finie.

On pose

$$G = F + F_1, (F_1 \subset G, F \subset G)$$

d'après la proposition 2.2 on obtiens

$$d_F(\text{Id} - g|_{\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y) = d_G(\text{Id} - g|_{\overline{\Omega \cap G}}, \Omega \cap G, y)$$

$$d_{F_1}(\text{Id} - g_1|_{\overline{\Omega \cap F_1}}, \Omega \cap F_1, y) = d_G(\text{Id} - g_1|_{\overline{\Omega \cap G}}, \Omega \cap G, y)$$

Donc on montre que

$$d_G(\text{Id} - g|_{\overline{\Omega \cap G}}, \Omega \cap G, y) = d_G(\text{Id} - g_1|_{\overline{\Omega \cap G}}, \Omega \cap G, y).$$

On construit maintenant dans G l'homotopie entre $(\text{Id} - g|_{\overline{\Omega \cap G}})$ et $(\text{Id} - g_1|_{\overline{\Omega \cap G}})$, telle que

$$h(t, x) = t(\text{Id} - g|_{\overline{\Omega \cap G}})(x) + (1 - t)(\text{Id} - g_1|_{\overline{\Omega \cap G}})(x)$$

On montre que : $y \in h(t, \partial(\Omega \cap G))$ c'est dire $y \neq h(t, x), \forall x \in \partial(\Omega \cap G)$

Par absurde, supposons qu'il existe $x \in \partial(\Omega \cap G)$ tel que

$$\begin{aligned} y &= h(t, x) \\ 0 = y - h(t, x) &= y - [t(x - g|_{\overline{\Omega \cap G}}(x) - (x - f(x))) + (1 - t)(x - g_1|_{\overline{\Omega \cap G}}(x) - (x - f(x)))] \\ &= \underbrace{y - (x - f(x))}_{>r} - \left[\underbrace{t(f(x) - g|_{\overline{\Omega \cap G}}(x))}_{\leq r} + (1 - t) \underbrace{(f(x) - g_1|_{\overline{\Omega \cap G}}(x))}_{\leq r} \right] \\ &> r - r = 0, \text{ contradiction} \end{aligned}$$

donc, d'après l'invariance par homotopie de G on a :

$$d_G(\text{Id} - g|_{\overline{\Omega \cap G}}, \Omega \cap G, y) = d_G(\text{Id} - g_1|_{\overline{\Omega \cap G}}, \Omega \cap G, y)$$

Pour résumer, le degré de Leray-Schauder sur \mathcal{A}_c est donc défini ainsi :

$$d(Id - f, \Omega, y) = dF(Id - g_{|\overline{\Omega \cap F}}, \Omega \cap F, y)$$

où $g : \overline{\Omega} \rightarrow E$ est n'importe quelle application de rang fini telle que $\sup_{\overline{\Omega}} \|f - g\| < r$, avec $r = \text{dist}(y, (Id - f)(\partial\Omega))$, et F est un sous-espace de E de dimension finie qui contient y et l'image de g .

1.3 Applications

Théorème 1.3. (Point fixe de Brouwer :)

Soit \overline{B} la boule unité fermée \mathbb{R}^N et $f : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ continue. Alors f a un point fixe : il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.

Théorème 1.4. (Point fixe de Schauder :)

Soit \overline{B} la boule unité fermée d'un Banach E et $f : \overline{B} \rightarrow \overline{B}$ compacte. Alors f a un point fixe : il existe $x \in \overline{B}$ tel que $f(x) = x$.

Preuve des théorèmes 1.3 et 1.4

On va montrer l'existence de la solution de $f(x) = x$

- S'il existe un point fixe sur ∂B , alors il n'y a rien à prouver.
- Si non, on suppose que $f(x) \neq x$ pour tout $x \in \partial B$. Puisque f n'a pas de point fixe sur le bord de B , on a bien $(Id - f, B, 0) \in A$ (ou A_c dans le cadre du théorème de Schauder); nous allons montrer que $d(Id - f, B, 0) = 1$, ce qui prouvera que $Id - f$ a au moins un zéro dans B , et que f a donc au moins un point fixe dans cet ensemble.

on considère l'homotopie suivante : $h(t, x) = tf(x)$. On a h est continue sur $[0, 1] \times \overline{B}$ (et compacte dans le cadre du théorème de Schauder).

supposons qu'il existe $t \in [0, 1]$ et $x \in \partial B$, tels que

$$x - h(t, x) = 0,$$

alors

$$tf(x) = x$$

comme $|x| = 1$ et $|f(x)| \leq 1$, ceci impose $t = 1$ et $x = f(x)$, donc la présence d'un point fixe de f sur ∂B , situation que l'on a exclue.

On peut donc appliquer les propriétés de normalisation et d'invariance par homotopie du degré de Brouwer ou de Leray-Schauder qui donnent

$$1 = d(\text{Id}, B, 0) = d(\text{Id} - f, B, 0)$$

(puisque $h(0, \cdot) = 0$ et $h(1, \cdot) = f$). Ce qui conclut la preuve des deux théorèmes.



ESTIMATION A PRIORI

2.1 Système d'équations elliptiques semi-linéaires

On va étudier le système d'équation elliptique suivantes

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u, v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta v = g(u, v) \text{ dans } \Omega \\ u, v \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (I)$$

On a besoins de ces théorèmes concernant la régularité de la solution du problème elliptique

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Théorème 2.1. Soit $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible de problème (2.1), avec $f \in C^\alpha(\bar{\Omega})$ et $\partial\Omega$ est de classe $C^{2,\alpha}$. Alors $u \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ et on a

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{C^\alpha(\Omega)})$$

Théorème 2.2. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et régulière, $f \in C(\bar{\Omega})$ une fonction bornée. u est une solution du problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors

$$u \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\bar{\Omega}), 0 < \alpha < 1$$

et on a :

$$\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq C$$

où $C > 0$ ne dépend pas de $\|f\|_{L^\infty}$ et Ω .

Théorème 2.3. (d'Ascoli-Arzelà)

Soient E, F deux espaces métriques tels que E compact et soit A un partie de $C(E, F)$.

Alors A est relativement compact ssi

1. $A(x) := \{f(x), f \in A\}$ est relativement compact dans F pour tout $x \in E$.
2. A est équicontinue : c'est à dire :

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall f \in A, \forall Y \in E :$$

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

Théorème 2.4. (Formule de Green)

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière $\partial\Omega$ de classe C^1 . Soit f, g deux fonction $\in H^1(\Omega)$. Alors

$$\int_{\Omega} \Delta f \cdot g dx = - \int_{\Omega} f \cdot \nabla g dx + \int_{\partial\Omega} \nabla f \cdot \vec{\eta} g ds.$$

Où η est la vecteur unitaire de la normale l'extérieur à $\partial\Omega$.

2.2 Estimation a priori pour n=3

On considère les non-linéarités $f, g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

$$f(u, v) = au^r + bv^q, \quad g(u, v) = cu^p + dv^s. \quad (2.2)$$

où a, b, c, d , et p, q, r, s , sont des réels positives satisfaisant :

$$p, q > 0, pq > 1, r, s > 1$$

Posons

$$\alpha = \frac{2(p+1)}{pq-1} > 0, \quad \beta = \frac{2(q+1)}{pq-1} > 0.$$

On a le résultats suivant concernant le cas $n = 3$:

Théorème 2.5. Soit $n = 3$. On suppose que

1. $\alpha + \beta > 1$
2. $\max \{r, s\} < 5$, et
3. $\beta \neq 2/(r-1)$ et $\alpha \neq 2/(s-1)$.

Il existe une constante $M = M(n, a, b, c, d, p, q, r, s) > 0$, telle que tout solution positive (u, v) de (I) de classe C^2 satisfait

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M,$$

Avant de donner la preuve du théorème 2.5. Nous commençons d'abord par le résultat particulier suivant de théorème 2.5

Théorème 2.6. *Sous les mêmes hypothèses de théorème 2.5, on suppose de plus que $a=b=c=d=1$*

Alors il existe une constante $M = M(n, p, q, r, s) > 0$, telle que toute solution positive (u, v) de (I) de classe C^2 , avec

$$f(u, v) = u^r + v^q, \quad g(u, v) = u^p + v^s.$$

satisfait

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M \quad (2.3)$$

Comme mentionné dans l'introduction, par un argument de blow-up, la preuve du théorème 2.6. est réduite à l'un des lemmes 2.1, 2.3 ci-dessous. Les deux premiers lemmes donnent des résultats de non-existence pour le système ci-dessous.

Lemme 2.1. *(Serrin and Zou [12])*

Soit $n = 3$ et on suppose que $p, q > 0$ telle que $pq \leq 1$ où $\alpha + \beta > 1$.

alors le système Lane-Emden

$$\begin{cases} \Delta u + v^q = 0 \\ \Delta v + u^p = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (2.4)$$

n'admet pas une solution positive (u, v) non triviale.

Quand $\Omega = \mathbb{R}_+^n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, le lemme 2.1 a été généralisé par Birindelli et Mitidieri à une dimension arbitraire $n \geq 3$ pour les solutions bornées.

Lemme 2.2. *(Birindelli and Mitidieri [3])*

Soient $n \geq 3$ et $p, q > 1$ et soit le système de Lane-Emden

$$\begin{cases} \Delta u + v^q = 0 \\ \Delta v + u^p = 0, \quad x \in \mathbb{R}_+^n \end{cases} \quad (2.5)$$

avec la condition aux limites nulle $u = v = 0$ sur $\partial\mathbb{R}_+^n = \{x_n = 0\}$ n'admet pas de solution bornée non triviale positive (u, v) , à condition

$$\max(\alpha, \beta) \geq (n - 3).$$

Remarque 2.1. • Notons que le lemme 2.2 est valable pour tout $p, q > 1$ lorsque $n = 3$.

• Lorsque $n = 4$ à l'aide du lemme 2.1, on améliore légèrement le lemme 2.2 sous la condition.

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{1}{3}$$

Le résultat de non-existence suivant pour l'équation de Lane-Emden est grâce à Gidas et Spruck [8].

Lemme 2.3. (Gidas et Spruck [8, 9])

Soit $p \in (1, (n+2)/(n-2))$ et supposons que u est une solution positive de

$$\Delta u + u^p = 0, \quad x \in \Omega \quad (2.6)$$

Alors

$$u \equiv 0 \text{ si } \Omega = \mathbb{R}^n \text{ où } \Omega = \mathbb{R}_+^n \text{ avec } u = 0 \text{ sur } \partial\mathbb{R}_+^n.$$

Remarque 2.2. Quand $\Omega = \mathbb{R}_+^n$, Dancer[5] a généralisé la condition ci-dessus $p \in (1, (n+2)/n - 2)$ à $p \in (1, (n+1)/n - 3)$ pour les solutions bornées.

On donne le résultat suivant concernant un changement de variable dont la preuve est immédiate.

Lemme 2.4. Soit (u, v) une solution de classe C^2 de (I) avec

$$f(u, v) = u^r + v^q \text{ et } g(u, v) = u^p + v^s.$$

et soit $\xi \in \Omega$ et $S, l_1, l_2 > 0$, et on pose

$$\bar{u}(y) = S^{-1}u(x), \quad \bar{v}(y) = S^{-l_1}v(x), \quad y = (x - \xi)S^{l_2} \quad (2.7)$$

Alors \bar{u} et \bar{v} satisfont le système suivant

$$\begin{cases} \Delta \bar{u} + S^{r-1-2l_2}\bar{u}^r + S^{ql_1-1-2l_2}\bar{v}^q = 0 \\ \Delta \bar{v} + S^{p-1-2l_2}\bar{u}^p + S^{sl_1-l_1-2l_2}\bar{v}^s = 0 \end{cases}$$

Après ces préparations, nous pouvons démontrer le théorème 2.6.

Preuve de théorème 2.6 : La preuve est basée sur l'absurde. On suppose que le théorème 2.6 est faux. Alors il existe une suite des solutions $\{u_k(x), v_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ de classe C^2 du système (I) telle que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_k\|_{L^\infty(\Omega)}) = \infty \quad (2.8)$$

Pour $k = 1, 2, \dots$. On pose

$$M_k = \sup_{x \in \Omega} u_k(x) = u_k(\tau_k), \quad N_k = \sup_{x \in \Omega} v_k(x) = v_k(\zeta_k).$$

où $\tau_k, \zeta_k \in \Omega$. Dans le lemme 2.4, nous prenons

$$l_1 = \frac{\alpha}{\beta} > 0, \quad l_2 = \frac{1}{\beta} > 0.$$

et

$$u = u_k, \quad v = v_k, \quad S = S_k = M_k + N_k^{1/l_1} \rightarrow \infty.$$

Le choix sur ξ sera déterminé plus tard. Clairement

$$ql_1 - 1 - 2l_2 = p - 1 - 2l_2 = 0.$$

En outre, la pair (\bar{u}_k, \bar{v}_k) donnée par (2.7) satisfait :

$$\bar{u}_k \leq 1, \quad \bar{v}_k \leq 1 \tag{2.9}$$

et

$$\begin{cases} \Delta \bar{u}_k + S_k^l \bar{u}_k^r + \bar{v}_k^q = 0 \\ \Delta \bar{v}_k + \bar{u}_k^p + S_k^m \bar{v}_k^s = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

où

$$l = r - 1 - 2l_2 = r - 1 - 2/\beta \neq 0$$

$$m = sl_1 - l_1 - 2l_2 = (\alpha(s - 1) - 2)/\beta \neq 0.$$

Par hypothèse (3) : Nous considérerons plusieurs cas en fonction des valeurs l et m des paramètres.

Il est clair que (2.10) est symétrique par rapport à l et m et nous ne traiterons les deux cas suivants concernant les valeurs de l .

Cas 1 : $l > 0$. nous divisons en outre la preuve en deux sous-cas .

(i) $m > 0$: nous montrons d'abord :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_k}{N_k^{1/l_1}} = 0. \tag{2.11}$$

C'est équivalent à montrer que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}_k(0) = 0$$

En effet, on a

$$\begin{cases} \bar{u}_k(y) = S_k^{-1}u_k(x) \\ \bar{v}_k(y) = S_k^{-l_1}v_k(x) \\ y = (x - \xi)S_k^{l_2} \end{cases}$$

donc

$$\bar{u}_k(0) = S_k^{-1}u_k(\xi), \text{ car } 0 = (x - \xi)S_k^{l_2} \Rightarrow x = \xi$$

On choisit $\xi = \tau_k$, alors

$$\bar{u}_k(0) = S_k^{-1}u_k(\tau_k) = S_k^{-1}M_k = \frac{M_k}{M_k + N_k^{1/l_1}}$$

D' où

$$\bar{u}_k(0) = \frac{\frac{M_k}{N_k^{1/l_1}}}{\frac{M_k}{N_k^{1/l_1}} + 1}$$

Donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}_k(0) = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_k}{N_k^{1/l_1}} = 0$$

Par absurde. Supposons qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ et sous suite (toujours en utilisant les même indices) telle que :

$$\bar{u}_k(0) \geq \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.12)$$

D'autre part

$$\bar{u}_k(0) = \frac{M_k}{M_k + N_k^{1/l_1}} \leq 1.$$

donc

$$\bar{u}_k(0) \in [\varepsilon_0, 1)$$

On pose

$$\begin{cases} \tilde{u}_k(z) = \bar{u}_k(y) \\ \tilde{v}_k(z) = \bar{v}_k(y) \\ z = yS_k^{l/2} \end{cases}$$

$$\partial_{y_i} \bar{u}_k(y) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial \tilde{u}_k(z)}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial z_j}{\partial y_i} = S_k^{l/2} \partial_{z_i} \tilde{u}_k(z)$$

avec

$$\frac{\partial z_j}{\partial y_i} = \begin{cases} S_k^{l/2} & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

Donc

$$\partial_{y_i}^2 \bar{u}_k(y) = (S_k^{l/2})^2 \partial_{z_i}^2 \tilde{u}_k(z) = S_k^l \partial_{z_i}^2 \tilde{u}_k(z)$$

Donc

$$\Delta \bar{u}_k = S_k^l \Delta \tilde{u}_k$$

le même chose, on a

$$\Delta \bar{v}_k = S_k^l \Delta \tilde{v}_k$$

Donc, par (2.10), $\tilde{u}_k(z), \tilde{v}_k(z)$ sont bornés et satisfont :

$$\tilde{u}_k(0) \in [\varepsilon_0, 1), \quad \Delta \tilde{u}_k + \tilde{u}_k^r + S_k^{-l} \tilde{v}_k^q = 0. \quad (2.13)$$

Pour chaque k , on note :

$$d_k = \text{dist}(\tau_k, \partial\Omega), \quad n_k = S_k^{-l_2 - l/2} \rightarrow 0.$$

car $(-l_2 - l/2 < 0)$

On distingue deux cas. Le premier, si que la suite $\{d_k/n_k\}$ n'est pas bornée. Alors, Par le théorème de la régularité elliptique standard 2.1, la suite \tilde{u}_k est bornée dans l'espace $C^{2,\alpha}$ qui s'injecte de manière compacte dans l'espace C^2 grâce au théorème d'Ascoli-Arzelà 2.3. Alors \tilde{u}_k (après extraction d'une sous-suite si nécessaire) converge uniformément vers une fonction positive $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^n)$ sur tout sous ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^n$. de plus, \tilde{u} satisfait (après le passage de la limite dans l'équation (2.10))

$$\Delta \tilde{u} + \tilde{u}^r = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

avec $\Omega = \mathbb{R}^n$ puisque évidemment par (2.9) et l'hypothèse $l > 0$, comme $\tilde{v}_k(z)$ est borné. Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^{-l/2} \tilde{v}_k(z) = 0$$

uniformément sur \mathbb{R}^n . Donc $\tilde{u} \equiv 0$ par le lemme 2.3. D'où, à cause de hypothèse (2) de théorème 2.6, on obtient une contradiction immédiate avec (2.12).

Le deuxième cas, si la suite $\{d_k/n_k\}$ est bornée. On a la suite $\{d_k/n_k\}$ est minoré par une constante strictement positive. En effet, Par la théorème de la régularité elliptique 2.1, la suite \tilde{u}_k est bornée uniformément en k dans l'espace C^2 , et en particule elle est uniformément Lipschitzienne, c'est à dire

$$|\tilde{u}_k(0) - \tilde{u}_k(0, -d_k/n_k)| \leq c \frac{d_k}{n_k}.$$

Donc

$$1 - 0 \leq c \frac{d_k}{n_k}.$$

ce qui donne $\frac{d_k}{n_k} \geq \frac{1}{c} > 0$, pour tout k . Dans ce cas il existe $s > 0$ tel que $d_k/n_k \rightarrow s$, et il existe une fonction positive $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}_s^n)$ qui est la limite de \tilde{u}_k dans C^2 uniformément sur tout sous-ensemble compact, donc cette fonction après le passage à la limite dans l'équation (2.13), satisfait (2.6) avec

$$\Omega = \mathbb{R}_s^n = \mathbb{R}^n \cap \{x^n > -s\}, \tilde{u} = 0 \text{ sur } \partial\mathbb{R}_s^n.$$

Donc $\tilde{u} = 0$ par le lemme 2.3, ce qui donne à nouveau une contradiction avec (2.13). Et (2.11) est prouvé .

Ensuite, puisque $m > 0$, nous utilisons (2.10) et prenons $\xi = \zeta_k$ pour dériver .

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k^{1/l_1}}{M_k} = 0.$$

Cela est impossible , compte tenu de (2.11) .

(ii) . m < 0 :

Comme $l > 0$, donc (2.11) satisfait. Maintenant on prends $\xi = \zeta_k$, alors clairement on a :

$$\bar{v}_k(0) \rightarrow 1, \bar{u}_k(y) \leq \bar{u}_k((\tau_k - \zeta_k)S_k^{l_2}) = \max \bar{u}_k \rightarrow 0. \quad (2.14)$$

On a

$$\bar{v}_k(0) = S_k^{-l_1} v_k(\xi), \text{ car } 0 = (x - \xi)S_k^{l_2} \text{ donc } x = \xi$$

On prends $\xi = \zeta_k$, alors

$$\bar{v}_k(0) = S_k^{-l_1} v_k(\zeta_k) = S_k^{-l_1} N_k$$

Donc

$$\begin{aligned} \bar{v}_k(0)^{\frac{1}{l_1}} &= S_k^{-1} N_k^{\frac{1}{l_1}} \\ &= \frac{N_k^{\frac{1}{l_1}}}{M_k + N_k^{\frac{1}{l_1}}} = \frac{\frac{N_k^{\frac{1}{l_1}}}{M_k}}{1 + \frac{N_k^{\frac{1}{l_1}}}{M_k}} \end{aligned}$$

Alors

$$\bar{v}_k(0) \rightarrow 1 \text{ lorsque } k \rightarrow \infty$$

En procédant comme en (i), à l'aide du fait $m < 0$ et (2.14), on passe à la limite dans (2.10) pour déduire qu'il existe $\bar{v} \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\Delta \bar{v} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \bar{v}(0) = 1.$$

à condition que la suite $\{d_k/n_k\}$ soit non borné, et pour certains $s > 0$

$$\Delta \bar{v} = 0, \quad x \in \mathbb{R}_s^n, \quad \bar{v}(0) = 1, \quad \bar{v}|_{\partial \mathbb{R}_s^n} = 0.$$

à condition que la suite $\{d_k/n_k\}$ est bornée avec

$$d_k = \text{dist}(\zeta_k, \partial \Omega), \quad n_k = S_K^{-l_2} \rightarrow 0.$$

Le deuxième cas ne peut pas se produire, puisque le principe Phragmén-Lindelof [13] implique \bar{v} s'annule identiquement, ce qui contredit avec $\bar{v}(0) = 1$. Si la première possibilité se présente, alors

$$\bar{v} \equiv \bar{v}(0) = 1$$

Comme toutes les fonction harmoniques bornées sur \mathbb{R}^n doivent être constantes donc

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{v}_k(y) = 1$$

uniformément pour $y \in B = B_1(0)$. En outre par (2.11)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}_k(y) = 0.$$

uniformément sur B . D'autre part, on applique la formule de Green à (2.10) sur B

$$\begin{aligned} 0 \leftarrow \bar{u}_k(0) &= \int_{\partial B} \bar{u}_k(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, 0) d\sigma + \int_B [S_k^l \bar{u}_k^r + \bar{v}_k^q] G(x, 0) dx \\ &\geq \int_{\partial B} \bar{u}_k(x) \frac{\partial G}{\partial \nu}(x, 0) d\sigma + \int_B \bar{v}_k^q G(x, 0) dx \rightarrow \int_B G(x, 0) dx = c_n > 0 \end{aligned}$$

lorsque $k \rightarrow \infty$, où $G(x, y)$ est la fonction de Green sur B , ce qui donne une contradiction.

Cas 2 : $l < 0$. Encore une fois nous considérons deux cas .

(i) . $m > 0$: la preuve est essentiellement la même que celle de **(ii)** de **cas 1**.

(ii) . $m < 0$:

$$M_k S_k^{-1} + N_k S^{-l_1} \geq c > 0.$$

Donc, sans perte de généralité ($\xi = \tau_k$ ou $\xi = \zeta_k$), nous pouvons assumer

$$\bar{u}_k(0) + \bar{v}_k(0) \geq c > 0.$$

En faisant tendre $k \rightarrow \infty$ dans (2.10), de même comme dans le **cas 1**, on déduit qu'il existe $\bar{u} \geq 0$ et $\bar{v} \geq 0$ satisfaisant (2.4) ou (2.5).

$$\bar{u}(0) + \bar{v}(0) \geq c > 0, \bar{u} + \bar{v} \leq 1.$$

impossible, en vue de lemme 2.1 ou de lemme 2.2 .

Il s'ensuit que (2.8) ne peut pas être satisfait et la preuve est complète .

Nous concluons la section avec la preuve de théorème 2.5 suivante

Preuve de théorème 2.5 :

La preuve se réduit essentiellement à celle du théorème 2.6. nous considérerons différents cas possibles pour les valeurs de a, b, c et d .

Cas 1 :

Soit $b = 0$ ou $c = 0$. Cela se réduit simplement au cas d'équations simples suivantes

$$-\Delta u = au^r, \quad -\Delta v = dv^s \quad \text{dans } \Omega, \quad u = v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Comme $\max\{r, s\} \leq 5$, alors on peut appliquer le Théorème 1.1 dans l'article de B. Gidas-J. Spruck [9], et on déduit que les solutions u et v sont bornées.

Cas 2 :

$a = 0$ et $d \neq 0$. Donc $b, c > 0$. Comme $a = 0$, le terme qui contient l n'apparaît pas et donc on le traite simplement comme $l < 0$. si $m > 0$, (i) du cas 2 du théorème 2.6 s'applique. Si $m < 0$, on procède alors exactement comme (ii) du cas 2 du théorème 2.6

Cas 3 :

$d = 0$. Donc $a, b, c > 0$. Depuis $d = 0$, le terme impliquant m n'apparaît pas et donc on le traite simplement comme $m < 0$. Il s'ensuit que les arguments du cas 2 ci-dessus ($a = 0$) s'appliquent.

Cas 4 :

$a = d = 0$. Donc $b, c > 0$. Puisque $a = d = 0$, le terme impliquant l ou m n'apparaît pas et donc on le traite simplement comme $l < 0$ et $m < 0$. Il s'ensuit que les arguments du (ii) du cas 2 du

théorème 2.6 s'appliquent.

Ceci complète la preuve du théorème 2.5

2.3 Estimations pour $n > 3$

Dans cette section, nous considérons le système (I) avec des fonctions plus générales f et g pour $n \geq 3$, qui peut également dépendre de la variable indépendante x .

Supposons que :

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

sont des fonctions continue. Soient

$$a : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad b : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad c : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}; \quad d : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont des fonctions continues positives. Nous supposons en outre que a, b, c où d sont strictement positives ou identiquement nulles sur $\bar{\Omega}$. Nous aurons besoin de la croissance suivante de f et g à l'infini.

Hypothèses 2.7. Il existe des nombres positifs p, q avec $pq > 1$ et $r, s > 1$ tels que pour $u, v \geq 0$ et fixe $x \in \Omega$

$$\lim_{u+v \rightarrow \infty} \frac{f(x, u, v)}{a(x)u^r + b(x)v^q} = 1, \quad \lim_{u+v \rightarrow \infty} \frac{g(x, u, v)}{c(x)u^p + d(x)v^s} = 1.$$

Nous généralisons d'abord le théorème 2.5 aux fonctions générales f et g pour $n = 3$.

Théorème 2.8. Soient $n = 3$ et (u, v) une solution positive de (I) de classe C^2 . Supposons que l'hypothèse 2.7 est vraie. Alors il existe une constante positive $M = M(n, a, b, c, d, p, q, r, s)$ telle que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \tag{2.15}$$

à condition que

1. $\alpha + \beta > 1$
2. $\max \{r, s\} < 5$, et
3. $\beta \neq 2/(r - 1)$ et $\alpha \neq 2/(s - 1)$.

Preuve : La preuve est essentiellement la même qu'avant, mais nous ne considérons que pour les cas $l > 0$ et $m > 0$. Supposons par absurde, que (2.15) est faux. Alors il existe une suite des solutions $\{u_k(x), v_k(x)\}$ de (I) telles que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\|u_k\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v_k\|_{L^\infty(\Omega)}) = \infty. \quad (2.16)$$

Nous voulons dériver une contradiction avec (2.16). À la lumière du théorème 2.5, nous supposons que toutes les fonctions $a(x), b(x), c(x), d(x)$ sont strictement positives.

Comme dans la section 2, nous utilisons la même transformation donnée dans le lemme 2.4 avec la même notation et on montre

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M_k}{N_k^{1/l_1}} = 0. \quad (2.17)$$

Supposons le contraire. C'est-à-dire

$$\xi_k = \tau_k, \quad \bar{u}_k(0) \geq \varepsilon_0. \quad (2.18)$$

Posons

$$\tilde{u}_k(z) = \bar{u}_k(y), \quad \tilde{v}_k(z) = \bar{v}_k(y), \quad z = yS_k^{l/2}.$$

et

$$a_k(z) = a(\xi_k + S_k^{l_2-l/2}z), \quad b_k(z) = b(\xi_k + S_k^{l_2-l/2}z).$$

et

$$c_k(z) = c(\xi_k + S_k^{l_2-l/2}z), \quad d_k(z) = d(\xi_k + S_k^{l_2-l/2}z).$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $\xi_k \rightarrow \xi_0$. Il vient que

$$a_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} a_k(z) = a(\xi_0) > 0,$$

$$b_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k(z) = b(\xi_0) > 0,$$

$$c_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k(z) = c(\xi_0) > 0,$$

et

$$d_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} d_k(z) = d(\xi_0) > 0$$

uniformément sur tout sous-ensemble compact de Γ (Γ est soit \mathbb{R}^3 ou \mathbb{R}_s^3 , voir ci-dessous également) puisque $S_k \rightarrow \infty$ et $l_2 + l/2 > 0$.

Par des calculs directs, $\tilde{u}_k(z)$ et $\tilde{v}_k(z)$ sont bornés et satisfont

$$\Delta \tilde{u}_k + S_k^{-1-2l_2-l} f(\xi_k + S_k^{-l_2-l/2} z, S_k \tilde{u}_k(z), S_k^{l_1} \tilde{v}_k(z)) = 0. \quad (2.19)$$

En utilisant 2.7, il existe $M > 0$ tel que pour $u, v \geq 0$

$$|f(x, u, v)| \leq 2 [a(x)u^r + b(x)v^q] + M.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \left| S_k^{-1-2l_2-l} f(\xi_k + S_k^{-l_2-l/2} z, S_k \tilde{u}_k(z), S_k^{l_1} \tilde{v}_k(z)) \right| &\leq (a_k \tilde{u}_k^r + b_k S_k^{-l/2} \tilde{v}_k^q) + o(1) \\ &\leq \bar{M}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Par conséquent, via la théorie elliptique standard 2.1 et à l'aide de (2.19) et (2.20), nous déduisons qu'il existe $\tilde{u} \in C^2(\Gamma) \cap C^{1,\alpha}(\Gamma)$ (après extraction d'une sous-suite) telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{u}_k(z) = \tilde{u}(z)$$

uniformément sur tout sous-ensemble compact de Γ en topologie $C^{1,\alpha}$ pour tout $\alpha \in (0, 1)$.

En outre, d'après (2.18), on a :

$$\tilde{u}(0) \geq \varepsilon_0 \quad (2.21)$$

Par conséquent, la condition 2.7 implique clairement que (tenant en compte $1 + 2l_2 + l = r$)

$$\begin{aligned} &\lim_{k \rightarrow \infty} S_k^{-1-2l_2-l} f(\xi_k + S_k^{-l_2-l/2} z, S_k \tilde{u}_k(z), S_k^{l_1} \tilde{v}_k(z)) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(\xi_k + S_k^{-l_2-l/2} z, S_k \tilde{u}_k(z), S_k^{l_1} \tilde{v}_k(z))}{a_k S_k^r \tilde{u}_k^r(z) + b_k S_k^{p l_1} \tilde{v}_k^q(z)} \cdot [a_k \tilde{u}_k^r(z) + b_k S_k^{-l/2} \tilde{v}_k^q(z)] \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} [a_k \tilde{u}_k^r(z) + b_k S_k^{-l/2} \tilde{v}_k^q(z)] \\ &= a_0 \tilde{u}^r(z) \end{aligned}$$

uniformément sur tout sous-ensemble compact de Γ (après extraction d'une sous suite). Il s'ensuit que $\tilde{u}(z)$ satisfait (au sens faible)

$$\Delta \tilde{u} + a_0 \tilde{u}^r = 0 \text{ dans } \Gamma$$

Avec condition aux limites appropriée. Il s'ensuit que $\tilde{u}(z) \equiv 0$. Comme précédemment on obtient une contradiction avec (2.21). Donc (2.17) est vrai.

En procédant de la même manière et en utilisant le fait $m > 0$ (en prenant $\xi_k = \zeta_k$) pour obtenir

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{N_k^{1/l_1}}{M_k} = 0.$$

Cela est impossible en vu de (2.17) et la preuve est complète.

Lorsque $n > 3$, les résultats de non-existence de type Liouville pour la solution positive du système Lane-Emden ne sont pas disponibles pour tous les exposants sous-critiques (p, q) , voir les lemmes 2.5 et 2.7 ci-dessus. Par conséquent, nous avons des résultats similaires mais plus faibles que le cas $n = 3$.

Théorème 2.9. Soit $n > 3$ et soit (u, v) une solution positive de (I) de classe C^2 . Suppose que 2.7 est vrai. Alors il existe une constante positive $M = M(n, a, b, c, d, p, q, r, s)$ telle que

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M, \quad (2.22)$$

à condition que les trois conditions suivantes soient remplies.

1. $\max(\alpha, \beta) \geq n - 2$, ou, $\max(p, q) \leq (n + 2)/(n - 2)$ et $\min(p, q) < (n + 2)/(n - 2)$
2. $\max\{r, s\} < (n + 2)/(n - 2)$, et
3. $\beta \neq 2/(r - 1)$ et $\alpha \neq 2/(s - 1)$.

La preuve est essentiellement la même que celle du théorème 2.8. Cependant, nous utiliserons également les résultats de non-existence suivants pour $n > 3$.

Lemme 2.5. Supposons que $n \geq 3$ et p, q sont des nombres positives satisfaisant soit $pq \leq 1$ soit

$$\max(\alpha, \beta) \geq n - 2.$$

Alors le système Lane-Emden (2.4) n'admet aucune solution positive et non triviale.

Le lemme a d'abord été prouvé par Mitidieri [11] pour $p, q > 1$, puis étendu à des cas général dans [12].

Lemme 2.6. (de Figueiredo and Felmer [6])

Soit $n \geq 3$ et supposons que p, q sont des nombres positifs satisfaisant

$$\max(p, q) \leq \frac{n + 2}{n - 2} \quad \text{et} \quad \min(p, q) < \frac{n + 2}{n - 2}.$$

Alors Le système Lane-Emden (2.4)n'admet aucune solution positive et non triviale.

Enfin, on a une version demi-espace du lemme 2.6 pour les solutions bornées.

Lemme 2.7. Soit $n > 3$ et supposons

$$\max(p, q) \leq \frac{n+1}{n-3} \text{ et } \min(p, q) < \frac{n+1}{n-3}.$$

Alors le système Lane-Emden (2.5) n'admet aucune solution bornée positive et non triviale.

La preuve est la même que celle du lemme 2.2, en utilisant un argument de Dancer[5] et le lemme de non-existence 2.6 .



EXISTENCE DE LA SOLITON DU PROBLÈME VIA LE DEGRÉS TOPOLOGIQUE

Dans ce chapitre, nous allons démontrer l'existence de la solution faible non trivial de système (I), en appliquant le degré topologique de Leray-Schauder développé dans le chapitre 1.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u, v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta v = g(u, v) \text{ dans } \Omega \\ u, v \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (I)$$

3.1 Préliminaire

Théorème 3.1. (Première fonction propre de $-\Delta$)

Le problème

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \text{ dans } \Omega \\ u = 0, \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une infinité dénombrable des valeurs propres et fonctions propres (λ_n, ϕ_n)

avec

$$\lambda_n \rightarrow +\infty$$

et

$$\lambda_1 = \inf_n \lambda_n > 0$$

et il existe une fonction propre $\phi_1 > 0$ dans Ω associée à λ_1 et on a $\phi_1 \in C^\infty(\bar{\Omega})$. ϕ_1 s'appelle la première fonction propre de laplacien sur Ω .

On a besoin de ce théorème concernant le principe de maximum

Théorème 3.2. (principe de maximum faible)

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors

$$u \geq 0 \text{ sur } \bar{\Omega}.$$

Théorème 3.3. (principe de maximum forte)

Soit $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Alors

$$u = 0, \text{ où } u > 0 \text{ dans } \Omega.$$

Théorème 3.4. (Lax-Milgram)

Soit H un espace de Hilbert. Soient $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive, et $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue.

Alors il existe une $u \in H$ unique telle que

$$a(u, v) = F(v). \quad \forall v \in H$$

3.2 Résultat principale

On donne l'énoncé des résultats principaux concernant l'existence de la solution du système (I).

Théorème 3.5. Soit $n = 3$, et soit f et g sont donnés par (2.2). Sous les hypothèses de théorème 2.5, on suppose en plus

$$p, q > 1, \quad a + b > 0, \quad c + d > 0.$$

Alors le système (I) a une solution positive non-triviale .

Théorème 3.6. Soit $n > 3$ et supposons que f et g satisfassent l'hypothèse 2.7 avec

1. $\max(\alpha, \beta) \geq n - 2$, ou, $\max(p, q) \leq (n + 2)/(n - 2)$ et $\min(p, q) < (n + 2)/(n - 2)$
2. $\max\{r, s\} < (n + 2)/(n - 2)$, et
3. $\alpha \neq 2/(s - 1)$ et $\beta \neq 2/(r - 1)$.

Alors le système (I) admet une solution classique positive non triviale w .

3.3 Preuve de théorème 3.5 et 3.6

D'abord, on considère les notations suivantes :

$$\mathbf{w} = (u, v), \text{ avec } \|\mathbf{w}\| = \|u\| + \|v\|.$$

On suppose d'abord que f et g vérifient les hypothèses suivantes :

(H1) : $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ avec $f, g \neq 0$.

(H2) : Il existe des constantes $\lambda, \mu \geq 0$ tel que pour $u, v \geq 0$

$$f(x, u, v) + \lambda u \geq 0, \quad g(x, u, v) + \mu v \geq 0.$$

(H3) : Pour $u, v \geq 0$

$$f(x, u, v) = o(u + v), \quad g(x, u, v) = o(u + v).$$

comme $u + v \rightarrow 0$ uniformément dans Ω .

(H4) : Il existe $M > 0$ tel que pour $u, v \geq 0$ et $x \in \Omega$

$$f(x, u, v) + g(x, u, v) \geq \lambda_1(u + v) - M.$$

où λ_1 est la première valeur propre de $(-\Delta, H_0)$.

On dit que le système (I) a la propriété (AP) si :

(AP) : Pour $(\phi, \psi) \in C(\bar{\Omega}) \times C(\bar{\Omega})$, soit $\mathbf{w} = (u, v)$ une solution positive de

$$\begin{cases} \Delta u + f(x, u, v) = \phi, & \text{dans } \Omega \\ \Delta v + g(x, u, v) = \psi, & \text{dans } \Omega \\ u = v = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Il existe alors une constante positive $C = C(\|(\phi, \psi)\|_{L^\infty(\Omega)}) > 0$ (indépendant de \mathbf{w}) telle que

$$\|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$$

Remarque 3.1. La propriété (AP), via la théorie de la régularité elliptique standard 2.1, implique

$$\|\mathbf{w}\|_{C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq C_1$$

pour tout $\alpha \in (0, 1)$.

Alors, on commence à démontrer le résultat d'existence suivant.

Théorème 3.7. *Sous les hypothèses (H1),(H2),(H3), (H4), (AP), le système (I) admet une solution classique positive w non triviale. c'est-à-dire :*

$$u, v > 0 \text{ sur } \Omega$$

Dans la preuve, on va utiliser la théorie de degré topologique de Leray-Schauder développé dans le chapitre 1. Pour cela, on considère les espaces suivants, avec $\alpha \in (0, 1)$

$$E = C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \times C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) . H = C^\alpha(\bar{\Omega}) \times C^\alpha(\bar{\Omega}), \quad (3.1)$$

$$H^+ = \{w = (u, v) \in H : u, v > 0 \text{ sur } \Omega\}$$

où

$$C_0^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) = C^{2,\alpha}(\bar{\Omega}) \cap C_0(\bar{\Omega})$$

où l'espace $C_0(\bar{\Omega})$ est l'espace des fonctions continue sur $\bar{\Omega}$ et qui s'annulent sur la frontière $\partial\Omega$.

Il est bien connue que E et H sont des espaces de Banach avec les normes :

$$\|w\|_E = \|u\|_{C^{2,\alpha}} + \|v\|_{C^{2,\alpha}} \quad , \quad \|w\|_H = \|u\|_{L^\infty} + \|v\|_{L^\infty}$$

(respectivement) . On considère aussi l'opérateur

$$T = \begin{pmatrix} -\Delta u + \lambda & 0 \\ 0 & -\Delta v + \mu \end{pmatrix} : E \longrightarrow H.$$

$$(u, v) \mapsto (h, k) : \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = h \\ -\Delta v + \mu v = k \end{cases}$$

avec λ, μ donné avant.

D'après le théorème de Lax-Milgram 3.4 et la théorème de la régularité elliptique 2.1 , il est évident que T est bien défini et inversible et on a

$$\|w\|_E \leq c, \quad c \text{ dépend de } \|(h, k)\|_H$$

avec $w = (u, v)$

$$T^{-1} : H \longrightarrow E .$$

Et l'opérateur $T_0 : H \longrightarrow H$ définie par

$$T_0(w) = T_0(u, v) = \begin{pmatrix} f(x, u, v) + \lambda u \\ g(x, u, v) + \mu v \end{pmatrix}, \quad w = (u, v) \in H.$$

Considère maintenant l'opérateur F par

$$F = T^{-1} \circ T_0 : H \longrightarrow H.$$

qui à (ϕ, ψ) associe $F(\phi, \psi) = (u, v)$ où (u, v) solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(x, \phi, \psi) + \lambda \phi \\ -\Delta v + \mu v = g(x, \phi, \psi) + \mu \psi \end{cases}$$

Il est clair qu'un point fixe de F est une solution du système.

On démontre le lemme suivant :

Lemme 3.1. *L'opérateur $F : H \rightarrow H$, définie ci dessus, est compact.*

preuve

Soit (ϕ_n, ψ_n) une suite bornée de H . On montre que l'on peut extraire une sous-suite convergente de $F(\phi_n, \psi_n)$.

On note par $(u_n, v_n) = F(\phi_n, \psi_n)$, alors (u_n, v_n) est une solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_n + \lambda u_n = f(x, \phi_n, \psi_n) + \lambda \phi_n \\ -\Delta v_n + \mu v_n = g(x, \phi_n, \psi_n) + \mu \psi_n \end{cases}$$

Comme (ϕ_n, ψ_n) est borné et f, g sont continues alors :

$$\|f(x, \phi_n, \psi_n) + \lambda \phi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_1$$

$$\|g(x, \phi_n, \psi_n) + \mu \psi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_2$$

D'après la théorème de la régularité elliptique standard 2.1, la suite des solutions (u_n, v_n) est borné dans E , et on a

$$\|(u_n, v_n)\|_E = \|u_n\|_{C^{2,\alpha}} + \|v_n\|_{C^{2,\alpha}} \leq c.$$

ou c dépend de c_1 et c_2 . D'après le théorème d'Ascoli 2.3, l'injection $C^{2,\alpha} \hookrightarrow C^\alpha$ est compacte, alors il existe une sous suite (noté encore) (u_n, v_n) telle que :

$$(u_n, v_n) \longrightarrow (u, v) \text{ dans } H$$

C'est-à-dire :

$$F(\phi_n, \psi_n) \longrightarrow (u, v)$$

Donc F est compact.

On est prêt maintenant à démontrer le théorème 3.7 .

Preuve de théorème 3.7 On applique le degré topologique de Leray-Schauder sur l'opérateur

$$F = T^{-1} \circ T_0 : H \rightarrow H.$$

D'après le principe de maximum 3.3, on a

$$F(H^+) \subset H^+.$$

En effet si $\mathbf{w} = F(G)$ avec $\mathbf{w} = (u, v), G = (\phi, \psi)$

alors

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f(x, \phi, \psi) + \lambda \phi > 0 \\ -\Delta v + \mu v = g(x, \phi, \psi) + \mu \psi > 0 \end{cases}$$

Donc $u > 0$ et $v > 0$.

On pose

$$\begin{cases} U = H^+ \cap B_R \\ U_1 = H^+ \cap B_r \\ U_2 = U \setminus \bar{U}_1 \end{cases}$$

(où $0 < r < R$ sont des réels positives à choisir ultérieurement).

On va montrer que

$$d(Id - F, U, 0) = 0$$

$$d(Id - F, U_1, 0) = 1$$

$$d(Id - F, U_2, 0) = -1$$

- On commence par démontrer que $d(Id - F, U_1, 0) = 1$

On considère l'homotopie suivant

$$h(t, \mathbf{w}) = tF(\mathbf{w})$$

On montre que $\mathbf{w} = tF(\mathbf{w}), \forall t \in [0, 1], \forall u \in \partial U_1$

On a

$$\partial U_1 = \left\{ \mathbf{w} \in H^+ : \|\mathbf{w}\|_H = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = r \right\}$$

Montrons que $\mathbf{w} \neq tF(\mathbf{w})$ pour $\|\mathbf{w}\|_H = r$

Par absurde, soit $\mathbf{w} = (u, v) \in \partial U_1$ avec $\mathbf{w} = tF(\mathbf{w})$.

Alors $\mathbf{w} = (u, v)$ satisfait :

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = t[f(x, u, v) + \lambda u]. \\ -\Delta v + \mu v = t[g(x, u, v) + \mu v]. \end{cases} \quad (3.2)$$

On multiplie (3.2) par ϕ_1 et intégrons par parties sur Ω on obtient

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u(-\Delta\phi_1) + \lambda \int_{\Omega} u\phi_1 = t \int_{\Omega} f(x, u, v)\phi_1 + t\lambda \int_{\Omega} u\phi_1. \\ \int_{\Omega} v(-\Delta\phi_1) + \mu \int_{\Omega} v\phi_1 = t \int_{\Omega} g(x, u, v)\phi_1 + t\mu \int_{\Omega} v\phi_1. \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \int_{\Omega} u\phi_1 = t \int_{\Omega} f(x, u, v)\phi_1 + (t-1)\lambda \int_{\Omega} u\phi_1 \\ \lambda_1 \int_{\Omega} v\phi_1 = t \int_{\Omega} g(x, u, v)\phi_1 + (t-1)\mu \int_{\Omega} v\phi_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 \int_{\Omega} u\phi_1 \leq \int_{\Omega} f(x, u, v)\phi_1 \\ \lambda_1 \int_{\Omega} v\phi_1 \leq \int_{\Omega} g(x, u, v)\phi_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \lambda_1 \int_{\Omega} (u+v)\phi_1 \leq \int_{\Omega} (f(x, u, v) + g(x, u, v))\phi_1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

D'après l'hypothèse (H3) : $\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0$:

si $|u+v| \leq r$ alors $|f(x, u, v) + g(x, u, v)| < \varepsilon(u+v)$

Pour $\varepsilon = \lambda_1$

$$(3.3) \Rightarrow \lambda_1 \int_{\Omega} (u+v)\phi_1 < \lambda_1 \int_{\Omega} (u+v)\phi_1$$

C'est une contradiction. Donc pour $\|\mathbf{w}\|_H = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = r$, on a $\mathbf{w} \neq tF(\mathbf{w})$

et par l'invariance par l'homotopie, cela implique

$$d(Id - F, U_1, 0) = d(Id, U_1, 0) = 1$$

• On démontre maintenant que $d(Id - F, U, 0) = 0$

Il suffit de montrer que :

$$d(Id - F, U, 0) = d(Id - (F + t_0\mathbf{w}_0), U, 0) = 0$$

où $t_0 > 0$ (choisir ultérieurement), $\mathbf{w}_0 = (\phi_1, \phi_1) \in H^+$, où ϕ_1 est la première fonction propre de $-\Delta$

Par absurde, supposons que $d(Id - (F + t_0\mathbf{w}_0), U, 0) \neq 0$ alors $\exists \mathbf{w} = (u, v)$ telle que

$$\mathbf{w} = F(\mathbf{w}) + t_0\mathbf{w}_0 \quad (3.4)$$

C'est à dire ,

$$(3.4) \Leftrightarrow \begin{cases} -\Delta u + \lambda u + \Delta(t_0\phi_1) = f(x, u, v) + \lambda u \\ -\Delta v + \mu v + \Delta(t_0\phi_1) = g(x, u, v) + \mu v \end{cases} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} -\Delta u - t_0(\lambda + \lambda_1)\phi_1 = f(x, u, v) \\ -\Delta v - t_0(\mu + \lambda_1)\phi_1 = g(x, u, v) \end{cases} \\ \Rightarrow & -\Delta(u + v) - t_0(2\lambda_1 + \lambda + \mu)\phi_1 = f(x, u, v) + g(x, u, v) \end{aligned}$$

On multiplie par ϕ_1 , et on intègre sur Ω on obtient

$$\begin{aligned} \Rightarrow & -\int_{\Omega}(u + v)\phi_1 - t_0(2\lambda_1 + \lambda + \mu)\int_{\Omega}\phi_1^2 = \int_{\Omega}(f(x, u, v) + g(x, u, v))\phi_1. \\ \Rightarrow & t_0(2\lambda_1 + \lambda + \mu)\int_{\Omega}\phi_1^2 = \int_{\Omega} -[(f(x, u, v) + g(x, u, v)) + (u + v)]\phi_1. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse

$$t_0(2\lambda_1 + \lambda + \mu)\int_{\Omega}\phi_1^2 \leq \int_{\Omega} M\phi_1$$

$$\Rightarrow t_0 \leq \frac{\int_{\Omega} M\phi_1}{(2\lambda_1 + \lambda + \mu)\int_{\Omega}\phi_1^2}$$

On pose

$$c_0 = \frac{\int_{\Omega} M\phi_1}{(2\lambda_1 + \lambda + \mu)\int_{\Omega}\phi_1^2}$$

$$\Rightarrow t_0 \leq c_0,$$

Alors si on choisit $t_0 = 2c_0 > c_0$ on obtient contradiction donc

$$\mathbf{w} \neq F(\mathbf{w}) + t_0\mathbf{w}_0 \text{ pour } t \geq t_0.$$

Donc

$$d(\text{Id} - (F + t_0\mathbf{w}_0), U, 0) = 0$$

• Il reste à montrer que

$$d(\text{Id} - F, U, 0) = d(\text{Id} - (F + t_0\mathbf{w}_0), U, 0)$$

On considère l'homotopie

$$h(t, \mathbf{w}) = F(\mathbf{w}) + tt_0\mathbf{w}_0$$

Il s'agit de montrer que $\mathbf{w} \neq h(t, \mathbf{w}), \forall \mathbf{w} \in \partial U$

$$\mathbf{w} \in \partial U \Leftrightarrow \|\mathbf{w}\|_H = R$$

Soit $\mathbf{w} \in H : \|\mathbf{w}\|_H = R$ telle que $\mathbf{w} = F(\mathbf{w}) + tt_0\mathbf{w}_0$

Alors

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, v) + \lambda_1 tt_0\phi_1 + \lambda tt_0\phi_1 = f_1 \\ -\Delta v = g(x, u, v) + \lambda_1 tt_0\phi_1 + \mu tt_0\phi_1 = g_1 \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}\|f_1\| &\leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + t_0 \|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)} \\ \|g_1\| &\leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} + t_0 \|\phi_1\|_{L^\infty(\Omega)}\end{aligned}$$

Donc d'après (AP), $\exists c > 0$ tel que ($c = c(t_0)$)

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c, \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c$$

$$\|\mathbf{w}\|_H = \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} = 2c$$

avec le choix de $R = 2c + 1 > \|\mathbf{w}\|_H$

alors

$$\mathbf{w} \neq F(\mathbf{w}) + t_0 \mathbf{w} \text{ pour } \|\mathbf{w}\|_H = R$$

Donc

$$d(\text{Id} - F, U, 0) = d(\text{Id} - (F + t_0 \mathbf{w}_0), U, 0) = 0$$

$$\text{Comme } \bar{U} = \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2$$

Alors

$$d(\text{Id} - F, U, 0) = d(\text{Id} - F, U_1, 0) + d(\text{Id} - F, U_2, 0)$$

Donc

$$d(\text{Id} - F, U_2, 0) = -1$$

D'où l'équation $\mathbf{w} = F(u, v)$ admet une solution \mathbf{w} dans U_2 c-à-dire

$$\mathbf{w} > 0 \text{ dans } \Omega(r < \|u\|_{L^\infty(\Omega)} < R)$$

et

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, v) \\ -\Delta v = g(x, u, v) \end{cases}$$

Preuve de théorème 3.5

C'est un cas particulier de théorème 3.7. Il suffit de vérifier les hypothèses (H1),(H2),(H3),(H4),(AP) :

Vérification de (H1) : évidente ($f, g \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}), f, g \neq 0$)

Vérification de (H2) : $\exists \lambda, \mu \geq 0$ tel que $\forall u, v \geq 0$

$$\begin{cases} f(x, u, v) + \lambda u \geq 0, \\ g(x, u, v) + \mu v \geq 0 \end{cases}$$

il suffit de prendre $\lambda = \mu = 0$, donc (H2) est satisfait

Vérification de (H3) : $\forall u, v \geq 0$

$$f(x, u, v) = o(u + v), g(x, u, v) = o(u + v)$$

on a $f(x, u, v) = au^r + bv^q, r > 1, q > 1$

$$\frac{f(x, u, v)}{u + v} = \frac{au^r + bv^q}{u + v} \leq \frac{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{u^{2r} + v^{2q}}}{u + v}$$

On pose $k = \min \{r, s\} > 1$

alors, pour $0 < u + v < 1$, on a :

$$\begin{aligned} u^{2r} + v^{2q} &\leq u^{2k} + v^{2k} \\ &\leq c(u + v)^{2k} \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{f(x, u, v)}{u + v} \leq \sqrt{a^2 + b^2} c \frac{(u + v)^k}{u + v} = c\sqrt{a^2 + b^2} (u + v)^{k-1} \rightarrow 0$$

Donc

$$\frac{f(x, u, v)}{u + v} \rightarrow 0.$$

D'où

$$f(x, u, v) = o(u + v)$$

La même chose pour $g(x, u, v)$.

Vérification de (H4) : $\exists M > 0, \forall u, v \geq 0$

$$f(x, u, v) + g(x, u, v) \geq \lambda_1(u + v) - M$$

On a

$$f(x, u, v) + g(x, u, v) = au^r + cu^p + bv^q + dv^s$$

Et

$$a + b > 0, c + d > 0$$

Comme $p, q > 1$, alors

$$\frac{f(x, u, v) + g(x, u, v)}{u + v} \xrightarrow{u+v \rightarrow \infty} +\infty$$

Alors

$$\frac{f(x, u, v) + g(x, u, v)}{u + v} > \lambda_1$$

pour $u + v > A > 0$, pour certain constant $A > 0$

D'où

$$f(x, u, v) + g(x, u, v) > \lambda_1(u + v), \text{ pour } u + v > A \quad (3.6)$$

pour

$$0 < u + v < A, \text{ on a : } \lambda_1(u + v) \leq \lambda_1 A = M \quad (3.7)$$

De (3.6) et (3.7) . On a en déduite que

$$\lambda_1(u + v) \leq f(x, u, v) + g(x, u, v) + M, \forall u, v \geq 0$$

Donc

$$f(x, u, v) + g(x, u, v) \geq \lambda_1(u + v) - M$$

Vérification de (AP) : évidente par (i) .

Remarque 3.2. Il est facile de voir que les composantes u et v sont soit strictement positives soit identiques nulle, via un principe de maximum fort.

Corollaire 3.1. Soit $n = 3$ et supposons que f et g satisfassent la condition 2.7 avec

1. $\alpha + \beta > 1$,
2. $\max \{r, s\} < 5$, et
3. $\alpha \neq 2/(s - 1)$ et $\beta \neq 2/(r - 1)$.

Alors le système (I) admet une solution classique positive non triviale w .

La preuve est la même que celle de théorème 3.5 . Lorsque (I) est irréductible, à savoir :

$$f(x, 0, v) \neq 0 \text{ pour } v > 0; g(x, u, 0) \neq 0 \text{ pour } u > 0,$$

Alors la solution de (I) obtenue dans le théorème 3.7 est nécessairement positive.

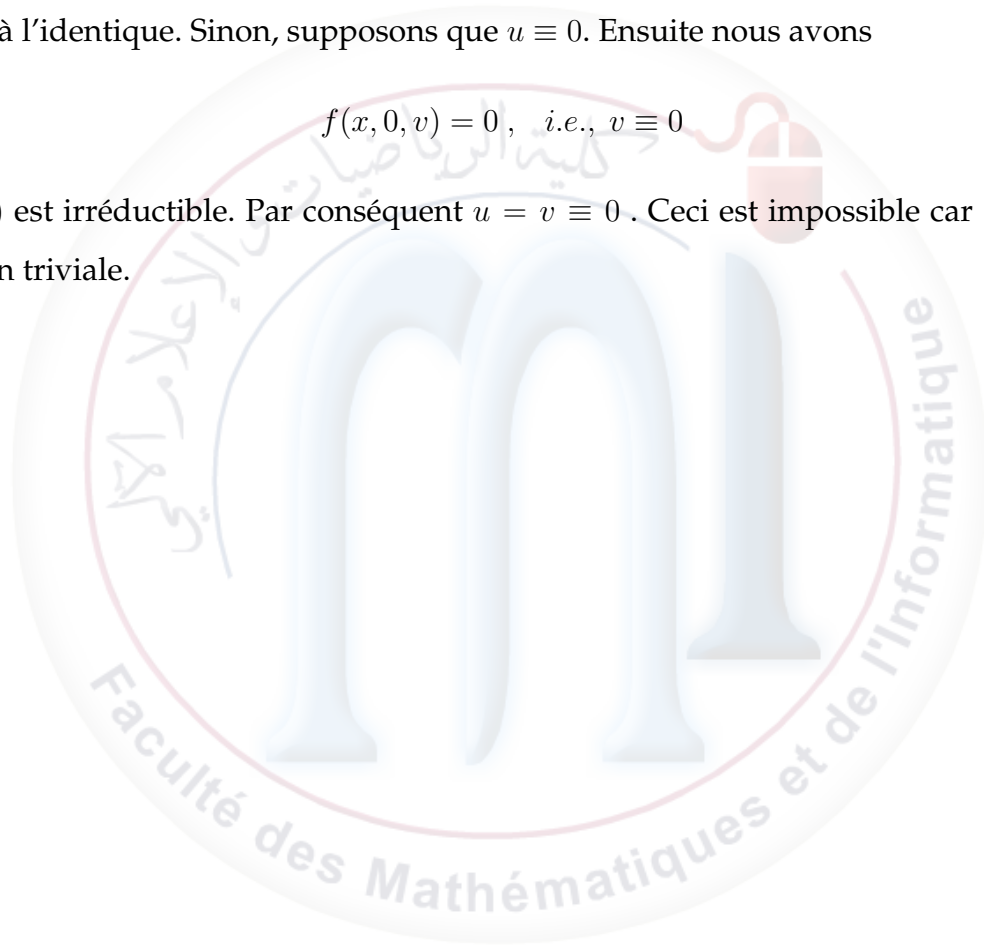
Théorème 3.8. *Supposons que les conditions données dans le théorème 3.7 se vérifient. Ensuite, les solutions de (I) obtenues dans le théorème 3.7 sont nécessairement positives, à condition que (I) soit irréductible.*

Preuve de théorème 3.8 :

Nous devons montrer que w est strictement positif. Après l'argument de l'étape 1 du théorème 3.7, un argument de principe maximal fort montre que les composantes u et v sont soit strictement positives soit identiques à zéro. Nous affirmons qu'aucun composant u ou v ne peut disparaître à l'identique. Sinon, supposons que $u \equiv 0$. Ensuite nous avons

$$f(x, 0, v) = 0, \quad \text{i.e., } v \equiv 0$$

sinse (I) est irréductible. Par conséquent $u = v \equiv 0$. Ceci est impossible car (u, v) est une solution non triviale.



Résumé

Le travail qu'on a fait dans ce mémoire un résultat très important c'est l'étude sur l'existence de solutions d'un système d'équation elliptique non-variationnel, est toujours difficile .

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u, v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta v = g(u, v) \text{ dans } \Omega \\ u, v \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (I)$$

On applique la méthode de degré topologique de Leray-Schauder pour démontrer l'existence d'une solution non-triviale du système (I). Nous permet de démontrer des estimations a priori et ensuite on utilise ces estimations pour appliquer la méthode de degré topologique pour démontrer l'existence de la solution.

Mots clés : Degré topologique de Browner et de Leray-Schauder, estimations a priori, principe du maximum, problèmes elliptiques non-linéaire, système elliptique variationnel, première fonction propre de Laplacien.

Abstract

The work that we have done in this dissertation a very important result is the study on the existence of solutions of a non-variational elliptical equation system, is always difficult.

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u, v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta v = g(u, v) \text{ dans } \Omega \\ u, v \geq 0 \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (I)$$

We apply the Leray-Schauder topological degree method to demonstrate the existence of a non-trivial solution of the system (I). Allows us to demonstrate a priori estimates and then we use these estimates to apply the topological degree method to demonstrate the existence of the solution.

Keywords : Topological degree of Browner and Leray-Schauder, a priori estimates, principle of the maximum, nonlinear elliptical problems, variational elliptical system, first proper function of Laplacien.

Bibliographie

- [1] Jérôme Droniou. Degrés topologiques et applications
- [2] Henghui Zou, A priori estimates for a semilinear elliptic system without variational structure and their applications.323,713-735 (2002)
- [3] Birindelli,I,Mitidieri,E,Liouville theorems for elliptic inequalities and application .Proc.Royal Society 128 (1998),1217-1247
- [4] Brezis, H., Turner, R., On a class of superlinear elliptic equations. Comm. PDE. 2 (1977), 601-614
- [5] Danacer, E.N.,Some notes on the method of moving planes. Bull. Austral. Math.Soc. 46 (1992), 425-434
- [6] de Figueiredo, D., Semilinear elliptic systems. Nonlinear Funct. Anal. Diff. Equ., World Sci. Pisa 21 (1994), 387-397
- [7] Fowler,R.H.,Further studies of Emden's and similar differential equation .Quart. J.Math,Oxford Ser . 2 (1931) 259-288
- [8] Gidas, B., Spruck, J., Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations. Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), 525-598
- [9] Gidas, B., Spruck, J., A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations. Comm. in PDE. 6 (1981), 883-901
- [10] Gilbarg, D. , Trudinger, N.S., Elliptic partial differential equations of second order . Springer-Verlag , New York , 1983(second-edition)
- [11] Mitidieri,E., Non-existence of positive solutions of semilinear elliptic systeme in \mathbb{R}^n . Diff.Int.Equations 9 (1996),456-479
- [12] Serrin, J., Zou,H., Non-existence of positive solutions of the Lane-Emden system.Differential Integral Eqs.9 (1996),635-653

- [13] Protter, M., Weinberger, H., Maximum principles in differential equations. Springer-Verlag, New York, 1984
- [14] Serrin, J., Zou, H., Existence of entire positive solutions of elliptic Hamiltonian systems. Comm. in PDE 23 (1998), 577-599
- [15] Lawrence C. Evans Partial differential equation second edition

