

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF - M'SILA

FACULTE des Sciences

DEPARTEMENT de Physique

N° :...../2018.....



DOMAINE : Sciences de la matière

FILIERE : Physique

OPTION : PHYSIQUE THEORIQUE.

Mémoire présenté pour l'obtention
Du diplôme de Master Académique

Par : SAIDI Ismail

Intitulé

**Densité de Particules et de Courant d'un Gaz
Fermionique Ultra Froid en Rotation Rapide**

Soutenu le 25 /06 /2018 devant le jury composé de :

Dr. Nehaoua. S	Université de M'sila	Président
Dr. Medjedel. S	Université de M'sila	Rapporteur
Dr. Kalli. S	Université de M'sila	Examineur
Dr. Redouane Salah. A	Université de M'sila	Examineur

Année universitaire : 2017/2018

Table des Matières

Remerciements

Dédicace

Table des Matières

Introduction Générale 1

Chapitre 1

Techniques de réalisation et de mise en rotation d'un gaz quantique dégénéré

1. Introduction 7
2. Pression de radiation 8
3. Piégeage magnétique 9
 - Confinement harmonique 10
4. Refroidissement par évaporation 11
5. La mise en rotation d'un gaz ultra-froid 11

Chapitre 2

Etude de l'Hamiltonien d'une Particule Confinée par un Piège Harmonique Isotrope en Rotation

1. Introduction 15
2. Description du système 16
3. Dérivation de l'Hamiltonien dans le repère tournant 17
 - 3.1 Dérivation classique 17
 - 3.2 Dérivation quantique 19
4. Analogie rotation-champ magnétique 21
5. Fonctions d'onde à une particule 24
6. Discussion du spectre d'énergie 27

Chapitre 3

Densités de particules et de courant d'un système de fermions ultra-froids dans un piège harmonique isotrope tournant

1. Introduction.....	30
2. Densité de particules	31
2.1 Matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}')$	31
2.2 Densité de particules.....	32
3. Densité de courant de matière $\vec{J}_{int}(\vec{r})$	33
4. Relation entre le nombre de particules N et le niveau de Fermi μ	34
5. Tracés des densités	36
5.1 Tracé de la densité de particules	37
5.2 Tracé de la densité de courant de matière	40
6. Interprétation qualitative.....	43
Conclusion Générale	45
Références bibliographiques	48

Introduction Générale

Introduction Générale

Les études théoriques portées sur les propriétés des gaz quantiques de fermions confinés par un potentiel (piège) harmonique ont pris de l'ampleur depuis l'observation expérimentale par *DeMarco* et *Jin* d'un gaz quantique de fermions dégénéré [1-2]. Expérimentalement, des températures de l'ordre d'une fraction de la température de Fermi T_F ont pu être atteintes. La recherche sur les gaz quantiques, tant les gaz de bosons que les gaz de fermions, est un domaine de recherche en plein développement et ceci se manifeste par le nombre impressionnant de travaux publiés sur le sujet dans les années ultérieures après avoir réalisé les premiers condensats de Bose-Einstein (BEC) d'atomes ultra-froids en 1995 par Carl Wieman, Eric Cornell et Wolfgang Ketterle et qui ont obtenu le prix Nobel de physique en 2001 pour leurs travaux sur ce nouvel état de la matière dictée par la statistique quantique de Bose-Einstein [3-5], il s'agit de la découverte de la condensation des gaz atomiques. Ceci a constitué une avancée majeure dans le domaine de la physique et a permis de vérifier une théorie vieille de 80 ans prédite par Bose et Einstein, à savoir la manifestation d'un état macroscopique quantique où tous les atomes se condensent dans le même état quantique à une particule [6]. Les trois premiers condensats qui ont été observés expérimentalement sont de rubidium, de sodium et de lithium. D'autres espèces chimiques ont rejoint cette famille pour citer l'hydrogène, le potassium, l'Hélium, le Césium et ytterbium. Pour une revue générale sur le domaine, on renvoie aux références [7-8]

Pendant les vingt dernières années, des investigations intensives ont été consacrées à l'examen de la réponse des gaz d'atomes froids à une rotation rapide. La réponse d'un gaz quantique soumis à une rotation révèle des propriétés physiques très intéressantes que ce soit pour des fermions ou pour des bosons (formation de vortex, structure du spectre d'énergie de type Landau, effet Hall quantique, ...). En effet, si la fréquence de la rotation augmente, le condensat de Bose Einstein (BEC) établirait un vortex avec un nombre de vortex qui augmente quand la rotation devient plus rapide et dans la limite d'une rotation très rapide¹ le système développe des états de Hall quantiques et le condensat de Bose Einstein (BEC) peut être décrit par l'ensemble des états similaires à des niveaux de Landau les plus bas (*Lowest Landau Levels*) [9]. Ce spectre d'énergie des quasi-niveaux de Landau apparaît aussi dans le régime d'une rotation ultra rapide d'un gaz de Fermions dégénéré [10] et cette structure est reflétée dans les profils de densité [9-13].

Les systèmes des gaz de fermions dégénérés subissant une rotation se traitent généralement dans des repères tournants afin d'éliminer la dépendance en temps du potentiel confinant et par conséquent l'élimination de la dépendance temporelle de

¹ Au sens où la fréquence de rotation devient proche de celle du potentiel du confinement harmonique.

l'hamiltonien du système. Dans ce repère tournant, il est bien connu, comme nous allons le voir au chapitre 2, que l'hamiltonien du système est modifié par l'addition du terme $-\vec{\Omega}\cdot\vec{L}$ [14]. Le moment angulaire du gaz présente des oscillations quantiques en fonction du nombre de particules [15] analogues aux oscillations de de Haas-van Alphen de la magnétisation dans les systèmes d'état solide [16]. Ces oscillations quantiques sont des manifestations macroscopiques dues à la quantification des niveaux d'énergie des électrons en présence du champ magnétique [17]. En fait, un gaz d'électron dans un métal montre une dépendance oscillatoire des observables physiques en fonction de l'intensité du champ magnétique comme par exemple les oscillations de la résistivité (oscillations de Shubnikov–de Haas), oscillations de la magnétisation, oscillations de la résistance de Hall ou les oscillations de la chaleur spécifique. Ces oscillations ont été prévues par Landau [18] et observées par de Haas-van Alphen.

Parmi les phénomènes quantiques importants qui peuvent se manifester au sein d'un gaz fermionique dégénéré, l'effet Hall quantique présente un exemple excellent à cause de sa relation avec la formation des niveaux de Landau [17]. En effet, pour les systèmes des gaz d'électrons bidimensionnels, soumis à un champ magnétique intense, les niveaux d'énergie s'organisent dans une structure des niveaux de Landau fortement dégénérés. Les études théoriques consacrées aux gaz de fermions dégénérés ont confirmé qu'une organisation similaire se produit dans un gaz de fermions neutres sous l'effet d'une rotation très rapide conduisant à des divers effets quantiques macroscopiques [10]. En fait, les systèmes des gaz quantiques d'atomes ultra froids offrent une opportunité d'étudier des concepts physiques essentiels de la théorie de la matière condensée et c'est grâce aux techniques expérimentales sophistiquées qui ont été développées au cours de ces deux dernières décennies et qui fournissent des milieux d'études avec des conditions contrôlables à travers des faisceaux lumineux (laser). En fait, il est possible de contrôler l'interaction entre des particules ultra-froides par simple ajustement d'un champ magnétique en jouant sur des résonances dites de Feshbach, et de confiner des atomes froids dans des potentiels électromagnétiques périodiques (créés par des paires de faisceaux laser se propageant dans des directions opposées) pour former des réseaux optiques dont on peut ajuster à volonté tous les paramètres, ce qui permet d'obtenir des systèmes modèles. Ces derniers pouvant servir à élucider des problèmes en physique de la matière condensée. Ainsi, des interactions comme le couplage spin-orbite et les potentiels périodiques qui peuvent avoir lieu dans un environnement d'état solide seront simulées par celles qui se produisent dans des systèmes formés par des atomes froids. Pour prendre une idée assez claire sur ce thème de simulation par les gaz ultra froid on propose l'excellent article publié en 2012 dans la célèbre revue *Nature* par I. Bloch et al, intitulé (*Quantum simulations with ultra cold quantum gases*) [19].

Dans le domaine de la matière condensée, des études intensives ont été effectuées afin d'élucider les propriétés des systèmes bidimensionnels des électrons confinés se trouvant sous l'action d'un champ magnétique intense à des très basses

températures, en abrégé (2DEG). Une des questions importantes qui a reçu une attention particulière est la distribution du courant au sein de ces systèmes en présence d'un potentiel confinant ainsi que sa relation avec la distribution des particules. La connaissance de cette distribution de courant est essentielle pour comprendre l'effet Hall, les propriétés électroniques des nanostructures semi-conducteurs en dimensions réduites comme les Quantum Dots ou Quantum Wires mises sous l'influence du champ magnétique et de comprendre d'une façon générale les propriétés du transport mésoscopique. L'étude expérimentale de ces systèmes présente des difficultés différentes ce qui empêche la vérification de certains résultats théoriques. Par exemple, il y avait une confusion considérable en ce qui concerne la question de la distribution physique du courant de Hall dans un dispositif de Hall quantique (quantum Hall device). Ce courant est-il porté par les états de bords « *Edge states* » se trouvant à proximité du bord du dispositif ou bien il est porté par les états de volume « *Bulk states* » ? Théoriquement, une partie de ce courant serait portée par les états de volume si on tient compte de l'interaction coulombienne entre électrons alors qu'il serait intégralement portée par les états de bord si on adopte un modèle des électrons libres. Les faits expérimentaux n'ont pas encore soutenu d'une façon affirmative aucune des deux hypothèses [20]. Un autre fait théorique a été prévu dans ces systèmes et qui attende une confirmation expérimentale, est la structure en plateaux de la densité de particules et la nature de circulation du courant électrique [21]. Le Domaine des atomes ultra-froid, par ses avancées actuelles, tant en réalisation des expériences sophistiquées qu'en analyse de leurs résultats, offre une possibilité d'une vérification expérimentale de tels problèmes de physique du solide.

Dans la limite de la rotation ultra rapide d'un gaz de fermions dégénéré, le profil de densité prend la forme d'une série de plateaux de densité dits régions de densité **incompressible** où la densité est constante, séparées par des régions dans lesquelles la densité dépend de la position des particules dites régions **compressibles**. Chaque plateau de densité correspond à une occupation d'un nouveau quasi niveau de Landau, en accord avec les résultats trouvés pour la densité d'un gaz d'électron [21-23]. L'importance des régions compressibles et incompressibles émerge quand on considère le profil de densité de courant de matière $\vec{j}(\vec{r})$ dans le repère tournant, c'est-à-dire, la densité de courant intrinsèque. L'existence des courants d'équilibre, appelés aussi courants persistants, est un phénomène purement quantique. En effet, c'est une propriété des systèmes électroniques mésoscopiques subissant un champ magnétique [24,27] ou soumis à une rotation rapide [28].

En exploitant l'analogie entre le système de particules chargées en mouvement dans un champ magnétique et le système d'atomes neutres dans un potentiel harmonique tournant, on s'attend qu'un courant de masse persistant apparaisse comme une réponse à la rotation d'un gaz d'atomes ultra-froid. La connaissance détaillée de l'image de distribution des courants de matière induits par la rotation est importante pour comprendre leurs natures physiques. Dans ce travail, nous étudierons l'influence

de la formation des quasi-niveaux de Landau, apparaissant dans le régime de la rotation ultra rapide, sur ces courants de masse induits.

Ce mémoire est organisé comme suit :

Le premier chapitre donne une vue globale sur les procédés expérimentales qui ont permis de franchir le seuil de dégénérescence pour les gaz quantiques et par suite la réalisation des condensats de Bose-Einstein et aussi la réalisation des gaz fermioniques dégénérés. La mise en rotation des gaz ultra froids est un des sujets qui reçoit toujours une attention particulière. Elle a forgé une nouvelle voie vers l'étude de la superfluidité. On lui a consacré un paragraphe qui explique certaines techniques mécaniques de mise en rotation par des faisceaux laser ce qui termine le premier chapitre.

Le chapitre 2 est consacré à une étude élémentaire d'un système de N particules indépendantes en rotation. On présente la dérivation classique et quantique de l'hamiltonien à une particule dans le repère tournant, ensuite on résout l'équation de Schrödinger correspondante afin d'obtenir les fonctions d'onde à une particule ainsi que les énergies propres associées à ces fonctions d'onde. La forme de l'hamiltonien à une particule du système en rotation est similaire à celui d'un système de particules chargées soumises à un champ magnétique, ce qui nous a incité de faire une étude de l'analogie rotation-champ magnétique et en tirer des résultats intéressants en faisant la comparaison entre les spectres d'énergie des deux systèmes.

Dans le troisième chapitre, on présente l'essentiel de ce travail. C'est en exploitant les fonctions d'onde obtenues dans le chapitre précédent, qu'on peut calculer la densité de particules et la densité de courant de matière, ensuite on trace leurs graphes tout en interprétant l'allure de la courbe de chaque grandeur en se basant sur l'analogie rotation-champ magnétique. Le régime de rotation pour lequel on a dérivé les expressions des densités de particules et de courant est en premier temps arbitraire, mais on va concentrer plus particulièrement sur l'investigation du régime de rotation très rapide où la vitesse de rotation Ω s'approche de la fréquence de confinement ω_0 . En fait, la physique de ce régime est riche de phénomènes quantiques. En plus des caractéristiques intéressantes que présente la densité de particules dans ce régime limite, où on observe l'apparition des régions dites incompressibles dans lesquelles la densité de particules est constante séparées par des régions de gradient de densité dites régions compressibles et le système entre dans ce cas dans le régime de Landau, on s'intéresse également et en particulier de la distribution du courant de matière ainsi le sens de sa circulation dans ces régions de densité.

Une conclusion générale englobe les résultats essentiels de ce travail ce qui termine notre mémoire.

Chapitre 1

Techniques de réalisation et de mise en rotation
d'un gaz quantique dégénéré

Chapitre 1

Techniques de réalisation et de mise en rotation d'un gaz quantique dégénéré

1. Introduction

Les expériences sur les gaz quantiques dégénérés commencent avec le refroidissement des vapeurs d'atomes à partir de la température ambiante ou plus élevée (température de four) jusqu'à des températures extrêmement basses de l'ordre de milli Kelvin. La technique standard pour refroidir ces vapeurs atomiques est « le Refroidissement LASER » qui a été développée pendant les années 80. L'idée principale de cette technique est d'immobiliser un jet d'atomes à l'aide d'un faisceau laser en diminuant la vitesse moyenne d'agitation des atomes et ceci grâce à l'action mécanique de la lumière sur ceux-ci. On est ainsi arrivé à passer de plusieurs centaines de mètres par seconde (à température ambiante) à des vitesses de quelques centimètres par seconde.

L'action mécanique de la lumière sur les atomes revient aux caractéristiques des photons qui possèdent, en plus de leurs énergies, une impulsion $p = \hbar k$. En effet, il est possible de changer la vitesse d'un atome par interaction de ce dernier avec un photon. Quand l'atome absorbe de la lumière, il emmagasine l'énergie en faisant une transition vers un état excité et conserve l'impulsion en reculant avec $\hbar k$. C'est cette variation de la vitesse de l'atome dû à ce processus qui est intéressante, à savoir $\Delta v = \hbar k/m$ qui est de l'ordre de quelques $\sim cm/s$. Mais, lorsqu'un seul de ces processus est en jeu, la variation de la vitesse de l'atome est très faible par rapport à sa vitesse thermique. Répétée un grand nombre de fois, cette interaction peut parvenir à un changement notable de la vitesse de l'atome. En utilisant un faisceau laser intense on est ainsi arrivé à modifier le module de la vitesse jusqu'à des valeurs très petites [29-31].

En physique statistique, il est bien connu qu'à haute température, les atomes possèdent une longueur d'onde si courte et par conséquent, les effets ondulatoires sont extrêmement faibles, le gaz est alors décrit en bonne approximation par les lois de la physique classique. En revanche, à basse température les vitesses sont faibles, les longueurs d'ondes deviennent appréciables, et les effets quantiques vont se manifester.

2. Pression de radiation

Au cours de chaque processus élémentaire d'interaction photon-atome, il y a une conservation de l'énergie et de l'impulsion totales. Si l'énergie de ce photon est égale à la différence entre l'énergie de l'état fondamental de l'atome et l'énergie de son premier état excité, celui-ci, initialement dans son état fondamental, peut donc absorber ce photon pour passer à son état excité. Mais cet état est instable, et en un temps moyen très court, l'atome retombe dans son état fondamental en émettant spontanément un autre photon, appelé photon de fluorescence, dans une direction aléatoire. Lors de l'absorption, le photon transfère à l'atome une impulsion dans le sens de propagation du faisceau lumineux, l'atome alors subit un recul, sa vitesse varie dans le même sens de l'onde excitatrice. Un deuxième recul intervient lors de la désexcitation, mais la direction d'émission spontanée du photon est aléatoire (**Fig.1.1**).

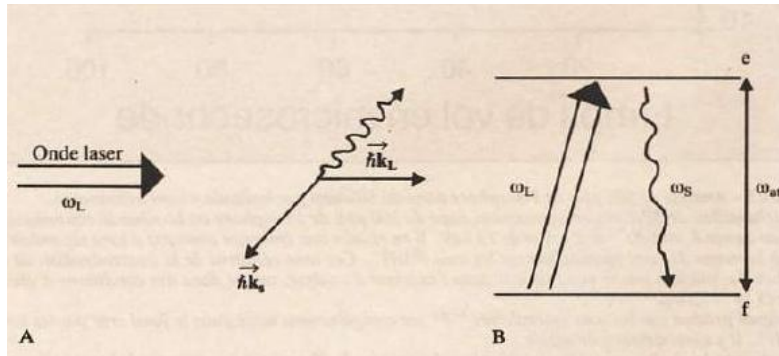


Fig.1.1 Lorsqu' un atome entre en interaction avec un photon dont la fréquence est proche de sa fréquence de transition atomique, il peut passer dans l'état excité en absorbant un photon avec lequel il est entré en collision. Il subit durant cette étape d'excitation un premier recul $\hbar k$. Il subit ensuite un autre recul du fait de l'émission spontanée d'un photon $\hbar k_s$ (désexcitation). Le taux de répétitions de ces cycles de fluorescences est d'autant plus élevé que la fréquence lumineuse soit plus proche de celle de la transition atomique. (Image tirée de [32])

Les changements de vitesse qui résultent pour les atomes dans un seul processus d'absorption-émission sont de l'ordre du centimètre par seconde. Ils sont négligeables devant les vitesses d'agitation thermique à température ambiante qui sont de quelques centaines de mètres par seconde. Par répétition de tels cycles on engendre un ralentissement appréciable des atomes. Pour un faisceau de laser dont la fréquence correspond précisément à une transition entre un niveau atomique fondamental et un niveau atomique excité, les processus d'absorption et d'émission de photons peuvent atteindre plusieurs millions de cycles par atome et par seconde. En effet, comme les photons du laser ont tous la même direction, chaque absorption d'un photon diminue la vitesse de l'atome d'une même quantité et dans le même sens que le faisceau, Mais contrairement aux reculs de l'absorption qui s'ajoutent tous dans la même direction,

les reculs correspondant aux émissions spontanées de photons de fluorescence se font dans une direction aléatoire, et donnent par conséquent une contribution nulle en moyenne et ne changent pas la vitesse de l'atome [32-33]. La répétition de tels cycles provoque donc une force moyenne dirigée suivant le faisceau laser, c'est la force de pression de radiation (force de friction). Les vitesses d'agitations thermiques sont réduites à quelques millimètres par seconde seulement ce qui correspond à des vapeurs atomiques de températures inférieures au milli kelvin engendrant ainsi un refroidissement du gaz.

La température limite correspondant au seuil de dégénérescence est donnée en physique statistique par :

$$T_0 = \frac{h^2}{2\pi m k_B} n^{2/3} \quad (1.1)$$

Où $n = N/V$ est la densité spatiale du gaz (nombre d'atomes par unité de volume).

Certains atomes du gaz quantique, refroidis et soumis à la force de friction, peuvent s'échapper à cause de l'échauffement possible (peuvent alors atteindre le bord de la mélasse optique produite par des faisceaux laser). Afin d'allonger le temps du confinement du gaz on ajoute un champ magnétique statique créant ainsi une force de rappel tendant à ramener les atomes vers l'intérieur du piège. Ce type de piège s'appelle piège magnéto-optique, mais dans ce type de piège on ne peut pas arriver à des températures de dégénérescence quantique. En bref, pour atteindre cette dernière température une combinaison de plusieurs techniques est nécessaire. Tout d'abord le gaz confiné subit un refroidissement laser dans un piège magnéto-optique, ensuite on abaisse encore sa température par une technique appelée refroidissement par évaporation forcée dans un piège magnétique ou optique.

3. Piégeage magnétique

Le confinement des atomes neutres par un piège magnétique se fait grâce à l'interaction d'un champ magnétique extérieur inhomogène $\vec{B}(\vec{r})$ approprié (ce champ peut être créé par des géométries variées) et le moment magnétique $\vec{\mu}$ d'un atome. L'atome acquiert une énergie potentielle de la forme :

$$U(\vec{r}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r}) \quad (1.2)$$

A cette énergie potentielle Zeeman est associée une force agissant sur l'atome qui permet de le confiner $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$.

- **Confinement harmonique**

Nous allons brièvement discuter en particulier le confinement harmonique qui est largement utilisé dans la physique des gaz ultra-froids. Le dispositif présenté dans la figure ci-dessous est un d'entre beaucoup d'autres qui permettent de générer des pièges harmoniques.

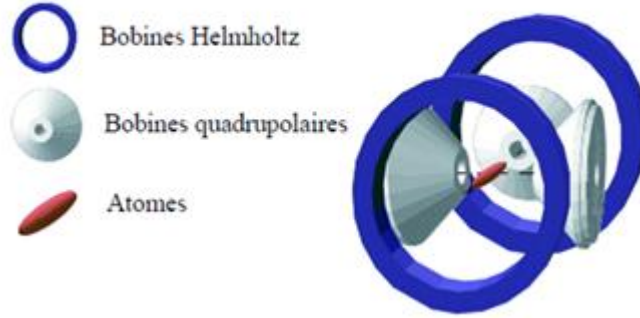


Fig.1.2. Une des configuration du piège d'Ioffe-Pritchard, les bobines de Helmholtz permettent de modifier le biais du champ, (Image tirée de [34]).

Ce piège a été conçu initialement comme une combinaison d'un champ quadrupolaire radial créé par quatre fils parallèles, appelés barres de Ioffe, parcourus par des courants deux à deux opposés, qui assurent le confinement transverse (radial) des atomes, et d'une paire de bobines appelées bobines « *pinch* » d'axe parallèle à celui des fils parcourues par un même courant pour assurer le confinement longitudinale. Plus tard, d'autres configurations ont été développées produisant de champ magnétique semblable, comme par exemple celle de la figure **Fig.1.2**.

L'énergie d'interaction coulombienne (1.2) qui correspond au champ magnétique créé par ce dispositif est donnée par [35] :

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega_{\perp}^2(x^2 + y^2) + \frac{1}{2}m\omega_z^2z^2 \quad (1.3)$$

Où les fréquences du confinement harmonique sont données par :

$$\omega_{\perp}^2 = \frac{\mu}{m} \left(\frac{B'^2}{B_0} - \frac{B''}{2} \right) \quad (1.4)$$

$$\omega_z^2 = \frac{\mu B''}{m} \quad (1.5)$$

Où B_0 , B' et B'' sont respectivement le biais, le gradient et la courbure du champ. En examinant les expressions des fréquences de confinement, on voit que la fréquence radiale ω_{\perp} dépend de la valeur B_0 qui peut être modifiée à l'aide des deux bobines

supplémentaires de Helmholtz¹, sans modifier les valeurs de B' et B'' . On peut alors rendre ce potentiel $U(\vec{r})$ isotrope si $B_0 = 2B'^2/3B''$, ou anisotrope en diminuant la valeur de B_0 tel que $\omega_\perp > \omega_z$ et dans ce cas le nuage du gaz d'atomes piégé prend la forme d'un cigare allongé le long de l'axe Oz .

Signalons ici qu'ils existent d'autres possibilités pour créer des potentiels harmoniques. Il s'agit du piégeage dipolaire harmonique où on exploite l'interaction entre le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ d'un faisceau laser de type gaussien focalisé (l'intensité du champ électrique est approximativement une fonction gaussienne) et le dipôle électrique induit de l'atome \vec{d} dû à l'existence de cet atome dans ce champ électrique [36-40].

4. Refroidissement par évaporation

Les techniques de piégeage ne permettent pas de refroidir de façon suffisante le gaz d'atomes, mais essentiellement de le confiner, par conséquent d'augmenter sa densité spatiale, on est encore loin du seuil de dégénérescence quantique. On utilise alors le refroidissement par évaporation qui est une technique efficace amenant un gaz d'atomes initialement piégé à une température de l'ordre du milli Kelvin (issu d'un refroidissement par laser), vers des températures de l'ordre du micro Kelvin, voire plus bas, ce qui permet d'atteindre ou d'entrer dans le régime quantique.

Ce refroidissement est basé sur le fait que les atomes les plus énergétiques qui atteignent le sommet du potentiel confinant s'échappent du piège en laissant derrière eux des atomes moins énergétiques et à cause des collisions, entre atomes restants, des échanges d'énergie ont lieu et une re-thermalisation se produit (redistribution de l'énergie cinétique entre les atomes) donc la température du gaz diminue. Faire sortir les atomes les plus chauds du piège harmonique revient à utiliser une onde radiofréquence qui tronque la hauteur du potentiel confinant [41-42].

5. La mise en rotation d'un gaz ultra froid

Un fluide normal contenu dans un récipient et soumis à une rotation globale, à l'équilibre thermique, tournera dans son ensemble avec le récipient comme un corps solide. Par contre un fluide quantique, et plus particulièrement quand il est dans l'état superfluide (état où le fluide s'écoule sans viscosité), ne tourne pas pour des petites vitesses de rotation, par contre au-dessus d'une certaine vitesse critique il commence à développer des vortex (tourbillons de circulations) correspondant à une rotation locale du fluide. Le nombre de vortex augmente au fur et à mesure que la rotation est plus rapide. Pour l'histoire, c'est en 1937, que Kapitza, Allen et Meisner ont mis en évidence la superfluidité de l'hélium (^4He) à basse température [43]. En 1938, F. London proposa de relier ce phénomène à la manifestation de la condensation de

¹ En bleu pour la Fig.1.2

Bose-Einstein [44]. En fait, un superfluide ne peut tourner qu'avec la formation des vortex dans lesquels la densité s'annule et la circulation du champ de vitesse autour d'un contour fermé (vortex) est quantifiée [45].

Dans l'étude des atomes froids, la réponse d'un gaz ultra-froid à la rotation constitue un domaine de recherche très intéressant et riche en phénomènes. Par exemple à température suffisamment faible, un condensat de Bose-Einstein est également superfluide, ceci revient à l'existence d'une fonction d'onde macroscopique décrivant ce condensat. L'observation de la nucléation des tourbillons quantifiés (vortex) lors d'une expérience de mise en rotation constitue une signature expérimentale de la superfluidité des condensats de Bose-Einstein. Ceci étant, dans un contexte plus général, la mise en rotation de gaz ultra-froids de bosons ou de fermions fournit un lien entre la physique des atomes froids piégés et des phénomènes de la physique des systèmes de la matière condensée tels que la superfluidité, l'effet Hall quantique, et la supraconductivité [46]. Ce lien est fourni par l'analogie qui existe entre un champ magnétique agissant sur des particules chargées et le vecteur vitesse angulaire avec lequel tourne le piège agissant sur des atomes neutres d'un gaz quantique ultra-froid.

Pour effectuer une rotation d'un nuage d'atomes froids, plusieurs techniques ont été développées [47-52]. Nous décrivons ici rapidement la technique développée par l'équipe de Jean Dalibard et ses collaborateurs [50]. Dans ce type d'expériences, des moyens optiques ont été utilisés pour générer des potentiels dipolaires, en déplaçant rapidement un faisceau laser. Si le faisceau est très désaccordé, il génère un potentiel dipolaire permettant d'agir sur les atomes. En effet, c'est une agitation mécanique du nuage [34].

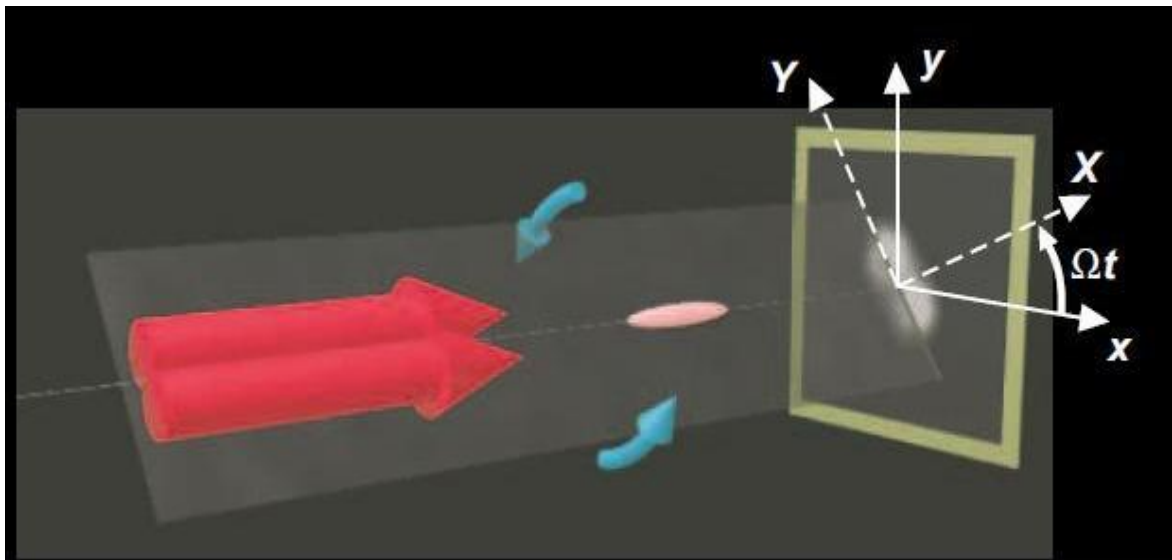


Fig.1.3 – En tournant autour d'un axe commun, les deux faisceaux composant la cuillère créent un potentiel tournant au niveau des atomes (au centre). (Image tirée de [53])

Dans le repère tournant (OXY) ce potentiel dipolaire s'écrit comme [50] :

$$V(X, Y) = \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 (\epsilon_X X^2 + \epsilon_Y Y^2) \quad (1.6)$$

Où ϵ_X et ϵ_Y sont des paramètres sans dimensions qui dépendent de l'intensité lumineuse, et d'autres caractéristiques du faisceau lumineux.

L'action du potentiel dipolaire (1.6) est principalement de modifier légèrement les fréquences transverses du piège magnétique (1.3). La superposition de ces deux potentiels peut se mettre sous la forme [34] :

$$V(X, Y) = \frac{1}{2} m \tilde{\omega}_{\perp}^2 [(1 + \epsilon) X^2 + (1 - \epsilon) Y^2] + \frac{1}{2} m \omega_z^2 Z^2 \quad (1.7)$$

Où $\tilde{\omega}_{\perp}^2 = \omega_{\perp}^2 (2 + \epsilon_X + \epsilon_Y) / 2$, qui peut s'interpréter comme la fréquence moyenne transverse du piège en présence de la cuillère, alors que $\epsilon = (\epsilon_X - \epsilon_Y) \omega_{\perp} / 2 \tilde{\omega}_{\perp}$ est le rapport d'anisotropie.

Chapitre 2

Etude de l'Hamiltonien d'une Particule Confinée
par un Piège Harmonique Isotrope en Rotation

Chapitre 2

Etude de l'Hamiltonien d'une Particule Confinée par un Piège Harmonique Isotrope en Rotation

1. Introduction

Les expériences de mise en rotation portées sur les atomes ultra froids mettent en jeu, généralement, des pièges harmoniques tournants. Que ce soit ces potentiels harmoniques isotropes ou anisotropes c'est en fait un choix de paramètres qui permettent de contrôler et modifier les pulsations du potentiel confinant.

La description de tels systèmes dans un repère de laboratoire se ramène à la résolution de l'équation de Schrödinger contenant un hamiltonien dépendant du temps. La dépendance en temps de ce dernier revient en effet à la dépendance en temps du potentiel piégeant qui est mis en rotation par rapport au repère du laboratoire. Afin de chercher des solutions stationnaires pour l'équation de Schrödinger décrivant le système, il est préférable de travailler dans un repère lié au potentiel tournant. Ceci va enlever la dépendance temporelle du piège.

L'avantage primordial de se transformer en repère tournant c'est de faire apparaître l'analogie entre la physique d'une particule neutre se mouvant sous l'action d'un piège tournant et celle d'une particule chargée soumise à un champ magnétique. En particulier, le cas limite d'une rotation ultra-rapide et le cas d'un champ magnétique intense font un des buts essentiels de ce travail. Cette analogie nous permettra de confronter et d'interpréter les résultats de cette étude, exposés dans le chapitre suivant, avec ceux obtenus pour un système de particules chargées sous l'influence d'un champ magnétique. Entre autres, l'apparition, dans les gaz de fermions tournants avec une grande vitesse de rotation, d'une structure similaire à celle des niveaux de Landau est un fait qui mérite d'être étudié en détail.

Les expériences sur les atomes ultra froids laissent facile l'accès aux paramètres du système, en les modifiant par un simple ajustement des courants électriques créant le potentiel de confinement, ainsi que l'avancée des techniques d'imagerie qui permettent de faire des analyses de hautes qualités des résultats expérimentaux. Cela dit, le travail sur ces systèmes rend possible la vérification expérimentale de quelques résultats et de prédire d'autres dans les systèmes analogues (à savoir, la théorie des solides généralement et les phénomènes magnétiques particulièrement). C'est voilà l'objet principal qui nous a incité de chercher les propriétés des systèmes fermioniques en rotation rapide.

2. Description du système

Le système à étudier dans ce chapitre est formé de N particules fermioniques sans charge électrique (atomes neutres), de masse M , qui sont restreintes de se mouvoir dans un plan, soit (x, y) . Cette restriction est due à un fort confinement sur l'axe Oz que l'on peut considérer le mouvement le long de cet axe comme gelé¹. On ajoute au potentiel piégeant, qui maintient les particules dans une région bidimensionnelle, un autre potentiel qui fait tourner le système avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$, c'est le potentiel dipolaire créé par deux faisceau laser tournant rapidement (**Fig.1.3**). L'effet global de ces deux potentiels, statique et dipolaire tournant, est exprimé par le potentiel $V(\vec{r})$, un potentiel harmonique isotrope tournant donné par la formule (1.7).

Le système de ces N fermions, est initialement produit d'une façon à ce que les spins des fermions soient dans le même sens, spins polarisés. Le gaz peut donc être considéré en première approximation comme un système de N particules indépendantes. En effet, la préparation de ce système avec des états de spin différents donne lieu à des interactions atome-atome et par suite l'apparition de l'effet d'appariement de paires de fermions, ce sont les paires de Cooper (existence d'une interaction résiduelle attractive entre les atomes), un mécanisme découvert en physique du solide et connu sous le nom de théorie de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS). Il a été montré expérimentalement que ce même mécanisme est en action dans les gaz de fermions dégénérés. Le système devient ainsi équivalent à un système de paires de bosons et peut donc acquérir un état superfluide similaire à celui d'un condensat de Bose (superfluidité fermionique), il ne saura pas question de traiter ici un tel sujet qui est hors de nos objectifs dans ce mémoire.

L'étude de ce système de particules indépendantes revient donc à la recherche des solutions propres associées à l'hamiltonien à une particule qui s'écrit dans le repère du laboratoire comme :

$$H = \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + V(\vec{r}, t) \quad (2.1)$$

Où $V(\vec{r}, t)$ est un potentiel dépendant du temps. On doit souligner que ce n'est ni un problème de perturbation ni un problème de changement adiabatique. Ce potentiel est engendré par un fort confinement magnétique plus une rapide rotation, alors, la résolution par les méthodes liées aux problèmes cités plus haut ne donne pas des résultats correctes. Pour surmonter cette difficulté, on se met simplement dans le repère tournant avec la même vitesse angulaire Ω . Le problème se réduit donc en première étape à la recherche de la forme de l'hamiltonien dans ce nouveau repère et ensuite la recherche des solutions stationnaires correspondantes.

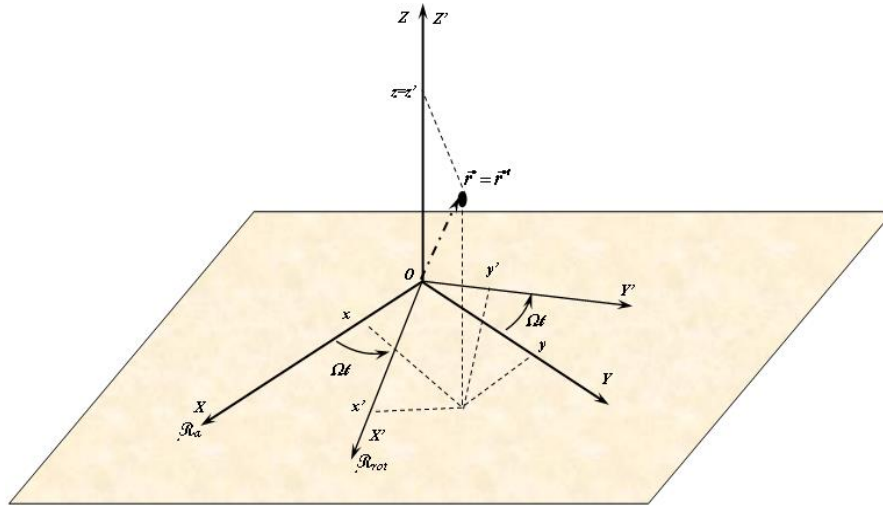
¹ Un tel système est réalisable expérimentalement [59].

3. Dérivation de l'hamiltonien dans le repère tournant

3.1. Dérivation classique

Le repère du laboratoire ou repère absolu (\mathcal{R}_{lab}), et le repère tournant (\mathcal{R}_{rot}) ou repère relatif, possèdent la même origine O . Si (x, y, z) désignent les coordonnées² de la particule dans le repère du laboratoire (\mathcal{R}_{lab}) et (x', y', z') ses coordonnées dans le repère tournant (\mathcal{R}_{rot}), la transformation d'un repère à un autre est régie par le système de trois équations suivantes :

$$\begin{cases} x = x' \cos(\Omega t) - y' \sin(\Omega t) \\ y = x' \sin(\Omega t) + y' \cos(\Omega t) \\ z = z' \end{cases} \quad (2.2)$$



Le Lagrangien du système dans le repère (\mathcal{R}_{rot}) est :

$$\mathcal{L} = T - V(x', y', z') \quad (2.3)$$

Où T est l'énergie cinétique de la particule. A partir de l'expression de T dans le repère absolu $T = M(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/2$, on peut trouver sa forme dans le repère relatif grâce aux transformations (2.2) :

$$T = \frac{1}{2}M[(\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) - 2\Omega(\dot{x}'y' - \dot{y}'x') + \Omega^2(x'^2 + y'^2)] \quad (2.4)$$

Le potentiel dans (2.3) a été exprimé en fonction des nouvelles coordonnées relatives. On le prend dans un premier temps comme quelconque pour donner un caractère général à cette dérivation et aussi à l'étude de l'analogie rotation-champ magnétique.

² La dérivation est faite pour un espace tridimensionnel, la réduction à deux dimensions est directe en éliminant la composante sur l'axe Oz .

Les équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'_i} \right) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_i} \right) = 0, \quad \text{pour } x'_i = x', y', z' \quad (2.5)$$

Permettent d'obtenir les trois équations de mouvement suivantes :

$$\begin{cases} M\ddot{x}' = -\frac{\partial V}{\partial x'} + 2M\Omega\dot{y}' + M\Omega^2 x' \\ M\ddot{y}' = -\frac{\partial V}{\partial y'} - 2M\Omega\dot{x}' + M\Omega^2 y' \\ M\ddot{z}' = -\frac{\partial V}{\partial z'} \end{cases} \quad (2.6)$$

Qui peuvent être condensées en une seule formule vectorielle :

$$M \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = -\vec{\nabla} V - 2M\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} - M\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}') \quad (2.7)$$

Où elles apparaissent deux forces dues au mouvement rotationnel du repère relatif (\mathcal{R}_{rot}). Il s'agit de la force de Coriolis $-2M\vec{\Omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt}$ et la force centrifuge $-M\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')$ agissant sur la particule. Ainsi, l'analogie rotation-champ magnétique ne serait pas surprenante si on compare la force de Lorentz $\vec{F}_{Lor} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ qui a la même forme que la force de Coriolis $2M(\vec{v} \times \vec{\Omega})$.

La fonction de Hamilton dans le repère tournant :

$$\mathcal{H}_{rot} = \sum_i \dot{x}'_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}'_i} \right) - \mathcal{L} \quad (2.8)$$

S'écrit donc :

$$\mathcal{H}_{rot} = \left[\frac{1}{2M} (p_x'^2 + p_y'^2 + p_z'^2) + V(x', y', z') \right] - \Omega(x'p_y' - y'p_x') \quad (2.9)$$

On remarque sur cette expression, la présence du terme $(x'p_y' - y'p_x')$ qui n'est que la composante du moment cinétique orbital sur l'axe Oz . En plus, si on prend $\Omega = 0$, l'hamiltonien dans (2.9) se réduisait à un hamiltonien identique à celui du laboratoire, tandis qu'il est exprimé en fonction des coordonnées du repère tournant. On le note simplement \mathcal{H}_0 . On écrit donc le hamiltonien \mathcal{H}_{rot} comme :

$$\mathcal{H}_{rot} = \mathcal{H}_0 - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \quad (2.10)$$

En choisissant le traitement du problème dans le repère tournant, l'écriture en prime des variables dynamiques du système comme par exemple (r') sera abandonnée en faveur d'une écriture simple comme (r) sans que cela réfère au repère (\mathcal{R}_{lab}).

Passons maintenant à la dérivation quantique de l'opérateur hamiltonien H_{rot} qui va donner la même forme que (2.10).

3.2. Dérivation quantique

L'équation de Schrödinger dépendante du temps qui gouverne la dynamique du système dans le repère du laboratoire est :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi\rangle \quad (2.11)$$

Où \hat{H} est donné par (2.1), avec \hat{r} et \hat{p} sont les opérateurs des vecteurs position et impulsion dans le repère (\mathcal{R}_{lab}) et $V(\vec{r})$ est le potentiel de piégeage tournant. Le passage au repère tournant se fait en appliquant l'opérateur de rotation autour de l'axe Oz :

$$\hat{R}_z(t) = \exp \left[i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] \quad (2.12)$$

Qui fait correspondre au système une rotation spatiale au cours du temps d'un angle $\theta = \Omega t$, c'est une transformation passive [54], opposée de la transformation active décrite par le conjugué de $\hat{R}_z(t)$. L'opérateur $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ est celui du moment cinétique orbital.

Si $|\psi_{rot}\rangle$ désigne le vecteur d'état décrivant le système dans le repère tournant, le vecteur $|\psi\rangle$ serait son image dans le repère du laboratoire par la transformation unitaire inverse $\hat{R}_z^\dagger(t)$ et vice versa. On écrit donc :

$$|\psi_{rot}\rangle = \hat{R}_z(t) |\psi\rangle = \exp \left[i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] |\psi\rangle \quad (2.13)$$

$$|\psi\rangle = \hat{R}_z^\dagger(t) |\psi_{rot}\rangle = \exp \left[-i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] |\psi_{rot}\rangle \quad (2.14)$$

Afin de trouver la forme de l'opérateur hamiltonien \hat{H}_{rot} dans le repère tournant, on insère la transformation (2.14) dans l'équation de Schrödinger (2.11) :

$$\hat{H} \left\{ \exp \left[-i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] |\psi_{rot}\rangle \right\} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \exp \left[-i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] |\psi_{rot}\rangle \right\}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (\vec{\Omega} \cdot \vec{L}) \exp \left[-i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] |\psi_{rot}\rangle + \exp \left[-i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{rot}\rangle \\
 = \hat{H} \left\{ \exp \left[-i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] |\psi_{rot}\rangle \right\}
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

On remarque que le terme $(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})$ résulte de la dépendance temporelle de l'opérateur rotation. Sachant que l'opérateur $\hat{R}_z(t)$ est unitaire, la multiplication des deux membres de (2.15) par $\hat{R}_z(t)$ donne l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi_{rot}\rangle = \left\{ \exp \left[+i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] \hat{H} \exp \left[-i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] - (\vec{\Omega} \cdot \vec{L}) \right\} |\psi_{rot}\rangle \quad (2.16)$$

Qui peut être mise sous la forme utile suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} |\psi_{rot}\rangle = \hat{H}_{rot} |\psi_{rot}\rangle \quad (2.17)$$

Où on a obtenu l'hamiltonien dans le repère tournant :

$$\hat{H}_{rot} = \exp \left[+i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] \hat{H} \exp \left[-i \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{L})t}{\hbar} \right] - (\vec{\Omega} \cdot \vec{L}) \quad (2.18)$$

Il nous reste de chercher comment se transforme l'opérateur hamiltonien du laboratoire \hat{H} sous l'action de l'opérateur de rotation. D'après (2.1), on aura :

$$\hat{R}_z(t) \hat{H} \hat{R}_z^+(t) = \hat{R}_z(t) \hat{p}^2 \hat{R}_z^+(t) + \hat{R}_z(t) V(\vec{r}) \hat{R}_z^+(t) \quad (2.19)$$

L'opérateur \hat{p}^2 reste inchangé par cette transformation, $\hat{R}_z(t) \hat{p}^2 \hat{R}_z^+(t) = \hat{p}^2$, alors que le potentiel $V(\vec{r})$ devient $\hat{R}_z(t) V(\vec{r}) \hat{R}_z^+(t) = V(\vec{r}')$, où \vec{r}' est le vecteur position dans le repère (\mathcal{R}_{rot}) . Alors, la transformée de l'hamiltonien du laboratoire \hat{H} par l'opérateur de rotation prend la même forme que \hat{H} mais exprimé en fonction des variables relatives au repère tournant. Comme on l'a fait dans la dérivation classique, on note ce hamiltonien, transformée de \hat{H} , par \hat{H}_0 indiquant son expression en l'absence de rotation. Enfin, l'hamiltonien du système dans le repère tournant est alors lié à celui dans le repère du laboratoire par la relation :

$$\hat{H}_{rot} = \hat{H}_0 - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \quad (2.20)$$

Sous l'influence de la rotation, la particule ressent l'effet d'un terme supplémentaire $\vec{\Omega} \cdot \vec{L}$ qui contient les effets combinés de la force de Coriolis et centrifuge. En physique nucléaire, ce hamiltonien porte le nom de *Hamiltonien de cranking*.

4. Analogie rotation-champ magnétique

Désormais, on va exprimer les variables dynamiques du système sans prime, tel r en place de r' tout en gardant dans l'esprit que le traitement du problème se fait dans le repère tournant. Ainsi, la forme explicite de l'hamiltonien H_{rot} donné par (2.20) est la suivante :

$$H_{rot} = \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + V(\vec{r}) - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \quad (2.21)$$

Si on remplace le moment cinétique par sa définition, le terme de cranking ($\vec{\Omega} \cdot \vec{L}$) peut s'écrire :

$$\vec{\Omega} \cdot \vec{L} = \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{p} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (2.22)$$

L'hamiltonien (2.21) devient donc :

$$\begin{aligned} H_{rot} &= \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + V(\vec{r}) - \vec{p} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \\ &= \frac{1}{2M} (\vec{p} - M(\vec{\Omega} \times \vec{r}))^2 + \underbrace{V(\vec{r}) - \frac{1}{2} M \Omega^2 r^2}_{V_{eff}} \end{aligned} \quad (2.23)$$

Où on voit apparaître un potentiel répulsif (centrifuge) s'ajoutant au potentiel $V(\vec{r})$ qui a pour effet de pousser les particules loin de l'axe de rotation Oz .

L'hamiltonien H_{rot} étant établi, on passe à l'hamiltonien d'une particule chargée soumise à un champ magnétique \vec{B} se dirigeant selon l'axe Oz , plus un potentiel scalaire quelconque $V'(\vec{r})$.

$$H_{mag} = \frac{1}{2M} (\vec{p} - q\vec{A})^2 + V'(\vec{r}) \quad (2.24)$$

Où q et \vec{A} sont respectivement la charge de la particule et le potentiel vecteur associé au champ magnétique, $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Si le champ magnétique est constant, avec un choix de jauge convenable on peut écrire le potentiel vecteur \vec{A} comme :

$$\vec{A} = \frac{1}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) \quad (2.25)$$

L'hamiltonien H_{mag} devient ainsi :

$$H_{mag} = \frac{1}{2M} \left(\vec{p} - \frac{q}{2} (\vec{B} \times \vec{r}) \right)^2 + V'(\vec{r}) \quad (2.26)$$

En faisant la comparaison entre les deux expressions (2.23) et (2.26) des hamiltoniens H_{rot} et H_{mag} , on peut tirer les correspondances suivantes :

$$\begin{cases} \vec{B} \Leftrightarrow \frac{2M\vec{\Omega}}{q} \\ V'(\vec{r}) \Leftrightarrow V_{eff} \end{cases} \quad (2.27)$$

En effet, ces correspondances peuvent être extraites de façon simple. Il suffit de comparer la force de Lorentz agissant sur la particule chargée $\vec{F}_{Lor} = q(\vec{v} \times \vec{B})$ avec la force de Coriolis agissant sur la particule neutre associée au mouvement de rotation du repère $\vec{F}_{Cor} = 2M(\vec{v} \times \vec{\Omega})$. C'est comme si la particule neutre ressent dans le repère tournant (\mathcal{R}_{rot}), l'influence d'un champ magnétique effectif $\vec{B} = (2M/q)\vec{\Omega}$.

• Confinement par un potentiel harmonique

L'étude faite ci-dessus sur l'analogie rotation-champ magnétique est de caractère général. Dans ce qui suit, nous allons discuter en particulier le cas qui nous intéresse le plus en notre sujet. C'est le cas d'une particule neutre soumise à un potentiel harmonique isotrope tournant. Soit ω_0 la pulsation de l'oscillateur, alors :

$$H_{rot} = \frac{1}{2M} \left(\vec{p} - M(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \right)^2 + \frac{1}{2} M(\omega_0^2 - \Omega^2)r^2 \quad (2.28)$$

La fréquence ω_0 présente dans ce cas une fréquence critique que ne doit pas être dépassée par la vitesse de rotation mécanique³ Ω . Garder la stabilité du système signifie qu'on doit maintenir toujours ($\Omega \leq \omega_0$).

A la limite de la rotation très rapide ($\Omega = \omega_0$), la force centrifuge ($M\Omega^2\vec{r}$) est compensée par la force attractive ($-M\Omega^2\vec{r}$), qui dérive du potentiel harmonique. Le terme $\{M(\omega_0^2 - \Omega^2)r^2\}$ dans (2.28) s'annule en laissant la particule ne ressentant que l'effet de la force de Coriolis. Dans ce cas, l'hamiltonien H_{rot} peut se mettre sous la forme :

$$H_{rot-lim} = \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + \frac{1}{2} M\Omega^2 r^2 - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} \quad (2.29)$$

³ Par cette qualification, on entend une rotation effective du système. Puisque il est possible de simuler la rotation par des champs magnétiques synthétiques (champs de jauge), ce qui permet d'excéder la valeur ω_0 sans que le système se détruise.

Revenons maintenant à l'hamiltonien H_{mag} de la particule chargée, mais cette fois ci on considère que la particule ne subit que le champ magnétique ou bien le cas d'un champ magnétique intense. D'après (2.26) on peut prendre la nouvelle forme suivante :

$$H_{mag} = \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + \frac{1}{2} M \omega_L^2 r^2 - \vec{\omega}_L \cdot \vec{L} \quad (2.30)$$

Où $\vec{\omega}_L = (q/2M)\vec{B}$ est la fréquence de Larmor. Les deux expressions (2.29) et (2.30) sont similaire, on peut tirer la correspondance suivante :

$$\vec{\omega}_L \Leftrightarrow \vec{\Omega} \quad (2.31)$$

Pour un système régi par l'hamiltonien H_{mag} , le spectre d'énergie quantifié est connu et a été obtenu par Landau, il est donné par :

$$\varepsilon_n = (2n + 1)\hbar\omega_L, \quad n = 0,1,2, \dots \quad (2.32)$$

Ces niveaux d'énergies fortement dégénérés s'appellent les niveaux de Landau [54]. Un spectre de ce type a été obtenu dans les systèmes électroniques à deux dimensions. En effet, si on considère un gaz d'électrons bidimensionnel soumis à un champ magnétique perpendiculaire au plan contenant les électrons et confiné par un potentiel (structure obtenue en interposant une hétérojonction avec une couche conductrice entre deux semi-conducteurs d'où l'existence d'un potentiel confinant) et si le champ magnétique est très intense alors la structure des niveaux de Landau permettent d'expliquer l'effet hall quantique entier [55].

En se basant sur l'analogie discutée ci-dessus, on s'attend donc que dans la limite ($\Omega \sim \omega_0$), un système de gaz d'atomes ultra-froids en rotation très rapide présente des effets similaires à ceux dans les systèmes d'électrons bidimensionnels, à savoir l'effet hall quantique et la formation d'une structure des niveaux d'énergie de type Landau. Dans ce travail, nous nous intéressons aux propriétés d'un système constitué de N particules dont l'hamiltonien quantique à une particule est de la forme donnée par l'équation (2.28) et dont la vitesse de rotation Ω est proche de la vitesse critique ω_0 , avec $\Delta\omega = (\omega_0 - \Omega)/\omega_0 \ll 1$.

Nous reviendrons à la discussion du spectre d'énergie (2.32) après avoir déterminé celui qui caractérise notre système. Pour cela, nous allons dans le paragraphe suivant résoudre l'équation de Schrödinger et déterminer la forme des fonctions d'onde à une particule.

5. Fonctions d'onde à une particule

Le système est formé de N particules indépendantes, on s'intéresse alors par l'étude d'une seule d'entre elles. C'est une particule neutre qui fait un mouvement bidimensionnel dans un plan (Oxy) et soumise à un potentiel harmonique tournant autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire Ω . Le choix de se mettre dans le repère tournant pour traiter ce problème, nous a conduit à l'hamiltonien (2.21) :

$$H_{rot} = H_0 - \vec{\Omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + V(\vec{r}) - \Omega L_z \quad (2.33)$$

Où L_z est la projection du moment cinétique suivant l'axe Oz . Le potentiel confinant est un potentiel harmonique isotrope dont l'expression est donnée par :

$$V(r) = \frac{1}{2} M \omega_0^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} M \omega_0^2 r^2 \quad (2.34)$$

Avec : $r^2 = x^2 + y^2$.

Vue la symétrie cylindrique de ce potentiel, il serait mieux et facile si on cherche les solutions propres de l'hamiltonien H_{rot} en coordonnées polaires (r, φ) . Mais avant de chercher ces solutions, on doit remarquer que les deux opérateurs H_0 et L_z commutent entre eux :

$$[H_0, L_z] = 0 \quad (2.35)$$

Ils ont par conséquent des fonctions propres communes avec des valeurs propres différentes. Il suffit donc de chercher les solutions de l'équation de Schrödinger correspondant à l'hamiltonien H_0 en coordonnées polaires :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + \frac{M\omega_0^2}{2} r^2 \right] \psi(r, \varphi) = E_0 \psi(r, \varphi) \quad (2.36)$$

Où E_0 sont les énergies associées à l'hamiltonien H_0 . Cette équation différentielle permet de factoriser les solutions $\psi(r, \varphi)$ en deux fonctions radiale et angulaire :

$$\psi(r, \varphi) = \chi(r) \phi(\varphi) \quad (2.37)$$

La détermination de la partie angulaire $\phi(\varphi)$ se fait directement en tenant compte du fait que $\psi(r, \varphi)$ est une fonction propre de L_z . On a :

$$L_z \psi(r, \varphi) = m \hbar \psi(r, \varphi) \Rightarrow -i \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \chi(r) \phi(\varphi) = m \hbar \chi(r) \phi(\varphi) \quad (2.38)$$

Où ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) indique les valeurs possibles de la projection de L_z sur l'axe Oz . A ne pas confondre avec la masse de la particule. La solution de l'équation (2.38) est donc :

$$\phi(\varphi) = \exp(im\varphi) \quad (2.39)$$

Pour la partie radiale, l'équation de Schrödinger (2.36) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - \frac{1}{a^4} r^2 + k^2 \right] \chi(r) = 0 \quad (2.40)$$

Où on a posé :

$$a = \sqrt{\hbar/M\omega_0} \quad (2.41)$$

Appelée longueur de l'oscillateur, qui est une longueur caractérisant le potentiel harmonique. Et :

$$k^2 = 2ME_0/\hbar^2 \quad (2.42)$$

L'équation (2.40) est une équation différentielle de deuxième ordre dont la solution est donnée par [56] :

$$\chi(r) = r^{|m|} \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right) {}_1F_1\left(\lambda, |m| + 1; \frac{r^2}{a^2}\right) \quad (2.43)$$

Avec :

$$\lambda = \frac{1}{2}(|m| + 1) - \frac{1}{4}a^2k^2 \quad (2.44)$$

Est l'argument de la série hypergéométrique confluyente ${}_1F_1$. En effet, cette solution sous forme d'une série hypergéométrique confluyente est une solution divergente sauf que si l'argument λ est un entier négatif :

$$\lambda = -n, \quad \text{avec: } n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.45)$$

Ainsi, les fonctions d'onde seraient normalisables. Avec cette condition sur la valeur de λ , on peut obtenir les énergies propres correspondantes E_0 . D'après (2.41), (2.42), (2.44) et (2.45) on trouve:

$$E_{0,(n,m)} = (2n + |m| + 1)\hbar\omega_0 \quad (2.46)$$

Dans ce cas, la série hypergéométrique confluyente s'écrit en fonction des polynômes de Laguerre [57] :

$${}_1F_1\left(-n; |m| + 1; \frac{r^2}{a^2}\right) = \left[\frac{n! |m|!}{(n + |m|)!}\right] L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) \quad (2.47)$$

Injectons cette relation dans (2.43), et en utilisant les deux équations (2.37) et (2.39) on obtient alors les fonctions d'onde à une particules solutions propres de l'hamiltonien H_0 avec les énergies propres (2.46) :

$$\psi_{n,m}(r, \varphi) = C \frac{n! |m|!}{(n + |m|)!} r^{|m|} e^{\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)} L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) e^{(im\varphi)} \quad (2.48)$$

Où C est la constante de normalisation. Faisant l'intégrale suivante :

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \psi_{n,m}^*(r, \varphi) \psi_{n,m}(r, \varphi) r dr d\varphi = 1 \quad (2.49)$$

Et en utilisant la relation [57] :

$$\int_0^\infty x^p \exp(-x) [L_n^p(x)]^2 = \frac{(n + p)!}{n!} \quad (2.50)$$

On trouve la valeur de la constante C :

$$C = \frac{a^{-(|m|+1)}}{|m|!} \sqrt{\frac{(n + |m|)!}{\pi \cdot n!}} \quad (2.51)$$

Finalement, les fonctions d'onde à une particule sont :

$$\psi_{n,m}(r, \varphi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{n!}{\pi(n + |m|)!}} \left(\frac{r}{a}\right)^{|m|} e^{\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right)} L_n^{|m|}\left(\frac{r^2}{a^2}\right) e^{(im\varphi)} \quad (2.52)$$

Ces fonctions d'onde sont aussi fonctions propres de l'hamiltonien H_{rot} donné par (2.33) mais avec les énergies propres $E_{n,m}$ suivantes :

$$E_{n,m} = (2n + |m| + 1)\hbar\omega_0 - m\hbar\Omega \quad (2.53)$$

Où on a ajouté les valeurs propres ($m\hbar$) du moment cinétique L_z selon (2.33). et n est le nombre quantique radial.

6. Discussion du spectre d'énergie

Dans le repère tournant, le spectre d'énergie d'une particule neutre se mouvant sous l'influence d'un potentiel harmonique en rotation est représenté par l'expression des énergies propres $E_{n,m}$ données par (2.53), et qui peut s'écrire sous la forme appropriée suivante :

$$E_{n,m} = (2n + 1)\hbar\omega_0 + \begin{cases} +m\hbar(\omega_0 - \Omega), & \text{si } m > 0 \\ -m\hbar(\omega_0 + \Omega), & \text{si } m < 0 \end{cases} \quad (2.54)$$

Où on voit l'apparition du terme $(2n + 1)\hbar\omega_0$, qui représente la séquence des pseudo niveaux de Landau, on adopte cette appellation car ce terme du spectre est similaire à celui d'une particule chargée dans un champ magnétique donné par (2.32), où n est le nombre quantique caractérisant chaque niveau. Le second terme, tient compte de la déviation du spectre par rapport à celui des pseudos niveaux de Landau. Ce deuxième terme engendre dans le cas limite de la rotation très rapide une forte levée de dégénérescence.

Dans la limite du régime de la rotation très rapide ($\Omega \approx \omega_0$) la force centrifuge ($M\Omega^2\vec{r}$) est balancée par la force de confinement ($-M\Omega^2\vec{r}$) et le spectre d'énergie se réduit à :

$$E_{n,m} \approx (2n + 1)\hbar\omega_0 \quad (2.55)$$

Le nombre de dégénérescence m prend alors des valeurs considérables dans ce régime et les pseudos niveaux de Landau possèdent par suite un grand nombre de dégénérescence. En effet, pour n fixé tous les niveaux caractérisés par le nombre quantique m sont fortement dégénérés puisque on aura dans (2.54) l'approximation suivante : ($\omega_0 - \Omega \approx 0$).

Pour finir ce chapitre, nous rappelons d'une part que les systèmes des gaz d'électrons bidimensionnels, soumis à un champ magnétique, présentent des niveaux d'énergie qui s'organisent dans une structure des niveaux de Landau fortement dégénérés :

$$\varepsilon_n = (2n + 1)\hbar\omega_L$$

Cette structure est à l'origine de la manifestation macroscopique des oscillations quantiques de certaines grandeurs physiques telles que les oscillations du moment cinétique orbital, la magnétisation, etc. L'effet Hall quantique est aussi en solide relation avec la formation de ces niveaux.

D'autre part, Les études théoriques portées sur les gaz de fermions dégénérés ont confirmé qu'une organisation similaire se produit dans un gaz de fermions neutres sous l'effet d'une rotation très rapide conduisant à des divers effets quantiques

macroscopiques [10]. Il est important de signaler que des interactions atome-lumière ont été exploitées pour "simuler" des champs de jauge artificiels agissant sur la matière neutre d'une manière à ce que les particules semblent se mouvoir dans un référentiel tournant [58].

Nous reviendrons sur l'analogie rotation-champ magnétique sur la base de laquelle on va lier les phénomènes quantiques macroscopiques que présentent la densité de particules et la densité de courants d'un gaz de fermions neutres dans un potentiel harmonique isotrope tournant avec ceux d'un gaz d'électrons sous l'action d'un champ magnétique. Le chapitre suivant comporte l'analyse de ces deux grandeurs ainsi que d'autres détails.

Chapitre 3

Densités de particules et de courant d'un système de fermions ultra-froids dans un piège harmonique isotrope tournant

Chapitre 3

Densités de particules et de courant d'un système de fermions ultra-froids dans un piège harmonique isotrope tournant

1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques propriétés d'un système de fermions dégénéré confiné par un potentiel harmonique isotrope et mis en rotation à température nulle. En fait, nous nous sommes intéressés plus particulièrement par le cas de la rotation ultra-rapide, mais les résultats analytiques développés ici sont sans doute valables pour n'importe quelle valeur de la vitesse de rotation Ω .

Nous allons tout d'abord chercher les expressions exactes de la densité de particules $\rho(\vec{r})$ et de la densité de courant $\vec{j}(\vec{r})$ du système à partir des fonctions d'onde à une particule que nous avons obtenue dans le chapitre 2, ensuite nous allons procéder à tracer les courbes représentant ces deux grandeurs importantes. A partir de son expression ainsi que son tracé, on remarque que la densité locale $\rho(\vec{r})$ montre une structure formée d'une suite de régions de densités constantes, dites régions de densité incompressibles, séparées par d'autres dans lesquelles la densité est variable (décroissante) avec la position, et qui seront qualifiées de régions de densité compressibles. La formation de cette structure dans le profil de la densité de particules est une confirmation de l'apparition des pseudos niveaux de Landau dans le spectre d'énergie du système, ce qui va affecter la physique des courants de matière induits par la rotation dans ces régions.

En effet, des calculs ont été faits sur la densité de courant de masse ont prouvé qu'il est composé de deux types de courants et qu'il n'y aura qu'un seul type de ces courants dans chacune des régions. Les courants persistants dans les régions de densité compressibles sont appelés courants de bord ou en anglais *Edge currents*, et les courants persistants dans les régions de densité incompressibles sont dits courant de volume ou *Bulk currents* [60]. Les courants de bords sont dus au gradient de la densité de particules dans ces régions et qui seront alors négatifs puisque la densité locale est décroissante dans ces régions en s'éloignant du centre du piège, tandis que les courants de volumes sont dus au gradient du potentiel de confinement, alors semblables aux courants de Hall, qui seront positifs vu qu'on a un potentiel de piégeage. Ainsi, on va remarquer que ces deux types de courants, qui ne coexistent pas dans une même région dans la limite d'une rotation ultra rapide, circulent en directions opposées, c'est-à-dire que les courants de bord dans les régions compressibles s'écoulent en sens inverse à celui des courants de

volume régnants dans les régions incompressibles. Ce phénomène d'inversion de sens des courants est lié à l'oscillation de la pseudo-magnétisation¹ du système en rotation à l'instar de l'oscillation de la magnétisation dans un système électronique en présence du champ magnétique, le calcul de cette quantité n'a pas été fait dans ce mémoire.

2. Densité de particules $\rho(\vec{r})$

Rappelons ici le système que nous allons étudier ses propriétés. C'est un système formé de N fermions neutres sans interactions mutuelles à température nulle, chacun est de masse M , effectuant un mouvement bidimensionnel au plan (x, y) grâce à un potentiel de piégeage qu'on y ajoute un autre potentiel tournant avec une vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$, ce qui en résulte ainsi un potentiel harmonique isotrope tournant $V(\vec{r})$, somme des effets de ces deux potentiels, statique et dipolaire tournant donné par (1.7). Et le hamiltonien du système est :

$$H_{rot} = \frac{1}{2M} \vec{p}^2 + \frac{1}{2} M \omega_0^2 r^2 - \Omega L_z \quad (3.1)$$

2.1. Matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$

La matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$ associée à ce système de N particules fermioniques indépendantes à température zéro est définie par :

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu) = \sum_{i=1}^N \phi_i(\vec{r}) \phi_i^*(\vec{r}') = \sum_i \phi_i(\vec{r}) \phi_i^*(\vec{r}') \Theta(\mu - E) \quad (3.2)$$

Où μ est le potentiel chimique qui indique dans ce cas-là l'énergie de Fermi. La sommation dans (3.2) est étendue sur tout le spectre. La fonction saut de distribution de Heaviside est définie comme :

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

A été introduite pour n'inclure que les états occupés du système. L'expression des fonctions d'onde à une particule pour notre système est la suivante :

$$\psi_{n,m}(r, \varphi) = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{n!}{\pi(n+|m|)!}} \left(\frac{r}{a}\right)^{|m|} e^{-\frac{r^2}{2a^2}} L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2}\right) e^{im\varphi} \quad (3.4)$$

Insérée dans (3.2) donne :

¹ Système d'atomes électriquement neutres d'où l'appellation pseudo-magnétisation.

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_{n,m}(r, \varphi) \psi_{n,m}^*(r', \varphi') \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (3.5)$$

Où le spectre d'énergie du système est :

$$E_{n,m} = (2n + |m| + 1)\hbar\omega_0 - m\hbar\Omega \quad (3.6)$$

Alors, l'expression explicite de la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$ est :

$$\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu) = \frac{1}{\pi a^2} e^{-\frac{r^2+r'^2}{2a^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{n!}{(n+|m|)!} \frac{r^{|m|} r'^{|m|}}{a^{2|m|}} \times \right. \\ \left. L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2} \right) L_n^{|m|} \left(\frac{r'^2}{a^2} \right) e^{im(\varphi-\varphi')} \Theta(\mu - E_{n,m}) \right\} \quad (3.7)$$

2.2. Densité de particules $\rho(\vec{r})$

La densité de particules ou la densité locale $\rho(\vec{r})$ est l'élément diagonal de la matrice densité $\rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)$:

$$\rho(\vec{r}) = \rho(\vec{r}, \vec{r}'; \mu)|_{\vec{r}=\vec{r}'} \quad (3.8)$$

Qui s'écrit aussi sous la forme suivante :

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \psi_{n,m}(r, \varphi) \psi_{n,m}^*(r, \varphi) \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (3.9)$$

D'après (3.7) on obtient:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{\pi a^2} e^{-\frac{r^2}{a^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{n!}{(n+|m|)!} \frac{r^{2|m|}}{a^{2|m|}} \left[L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2} \right) \right]^2 \Theta(\mu - E_{n,m}) \right\} \quad (3.10)$$

La densité de particules $\rho(\vec{r})$ vérifie la condition de normalisation suivante :

$$\int \rho(\vec{r}) d\vec{r} = N \quad (3.11)$$

Où l'intégrale est étendue sur tout l'espace physique du système. Cette condition détermine le niveau de Fermi μ en fonction de N . On reviendra à la détermination de cette relation $\mu(N)$.

3. Densité de courant de matière $\vec{J}_{int}(\vec{r})$

On se propose de calculer la distribution du courant de masse engendrée par la rotation. À partir de l'équation de Schrödinger, nous dérivons l'équation de continuité :

$$\vec{\nabla} \vec{J}_{int}(\vec{r}) = 0 \quad (3.12)$$

Où $\vec{J}_{int}(\vec{r})$ est la densité de courant de masse dans le repère tournant, c'est-à-dire, la distribution intrinsèque du courant de matière. En effet, l'équation de Schrödinger pour ce système correspondant à l'hamiltonien (3.1) dans le repère tournant est :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi_{n,m}\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\psi_{n,m}\rangle = \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \vec{\nabla}^2 + \frac{1}{2} M \omega_0^2 r^2 - \Omega L_z \right) |\psi_{n,m}\rangle \quad (3.13)$$

La dérivation de l'expression du courant qui vérifie l'équation de continuité (3.12) conduit à :

$$\vec{J}_{int}(\vec{r}) = \vec{J}_{lab}(\vec{r}) - (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \rho(\vec{r}) \quad (3.14)$$

Où $\vec{J}_{lab}(\vec{r})$ est la partie cinétique de la densité de courant qui peut être aussi regardée comme la densité de courant dans le référentiel du laboratoire :

$$\vec{J}_{lab}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{2iM} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} [\psi_{n,m}^* \vec{\nabla} \psi_{n,m} - \psi_{n,m} \vec{\nabla} \psi_{n,m}^*] \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (3.15)$$

Le deuxième terme du second membre de l'expression (3.14) tient compte de l'effet de la rotation sur la particule dans le repère tournant, et qui peut être écrite explicitement si on sait que $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ et $\vec{r} = r \vec{e}_r$, alors :

$$(\vec{\Omega} \times \vec{r}) \rho(\vec{r}) = r \Omega \rho(\vec{r}) \vec{e}_\varphi \quad (3.16)$$

Où on a utilisé la relation vectorielle $\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi$, avec $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont respectivement les vecteurs unitaires radial et azimutal des coordonnées polaires.

L'expression explicite du premier terme dans le second membre de (3.14), la partie cinétique de courant $\vec{J}_{lab}(\vec{r})$, se calcule en utilisant l'expression (3.4) des

fonctions d'onde à une particule $\psi_{n,m}(r, \varphi)$ et celle de l'opérateur gradient en coordonnées polaire :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (3.17)$$

Nous trouvons ainsi :

$$\begin{aligned} \vec{J}_{lab}(\vec{r}) &= \vec{e}_\varphi \left(\frac{\omega_0}{\pi a} \right) e^{\left(-\frac{r^2}{a^2} \right)} \times \\ &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ m \frac{n!}{(n+|m|)!} \left(\frac{r^2}{a^2} \right)^{|m|-1} \left[L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2} \right) \right]^2 \Theta(\mu - E_{n,m}) \right\} \end{aligned} \quad (3.18)$$

D'après (3.16) et (3.18), on note que la densité de courant de matière $\vec{J}_{int}(\vec{r})$ n'a pas de composante radiale mais seulement une composante azimutale le long du vecteur unitaire \vec{e}_φ :

$$\vec{J}_{int}(\vec{r}) = j_{int}(\vec{r}) \vec{e}_\varphi \quad (3.19)$$

On obtient finalement d'après les expressions (3.10), (3.14), (3.16) et (3.18) la formule du courant de matière intrinsèque :

$$\begin{aligned} j_{int}(\vec{r}) &= \left(\frac{\omega_0}{\pi a} \right) e^{\left(-\frac{r^2}{a^2} \right)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{n!}{(n+|m|)!} \left(\frac{r^2}{a^2} \right)^{|m|-1} \left(m - \frac{\Omega}{\omega_0} \frac{r^2}{a^2} \right) \times \right. \\ &\left. \left[L_n^{|m|} \left(\frac{r^2}{a^2} \right) \right]^2 \Theta(\mu - E_{n,m}) \right\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Passons maintenant à l'évaluation numérique et les tracés correspondants de la densité de particules et de courant de masse. Il serait utile tout d'abord de trouver la relation entre le nombre de particule et le niveau de Fermi.

4. Relation entre le nombre de particules N et le niveau de Fermi μ

La condition de normalisation de la densité locale au nombre total de particules N est donnée par la relation (3.11), $\int \rho(\vec{r}) d\vec{r} = N$. En effet, la définition de la densité de particules (3.9), exprimée par les fonctions d'onde à une particule, peut s'écrire :

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\psi_{n,m}(r, \varphi)|^2 \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (3.21)$$

Injectons cette relation dans la condition (3.11) tout en utilisant la normalisation à l'unité des fonctions d'onde on obtient donc :

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \underbrace{\left\{ \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} |\psi_{n,m}(r, \varphi)|^2 r dr d\varphi \right\}}_{=1} \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (3.22)$$

Ce qui donne :

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \Theta(\mu - E_{n,m}) \quad (3.23)$$

Cette équation permet de trouver le niveau de Fermi μ pour un nombre de particules N .

Supposons que nous avons un nombre N fixé, il faut chercher donc toutes les valeurs possibles de n et m qui vérifient la condition :

$$E_{n,m} \leq \mu \quad (3.24)$$

Pour cela, on utilise la forme des niveaux d'énergie donnée par (3.6), ainsi :

$$(2n + |m| + 1)\hbar\omega_0 - m\hbar\Omega \leq \mu \quad (3.25)$$

La valeur maximale n_{max} de n qui vérifie (3.25) est :

$$n_{max} = \frac{\mu}{2\hbar\omega_0} - \frac{1}{2} = \frac{\tilde{\mu} - 1}{2} \quad (3.26)$$

Où on a posé, par souci de calcul numérique, l'énergie de Fermi μ par la grandeur sans dimension $\tilde{\mu}$ tel que :

$$\tilde{\mu} = \frac{\mu}{\hbar\omega_0} \quad (3.27)$$

En fait, on doit prendre la partie entière de la relation (3.26) car n est un nombre entier :

$$n_{max} = \left[\frac{\tilde{\mu} - 1}{2} \right] \quad (3.28)$$

Alors que pour une valeur donnée de n , les deux valeurs maximale et minimale de m vérifiant (3.25) sont :

$$-\underbrace{\left\lfloor \frac{\tilde{\mu} - 1 - 2n}{1 + \alpha} \right\rfloor}_{m_{min}} \leq m \leq \underbrace{\left\lfloor \frac{\tilde{\mu} - 1 - 2n}{1 - \alpha} \right\rfloor}_{m_{max}} \quad (3.29)$$

Où on a introduit le rapport de rotation :

$$\alpha = \frac{\Omega}{\omega_0} \quad (3.30)$$

Revenons maintenant à la relation entre N et μ . L'équation (3.23) s'écrit en fonction de n_{max} , m_{max} , et m_{min} comme suivant :

$$N = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=m_{min}}^{m_{max}} (1) \quad (3.31)$$

Ce qui va donner l'expression suivante :

$$N = \frac{\tilde{\mu}^2 + (1 - \alpha^2)\tilde{\mu} - \alpha^2}{2(1 - \alpha^2)} = \frac{(\tilde{\mu} + 1)(\tilde{\mu} - \alpha^2)}{2(1 - \alpha^2)} \quad (3.32)$$

En fait, cette équation du second degré en $\tilde{\mu}$ n'est pas exacte, mais elle donne une très bonne estimation du niveau de Fermi pour un nombre de particules N et un rapport de rotation α choisis.

5. Tracés des densités

Le calcul exact des différents ingrédients inclus dans les expressions (3.10) et (3.20) de la densité de particules et la densité de courant respectivement permet de tracer et de visualiser leurs profils dans les moindres détails. Pour un nombre d'atomes N et pour un rapport $\alpha = (\Omega/\omega_0)$ choisis on détermine d'abord le niveau de Fermi μ , le programme *Mathematica* calcule alors les densités en chaque point de la variable réduite $x = (r/a)$ tout en traçant leurs graphes.

Nous voulons en premier temps donner les valeurs de l'énergie de Fermi $\tilde{\mu}$, mesurée en unité de $\hbar\omega_0$, pour les cas que nous allons traiter dans ce travail. Dans le tableau ci-dessous on a récapitulé nos résultats, pour un système constitué de $N = 1000, 2000$ et 10000 particules respectivement associés aux valeurs du rapport de rotation α choisies d'une manière croissante afin de voir ce qui se passe en passant du régime des « faibles » rotations à celui de rotations très rapide.

		Rapport de rotation $\alpha = \Omega/\omega_0$			
		$\alpha = 0.95$	$\alpha = 0.99$	$\alpha = 0.995$	$\alpha = 0.999$
Nombre de particules	$N = 1000$	$\tilde{\mu} = 13.950$	$\tilde{\mu} = 6.320$	$\tilde{\mu} = 4.495$	$\tilde{\mu} = 1.999$
	$N = 2000$	$\tilde{\mu} = 19.751$	$\tilde{\mu} = 8.971$	$\tilde{\mu} = 6.326$	$\tilde{\mu} = 2.999$
	$N = 10000$	$\tilde{\mu} = 44.151$	$\tilde{\mu} = 19.955$	$\tilde{\mu} = 14.130$	$\tilde{\mu} = 6.333$

5.1. Tracé de la densité de particules $\rho(\vec{r})$

(Régions compressibles et incompressibles de la densité)

Pour les nombres de particules N donnés dans le tableau ci-dessus, on a tracé les courbes représentant la densité de particules $\rho(\vec{r})$ pour les différentes valeurs de la vitesse de rotation représentée par le rapport de rotation α qu'on a pris avec des valeurs croissantes pour mettre en évidence le passage à la formation des pseudos niveaux de Landau. Sur ces tracés, nous avons utilisé des variables convenables. En abscisses, on a exprimé la distance au centre du système en unité de a en prenant comme variable réduite la valeur $x = (r/a)$. Alors qu'en ordonnées, nous avons pris la densité en unité de $(1/\pi a^2)$.

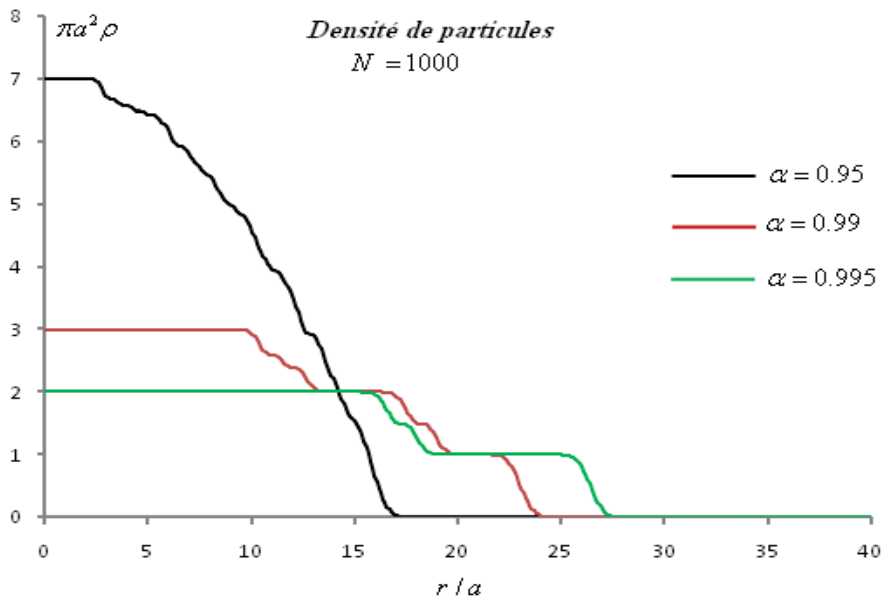


Fig.3.1. La densité de particules pour $N=1000$ particules. On peut observer sur cette figure l'apparition d'une alternance de régions compressibles-régions incompressibles dès que la vitesse de rotation soit proche de la fréquence du potentiel indiquant ainsi le passage au régime de Landau.

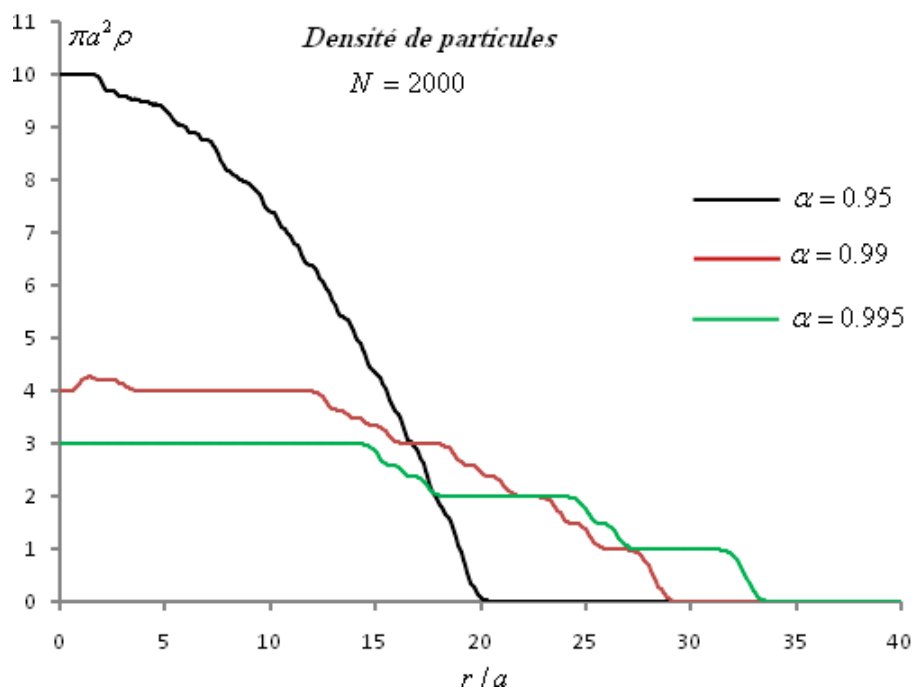


Fig.3.2. La densité de particules pour $N=2000$ particules. De même, on observe la formation de régions de densité constante suivies par des régions où la densité est décroissante.

Pour des vitesses de rotations très proche de un, $\alpha = 0.999$, on a tracé les courbes associées aux nombres de particules $N = 1000$ et 2000 dans la même figure **Fig.3.3**. Les particules s'accumulent dans un seul niveau (LLL) $n = 0$ avec une forte dégénérescence.

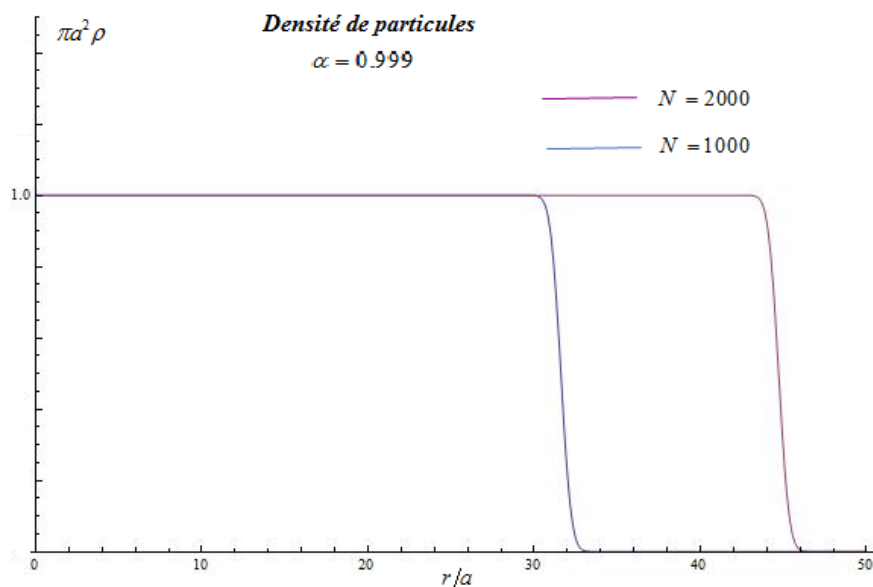


Fig.3.3. Les particules s'accumulent dans un seul niveau de Landau le plus bas (LLL), correspondant au nombre quantique $n = 0$, avec une forte dégénérescence.

Cette structure persiste pour des nombres de particules gigantesque, le calcul prend un trop long temps, on se contente ici par la donnée de l'exemple d'un nombre de particule $N = 10^4$ pour une très grande vitesse de rotation.

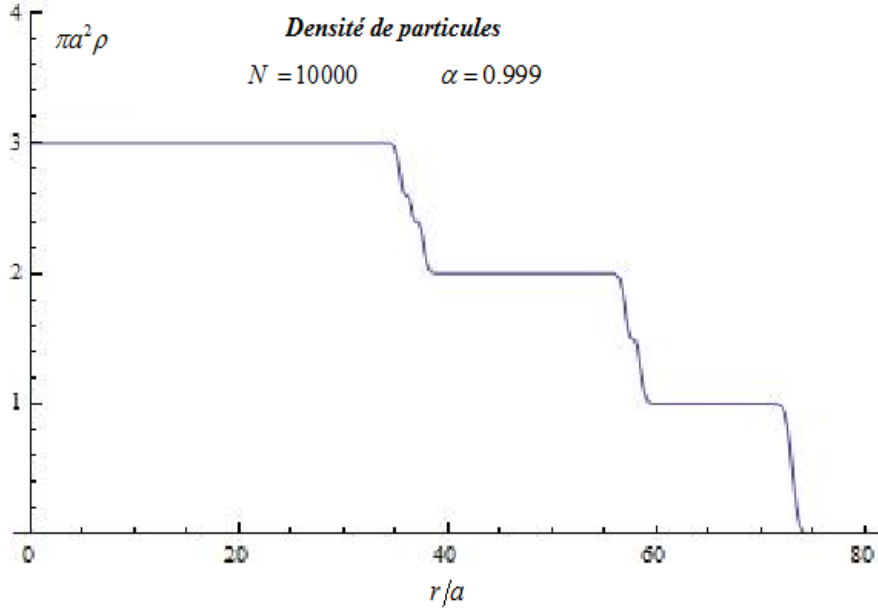


Fig.3.4. La densité de particules pour $N = 10000$ particules. La même organisation dans la forme de la densité locale s'installe en rotation ultra rapide comme les cas précédents, succession de régions incompressibles-compressibles

Commentaire

On observe qu'au fur et à mesure que la vitesse de rotation augmente, en plus de l'étalement de la densité qui est du ici à la force centrifuge, il y'a formation d'une série de régions où la densité est constante (structure en plateaux) suivies par des régions où la densité varie avec la position. Il faut noter que ces plateaux de densités ont lieu exactement pour des valeurs quantifiées de la densité :

$$\rho = \frac{\nu}{\pi a^2} \quad (3.33)$$

Avec ($\nu = 1, 2, \dots$). Le nombre entier ν est appelé facteur de remplissage (*filling factor*). Cette structure de densités, formée par des suites successives des régions incompressibles-compressibles, une adjacente à l'autre, a été prédite pour la première fois dans les quantum dots (appelés aussi atomes artificiels) à deux dimensions où les électrons sont confinés et soumis à un champ magnétique très intense [21]. Dans le domaine des gaz quantiques ultra froids, cette structure a été obtenue aussi dans les travaux [10], [12], mais sans indiquer ou mettre l'accent sur l'importance des régions compressibles. Nous allons dans le prochain paragraphe examiner la structure de la distribution du courant de matière générée par la rotation.

5.2. Tracé de la densité de courant de matière $j(\vec{r})$

Dans ce qui suit, on va examiner soigneusement le courant de matière, il s'agit du sens de son écoulement dans les régions compressibles-incompressibles, ce qui va permet de prendre une idée sur sa nature quantique ainsi que l'origine de ses deux composantes circulant chacune dans une région spécifiée. Comme nous l'avons fait pour la densité de particules, nous présentons ici les tracés de la densité de courant pour diverses valeurs de vitesse de rotation et nombre de particules. Des variables convenablement choisies sont utilisées dans la représentation. Sur l'axe des ordonnées on a exprimé la densité de courant de matière en unité de $(\omega_0/\pi a)$ tout en gardant la variable réduite $x = (r/a)$ sur l'axe des abscisses.

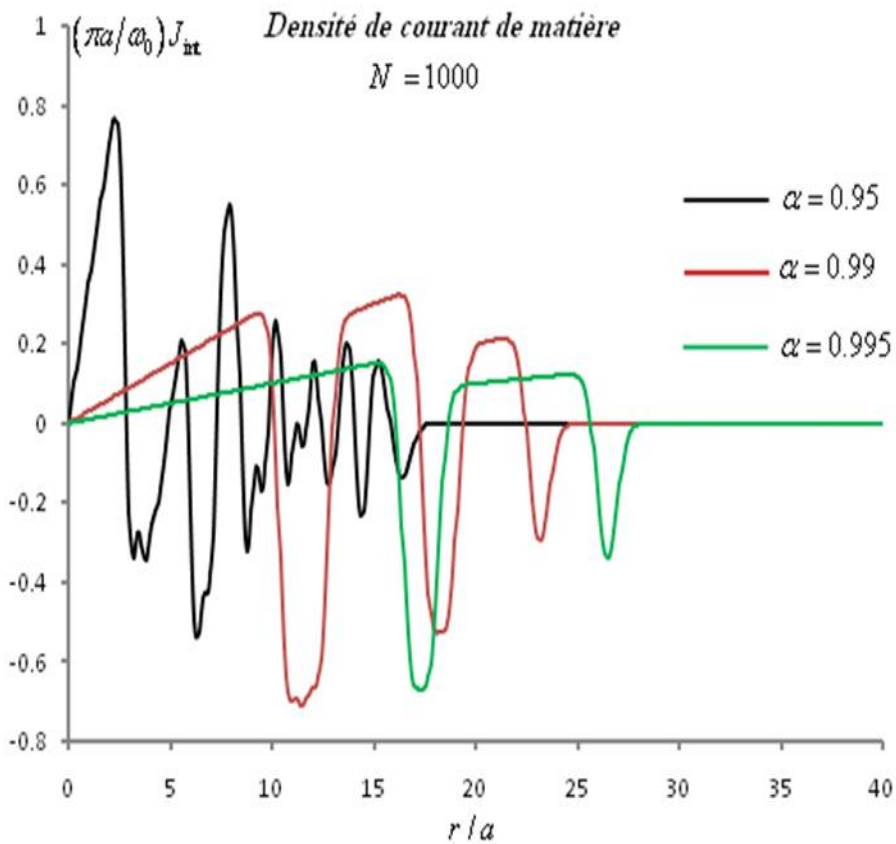


Fig.3.5. La densité de courant de masse pour $N=1000$ particules. On observe que le courant présente des oscillations d'une façon irrégulière quand le rapport de rotation soit inférieur à l'unité, mais dès que cette valeur devient proche de 1, c'est-à-dire atteindre le régime de rotation ultra rapide, le tracé de la densité de courant prend une forme régulière reflétant la formation des régions compressibles et incompressibles et par suite l'entrée en régime des niveaux de Landau.

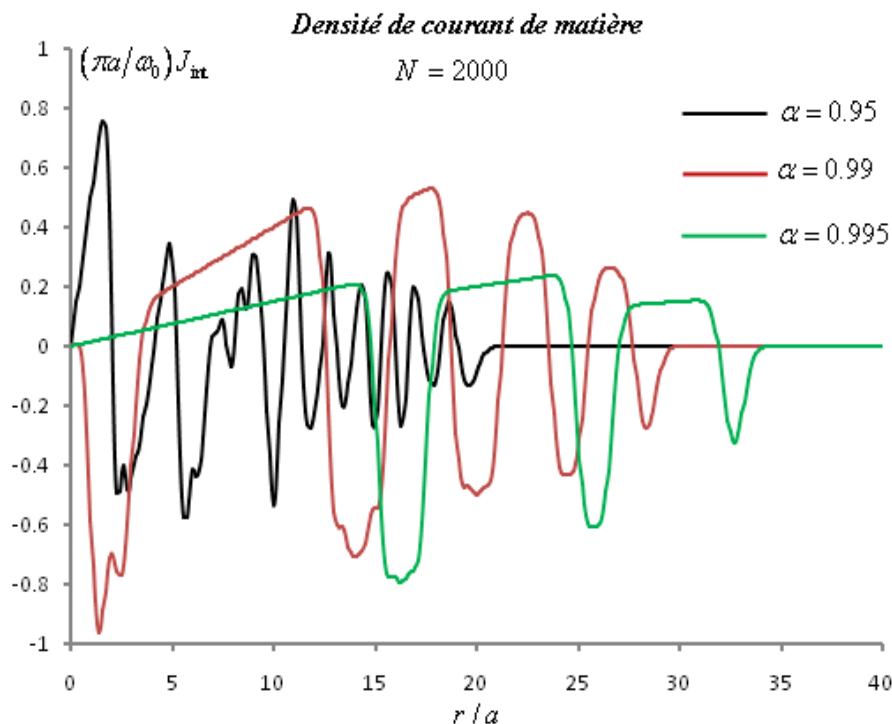


Fig.3.6. La densité de courant de masse pour $N=2000$ particules.

Pour un nombre de particules plus grand, comme le cas de $N = 10000$ particules, on a calculé et représenté la densité de courant pour deux valeurs de la vitesse de rotation comme le montrent les figures **Fig.3.7** et **Fig.3.8**.

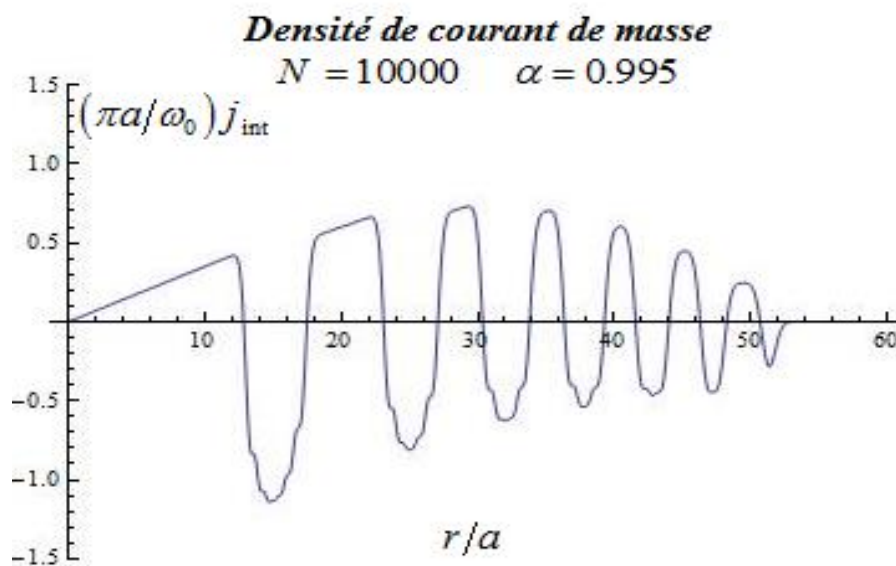


Fig.3.7. La densité de courant de masse pour $N=10000$ particules et un rapport de rotation 0.999.

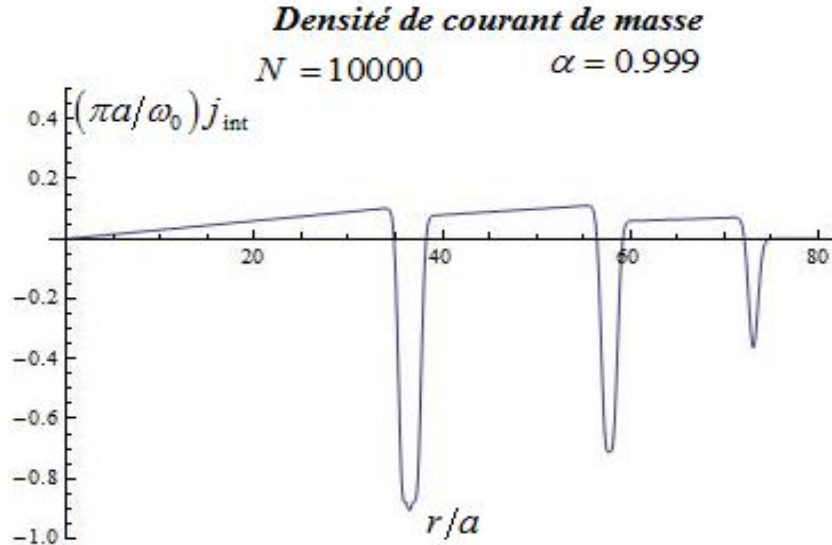


Fig.3.8. La densité de courant de masse pour $N=10000$ particules et un rapport de rotation très proche de l'unité, soit 0.999.

Commentaire

On observe que dans le régime de rotation rapide la distribution du courant présente des fortes oscillations, par contre en rotation ultra-rapide le courant acquiert une structure régulière et ceci correspond exactement au régime où la densité de particules présente une structure régulière de régions alternées incompressibles et compressibles. On observe que le courant de matière circule dans le sens de la rotation dans les régions de densité constante (régions incompressibles), par contre dans les régions où la densité décroît (régions compressibles) le courant circule dans le sens inverse. Cette inversion du signe du courant de matière est très intéressante. Pour voir ces reversements du sens du courant de masse d'une façon évidente, nous avons représenté sur une même figure (**Fig.3.9**) les distributions de la densité de particules $\rho(\vec{r})$ et de la densité de courant $j_{int}(\vec{r})$ dans un régime de rotation ultra rapide, par exemple pour $\alpha = 0.995$, et c'est pour un système de $N = 2000$ fermions.

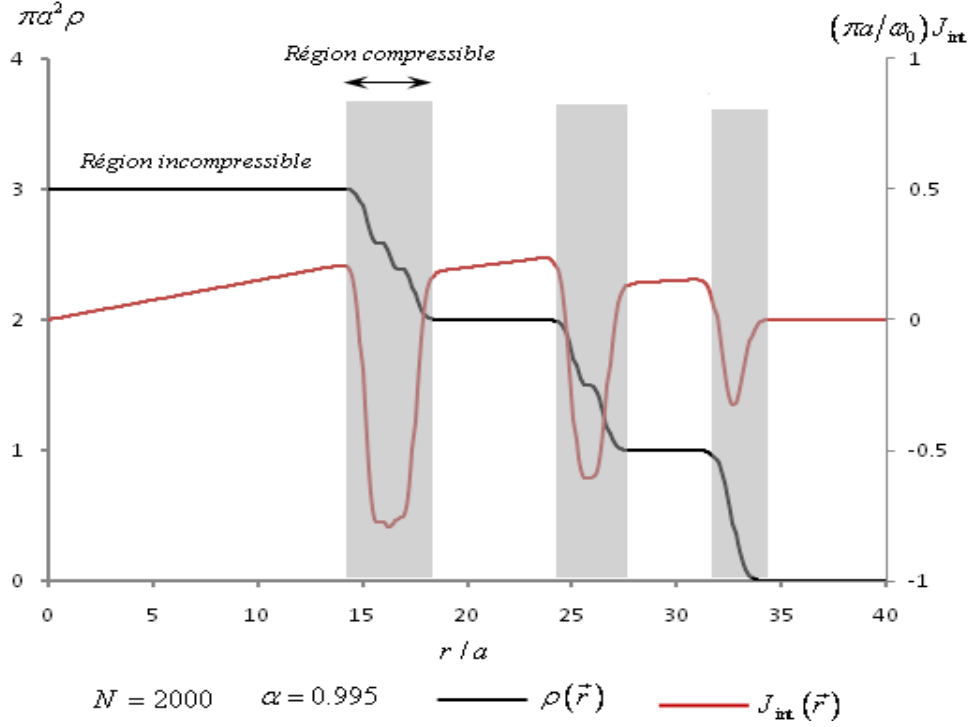


Fig.3.9. Profils des densités de particules et de courant de matière pour $N=2000$ particules avec un rapport de rotation élevé, donc on est dans le régime de rotation ultra rapide. Les valeurs de la densité locale $\rho(\vec{r})$ sont données sur l'axe des ordonnées à gauche, alors que celles de la densité de courant sont mises à droite. Dans les régions incompressibles la densité est un multiple entier de $(1/\pi a^2)$ et le courant circule dans le sens positif de rotation, tandis que dans les régions compressibles (zones grises) la densité de particules est décroissante et le courant circule dans le sens inverse (négatif) de rotation.

6. Interprétation qualitative

A partir de l'équation de continuité $\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) = 0$, satisfaite par la densité de courant dans le repère tournant, on a toujours la possibilité d'écrire la densité $\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r})$ comme le rotationnel d'un vecteur, soit :

$$\vec{J}_{\text{int}}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \times \vec{M}(\vec{r}) \quad (3.34)$$

Où, par analogie avec le magnétisme, le vecteur $\vec{M}(\vec{r})$ est appelé **pseudo-magnétisation orbitale**. Ce vecteur $\vec{M}(\vec{r}) = M(\vec{r})\vec{e}_z$ est dirigé en chaque point de l'espace à deux dimensions suivant l'axe Oz . Cette pseudo-magnétisation du système d'atomes neutres subissant une rotation très rapide présente un comportement oscillatoire [60]. Ces oscillations de $M(\vec{r})$ provoquent une inversion du sens d'écoulement de la matière en allant d'une région incompressible à son adjacente

compressible et vice versa. Ces oscillations sont analogues à celles de de Haas-van Alphen au sein des systèmes électroniques en présence du champ magnétique intense, à l'exception que notre système est électriquement neutre.

Avec la formation des régions de densité incompressibles et compressibles, nous avons trouvé que le courant de matière dans le repère tournant $\vec{j}_{int}(\vec{r})$ présente un comportement intéressant en inversant sa direction de flux (il s'agit d'un flux radial²) en passant d'une région à une autre. En effet, il a été montré que, dans ce régime de rotation très rapide, le courant de matière est la somme de deux types de courants. Quant aux leurs propriétés, on peut citer, entre autres, la plus importante. C'est le fait qu'il n'existe qu'un seul type de courant dans chacune des régions. Dans la région incompressible, le courant est proportionnel au gradient du potentiel confinant, c'est un courant de volume (bulk current), c'est similaire à un courant de Hall quantique, alors que dans la région de densité compressible, le courant est proportionnel au gradient de la densité de particules $\rho(\vec{r})$ et par suite il possède une structure de courant de bord (*edge current*).

Pour un système d'électrons bidimensionnel soumis à un champ magnétique perpendiculaire très intense, M. R. Geller et G. Vignale [20-21] ont prédit l'existence de plateaux de densité (alternance de régions incompressibles et compressibles) en utilisant le formalisme de la fonction de Green. L'expression de la distribution du courant de charge dans ces régions a été aussi établie. Dans ce travail, nous avons présenté que la même organisation s'installe pour un système d'atomes neutres en rotation ultra-rapide. Vue la difficulté de la vérification expérimentale sur des systèmes électroniques d'une part, et les développements spectaculaires des techniques expérimentales dans le domaine des gaz quantiques dégénérés généralement, et dans les régimes des rotations ultra rapides particulièrement, le travail avec ces systèmes offre une opportunité idéal pour que les résultats sur la distribution spatiale du courants quantiques persistants soient mises à une vérification expérimentale [61].

² C.-à-d., par unité de longueurs.

Conclusion Générale

Conclusion Générale

Nous avons exposé dans ce mémoire quelques propriétés d'un système de gaz d'atomes fermioniques ultra-froids piégé par un potentiel harmonique isotrope bidimensionnels et soumis à des rotations ultra rapides. Le confinement le long de l'axe perpendiculaire au plan du système est supposé tellement fort qu'on peut considérer que le mouvement le long de cet axe comme gelé. Le principal but de traiter ce type de systèmes est d'observer des effets similaires à ceux observés dans les systèmes électroniques à deux dimensions en présence de champ magnétique très intense (formation des niveaux de Landau, effet hall quantique, ...etc.). En effet, suite aux progrès technologiques réalisés dans ce domaine de gaz quantiques ultra-froids, ces systèmes d'atomes froids fournissent un milieu contrôlable et accessible pour tester la validité des théories élaborées initialement pour des systèmes de matière condensée dans lesquelles ces vérifications ne sont pas toujours faciles.

Nous avons commencé tout d'abord par une introduction qui fournit une vue générale sur le thème de ce mémoire et l'état de l'art de ce domaine ainsi que les buts à atteindre, le premier chapitre est consacré à l'exposition des idées théoriques fondatrices menant à franchir le seuil de dégénérescence des gaz quantiques couronnées par la réalisation expérimentale des condensats de Bose-Einstein. Nous avons aussi présenté dans ce même chapitre quelques techniques expérimentales conduisant à la mise en rotation d'un nuage atomique refroidi jusqu'à la dégénérescence. Dans le chapitre 2, on a procédé à l'obtention de l'équation de Schrödinger du système et de son hamiltonien à une particule dans le repère tournant. On a montré ainsi la compétition entre les différentes forces (force du potentiel confinant- force centrifuge- force de Coriolis) qui agissent sur la particule dans le repère tournant (non-inertiel). Une discussion du spectre de l'énergie est aussi exposée dans ce chapitre

Dans le chapitre 3, la structure des densités de particules et de courant de matière d'un gaz d'atomes neutres de fermions ultra-froid dans un piège harmonique bidimensionnel en rotation très rapide est examinée soigneusement. On a observé la formation, dans le régime ultra-rapide de rotation, des régions de densité constante (régions incompressibles ou plateaux) où chaque plateau correspond à une valeur quantifiée de la densité ($\rho = \nu / \pi a^2$, $\nu = 1, 2, 3, \dots$). Par un traitement numérique exact nous avons pu faire montrer aussi l'existence de régions de densités variables (régions compressibles). Dans le but de comprendre profondément cette structure de la densité, nous avons étudié la distribution du courant générée par la rotation du fluide. Il est intéressant de rappeler que si on prend un fluide normale en rotation, après un certain temps ce fluide va tourner avec la même vitesse angulaire que celle du récipient qui le contient, par conséquent la vitesse relative du fluide dans le repère tournant est nulle.

Par contre, le fluide considéré dans ce travail est de nature quantique et par conséquent le courant dans le repère tournant (qui montre la déviation par rapport à la rotation rigide) est non nulle, mais présente une structure non triviale en particulier en régime de rotation ultra rapide. Par ailleurs, nous avons présenté une explication des phénomènes observés et que dans les régions de densité constante le courant circule dans le sens de rotation par contre dans les régions compressibles, le courant circule dans le sens inverse. Cette alternance dans la distribution du courant en rotation rapide, est liée, comme on l'a vu, par les oscillations dans la pseudo-magnétisation. Nous avons présenté aussi que le courant de matière dans ce régime est composé de deux types de courants et que dans une région de densité donnée on n'aura qu'un seul type de ces deux courants

Références Bibliographiques

Références Bibliographiques

- [1] B. DeMarco et *al.*, Science **285**, 1703 (1999). B. DeMarco et *al.*, Phys. Rev. Lett. **86** 5409, (2001).
- [2] A. G. Truscott et *al.*, Science **291**, 2570 (2001). Partridge G B et *al.*, Science, **311** 503, (2006).
- [3] M. H. Anderson et *al.*, Science **269**, 198 (1995).
- [4] C. C. Bradley et *al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 1687 (1995).
- [5] K. B. Davis et *al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3969 (1995).
- [6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics IX, Statistical Physics*, part 2 (Pergamon Press, 1981).
- [7] F. Dalfovo et *al.*, Rev. Mod. Phys. **71**, 463 (1999).
- [8] A. L. Fetter, Rev. Mod. Phys. **81**, 647 (2009).
- [9] N. R. Cooper, Adv. Phys. **57**, 539 (2008). N. R. Cooper et *al.*, Phys. Rev. B **60**, R16279 (1999); N. R. Cooper et *al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 120405 (2001); N. R. Cooper, *ibid.* **92**, 220405 (2004).
- [10] T.-L. Ho et *al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 4648 (2000).
- [11] N. Ghazanfari et *al.*, Eur. Phys. J. D **59**, 435 (2010).
- [12] N. Regnault et *al.*, Phys. Rev. B **70**, 241307(R) (2004).
- [13] Z. Akdeniz et *al.*, Physica B **365** 208 (2005).
- [14] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Course of Theoretical Physics V, Statistical Physics Part I* (Pergamon Press, Oxford, 1993), Sec. 26.
- [15] Ch. Grenier et *al.*, Phys. Rev. A **87**, 033603 (2013).
- [16] W. J. de Haas et *al.*, Leiden. Comm. **208d**, 212a (1930); **208**, 220d (1932).
- [17] N.W. Ashcroft, D. Mermin, *Physique du Solide*, EDP Sciences (2002), France.
- [18] L. Landau, Z. Phys. **64**, 629 (1930).
- [19] I. Bloch et *al.*, Nature **8**, 267 (2012).
- [20] M. R. Geller et *al.*, Physica B **212**, 283 (1995).
- [21] M. R. Geller et *al.*, Phys. Rev. B **50**, 11714 (1994).
- [22] Y. Avishai et *al.*, Phys. Rev. Lett. **71**, 279 (1993).
- [23] D. B. Chklovskii et *al.*, Phys. Rev. B **46**, 4026 (1992); **46**, 15606 (1992).
- [24] M. Büttiker et *al.*, Phys. Lett. A **96**, 365 (1983).
- [25] L. P. Lévy et *al.*, Phys. Rev. Lett. **64**, 2074 (1990).
- [26] V. Chandrasekhar et *al.*, Phys. Rev. Lett. **67**, 3578 (1991).
- [27] D. Mailly et *al.*, Phys. Rev. Lett. **70**, 2020 (1993).
- [28] G. Vignale et *al.*, Phys. Lett. A **197**, 444 (1995).
- [29] P. Jacquinet et *al.*, Opt. Commun. **8**,163, (1973). R. Schieder et *al.*, Opt. Commun. **5**,337 (1972).
- [30] J. v. Prodan et *al.*, Phys. Rev. Lett. **54**, 992 (1985).

- [31] W. Ertmer et *al.*, Phys. Rev. Lett. **54**, 996 (1985).
- [32] A. Aspect et *al.*, Images de la physique, p.74 (1990).
- [33] J. Dalibard, La Recherche, p.934, Volume **16** N° **168** (1985).
- [34] F. Chevy. *Dynamique d'un condensat de Bose-Einstein*. Thèse de doctorat Atomic Physics. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI (2001). French.
- [35] J. Dalibard, *Cours Atomes ultra-froids*, année (2006).
- [36] R. Grimm et *al.*, Adv. At. Mol. Opt. Phys., vol. **42**, pages 95–170 (2000).
- [37] N. Schlosser, *Étude et réalisation de micro-pièges dipolaires optiques pour atomes neutres*, Thèse de doctorat, Université Paris XI (2001).
- [38] B. Darquié, *Manipulation d'atomes dans des pièges dipolaires microscopiques et émission contrôlée de photons par un atome unique*. Thèse de doctorat, Université Paris XI (2005).
- [39] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes, Savoirs actuels* (InterEditions/Editions du CNRS, 1988).
- [40] J. Dalibard et *al.*, Journal of the Optical Society of America B, Vol. **2**, page 1707, November (1985).
- [41] C. G. Townsend, et *al.*, Phys. Rev. A **52** (2), 1423 (1995)
- [42] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge university press (2008). Chapter 4 and 5.
- [43] J. F. Allen et *al.*, Nature **141**, 75 (1938).
- [44] F. London, Nature **141**, 643 (1938).
- [45] R. J. Donnelly, *Quantized Vortices in Helium II* (Cambridge University Press, Cambridge, 1991).
- [46] A. A. Abrikosov, Sov. Phys. JETP **5**, 1174 (1957).
- [47] J.R. Abo-Shaer et *al.*, Science **292**, 476 (2001).
- [48] M.R. Matthews et *al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 2498 (1999).
- [49] A.E. Leanhardt et *al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 190403 (2002).
- [50] K.W. Madison et *al.*, Phys. Rev. Lett. **84**, 806 (2000).
- [51] P.C. Haljan et *al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 210403 (2001).
- [52] E. Hodby et *al.*, Phys. Rev. Lett. **88**, 010405 (2001).
- [53] V. Bretin. *Rotations d'un condensat de Bose-Einstein*. Thèse de doctorat. Atomic Physics. (Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2004). France.
- [54] C. Cohen- Tannoudji, Bernard Diu, Franck, Laloe, *Mécanique Quantique*, Tome 1, Hermann (1977) Paris. Pour l'opérateur de rotation, p. 445. Pour les niveaux de Landau, p. 751.
- [55] R. B. Laughlin, Phys. Rev. Lett. **50**, 1395 (1983).
- [56] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1999) Germany.
- [57] I S Gradshteyn and I M Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, New York, 5th edition, 1994).
- [58] J. Dalibard et *al.*, Rev. Mod. Phys. **83**, 1523 (2011).

- [59] A. Görlitz et *al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 130402 (2001). V. Schweikhard et *al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 040404 (2004). D. Rychtarik et *al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 173003 (2004). N. L. Smith et *al.*, J. Phys. B **38**, 223-235 (2005). S. Burger et *al.*, Europhys. Lett. **57**, 1-6 (2002). Z. Hadzibabic et *al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 180403 (2004). M. Köhl et *al.*, J. Low Temp. Phys. **138**, 635-644 (2005).
- [60] S. Medjedel. *Calcul des densités de courants dans les systèmes quantiques confinés en dimensions réduites*. Thèse de Doctorat en physique théorique. Université Ferhat Abbas-Sétif 1 (2016). Algérie.
- [61] K. Bencheikh, Medjedel. S and G. Vignale., Phys. Rev. A **89**, 063620 (2014).

Abstract:

We present in this work a Theoretical study in the field of quantum gases. The system we considered is a two dimensional ultra-cold Fermi gas confined by an isotropic harmonic potential and set in a very fast rotation. We studied the distribution of the particle density, the matter current density. We showed that in the regime of a fast rotation, the particle density exhibits a structure of a series of regions of constant density separated by regions where the density is decreasing. We discussed the influence of this structure on the distribution of the mass currents and we found that these currents flow in opposed directions in going from an incompressible region to the neighboring and that this current is composed of a two types of currents. We also mentioned that in this limit of fast rotation, there exist only one type of current in each region. The inversion of the signs of the current is related to the oscillations of the so-called pseudo-magnetization of the system in a similar way as exits in the physics of the electrons subjected to strong magnetic fields.

Key words: Fermi gas, Fast rotation, harmonic trap, matter current density, current reversals, pseudo-magnetization.

Résumé :

Nous présentons dans ce mémoire une étude théorique dans le domaine des gaz quantiques. Le système que nous considérons est à deux dimensions, formé d'un gaz d'atomes de fermions ultra-froid électriquement neutres confiné par un potentiel harmonique isotrope et mis en rotation très rapide. Nous étudions les distributions de la densité de particules, de courant de matière et de pseudo-magnétisation comme réponse du système à cette rotation. Nous montrons que dans le régime de rotation ultra rapide, la densité de particules présente une structure sous forme d'une suite des régions de densité constante séparées par des régions où la densité est décroissante, nous avons discuté l'influence de cette structure sur la distribution des courants de masse et on a mentionné que ces courants circulent dans des directions opposées en passant d'une région à une autre adjacente. Il n'existe qu'un seul type de courant dans chacune des régions. Le renversement des signes du courant est lié aux oscillations de la pseudo-magnétisation du système d'une façon similaire à la physique des électrons en présence d'un champ magnétique intense.

Mots-clés : gaz de Fermi, rotation rapide, piège harmonique, densité de courant de matière, renversements du courant, pseudo-magnétisation.

ملخص:

نقدم في هذه المذكرة دراسة نظرية في حقل الغازات الكوانتية. النظام الفيزيائي المدروس عبارة عن غاز من الفرميونات بدون شحنة كهربائية تحت عتبة الانحلال الكوانتي خاضع لكمون هزاز توافقي متمائل المناحي ويدور بسرعة زاوية عالية. قمنا بدراسة كثافات كل من الجسيمات و تيار المادة وأشرنا إلى شبه المغناطيسية كسبب رئيس لتغير اتجاه تيار المادة. بيننا أنه في حالة سرعات الدوران الكبيرة جدا فإن كثافة الجسيمات تعكس بنية خاصة عبارة عن تتالي من المناطق التي تكون فيها الكثافة ثابتة مفصولة فيما بينها بمناطق أخرى تكون فيها الكثافة متغيرة (متناقصة). كما ناقشنا تأثير هذه البنية على كثافة توزيع تيار المادة فوجدنا أن التيار يتدفق بصورة متعكسة من منطقة إلى أخرى و أشرنا إلى انه في الحقيقة مكون من نوعين من التيارات وانه لا يوجد في كل منطقة إلا نوع واحد من هذه التيارات. إن هذا التقلب في اتجاهات تيار المادة يمكن أن يُعزى إلى اهتزازات ما يسمى بشبه المغناطيسية تماما كما يحدث في نظام مكون من الكترونات خاضعة إلى حقل مغناطيسي شديد جدا.

الكلمات المفتاحية: غاز فارمي، الدوران السريع، الكمون التوافقي، كثافة تيار المادة، انقلابات التيار. شبه المغناطيسية.