الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة محمد بوضياف – المسيلة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بيداغوجية تحت عنوان

الاقتصاد القياسي:

محاضرات مع أمثلة وتمارين محلولة

موجهة لطلبة: ليسانس **تخصص: اقتصاد كمي**

من إعداد الدكتور: مجناح فؤاد **قسم: العلوم الاقتصادية**

السنة: **2025–2026**

بسم الله الرحمن الرحيم

"وقل رب زدني علما"

صدق الله العظيم

الفهرس العام

الفهرس العام

تقديم:

يُعد الاقتصاد القياسي فرعًا من فروع علم الاقتصاد يجمع بين النظرية الاقتصادية، والأساليب الإحصائية، والأدوات الرياضية لتحليل الظواهر الاقتصادية وفهم سلوك المتغيرات المختلفة. وفي ظل عالم يشهد تطورًا سريعًا وتزايدًا هائلًا في البيانات، أصبح الاقتصاد القياسي أداة لا غنى عنها لتفسير العلاقات الاقتصادية وتقديم رؤى كمية دقيقة.

ظهر مصطلح "الاقتصاد القياسي" لأول مرة عام 1926 على يد الاقتصادي Ragnar Frisch، إلا أن الانطلاقة الفعلية لهذا التخصص تعود إلى عام 1930 مع تأسيس جمعية الاقتصاد القياسي (Econometric Society).ويعود أصل المصطلح إلى اللغة اليونانية، حيث يتكوّن من مقطعين : Economicبمعنى اقتصاد، و Metricsبمعنى قياس، أي "القياس الاقتصادي". ويُعنى هذا العلم بشكل رئيسي بقياس العلاقات الاقتصادية وتقديرها باستخدام بيانات واقعية وإحصائية.

تقدم هذه المطبوعة مجموعة من المحاضرات والدروس في مقياس الاقتصاد القياسي، وهي موجهة أساسًا لطلبة السنة الثالثة، قسم العلوم الاقتصادية، تخصص الاقتصاد الكمي، وفقًا للبرنامج الأكاديمي المعتمد من طرف وزارة التعليم العالي والبحث العلمي. كما تُعد هذه المادة مرجعًا مفيدًا لطلبة الماستر والدكتوراه، ولكل المهتمين بعلم الاقتصاد القياسي على اختلاف مستوياتهم.

سنحاول من خلال هذه المطبوعة الإلمام بواحدة من اهم مبادئ الاقتصاد القياسي تحت مسمى الانحدار وذلك من خلال خمس محاور أساسية، يتمثل المحور الأول في مدخل للاقتصاد القياسي ونظرية الارتباط، في حين يتمثل المحور الثاني في تحليل الانحدار الخطي البسيط الذي يجمع بين متغيرين تابع ومستقل، تطرقنا في المحور الثالث عن نموذج الانحدار الخطي المتعدد الذي يربط بين متغير تابع وعلى الأقل متغيرين مستقلين، وجاء المحور الرابع يعالج المشاكل القياسية، أما المحور الخامس والأخير نماذج المعادلات الآنية.

ونؤكد أن الجانب التطبيقي حاضر بقوة في هذا العمل، من خلال الأمثلة التوضيحية والتمارين التي تهدف إلى تمكين الطلبة من تطبيق المعارف النظرية على مشكلات واقعية، وتطوير قدراتهم البحثية والتحليلية.

وأخيرًا، نضع هذه المطبوعة بين أيدي الطلبة والباحثين، ونرحب بجميع ملاحظاتهم واقتراحاتهم التي من شأنها تطوير هذا العمل في طبعاته القادمة. مع خالص الشكر والتقدير لكل من يساهم في إثرائه.

المحور الأول: مدخل للاقتصاد القياسي ونظرية الارتباط.

المحاضرة الأولى: مدخل للاقتصاد القياسي.

1 مفهوم الاقتصاد القياسي.

2 أهداف الاقتصاد القياسي.

3 علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى.

4 مراحل البحث في الاقتصاد القياسي.

5 البرامج الإحصائية المستخدمة الأكثر شيوعا في التحليل البحثي.

1 مفهوم الاقتصاد القياسي:

ينقسم البحث في علم الاقتصاد على غرار باقي العلوم إلى بحث نظري وبحث تجريبي، والاقتصاد القياسي هو أحد فروع العلوم الاقتصادية الذي يهتم بالبحث التجريبي، يتميز باستخدامه للأساليب الكمية في تحليل الظواهر الاقتصادية.

استخدم مصطلح الاقتصاد القياسي لأول مرة سنة 1926، من طرف الاقتصادي Ranger Frisch، غير أن البداية الحقيقية للاقتصاد القياسي هي مع تأسيس جمعية الاقتصاد القياسي Econometric Society في عام 1930.

والاقتصاد القياسي هو مصطلح يوناني يتكون من مقطعين: Economic وتعني اقتصاد، Metrics وتعني القياس، أي حرفيا: القياس في الاقتصاد، أو الاقتصاد القياسي أو القياس الاقتصادي. ويمكن تعريفه على أنه فرع من علم الاقتصاد يهتم بقياس العلاقات الاقتصادية وتكميمها من خلال بيانات إحصائية واقعية.

2 أهداف الاقتصاد القياسي:

يمكن التعرف على ثلاث أهداف أساسية للاقتصاد القياسي هي:

أولا: تحليل واختبار النظريات الاقتصادية المختلفة:

ان تحليل واختبار النظريات الاقتصادية، يعد هدفا رئيسا من أهداف الاقتصاد القياسي، ولا يمكن عد النظرية الاقتصادية صحيحة ومقبولة ما لم تجتاز اختبارا كميا عدديا يوضح قوة النموذج ويفسر قوة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية.

ثانيا: رسم السياسات و اتخاذ القرارات:

يساهم الاقتصاد القياسي برسم السياسات واتخاذ القرارات عن طريق الحصول على قيم عددية لمعلمات العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات لتساعد رجال الأعمال والحكومات في اتخاذ القرارات الحالية من حيث توفيره لصيغ وأساليب مختلفة لتقدير المرونات والمعلمات الفنية والتكلفة الحدية والإيرادات الحدية، والميل الحدي للاستهلاك والادخار والاستثمار وغير ذلك، وتأسيسا على ذلك فان معرفة القيم العددية لمعلمات النموذج المقدر تساعد على إجراء المقارنات واتخاذ القرار المناسب سواء على مستوى المنشأة أو الدولة.

ثالثا: التنبؤات بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل:

يساعد الاقتصاد القياسي رجال الأعمال والحكومات في وضع السياسات من خلال توفير القيم العددية لمعلمات، Parameters، المتغيرات الاقتصادية والتنبؤ بما ستكون عليه الظاهرة الاقتصادية مستقبلا.

أن هذه التنبؤات تمكن واضعي السياسة ومتخذي القرار لتنظيم الحياة الاقتصادية واتخاذ إجراءات معينة للتاثير في متغيرات اقتصادية معينة، مثال ذلك، لو أرادت حكومة معرفة الآثار المحتملة للسياسة النقدية على التضخم والبطالة، وما هو الأثر المتوقع لزيادة أسعار السلع البديلة أو المكملة على الكمية المطلوبة من السلعة الأصلية، حيث ان الاقتصاد القياسي سوف يحدد مستوى الكمية فيما إذا كان مرتفعا أو منخفضا وهكذا لبقية الظواهر الاقتصادية وما يتعلق بها مستقبلا.

3 علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى:

للاقتصاد القياسي علاقة وثيقة بالنظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي، الإحصاء الاقتصادي، الإحصاء الرياضي، إن هذه الفروع تتكامل من اجل توفير قيم عددية لمعلمات المتغيرات الاقتصادية المختلفة، ألا إن أيا من هذه الفروع لا يعد بديلا عن الاقتصاد القياسي، ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

1- تقوم النظرية الاقتصادية بدراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية فتنص النظرية الاقتصادية الجزئية مثلا على ان زيادة سعر سلعة ما تسبب انخفاضا في الطلب عليها، فتفترض هذه النظرية وجود علاقة عكسية بين السعر والكمية المطلوبة من السلعة، ولكنها لم تعط أي قياس عددي للعلاقة بين هذين المتغيرين فلم تبين مقدار الانخفاض للكمية المطلوبة المصاحب لتغير معين في السعر فتصبح هذه المهمة من مهمات الاقتصاد القياسي بعد توصيفه رياضيا.

بذلك يمكن القول أن العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية المستوحاة من النظرية الاقتصادية تبقى مسألة مجردة ما لم يتم تقديرها أي تقدير معالمها في ضوء البيانات الإحصائية الواقعية والتي هي من مهمات القياس الاقتصادي (تحديد الطابع الكمي للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية الجارية في واقع معين وذلك بالاسترشاد بالنظرية الاقتصادية).

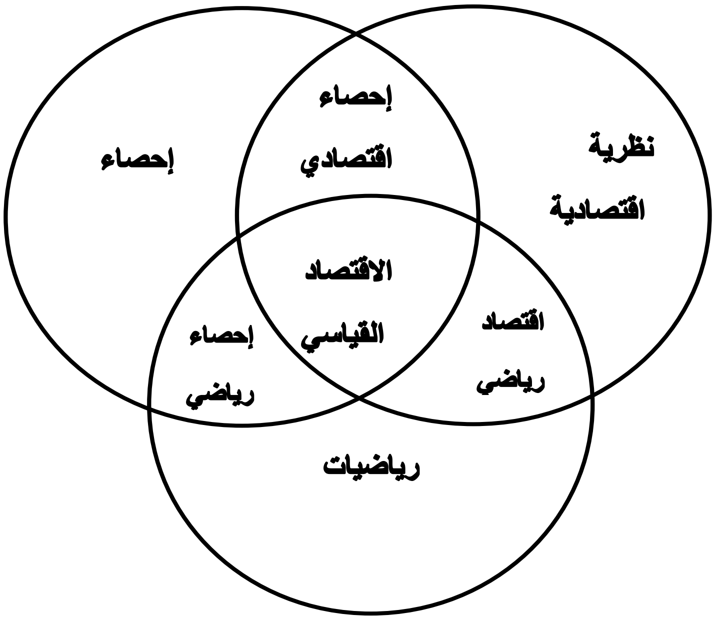
2- يهتم الاقتصاد الرياضي بإعادة صياغة العلاقة التي تم تحديدها بالاعتماد على النظرية الاقتصادية رياضيا أي على هيئة معادلات ورموز رياضية بدون قياس أو برهنة عددية لتلك الصياغات، فالقياسات والبرهنة العددية هي من مهمات القياس الاقتصادي.

3- الإحصاء الاقتصادي يقتصر دوره على تجميع البيانات الإحصائية الخاصة بالمتغيرات الاقتصادية التي تتكون منها العلاقات المحددة في (1) و(2) أعلاه وتسجيلها وجدولتها أو رسمها وينصب دور القياس الاقتصادي على تحليل واختبار نوع العلاقة بين المتغيرات بهدف معرفة مدى مطابقة النتائج مع منطوق النظرية الاقتصادية.

4- أما مادة الإحصاء الرياضي فهي تجهز الباحث بأدوات تحليلية يستخدمها في دراسة العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية وبطرق خاصة لمعالجة أخطاء التقدير تمهيدا لاستخدامها في تحقيق أهداف القياس الاقتصادي.

لذلك يمكن النظر إلى علم الاقتصاد القياسي على انه نقطة التقاء ثلاثة علوم رئيسة هي الاقتصاد والرياضيات والإحصاء كما مبين في الشكل التالي:

الشكل رقم (01): الاقتصاد القياسي وعلاقته بالعلوم الأخرى.



المصدر: حسين علي بخيت و سحر فتح الله، (2009)، الاقتصاد القياسي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن، ص21.

يتضح مما تقدم ان النظرية الاقتصادية تعطينا فكرة عامة حول شكل العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية ويأتي دور الاقتصاد القياسي لتحديد المقدار الكمي لتلك العلاقة بالاعتماد على الاقتصاد الرياضي الذي يحاول تصوير العلاقة المذكورة بشكل معادلة رياضية، وطرق الإحصاء الرياضي لملائمتها لطبيعة العلاقة القائمة، كل ذلك يتحقق بالاعتماد على الإحصاء الاقتصادي الذي يغذي الاقتصادي القياسي بالمادة الأولية اللازمة للتحليل في صورة بيانات مجمعة ومبوبة وبدون هذه البيانات تصبح عملية القياس أمرا مستحيلا.

4 مراحل البحث في الاقتصاد القياسي:

تمر عملية البحث في الاقتصاد القياسي بعدة مراحل.

أولا: مرحلة تعيين أو تخصيص النموذج.

وتتضمن هي الأخرى عدة مراحل كما يلي:

أ.تحديد متغيرات النموذج:

ويقصد بمتغيرات النموذج، أي مجموعة المتغيرات المستعملة في النموذج فعلى سبيل المثال: دالة الاستهلاك العائلي تتضمن متغيرين هما: الاستهلاك العائلي ودخل العائلة.

وتنقسم المتغيرات إلى نوعين: متغيرات تابعة أو مشروحة ومتغيرات مستقلة أو مفسرة أو شارحة، فعلى سبيل المثال في دالة الاستهلاك العائلي: يسمى الاستهلاك متغير تابع أو متغير مشروح وأما الدخل فيسمى متغير مستقل أو مفسر أو شارح.

ب.تحديد النموذج:

النموذج لغة هو عبارة عن تمثيل مبسط لشيء معقد، ويمكن ان نميز بين ثلاثة أنواع من النماذج:

- النموذج الاقتصادي: يقصد بالنموذج الاقتصادي أي النموذج الذي تقترحه النظرية الاقتصادية في تحليلها وتفسيرها للظواهر الاقتصادية ونوع العلاقات الموجودة بين المتغيرات الاقتصادية كأن يقال مثلا: إن استهلاك العائلات يتناسب طردا مع دخلها أو أن يقال أن الدخل العائلي هو الدخل العائلي هو المحدد الأساسي لاستهلاكها. فيتضمن النموذج الاقتصادي: المتغيرات الاقتصادية بالإضافة إلى نوع العلاقات الموجودة بينها (علاقة طردية أو علاقة عكسية).

- النموذج الرياضي: هو عبارة عن تمثيل رياضي مبسط للنموذج الاقتصادي بدون استعمال التعابير اللفظية المعقدة والبيانات الإحصائية، بل يقتصر على الرموز والمعادلات الرياضية، مثال: في حالة دالة الاستهلاك العائلي يمكن كتابة النموذج الرياضي المعبر عن العلاقة الطردية بين الاستهلاك والدخل كما يلي:

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y, \qquad \beta_1 > 0$$

C، Y تمثلان الاستهلاك والدخل العائلي على الترتيب.

- النموذج القياسي: هو عبارة عن نموذج اقتصادي ورياضي في نفس الوقت يستعمل بيانات إحصائية واقعية ويتضمن متغير عشوائي يفترض فيه انه يحقق مجموعة من الشروط، مثال: في حالة دالة الاستهلاك العائلي، يمكن كتابة النموذج القياسي كما يلي:

$$C_i = \beta_0 + \beta_1 Y_i + \mu_i \qquad \beta_1 > 0$$

مع: Yi،Ci تمثلان الاستهلاك والدخل للعائلة i على الترتيب.

β_0، β_1: تسمى معالم النموذج.

Ui: تمثل متغير عشوائي يعبر عن الأخطاء التي يمكن أن تكون في النموذج ويحقق مجموعة من الفرضيات تسمح لاحقا بتقدير معالم النموذج: β_1، β_0 كفرضية استقلالية الأخطاء، وثبات تباينها وتوزيعها الإحتمالي الطبيعي.

الفرق بين النموذج القياسي والنموذج الرياضي هو المتغير العشوائي الذي يجعل العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية في النموذج القياسي علاقات احتمالية غير مؤكدة. كما يتميز النموذج القياسي بكونه يسمح بتقدير العلاقة الموجودة بين المتغيرات خلافا للنموذج الاقتصادي والرياضي اللذان يكتفيان بتحديد اتجاهها فقط.

ثانيا: مرحلة تقدير النموذج.

وتتضمن هذه المرحلة الخطوات التالية:

أ. تجميع البيانات الإحصائية الخاصة بمتغيرات الدراسة:

وهي عبارة عن مجموعة من البيانات الإحصائية التي يتم تجميعها وفقا لشروط معينة سواء كان ذلك على المستوى الاقتصادي الكلي، كاستهلاك العائلات، الدخل، الاستثمار معدل الفائدة، الناتج الداخلي الخام وغيرها أو على المستوى الاقتصاد الجزئي: كالقيمة المضافة، ورقم الأعمال، الأجور، الأرباح...

يمكن أن نميز بين عدة أنواع من المتغيرات بحسب البيانات والقيم الإحصائية ويتم تصنيفها إلى (البيانات الزمنية أو السلاسل الزمنية، البيانات المقطعية، بيانات البانل) ويتم توضيحها كالاتي:

- البيانات الزمنية أو السلاسل الزمنية (Time series data)، وهيا عبارة عن بيانات تتغير تبعا لمؤشر الزمن، مثال: تغير الاستهلاك خلال الفترة 2000- 2023 نرمز له بالرمز: Ct مع: t 2000,2001,.....,2023.

t	C_t
2000	C_{2000}
2001	C_{2001}
⋮	⋮
2023	C_{2023}

- البيانات المقطعية (Cross-Sectional Data): وهي عبارة عن بيانات إحصائية تتغير تبعا لمؤشرات أخرى غير الزمن بحسب نوع المتغير، مثل: تغيرات الاستهلاك حسب العائلات، أو تغير الاستهلاك حسب الدول، أو تغير دخول الأفراد حسب نوع الشهادات العلمية التي يحوزونها، وذلك في لحظة زمنية معلومة وثابتة، في حالة تغير الاستهلاك حسب الدول في سنة 2023 مثلا يمكن وضعها في جدول كما يلي:

i	C_i
الجزائر	$C_{\text{الجزائر}}$
ليبيا	$C_{\text{ليبيا}}$
⋮	⋮
مصر	$C_{\text{مصر}}$

- بيانات البانل (Panel data): وهي عبارة عن بيانات إحصائية متقاطعة بحيث تتغير تبعا لمؤشر الزمن من جهة ومؤشر آخر غير الزمن من جهة أخرى، مثل تغير الاستهلاك تبعا لمؤشر الزمن من جهة وتبعا للدول من جهة أخرى، فيمكن وضعها في جدول كما يلي:

i	t	C_{it}
الجزائر	2000	$C_{\text{الجزائر}\ 2000}$
	⋮	⋮
	2023	$C_{\text{الجزائر}\ 2023}$
⋮	2000	⋮
	⋮	⋮
	2023	⋮
مصر	2000	$C_{\text{مصر}\ 2000}$
	⋮	⋮
	2023	$C_{\text{مصر}\ 2023}$

هناك مجموعة من الشروط الواجب مراعاتها عند تجميع البيانات الإحصائية من بينها:

- ضرورة مراعاة الوحدة الزمنية التي شوهدت فيها البيانات: حيث يمكن التفريق بين البيانات الإحصائية السنوية، نصف السنوية، فصلية أو شهرية....، وهنا يستطيع الباحث تجميع البيانات الإحصائية حسب نوع البيانات التي تتطلب الدراسة.
- ضرورة مراعاة الوحدة المكانية للبيانات الإحصائية، فكل منطقة جغرافية لها بياناتها الإحصائية الخاصة وقد يضطر الباحث إلى تجميع البيانات الإحصائية الخاصة بدولة معينة أو منطقة معينة بحسب ما تقتضيه الدراسة.
- إن تكون البيانات الإحصائية متجانسة، بحيث يمكن المقارنة بينها كان يكون لها نفس وحدة القياس وقد يضطر الباحث لهذا الغرض إلى تحويل البيانات من وحدة قياس إلى وحدة قياس أخرى، كتحويل الوحدات الفيزيائية إلى وحدات نقدية.

- ضرورة التفريق بين المتغيرات بالقيم الحقيقية والمتغيرات بالقيم الاسمية فالمتغيرات بالقيم الحقيقية تلغي اثر تغيرات الأسعار.

- أن يكون للبيانات الإحصائية مصدر معلوم دقيق وموثوق بحيث يمكن الاعتماد عليه والرجوع اليه.

ب. **تقدير معالم النموذج القياسي:**

يقصد بتقدير النموذج أي إيجاد مقدرات عددية لمعالم النموذج ،وهناك عدة طرق تستخدم للتقدير منها: طريقة المربعات الصغرى العادية، طريقة المعقولية العظمى، التقدير باستعمال مجال الثقة، التقدير باستعمال طريقة العزوم، وتختلف هذه الطرق في ملاءمتها باختلاف النموذج القياسي المستعمل، والبيانات الإحصائية المتاحة، وخصائص المقدرات التي تفضي اليها، بالإضافة إلى الخوارزميات و البرامج الإحصائية التي تسمح بتطبيق كل طريقة.

ثالثا: مرحلة تقييم النموذج المقدر:

ويتضمن التقييم ثلاث أنواع من التقييم:

أ. **التقييم الاقتصادي:**

يقصد بالتقييم الاقتصادي معرفة مدى مطابقة حجم و إشارة قيم المعالم المقدرة للنظرية الاقتصادية، اذا كان هناك تطابق مع النظرية الاقتصادية فهذا يعني إن النموذج المتحصل عليه مقبول اقتصاديا والا فانه يكون مرفوضا اقتصاديا، ألا أن يكون ثمة تفسير اقتصادي أو إحصائي منطقي لهذا الاختلاف كان لا تتحقق بعض الفرضيات الأساسية للنموذج، أو ان يكون هنالك ظروف خاصة حالت دون تحقق القاعدة النظرية، فعلى سبيل المثال في دالة الاستهلاك، تشترط النظرية الاقتصادية شرطين على معالم النموذج:

$$C_{i=}\beta_0 + \beta_1 R_i + \mu_i$$

β_1 ويسمى هذا المعلم اقتصاديا بالميل الحدي للاستهلاك بحيث يكون محصورا بين صفر وواحد ويعني أن الاستهلاك هو جزء من الدخل.

β_0 ويسمى بالاستهلاك الابتدائي أو التلقائي قيمة الاستهلاك عندما يكون الدخل معدوما، و يفترض فيه نظريا انه اكبر من الصفر.

إذن تقييم النموذج اقتصاديا: يعني مقارنة إشارة وحجم قيم المعالم المقدرة بالشروط التي تضعها النظرية الاقتصادية.

ب.التقييم الاحصائي:

يقصد بالتقييم الاحصائي معرفة مدى الثقة الإحصائية للتقديرات الخاصة بمعالم النموذج، واختبارات المعنوية الإحصائية لكل معلم على حدى ثم المعنوية الإحصائية الكلية للنموذج و ذلك بمقارنة

الإحصائيات المحسوبة للمقدرات بالإحصائيات المجدولة الموافقة لها، فاذا كانت المعالم معنوية إحصائيا والنموذج أيضا معنوي فهذا يعني أن النموذج مقبول إحصائيا و ألا فهو مرفوض.

ت. التقييم القياسي:

يهدف التقييم القياسي إلى اختبار مدى صحة الفرضيات التي بني عليها النموذج القياسي والمتعلقة على الخصوص بالمتغير العشوائي u والذي يعبر عن أخطاء النموذج، فاذا كانت هذه الفرضيات محققة فان هذا يعطي نتائج التقدير مصداقية كبيرة، ويجعلها متصفة بصفات أساسية أهمها صفتي الاتساق وعدم التحيز. ومن بين هذه الفرضيات: فرضية عدم ارتباط الأخطاء، وثبات تباينها، وتوزيعها الطبيعي.

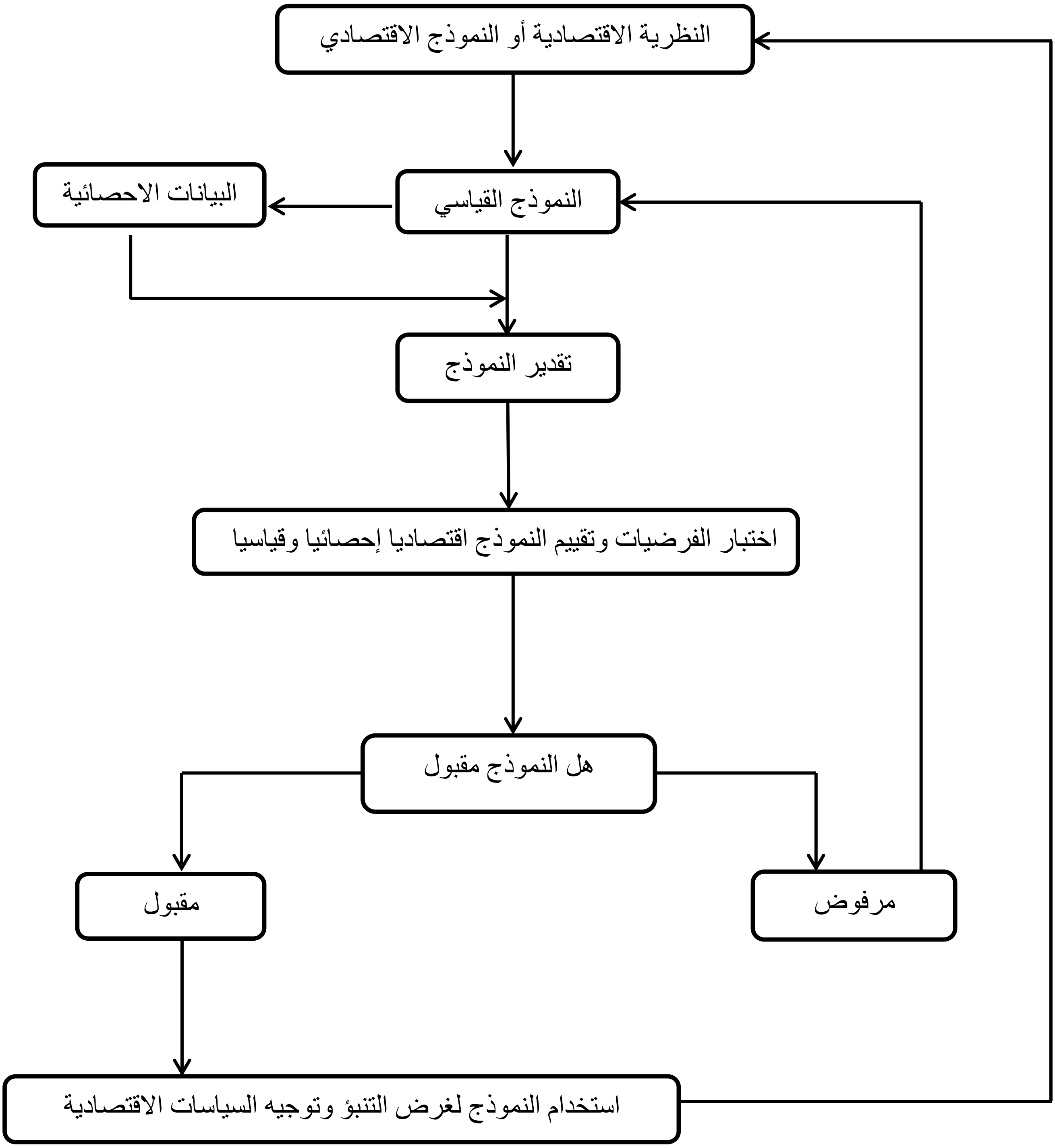
رابعا: مرحلة استعمال النموذج لغرض التنبؤ:

يقوم التنبؤ على أساس أن المستقبل القريب هو امتداد للماضي القريب، لكن اذا حدثت تغيرات هيكلية سريعة للظروف الاقتصادية و الاجتماعية فان النموذج لا يكون قادرا على التنبؤ بهذا التغيرات.

لاختبار مقدرة النموذج على التنبؤ لابد من اختبار استقرارية المعلمات المقدرة عبر الزمن، واختبار مدى حساسية هذه التقديرات لتغيرات حجم العينة المختارة.

يمكن اختصار مراحل البحث في الاقتصاد القياسي عمليا من خلال المخطط الموالي:

خطوات التحليل في الاقتصاد التطبيقي:



المصدر: تومي صالح، (2011)، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، الطبعة الثانية، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.ص06.

5 البرامج الإحصائية المستخدمة الأكثر شيوعا في التحليل البحثي:

تتنوع وتختلف برامج الحاسب الآلي المستخدمة في التحليل الإحصائي وكل برنامج تحليل إحصائي له مميزات تميزه عن باقي برامج التحليل الإحصائي، ويمكن اعتبار بعض برامج التحليل الإحصائي هي نسخة متطورة عن برامج قديمة من التحليل الإحصائي،

لذا لا يمكننا الحكم والقرار الحازم والصارم على برنامج واحد من برامج التحليل الإحصائي أنه أفضل البرامج المستخدمة في التحليل الإحصائي بشكل عامة، ولكن يمكن القول بأن هذه البرنامج من أفضل برامج التحليل الإحصائي في شيء معين، وأن برنامج المحلل الإحصائي للبيانات الذي يحتوى على مميزات أكثر وعيوب أقل هو أفضل برامج التحليل الإحصائي، أما فيما يلي تم جمع تقريباً أغلب البرامج المستخدمة في التحليل الإحصائي وليس المخصصة فقط في مهمة التحليل الإحصائي، ويمكن تلخيص برامج التحليل الإحصائي فيما يلي وهي:

- برنامج SPSS.
- برنامج E-views.
- برنامج STATA.
- برنامج SAS.
- برنامج EXCEL.
- برنامج Statistic.

برامج أخرى:

- البرنامج ATLAS.ti.
- البرنامج CDC EZ-Text.
- البرنامج NVivo.
- البرنامج Adam soft.
- البرنامج R.

أما الآن فسوف نتعرف على بعض البرامج التحليل الإحصائي للبيانات التي تم ذكرها فيما سبق بالتفصيل والتفريق بينهم، والتعداد التالي لبرامج التحليل الإحصائي لا تعتبر تعداد من حيث الأفضل فهو ترتيب عشوائي لا غير.

- **البرنامج الاول المستخدم في التحليل الإحصائي :E-views**

قد تكون بعض برامج التحليل الإحصائي نسخة مطورة عن برنامج تحليل إحصائي قديم، فهنا برنامج التحليل الإحصائي EVIEWS هو نسخة مطورة عن برنامج التحليل الإحصائي القديمTSP ، وهو من البرامج المهمة في مجال الاقتصاد.

فيمكننا هنا القول بأن برنامج التحليل الإحصائي EVIEWS هو الأفضل في التحليل الإحصائي للبيانات الإحصائية الاقتصادية وتقدير النماذج الاقتصادية.

- **البرنامج الثاني المستخدم في التحليل الإحصائي :STATA**

وهو يعتبر من أحدث برامج التحليل الإحصائي ويتميز باستخدامه في مجال الاقتصاد القياسي وخاصة في تحليل الانحدار المتقدم، ولكن ما يعيبه أنه صعب الاستخدام وذلك للتطور الكبير لبرنامج Stata ، وأيضاً على الرغم من حداثه وتقدمه إلا أنه لا يحتوي برنامج Stata على كافة التحليلات مثل تحليل شجرة التصنيف.

فيمكننا هنا القول بأن برنامج التحليل الإحصائي Stata هو الأفضل في تحليل البيانات المتعلقة في الاقتصاد القياسي، وتحليل الانحدار المتقدم.

- **البرنامج الثالث المستخدم في التحليل الإحصائي :SPSS**

يتميز برنامج التحليل الإحصائي spss في تحليل البيانات الكمية وخاصة في مجال العلوم الاجتماعية، ويعتبر برنامج spss من أقدم برامج التحليل الإحصائي وأكثرها استخداماً، كما يتميز برنامج spss بسهولته وخاصة أنه يمكن القيام بالعلميات الإحصائية فيه من خلال القوائم.

فيمكننا هنا القول بأن برنامج التحليل الإحصائي spss هو الأفضل في تحليل البيانات المتعلقة في العلوم الاجتماعية.

المحاضرة الثانية: نظرية الارتباط.

1- مفهوم الارتباط.

2- أهم انواع معامل الارتباط.

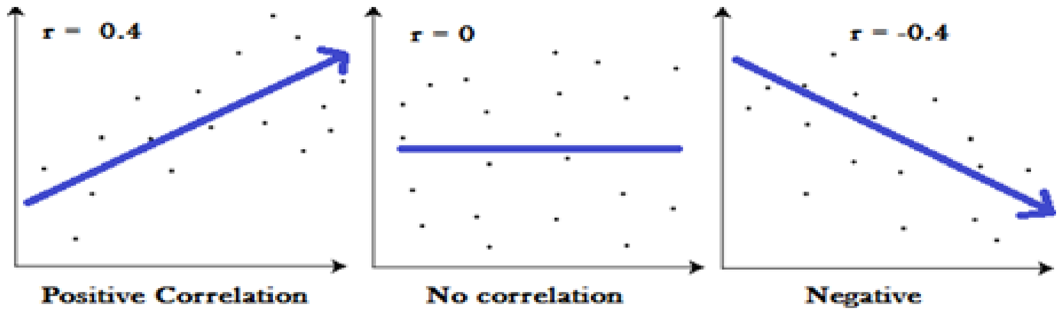
- معامل ارتباط بيرسون (معامل ارتباط الخطي البسيط).

- معامل ارتباط سبيرمان (معامل ارتباط الرتب.

1. **مفهوم الارتباط:** الارتباط يقيس قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين.

او هو عبارة عن مقياس إحصائي يعبر ويشير إلى مدى تقلب أو ارتباط متغيرين أو أكثر خطيا.

يتم استخدام صيغ معامل الارتباط لمعرفة مدى قوة العلاقة بين البيانات، كما ان قيمته تتراوح دائما بين (-1 و1) كما هو موضح بالصورة التالية:



حيث:

- عندما r=0.4 يشير إلى علاقة إيجابية.
- وعندما r=-0.4 يشير إلى علاقة سلبية.
- وعندما r=0 تشير إلى عدم وجود علاقة ارتباط.

2. **أهم انواع معامل الارتباط**

يوجد العديد من أنواع معامل الارتباط في الإحصاء، منها:

- معامل ارتباط بيرسون
- معامل ارتباط سبيرمان
- معامل ارتباط كيندال
- متوسط ارتباط الوزن
- معامل ارتباط المسافة
- معامل ارتباط جاما
- معامل الارتباط المتجانس
- معامل ارتباط بيتا.

وسيتم التركيز في هذه المحاضرة على معامل ارتباط بيرسون ومعامل ارتباط سبيرمان.

1. **معامل ارتباط بيرسون (معامل ارتباط الخطي البسيط):** وهو يقيس قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين كميين، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$r = \frac{\sum_i^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{(\sum_i^n X_i^2 - n\bar{X}^2)(\sum_i^n y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$$

مثال: البيانات التالية تعبر عن متغيرين X وY.

1	2	3	4	X
0	3	2	1	Y

المطلوب:

- أوجد معامل ارتباط بيرسون؟ وبين نوعه؟

الحل:

إيجاد معامل ارتباط بيرسون وتحديد نوعه:

$$r = \frac{\sum_i^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sqrt{(\sum_i^n X_i^2 - n\bar{X}^2)(\sum_i^n y_i^2 - n\bar{y}^2)}}$$

X	Y	XY	X^2	Y^2
4 3 2 1	1 2 3 0	4 6 6 0	16 9 4 1	1 4 9 0
$\sum = 10$ $\bar{X}=2.5$	$\sum = 6$ $\bar{Y}=1.5$	$\sum = 16$	$\sum = 30$	$\sum = 14$

$$r = \frac{16 - 4(2.5)(1.5)}{\sqrt{(30 - 4(2.5^2))(14 - 4(1.5^2))}}$$

$r = \frac{1}{5} = \mathbf{0.2}.$ **تحديد نوعه:** طردية ضعيفة

2. **معامل ارتباط سبيرمان (معامل ارتباط الرتب):** وهو يقيس قوة واتجاه العلاقة بين متغيرين وصفين، أو متغير وصفي والأخر كمي أو متغيرين كميين، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$r = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

حيث di: هو الفرق بين رتب X $(Rank\ x)$ ورتب Y $(Rank\ x)$ بعد ترتيبها تصاعديا أو تنازليا.

$$di = Rank\ x - Rank\ y$$

مثال: البيانات التالية تمثل تقديرات مجموعة من الطلبة.

ضعيف	مقبول	ممتاز	جيد	المقياس الأول (X)
جيد	جيد جدا	مقبول	ممتاز	المقياس الثاني (Y)

المطلوب:

- أوجد معامل ارتباط سبيرمان؟ وبين نوعه؟

الحل:

- إيجاد معامل ارتباط سبيرمان وتحديد نوعه:

$$r = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

d_i^2	di	Rank y	Rank x	Y	X
1	1-	4	3	ممتاز	جيد
9	3	1	4	مقبول	ممتاز
1	1-	3	2	جيد جدا	مقبول
1	1-	2	1	جيد	ضعيف
12	**0**				$\sum$

$$r = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

$$r = 1 - \frac{6(12)}{4(4^2-1)}$$

$$r = 1 - \frac{72}{60}$$

$$r = 1 - 1.2 = -2$$

- **تحديد نوعه:** عكسية ضعيفة.

تمارين مقترحة.

التمرين الأول:

1. ما هو الفرق بين النموذج الاقتصادي والنموذج القياسي ؟
2. ماهي الأهداف الرئيسية للاقتصاد القياسي ؟
3. فيما تتمثل المراحل الرئيسية للاقتصاد القياسي؟
4. ما هي أنواع المتغيرات حسب البيانات الإحصائية؟
5. ماذا يقصد بحد الخطأ (حد التشويش) (الحد العشوائي) في معادلة الانحدار الخطي؟
6. ماذا يقصد بمقدر غير متحيز؟ وكيف يعرف التحيز؟
7. أذكر خواص مقدرات طريقة المربعات الصغرى؟

التمرين الثاني:

البيانات التالية، تمثل أزواج القيم لأوزان 05 طلبة وأطوالهم:

وزن الطالب (x)	75	72	69	67	63
طول الطالب (y)	175	170	172	165	162

المطلوب:

1. ارسم الشكل الانتشاري (scatter diagram) لأزواج القيم.
2. احسب معامل الارتباط البسيط لبيرسون بين أوزان الطلبة وأطوالهم.

التمرين الثالث:

البيانات التالية تمثل معدلات 8 طلاب في التوجيهي (xi) وتقديراتهم في الجامعة (yi):

x	59	72	61	80	86	82	90	67
y	مقبول	جيد	متوسط	جيد	جيد جدا	جيد	ممتاز	مقبول

المطلوب:

- قياس العلاقة الارتباطية بين معدل الطالب (x) و تقديره في الجامعة (y)، باستخدام معامل ارتباط الرتب لسبيرمان.

المحور الثاني: انحدار الخطي البسيط

المحاضرة الثالثة.

1. مفهوم انحدار الخطي البسيط
2. الفرضيات الأساسية للنموذج.
3. تقدير معالم النموذج.

- طريقة مربعات الصغرى العادية (القانون العام).
- طريقة الانحر افات أو (لصيغة المختصرة).
- طريقة (Gramer).

الانحدار الخطي البسيط.

مفهوم الانحدار: هو أسلوب رياضي لتقدير العلاقة بين متغيرين أو اكثر، بدلالة وحدات قياس المتغيرات المعتمدة (التابعة) في العلاقة، وغالبا ما تسمى هذه العلاقات بنماذج الانحدار.

ويمكن تقسيم الانحدار من حيث التحليل إلى قسمين مهمين، هما:

1. الانحدار الخطي.
2. الانحدار غير الخطي.

وسيتم التركيز في هذا المحور على النوع الأول المتمثل بالانحدار الخطي بشيء من التفصيل، لاهميته في تقدير العلاقة الخطية بين متغيرين أو أكثر، وعلى النحو الآتي:

الانحدار الخطي:

إن الهدف الرئيسي من تحليل الانحدار الخطي هو تقدير العلاقة الرياضية الخطية التي تربط بين متغيرين أو اكثر. وفي دراسة تحليل الانحدار، يوجد نوعين من المتغيرات، هما:

أ.المتغير المستقل (المتغيرات المستقلة): وهو المتغير الذي يؤثر في قيمة المتغير التابع عند تغيره، ولا يتأثر بالمتغير التابع، ويسمى أحيانا بالمتغير التفسيري.

ب. **المتغير التابع:** وهو المتغير الذي تتأثر قيمته في حالة تغير قيمة المتغير المستقل أو (المتغيرات المستقلة)، ولا يتأثر أو تتأثر به.

ويكون الانحدار الخطي على نوعين أساسيين هما:

1. **مفهوم الانحدار الخطي البسيط:** هو عبارة عن معادلة أو علاقة رياضية تربط بين متغيرين فقط، أحدهما متغيرا مستقلا، والاخر متغيرا تابعا، ويأخذ الشكل الآتي:

$$Yi = \beta_0 + \beta_1 Xi + \varepsilon i \qquad i=1,2,3,\ldots\ldots n$$

حيث ان:

Yi: المتغير التابع.

Xi: المتغير المستقل.

β_0, β_1: معلمات النموذج.

β_0: معامل التقاطع.

β_1: معامل الانحدار.

εi: حد الخطأ العشوائي.

تقدير معادلة خط الانحدار:

معادلة الانحدار التقديرية تعطى بالعلاقة التالية:

$$\hat{Y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X$$

2. الفرضيات الأساسية للنموذج.

وبغية تقدير العلاقة السابقة بدقة لابد من الاعتماد على قاعدة سليمة تستند إلى مجموعة من الفروض يمكن تلخيصها بما يلى :

الفرض الأول: أن U_t متغير عشوائى حقيقى، بمعنى أنه لا يمكن التنبؤ بقيمة U_t بل تعتمد على المصادفة والعشوائية فيمكن أن يأخذ أى قيمة سالبة، موجبة موجبة أو صفرا.

الفرض الثانى: متوسط قيم U فى أى فترة يكون مساوياً للصفر ، بمعنى: $E(U)=0$

الفرض الثالث: تباين حد الخطأ (U) ثابت فى كل فترة أى أن قيم U لها نفس التشتت (التباعد) حول وسطها. أي: $V(U)=\sigma^2$

الفرض الرابع: يتوزع حد الخطأ U توزيعاً طبيعياً حول متوسط صفر وتباين ثابت فيكون على شكل جرس $U \sim N(0,\sigma^2)$

الفرض الخامس: استقلالية المتغيرات العشوائية بعضها عن بعض أي أنه لا توجد هناك علاقة بين قيم U_i المتعاقبة السابقة، أو اللاحقة لها وخرق هذا الفرض يسبب في حصول مشكلة الارتباط الذاتي Auto Correlation.

$$E(U_i,U_i)=0$$
$$E(U_t,U_{t-1})=0$$

الفرض السادس: عدم وجود علاقة بين قيم حد الخطأ (Ui) والمتغيرات المستقلة.

$$E(X_t,U_t)=0$$

3. تقدير معالم النموذج:

إن الهدف من تحليل الانحدار الخطي البسيط، هو تقدير قيم عددية لمعلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط $(\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1)$، ولتحقيق هذا الغرض نقوم بتطبيق طريقة المربعات الصغرى التي تجعل مجموع مربعات الأخطاء $(\sum_i^n \varepsilon_i^2)$ اقل ما يمكن (Minimum) ويمكن الحصول على الأخطاء أو البواقي من خلال طرح قيم التقديرية $(\hat{Y}_i)$ من القيم الفعلية (Yi)، أي ان:

$$e_i = Yi - \hat{Y}_i$$

من المعادلة يمكن الحصول على مجموع مربعات الأخطاء (SCR)، كالاتي:

$$\sum_{i}^{n} e_i^2 = \sum_{i}^{n} (\text{Yi} - \hat{\text{Y}})^2$$

إن تطبيق طريقة المربعات الصغرى على المعادلة السابقة، تنطوي على تحديد قيمة كل من $(\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1)$، التي تجعل مجموع مربعات الأخطاء $(\sum_i^n \varepsilon_i^2)$ اقل ما يمكن (Minimum)، على النحو الآتي:

1. تحديد قيم $(\hat{\beta}_1 . \hat{\beta}_0)$ التقديرية بثلاث طرق التالية:

- طريقة المربعات الصغرى (القانون العام):

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i^n X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_i^n X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

ولإيجاد $\hat{\beta}_0$ نعود إلى معادلة المستقيم التقديرية حيث:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

حيث ان:

$\hat{\beta}_0$: تمثل العنصر الثابت المطلق أو (معامل التقاطع)، ويتمثل بيانيا بذلك الجزء الذي يتقاطع عنده منحنى النموذج (الدالة) في الإحداثي العمودي، عند نقطة الأصل.

$\hat{\beta}_1$: تمثل معامل الانحدار، أو ميل خط الانحدار (Slope).

ويعرف معامل الانحدار $(\hat{\beta}_1)$، بانه: مؤشر إحصائي يفسر مقدار التغير الذي يطرأ على المتغير التابع (Yi) إذا ما تغير المستقل (Xi) بوحدة واحدة.

مثال (01):

البيانات التالية، تمثل متوسط الدخل الشهري (X) ومتوسط الإنفاق الشهري (Y)، لخمس عائلات:

X	200	320	480	260	620
Y	180	240	310	160	400

المطلوب:

1) تقدير معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط $(\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1)$ باستخدام طريقة القانون العام (طريقة مربعات الصغرى).

2) التنبؤ بمتوسط الإنفاق الشهري $(\hat{\text{Y}})$ لعائلة ما، متوسط دخلها الشهري (780) دينار جزائري.

الحل:

1) تقدير معلمات النموذج باستخدام القانون العام لـ $(\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1)$:

X_i	Y_i	X_iY_i	X_i^2
200	180	36000	40000
320	240	76800	102400
480	310	148800	230400
260	160	41600	67600
620	400	248000	384400

$\sum Xi=1880$ $\bar{X}=376$	$\sum Yi=1290$ $\bar{Y}=258$	551200 $\sum XiYi$	824800 $\sum Xi2$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i^n X_iY_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_i^n X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{551200-5\,(376)(258)}{824800-5(376)^2} = 0.561$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X} = 258 - 0.561(376) = 47.064$$

وبتعويض القيم التقديرية $(\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1)$، في نموذج الانحدار الخطي البسيط سنحصل على نموذج التنبؤ الآتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

$$\hat{Y}_i = 47.064 + 0.561\,X_i$$

2) التنبؤ بمتوسط الإنفاق الشهري $(\hat{y}_i)$ لعائلة دخلها الشهري (780) دينار:

$$\hat{Y}_i = 47.064 + 0.561\,X_i$$

$$\hat{Y}_i = 47.064 + 0.561\,(780) = 484.644\ DZ$$

النتيجة أعلاه، تشير إلى ان العائلة التي دخلها الشهري (780) دينار، سيكون متوسط إنفاقها الشهري المتنبأ به $(\hat{Y}_i)$ مساوي إلى (484.644) دينار.

- **طريقة الانحرافات أو (لصيغة المختصرة):** يمكن استخدام صيغة مكافئة لتقدير $\hat{\beta}_1$ بالاعتماد على طريقة الانحرافات أو (لصيغة المختصرة) والتي تعطى بالعلاقة التالية:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{\sum_i^n y_i x_i}{\sum_i^n x_i^2}$$

وبالرجوع إلى بيانات المثال السابق رقم (01) والتعبير عنها بصيغة انحرافات يمكن الحصول على القيم التقديرية $(\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1)$ كالآتي:

X_i	Y_i	x_i	y_i	$x_i\,y_i$	x_i^2
200	180	-176	-78	13728	30976
320	240	-56	-18	1008	3136
480	310	104	52	5408	10816
260	160	-116	-98	11368	13456
620	400	244	142	34648	59536
$\sum X_i=1880$ $\bar{X}=376$	$\sum Y_i=1290$ $\bar{Y}=258$	$\sum x_i=0$ $x_i=X_i-\bar{X}$	$\sum y_i=0$ $y_i=Y_i-\bar{Y}$	$\sum x_i\,y_i=$ 66160	$\sum x_i^2=$ 117920

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_i^n y_i x_i}{\sum_i^n x_i^2} = \frac{66160}{117920} = 0.561$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X} = 258 - 0.561(376) = 47.064$$

وبتعويض القيم التقديرية $(\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1)$، في نموذج الانحدار الخطي البسيط سنحصل على نموذج التنبؤ الآتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

$$\hat{Y}_i = 47.064 + 0.561\, X_i$$

- **طريقة المحددات (Gramer):**

يمكن الحصول على قيم $(\hat{\beta}_1 . \hat{\beta}_0)$، باعتماد قاعدة كرايمر (المحددات)، والتي يمكن استنتاجها باستخدام معادلتين في صيغة مصفوفة على النحو الاتي:

لدينا:

$$\sum \beta_0 = n\beta_0$$

$$Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$$

ومنه يتم استخراج المعادلتين 01 و02 الآتية:

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum xi \ldots \ldots \ldots ..01$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{\beta}_0 \sum xi + \hat{\beta}_1 \sum X_i^2 \ldots \ldots ..02$$

حيث يمكن كتابتها على شكل مصفوفات كالآتي:

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}$$

ولتقدير $\hat{\beta}_1$و$\hat{\beta}_0$ يجب تكوين المحددات الآتية:

$$|D| = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} = (n)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i)$$

$$|A_0| = \begin{bmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} = (\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i Y_i)(\sum X_i)$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = (n)(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{|A1|}{|D|} = \frac{(n)(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)}{(n)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i)}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{|A0|}{|D|} = \frac{(\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i Y_i)(\sum X_i)}{(n)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i)}$$

أو:

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

وبالرجوع إلى بيانات المثال السابق رقم (01) وباعتماد قاعدة كرايمر (المحددات) نحصل على قيم $(\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1)$ كالاتي:

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1880 \\ 1880 & 824800 \end{bmatrix}$$

$$|D| = (5)(824800) - (1880)(1880)$$

$$= 4124000 - 3534400$$

$$|D| = 589600$$

$$|A_0| = \begin{bmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1290 & 1880 \\ 551200 & 824800 \end{bmatrix}$$

$$|A_0| = (1290)(824800) - (551200)(1880)$$

$$|A_0| = (1290)(824800) - (551200)(1880)$$

$$|A_0| = 27736000$$

$$|A_1| = \begin{bmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1290 \\ 1880 & 551200 \end{bmatrix}$$

$$|A_1| = (5)(551200) - (1880)(1290)$$

$$|A_1| = 330800$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{|A0|}{|D|} = \frac{27736000}{589600} = 47.04$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{|A1|}{|D|} = \frac{330800}{589600} = 0.561$$

وبذلك تكون المعادلة التقديرية كالاتي:

$$\widehat{Y_\iota} = 47.064 + 0.561\ \text{Xi}$$

المحاضرة الرابعة.

4. خصائص الإحصائية المقدرة لـ $\hat{\beta}$ (BLUE).
5. حساب تباينات كل من البواقي والمقدرات.
   - تباين البواقي.
   - تباين المقدرات.
6. بناء مجالات الثقة للمقدرات المحسوبة والأخطاء.
   - بناء مجال الثقة (للمقدرات) المعالم.
   - بناء مجال الثقة لتباين الأخطاء.

I. خصائص الإحصائية المقدرة لـ $\hat{\beta}$ (BLUE):

إذا تحقق الفرضيات السابقة بنموذج الانحدار الخطي البسيط ، فان المقدارت المحصل علها بواسطة طريقة المربعات الصغرى العادية تتميز ببعض الخصائص المثلى كما هي واردة في النظرية المعروفة لـGauss-MarKov، حسب هذه النظرية، والتي تقول" من بين المقدرات الخطية وغير المتحيزة، تكون مقدرتا المربعات الصغرى العادية $(\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1)$ أفضل مقدرتين خطيتين وغير متحيزتين، حيث أن لها أصغر تباين ممكن مقارنة مع بقية المقدرات الخطية، وهذا يعني أن أفضل مقدر خطي غير متحيز (Best Linear Unbiaised Estimator) BLUE، أي يتميز بانه:

1- **الخاصية الخطية (Linear):** مقدرات المربعات الصغرى خطية في المتغير التابع حيث نلاحظ أن تلك المقدرات يمكن وصفها في صورة دالة أو ترتيب خطي من قيم المتغير Y، أي:

$$\hat{\beta}_1 = K_1Y_1 + K_2Y_2 + \cdots + K_nY_n$$

حيث ان:

K_i، (i=1,2,…..,n) عبارة عن أوزان أو قيم ثابتة.

2- **خاصية عدم التحيز (Unbiaised):** التحيز هو ذلك الفرق بين مقدرة ما ووسط توزيعها، فإذا كان هذا الفرق يختلف عن الصفر، نقول عن ذلك المقدر بأنه متحيز، وإذا عدنا إلى مقدرتي المربعات الصغرى فإننا نجد $E(\hat{\beta}_1)=\beta_1 , E(\hat{\beta}_0)=\beta_0$ ، أي ان القيم المتوقعة مساوية للقيم الحقيقية ومنه نقول أن $\hat{\beta}_0$ و $\hat{\beta}_1$ هما مقدرتين غير متحيزتين لـ β_0 و β_1 على التوالي.

3- **خاصية المقدر الأمثل (Best Estimator):** من الممكن أن تكون القيمة المتوسطة للقيم المقدرة باستخدام ($\hat{\beta}_1$) من عينات كبيرة مساوية لمعلمات المجتمع (β_1)، غيران تباين هذه القيم يكون كبيرا جدا، بحيث يصبح الفرق بين أي واحدة منها ومعلمة المجتمع β_1 كبيرا، ولذلك إذا كان لدينا مقدرين $(\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1)$ وكان كليهما غير متحيز غير أن تباين ($\hat{\beta}_1$) أقل من تباين ($\hat{\beta}_2$) فإن ($\hat{\beta}_1$) يعطي لنا مقدر أكثر تمثيلا لمعلمة المجتمع (β_2) أي التي لديها تباين اقل تكون فعالة (الأكثر كفاءة)، ولذا يسمى ($\hat{\beta}_1$) في هذه الحالة بالمقدر الأمثل (Best Estimator).

- **خاصية الاتساق (متقاربة):**

نقول عن مقدر $\hat{\beta}$ بأنه متسق اذا تحقق شرطين:

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$
$$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\beta}) = 0$$

بما أن المقدرات تحقق كل من:

$E(\hat{\beta}_1) = \beta$

$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\beta}_1) = 0$

$E(\hat{\beta}_0) = \beta$

$\lim_{n\to\infty} V(\hat{\beta}_0) = 0$

اذن المقدرات $\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_0$ هي مقدرات متقاربة للمعالم (متسقة) β_1 و β_0 على الترتيب.

II. حساب تباينات كل من البواقي والمقدرات:

لبناء مجال الثقة للمعالم، يتعين معرفة تباين كل من البواقي و تباين المقدرات $\hat{\beta}_0$، $\hat{\beta}_1$.

- **تباين البواقي** σ_ε^2: نلاحظ أن تباين كل مقدر يرتبط بتباين الأخطاء النظري σ_ε^2، فينبغي في هده الحالة تقدير تباين الأخطاء للحصول عليها، ويعطى بالعلاقة التالية:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}$$

القيمة التي في البسط تعبر عن مجموع مربعات البواقي (SCR) حيث $SCR = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ أما $n-2$ فهي درجة الحرية، أي حجم العينة ناقص 2.

حساب تباين $\hat{\beta}_0$:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \sum X_i^2}{n(\sum_i^n X_i^2 - n\bar{X}^2)}$$

أو:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_0) = \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}^2}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} \right) \sigma_\varepsilon^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2} \right) \sigma_\varepsilon^2$$

حساب تباين $\hat{\beta}_1$:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum_i^n X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

أو:

$$\mathrm{var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{n} + \bar{X}^2 \,\mathrm{var}(\hat{\beta}_1)$$

الانحرافات المعيارية:

تكون الانحرافات المعيارية (Standard déviations) هي الجذور التربيعية لتباينات المقدرات، أما الأخطاء المعيارية (Standard errors) فهي الجذور التربيعية لمقدرات الانحرافات المعيارية أي:

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)} = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\operatorname{var}(\hat{\beta}_1)} = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

وبالرجوع إلى بيانات المثال السابق رقم (01) يتم حساب تباين البواقي وتباين المقدرات $(\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1)$ بالإضافة إلى الانحرافات المعيارية كالاتي:

1- حساب تباين البواقي $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}$$

حيث:

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

لدينا:

$$\hat{Y}_i = 47.064 + 0.561\, X_i$$

X_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	$Y_i - \hat{Y}_i$	$(Y_i - \hat{Y}_i)^2$
200	180	159.264	20.736	429.98
320	240	226.584	13.416	179.99
480	310	316.344	– 6.344	40.25
260	160	192.924	- 32.924	1083.99
620	400	394.884	5.116	26.17
			$\sum_{i}^{n} e = 0$	$\sum_{i}^{n} (Y_i - \hat{Y})^2 = 1760.38$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1760.38}{5-2} = 586.79$$

2- حساب تباين $\hat{\beta}_1$:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum_i^n X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_1) = \frac{586.79}{117920} = 0.0049$$

3- حساب تباين $\hat{\beta}_0$:

$$\operatorname{var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2 \sum X_i^2}{n(\sum_i^n X_i^2 - n\bar{X}^2)} = \frac{586.79(824800)}{5(117920)} = 820.87$$

4- حساب الانحرافات المعيارية :

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} = \sqrt{\operatorname{var}(\hat{\beta}_0)} = \sigma_\varepsilon \sqrt{\frac{\sum X_i^2}{n\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} = \sqrt{\operatorname{var}(\hat{\beta}_1)} = \frac{\sigma_\varepsilon}{\sqrt{\sum (X_i - \bar{X})^2}}$$

أي:

$$\sqrt{Var(\hat{\beta}_0)} = \sqrt{820.87} = 28.65$$

و

$$= \sqrt{var(\hat{\beta}_1)} = \sqrt{0.0049} = 0.07$$

إثبات كل من $\sum_i^n e_i = 0$ و $\sum_i^n e_i x_i = 0$:

أولا: اثبات $\sum_i^n e_i = 0$.

$$\sum_i^n e_i = 0$$

$$\sum_i^n e_i = \sum_i^n (Yi - \hat{Y}_i) = \sum_i^n (Yi - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)$$

$$= n\bar{Y} - n\hat{\beta}_0 - n\hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$= n\bar{Y} - n(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) - n\hat{\beta}_1 \bar{X}$$

$$=0$$

ثانيا: اثبات $\sum_i^n e_i x_i = 0$.

$$\sum_i^n e_i x_i = 0$$

$$\sum_i^n e_i x_i = \sum_i^n x_i (Yi - \hat{Y}_i) = \sum_i^n x_i (Yi - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)$$

$$= \sum_i^n x_i (Yi - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) - \hat{\beta}_1 x_i)$$

$$= x_i (n\bar{Y} - n\bar{Y} + n\hat{\beta}_1 \bar{X} - n\hat{\beta}_1 \bar{X})$$

$$= x_i (0)$$

$$=0$$

III. بناء مجالات الثقة للمقدرات المحسوبة والأخطاء.

- **بناء مجال الثقة (للمقدرات) المعالم.**

فيما يخص حدود أو فترات الثقة لمعالم الانحدار، فهي تقدير مدى الثقة التي تقع ضمنها القيمة الحقيقية للمعلمة أي المعلمة المجتمع، ويراد بحدي الثقة الحد الأدنى الذي يرمز له بالرمز L والحد الأعلى الذي يرمز له بالرمز U، ويعني ذلك تحديد مدى تتراوح فيه قيم المعلمتين (β_0, β_1) بين الحدين.

يكون مجال الثقة لكلا المعلمين عند مستوى معنوية (α%):

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} \le +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

$$\Pr\left[-t_{n-2,\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} \le +t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\right] = 1-\alpha$$

حيث أن الثقة تتراوح قيمها بين 90% و95% و100%، كما ان مستوى المعنوية هو احتمال مكمل لمعامل الثقة، أي اذا كان معامل الثقة 95% فإن مستوى المعنوية يكون 5%.

والصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة كالآتي:

معلمة المجتمع= المعلمة المقدرة $\pm$ $(t_{n-2,\frac{\alpha}{2}})$ $\times$ (الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة).

أي:

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}, \hat{\beta}_0 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

حيث:

$t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$: القيمة الحرجة لتوزيع Student بدرجة حرية $n-2$ و نسبة معنوية α% ونجد من جدول التوزيع القيمة المحسوبة.

ملاحظة مهمة: عندما يكون حجم العينة كبيرا (n>30) فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي ويمكن اخذ القيمة الحرجة $z_{\frac{\alpha}{2}}$، وذلك بحساب المساحة المظللة للتوزيع الطبيعي (تاخذ من جدول التوزيع الطبيعي القيمة المجدولة).

وتصبح العلاقة كالآتي:

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}, \hat{\beta}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

- مجال الثقة لتباين الأخطاء: ويكون مجال الثقة لتباين الأخطاء كالآتي:

$$\sigma_\varepsilon^2 \in \left[\frac{(n-2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2}, \frac{(n-2)\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\chi_{\alpha/2}^2}\right]$$

وبالرجوع إلى بيانات المثال السابق رقم (01) يتم بناء مجالات الثقة للمقدرات المحسوبة والأخطاء كالاتي:

1. بناء مجالات الثقة للمقدرات المحسوبة:

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}, \hat{\beta}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + z_{\frac{\alpha}{2}}\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

حيث أن:

- (t) الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (3) تساوي (3.182)، أي معامل الثقة هو 95%.

ولدينا:

- ($\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}$) يساوي (28.65).
- ($\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}$) يساوي (0.07).
- $\hat{\beta}_0$ يساوي (47.064).
- $\hat{\beta}_1$ يساوي (0.561).

ومنه:

$$\beta_0 \in [\, 47.064 - 3.182(28.65), 47.064 + 3.182(28.65)]$$
$$\beta_0 \in [\, -44.10 \,, 138.22]$$

هذا يعني أن هناك احتمال 95% أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_0 بين الحد الأعلى 138.22، والحد الأدنى 44.10−، وان هناك احتمال5% أن تقع خارج هذين الحدين.

أما β_1 فإن:

$$\beta_1 \in [\, 0.561 - 3.182(0.07), 0.561 + 3.182(0.07)]$$
$$\beta_1 \in [\, 0.338 \,,\ 0.784]$$

هذا يعني أن هناك احتمال 95% أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_1 بين الحد الأعلى0.784، والحد الأدنى 0.338، وان هناك احتمال 5% تكون خارج هذين الحدين.

المحاضرة الخامسة.

7. القدرة التفسيرية للنموذج وجدول تحليل التباين.
   1. القدرة التفسيرية للنموذج.
   2. جدول تحليل التباين(ANOVA Table).
8. اختبار الفرضيات.
   1. اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم (اختبار(t)): t-test
   2. اختبار المعنوية الكلية للنموذج (F): F-test

1. القدرة التفسيرية للنموذج وجدول تحليل التباين.

1. القدرة التفسيرية للنموذج:

كلما كانت المشاهدات أقرب إلى خط الانحدار(أي، كلما صغرت البواقي)، كلما زاد التغير في Y الذي تفسره معادلة الانحدار المقدرة، والتغير الإجمالي في Y يساوي التغير المشروح (المفسر) + تغير البواقي، كالآتي:

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{\varepsilon}_i$$
$$Y_i - \bar{Y} = \hat{Y}_i - \bar{Y} + \hat{\varepsilon}_i$$

بجمع اطراف المعادلة أعلاه وتربيعها بالنسبة لكل i نجد:

$$\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2 + \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$$
$$\text{SCT} \;=\; \text{SCE} \;+ \text{SCR}$$

حيث تمثل كل من حدود المعادلة كالاتي:

- $\sum_i (Y_i - \bar{Y})^2$ هو مجموع مربعات الانحرافات الكلية Sommes des Carrés Total (SCT)
- $\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$ فهو مجموع مربعات الانحرافات المفسرة Sommes des Carrés Explicatif(SCE)
- $\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$ الذي هو مجموع مربعات البواقي Sommes des Carrés Résidus (SCR)

نعيد صياغة المعادلة السابقة على الشكل :

$$\text{SCT} \;=\; \text{SCE} \;+ \text{SCR}$$

وبتقسيم كل الأطراف على الانحرافات الكلية SCT نجد:

$$1 = \frac{SCE}{SCT} + \frac{SCR}{SCT}$$

يحسب معامل التحديد كالآتي:

$$R^2 = r^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

أو:

$$R^2 = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2} = 1 - \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}$$

ملاحظة مهمة:

يكون معامل التحديد هو نفسه مربع معامل الارتباط ما بين متغيرين لنموذج الانحدار الخطي البسيط، أما في الانحدار المتعدد يصبح هذا التعريف غير صحيح.

ويمكن **تعريف معامل التحديد** R^2 بأنه النسبة في التغير الإجمالي في Y الذي "يفسره" انحدار Y_i على X_i، أو هو مقياس للقدرة التفسيرية للنموذج أي يختبر جودة التوفيق والارتباط بين المتغير التابع والمتغيرات

المستقلة، كما أن مجال معامل التحديد محصور بين: $0 \leq R^2 \leq 1$ ، ويطلق على معامل التحديد أحيانا بـ (معامل التفسير).

2. جدول تحليل التباين (ANOVA Table):

جدول تحليل التباين لنموذج الانحدار الخطي البسيط المقدر كالتالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات
المتغير المفسر	$SCE=\sum_i (\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$	1	$\frac{SCE}{1}=\frac{\sum_i (\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{1}$
البواقي	$SCR=\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$	n−2	$\frac{SCR}{n-2}=\frac{\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}$
المجموع	$SCT = SCE + SCR$ $\sum_i (Y_i-\bar{Y})^2=\sum_i (\hat{Y}_i-\bar{Y})^2+\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$	n−1	-

2. اختبار الفرضيات:

1. اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم (اختبار(t)): t-test

يستخدم اختبار (t) للتحقق من معنوية معلمات نموذج الانحدار الخطي البسيط ($\hat{\beta}_1$ و $\hat{\beta}_0$) كل على انفراد، كالآتي:

- **اختبار معنوية معامل الانحدار ($\hat{\beta}_1$):**

للتحقق من معنوية معامل الانحدار لنموذج انحدار الخطي البسيط، لابد من اختبار فرضتين (العدم والبديلة) كالاتي:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

أي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

تحت الفرضية H_0:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

القرار الإحصائي:

- يتم قبول فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_{cal}) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اقل أو يساوي من المجدولة (t_{tab}) أي: $\left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| \leq t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ مما يدل ذلك على عدم معنوية معامل الانحدار β_1.
- يتم رفض فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_{cal}) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اكبر من المجدولة (t_{tab}) أي: $\left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| > t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ مما يدل ذلك على معنوية معامل الانحدار β_1 أو نقول المعلمة دالة.

نقوم بنفس الاختبار مع معامل التقاطع (الثابت) β_0، إضافة إلى ذلك عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n > 30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظللة للتوزيع الطبيعي.

ملاحظة هامة: يجب أن تكون قيمة ستيودنت موجبة لمقارنتها مع القيمة الجدولية لهذا نقوم بإدراج القيمة المطلقة، أما فيما يخص قيمة ستيودنت الحرجة أو الجدولية عند مستوى احتمال 5% نستخرجها من جدول ستيودنت للقيم الحرجة.

3. **اختبار المعنوية الكلية للنموذج (F): F-test** يستخدم اختبار (F) للتحقق من معنوية نموذج الانحدار الخطي البسيط ككل من عدم معنويته، ولتحقيق هذا الغرض لابد من اختبار الفرضتين الآتيتين:

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_K = 0 \qquad \text{(فرضية العدم)}$$

$$\mathrm{H}_1: \beta_1 \neq \beta_2 \neq \cdots \beta_K \neq 0 \qquad \text{(الفرضية البديلة)}$$

أي:

H_0: النموذج ككل ليس له دلالة معنوية

H_1: النموذج ككل له دلالة معنوية

ويمكننا الحصول على إحصائية فيشر F من حاصل قسمة SCE/1 على SCR/n-2 من جدول تحليل التباين، أي أن:

$$F^* = \frac{\frac{\mathrm{SCE}}{1}}{\frac{\mathrm{SCR}}{\mathrm{n}-2}} = \frac{\frac{\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{1}}{\frac{\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{\mathrm{n}-2}}$$

كما توجد هناك علاقة بين توزيع فيشر F ومعامل التحديد R^2:

$$F^* = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{(1-R^2)}{n-2}} = \frac{R^2}{(1-R^2)}(n-2)$$

القرار الإحصائي:

1. يتم رفض فرضية العدم (H_0)، إذا كانت إحصائية فيشر المحسوبة اكبر من فيشر الجدولية عند مستوى احتمال ($\alpha\%$) حيث $F^* > F^{\alpha}_{(k-1,n-k)}$، مما يدل ذلك على معنوية نموذج الانحدار الخطي البسيط ككل.

حيث أن: (k تمثل عدد متغيرات النموذج، وn تمثل عدد المشاهدات (حجم العينة)).

2. يتم قبول فرضية العدم (H_0)، إذا كانت إحصائية فيشر المحسوبة اصغر أو يساوي فيشر الجدولية عند مستوى احتمال ($\alpha\%$) حيث $F^* \leq F^{\alpha}_{(k-1,n-k)}$، مما يدل ذلك على عدم معنوية نموذج الانحدار الخطي البسيط ككل.

مثال: المثال السابق:

- احسب معامل التحديد R^2، ماذا تستنتج.
- ارسم جدول تحليل التباين.
- اختبر معنوية معالم النموذج والمعنوية الكلية عند مستوى معنوية 5% أو مستوى ثقة 95%.

الحل:

- حساب معامل التحديد R^2:

Y_i	$\hat{Y}_i$	$(Y_i-\hat{Y}_i)^2$	$\hat{Y}_i-\bar{Y}$	$(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$	$Y_i-\bar{Y}$	$(Y_i-\bar{Y})^2$
180 240 310 160 400	159.264 226.584 316.344 192.924 394.884	429.98 179.99 40.25 1083.99 26.17	-98.736 -31.416 58.344 -65.076 136.884	9748.80 986.97 3404.02 4234.89 18737.23	-78 -18 52 -98 142	6084 324 2704 9604 20164
$\sum Y_i=1290$ $\bar{Y}=258$		$\sum_i^n (Y_i-\hat{Y})^2 = 1760.38$	$\sum_i^n = 0$	$\sum_i^n (\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 = 37111.91$	$\sum_i^n = 0$	$\sum_i^n (\hat{Y}_i-\bar{Y})^2 = 38880$
		SCR		SCE		SCT

حيث:

$$SCT = SCE + SCR$$

$38880 \cong 38872.29 = 37111.91 + 1760.38$ بسبب الفاصلة.

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT} = \frac{37111.91}{38880} = 1 - \frac{1760.38}{38880} = 0.9545$$

الاستنتاج: متوسط الدخل الشهري يشرح تغيرات متوسط الإنفاق الشهري بنسبة 95.45% وهو يدل على الجودة والتوفيق والارتباط بين المتغير التابع والمستقل، أو بعبارة أخرى القدرة التفسيرية للنموذج عالية جدا.

- **جدول تحليل التباين:**

جدول تحليل التباين لنموذج الانحدار الخطي البسيط المقدر مبين في الجدول الموالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات
المتغير المفسر	$SCE=\sum_i(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2=37111.91$	1	$\frac{\sum_i(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{1}=37111.91$
البواقي	$SCR=\sum_i\hat{\varepsilon}_i^2=1760.38$	3	$\frac{\sum_i\hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}=586.79$
المجموع	$SCT=\sum_i^n(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2=38880$	4	-

- **اختبار معنوية معالم النموذج عند مستوى معنوية 5% أو مستوى ثقة 95%:**

اختبار معنوية $\hat{\beta}_0$:

$$H_0: \beta_0 = 0$$
$$H_1: \beta_0 \neq 0$$

تحت الفرضية H_0:

$$|t_{c\hat{\beta}_0}| = \frac{|\hat{\beta}_0|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}} = \frac{47.064}{28.65} = 1.64 < (t_{tab}) = 3.182$$

بما أن قيمة ($|t_{c\hat{\beta}_0}|$) المحسوبة والبالغة (1.64) اقل من قيمة (t_{tab}) الجدولية البالغة (3.182) عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (n-2=5-2=3)، عليه نقبل فرضية العدم أي عدم معنوية المعلمة المقدرة $\hat{\beta}_0$.

اختبار معنوية $\hat{\beta}_1$:

$$H_0: \beta_1 = 0$$
$$H_1: \beta_1 \neq 0$$
$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

تحت الفرضية H_0:

$$|t_{c\hat{\beta}_1}| = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}} = \frac{0.561}{0.07} = 8.01 > (t_{tab}) = 3.182$$

بما أن قيمة ($|t_{c\hat{\beta}_1}|$) المحسوبة والبالغة (8.01) اكبر من قيمة (t_{tab}) الجدولية البالغة (3.182) عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (n-2=5-2=3)، عليه نرفض فرضية العدم أي معنوية المعلمة المقدرة $\hat{\beta}_1$ عالية (دالة).

اختبار المعنوية الكلية:

لتحقيق هذا الغرض لابد من اختبار الفرضتين الآتيتين:

أي:

H_0: النموذج ككل ليس له دلالة معنوية

H_1: النموذج ككل له دلالة معنوية

إن إحصاءة الاختبار أعلاه تأخذ الشكل الاتي:

$$F^* = \frac{\frac{R^2}{1}}{\frac{(1-R^2)}{n-2}} = \frac{\frac{0.9545}{1}}{\frac{0.0455}{3}} = 63.2$$ أو يحسب بالعلاقة التالية:

$$F^* = \frac{\frac{SCE}{1}}{\frac{SCR}{n-2}} = \frac{\frac{\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{1}}{\frac{\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{n-2}} = \frac{37111.91}{586.79} = 63.2$$

بما أن قيمة (F^*) المحسوبة والبالغة (63.2) اكبر من قيمة (F_{tab}) الجدولية البالغة (10.13) عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (K-1=1,n-k=3)، عليه نرفض فرضية العدم مما يدل على معنوية نموذج الانحدار الخطي البسيط ككل.

حيث أن: (k تمثل عدد متغيرات النموذج، وn تمثل عدد المشاهدات (حجم العينة)).

تمارين محلولة:

التمرين الاول:

1) ماذا يقصد بحد الخطأ (حد التشويش) (الحد العشوائي) في معادلة الانحدار الخطي؟

2) ماذا يقصد بمقدر غير متحيز؟ وكيف يعرف التحيز؟

3) أذكر خواص مقدرات طريقة المربعات الصغرى؟

حل التمرين الأول:

1. المقصود بحد الخطأ: يقيس انحراف القيمة المشاهدة y من خط الانحدار الحقيقي (غير المشاهد) وتنشأ بسبب: وجود عدة متغيرات مفسرة ذات تأثير ضئيل على y أو أخطاء ممكنة في القياس أو السلوك الإنساني العشوائي.

2. ماذا يقصد بمقدر غير متحيز؟ وكيف يعرف التحيز:

المقصود: إذا كان وسط توزيع المعاينة الخاص به يساوي المعلمة الحقيقية.

الكيفية: يعرف التحيز بالفرق بين القيمة المتوقعة للمقدر وبين المعلمة الحقيقية.

3. أذكر خواص مقدرات طريقة المربعات الصغرى:

عدم التحيز – مقدر كفء – الاتساق.

التمرين الثاني:

1. **برهن كل من:**

a. $\sum_i^n e_i = 0$

b. $\sum_i^n e_i x_i = 0$

2. **ماذا تعني لك العبارات التالية:**

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$$
$$E\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) = 0 \qquad \forall\ i \neq j$$

حل التمرين الثاني:

1. برهان كل من:

أولا: اثبات $\sum_i^n \mathrm{e_i} = 0$.

$$\sum_i^n \mathrm{e_i} = 0$$

$$\sum_i^n \mathrm{e_i} = \sum_\mathrm{i}^\mathrm{n}\left(\mathrm{Yi} - \hat{Y_i}\right) = \sum_\mathrm{i}^\mathrm{n}(\mathrm{Yi} - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \mathrm{x}_i)$$
$$= n\bar{Y} - n\hat{\beta}_0 - n\hat{\beta}_1 \bar{X}$$
$$= n\bar{Y} - n(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) - n\hat{\beta}_1 \bar{X} = 0$$

ثانيا: اثبات $\sum_i^n \mathrm{e_i x_i} = 0$.

$$\sum_i^n \mathrm{e_i x_i} = 0$$

$$\sum_i^n e_i x_i = \sum_i^n x_i\left(Yi - \hat{Y}_i\right) = \sum_i^n x_i(Yi - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)$$
$$= \sum_i^n x_i(Yi - (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) - \hat{\beta}_1 x_i)$$
$$= x_i(n\bar{Y} - n\bar{Y} + n\,\hat{\beta}_1 \bar{X} - n\,\hat{\beta}_1 \bar{X})$$
$$= x_i(0) = 0$$

2. تعني العبارات التالية:

$$E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$$

تباين حد الخطأ(ε) ثابت

$$E\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) = 0 \quad \forall\ i \neq j$$

استقلالية المتغيرات العشوائية بعضها عن بعض أي أنه لا توجد هناك علاقة بين قيم Ui المتعاقبة السابقة.

التمرين الثالث:

إليك النموذج التالي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

لدينا:

$$\sum Y_i^2 = 2150 \quad ، \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 215 \end{bmatrix} \quad ، \quad \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

1. قدر معلمات النموذج بطريقة المحددات (Gramer)؟ استنتج معادلة مستقيم انحدار؟
2. قدر تباين الأخطاء σ^2؟ علما أن: SCR= 37.5.
3. حساب معادلة تحليل التباين؟ واستنتج معامل الارتباط بين Y و X.
4. اختبار المعنوية الإحصائية للنموذج عند مستوى معنوية α=5%؟ علما ان: $F_{tab} = 10.13$؟

حل التمرين الثالث:

1. تقدير معلمات النموذج بطريقة المحددات (Gramer):

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 22 \end{bmatrix}$$

$$|D| = (5)(22) - (10)(10)$$
$$= 110 - 100$$
$$|D| = 10$$

$|A_0|= \begin{bmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 10 \\ 215 & 22 \end{bmatrix}$

$|A_0| = (100)(22) - (215)(10)$

$|A_0| = 50$

$|A_1|= \begin{bmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 100 \\ 10 & 215 \end{bmatrix}$

$|A_1|= (5)(215) - (10)(100)$

$|A_1|= 75$

$\hat{\beta}_0 = \frac{|A0|}{|D|} = \frac{50}{10} = 5$

$\hat{\beta}_1 = \frac{|A1|}{|D|} = \frac{75}{10} = 7.5$

معادلة مستقيم الانحدار:

$$\hat{Y}_i = 5 + 7.5\, Xi$$

2. **تقدير تباين الأخطاء σ^2:**

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{SCR}{n-2} = \frac{37.5}{5-2} = 12.5$$

3. **معادلة تحليل التباين:**

$$SCT = SCE + SCR$$
$$SCE = \beta_1^2 \left(\sum_i^n X_i^2 - n\bar{X}^2\right)$$
$$SCE = 7.5^2 (22-5(2)^2)$$
$$SCE = 112.5$$
$$SCT = 112.5 + 37.5 = 150$$

4. **معامل الارتباط بين Y وX:**

$$R^2 = r^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{112.5}{150} = 0.75$$
$$r = \sqrt{0.75} = 0.86$$

5. **اختبار المعنوية الإحصائية للنموذج عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$:**

(فرضية العدم) $H_0: \beta_0 = \beta_1 = \ldots \beta_K = 0$

(الفرضية البديلة) $H_1: \beta_0 \neq \beta_1 \neq \cdots \beta_K \neq 0$

أي:

H_0: النموذج ككل ليس له دلالة معنوية

H_1: النموذج ككل له دلالة معنوية

$$F^* = \frac{\frac{SCE}{1}}{\frac{SCR}{n-2}} = \frac{\frac{112.5}{1}}{\frac{37.5}{5-2}} = 9 < F_{tab}=10.13$$

القرار: نقبل H_0 ومنه النموذج ككل ليس له دلالة معنوية.

تمارين مقترحة.

التمرين الأول:

- ما هو الفرق بين الارتباط والانحدار ؟
- اذكر فرضيات طريقة مربعات الصغرى العادية MCO ؟
- ماهي خصائص الإحصائية للمقدرة $\hat{B}$ (Blue)؟

التمرين الثاني: لتكن لديك المعطيات التالية والخاصة بالعلاقة بين متغير تابع Y ومتغير مستقل X

X	2	3	1	5	9
Y	4	7	3	9	17

المطلوب:

1. قدر معادلة نموذج الانحدار البسيط من الشكل:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

- باستعمال القانون العام (MCO).
- باستعمال القانون المختصر.
- باستخدام طريقة (Gramer).

2. ما هي قيمة Y في حال X يساوي 10.
3. احسب التباين والانحراف المعياري للمعلمات المقدرة.

التمرين الثالث:

إليك النموذج: $Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i :\ \ i=1,\dots\dots,10$

حيث: $E(U_i)=0,\ \ V(U_i)=\sigma^2,\ \ \mathrm{cov}(U_i,U_j)=0\ \forall\ i\neq j$

لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = 310 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 81060 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 770$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 32790 \qquad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 13298$$

المطلوب:

1. قدر معلمات النموذج بطريقة MCO؟ استنتج معادلة مستقيم انحدار؟
2. أعطي عبارات التباين للمقدرات: $V(\hat{B}_1)$ و $V(\hat{B}_0)$ (بدون إجراء الحسابات).
3. قدر تباين الأخطاء σ^2؟ علما ان : $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2 = 31{,}456$.
4. احسب تباين المقدرات ؟
5. احسب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة؟

6. إيجاد مجال الثقة لمعالم النموذج عند مستوى ثقة 95%؟ علما ان: $t_{tab}=2.306$.

التمرين الرابع:

لدينا النتائج التالية تخص معدل الدخل السنوي x ومقدار التوفير السنوي (بالدينار)y لعينة تتكون من 10 اسر:

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=75.54\ ,\quad \sum_{i=1}^{10}x_i^2=3656\ ,\quad \sum_{i=1}^{10}y_i=12.9\ ,\quad \sum_{i=1}^{10}x_i=174\ ,$$

$$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=300\ ,\quad \sum_{i=1}^{10}y_i^2=26.39\ ,\quad \sum_{i=1}^{10}(y_i-\bar{y})^2=9.749\ ,\quad \sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2=628.4$$

$t_{tab}=2.306$, $F_{tab}=5.32$

المطلوب:

1. كتابة النموذج الخطي؟
2. تقدير معادلة الانحدار الخطية مستخدما معدل الدخل السنوي كمتغير مستقل باستخدام طريقة المربعات الصغرى وطريقة الانحرافات ؟
3. حساب تباين البواقي ؟
4. حسابا تباين المقدرات؟
5. حساب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة ؟
6. حساب معامل التحديد ؟
7. إيجاد جدول تحليل التباين ؟
8. اختبار المعنوية الإحصائية لمعالم النموذج عند مستوى معنوية α=5% ؟
9. اختبار المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية α=5% ؟

التمرين الخامس: ليكن لدينا مخرجات EVIEWS الآتي.

Dependent Variable: MC
Method: Least Squares
Date: 11/20/24 Time: 22:29
Sample: 2000 2021
Included observations: 22

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
VTR	VM4	VM3	VM2	0.0076
C	26.92575	VM1	6.519609	0.0000

R-squared	VM5	Mean dependent var	VM6
Adjusted R-squared	0.270802	S.D. dependent var	VM8
S.E. of regression	11.44988	Akaike info criterion	7.800344
Sum squared resid	VM7	Schwarz criterion	7.899529
Log likelihood	-83.80378	Hannan-Quinn criter.	7.823709
F-statistic	8.798765	Durbin-Watson stat	1.390301
Prob(F-statistic)	0.007633		

مع افتراض قيمة: $\overline{VTR}=5.77$ ، $\sigma_x=4.33$

المطلوب: إيجاد قيم المجاهيل التالية: VM1، VM2، VM3، VM4، VM5، VM6، VM7، VM8 ؟

المحور الثالث: تحليل الانحدار الخطي المتعدد.

المحاضرة السادسة.

1. مفهوم الانحدار الخطي المتعدد.
2. الفرضيات الأساسية للنموذج.
3. تقدير معالم الانحدار المتعدد للشعاع $\hat{\beta}$.
   - طريقة المربعات الصغرى (المصفوفات).
   - طريقة الانحرافات.

1. الانحدار الخطي المتعدد:

إن الانحدار الخطي المتعدد ليس مجرد أسلوب واحد وإنما مجموعة من الأساليب التي يمكن استخدامها لمعرفة العلاقة بين متغير تابع مستمر وعدد من المتغيرات المستقلة التي عادةً ما تكون مستمرة)، كما أن نموذج الانحدار الخطي المتعدد يعتبر امتداد لنموذج الانحدار الخطي البسيط بإضافة على الأقل متغير إضافي، بحيث يصبح على الأقل ثلاث متغيرات (متغير تابع ومتغيرين مستقلين)، أو بصفة عامة يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية ما بين متغير معتمد Y_i وعدد من المتغيرات المستقلة كالآتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i, \quad i = 1,......., n$$

حيث:

- $X_1, X_2 ..., ..., X_k$ تمثل المتغيرات المفسرة أو المستقلة.
- Y_i يمثل المتغير التابع.
- $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k$ تمثل معالم النموذج.
- وحد عشوائي ε_i.
- ويعبر عن هذه العلاقة بالنسبة لـ n من المشاهدات.
- وk من المتغيرات المستقلة، و n مشاهدة.

$$\begin{aligned}
&i = 1 : Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \beta_2 X_{12} + ... + \beta_k X_{1k} + \varepsilon_1 \\
&i = 2 : Y_2 = \beta_0 + \beta_1 X_{21} + \beta_2 X_{22} + ... + \beta_k X_{2k} + \varepsilon_2 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&i = n : Y_n = \beta_0 + \beta_1 X_{n1} + \beta_2 X_{n2} + ... + \beta_k X_{nk} + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

وعليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات كآلاتي:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

وباختصار يمكن كتابتها كالآتي:

$$\underset{(n,\ 1)}{Y} = \underset{(n,\ k+1)}{X} \ \underset{(k+1,\ 1)}{\beta} + \underset{(n,\ 1)}{\varepsilon}$$

حيث تمثل كل من:

Y: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع.

X : مصفوفة أبعادها $(n\times k+1)$ تحتوي على مشاهدات المتغيرات المستقلة، أي يحتوي عمودها الأول على قيم الواحد الصحيح ليمثل الحد الثابت .

ε: متجه عمودي أبعاده $(n\times 1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية.

β : متجه عمودي أبعاده $(k+1\times 1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقديرها.

2. الفرضيات التي يقوم عليها نموذج الانحدار الخطي المتعدد:

الفرضية الأولى: تأخذ علاقة النموذج الخطي المتعدد الصيغة التالية:

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+\beta_2X_{i2}+\ldots+\beta_kX_{ik}+\varepsilon_i,\quad i=1,\ldots\ldots,n$$

الفرضية الثانية: القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوي صفرا أي أن: $E(\varepsilon_i)=0$

$$E(\varepsilon_i)=E\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ .\\ \varepsilon_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E(\varepsilon_1)\\ E(\varepsilon_2)\\ .\\ E(\varepsilon_n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\.\\0\end{bmatrix}$$

الفرضية الثالثة: ε_i يتوزع توزيعا طبيعيا متعدد المتغيرات.

الفرضية الرابعة: تباين العناصر العشوائية ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفرا أي أن:

$$\begin{cases}\operatorname{var}(\varepsilon_i)=\sigma^2, & \forall i=1\ldots\ldots\ldots n\\ \operatorname{cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0, & \forall i\neq j\end{cases}$$

حيث أن $\operatorname{var}(\varepsilon_i)=\sigma^2\quad \forall i=1\ldots\ldots\ldots n$ هي فرضية تجانس التباين "Homoscedasticity" لمختلف الحدود العشوائية، وهذا كفيل بإبعاد الحالة التي تكون فيها الأخطاء تتبع تغيرات قيم المتغيرات المفسرة و $Cov(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0\quad \forall i\neq j$، أي أن الأخطاء ليست مرتبطة ببعضها، وأن نتيجة تجربة لا تؤثر على بقية النتائج. يمكن كتابة هاتين الفرضيتين على الشكل المصفوفي:

$$\Omega_\varepsilon=E(\varepsilon\varepsilon')=\begin{pmatrix}\sigma_\varepsilon^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_\varepsilon^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_\varepsilon^2\end{pmatrix}=\sigma_\varepsilon^2 I_n$$

حيث أن: $\sigma_1{}^2=\sigma^2{}_2=\sigma^2=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\sigma^2{}_n$

$$\Omega_\varepsilon=E(\varepsilon\varepsilon')=\sigma^2\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}=\sigma_\varepsilon^2 I_n$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك"Variance -CovarianceMatrix" لحد الخطأε_i ، حيث تشكل العناصر القطرية في المصفوفة تباين قيم ε_i ، بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك والترابط بين قيم ε_i .

ويمكن تلخيص الفرضيات السابقة رياضيا كما يلي: $\varepsilon_i \sim N\left(0,\sigma^2 I_n\right)$

الفرضية الخامسة: المصفوفة X غير عشوائية وثابتة، تعني بأن قيم المتغيرات المستقلة يمكن مراقبتها، وبالإضافة إلى ذلك نفترض X ثابتة لضمان بأن قيم المتغيرات المستقلة لا تتغير من حين لآخر، أي:

$$\operatorname{cov}(X,\varepsilon)=E(X'\varepsilon)=0$$

الفرضية السادسة: عدم وجود ارتباط خطي بين المتغيرات المستقلة كما أن عدد المشاهدات يجب أن يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها ، وهذه الفرضية ضرورية جدا لضمان أيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$ إذ أن عدم توفر هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (X) اقل من $K+1$ وبالتالي فان رتبة $(X'X)$ التي تستخدم في الحصول على مقدرات MCO بدورها اقل من $K+1$ ولا يمكن إيجاد معكوسا لها أي أن $(X'X)^{-1}$ غير معرفة لان محدده يؤول إلى الصفر وهذا ما يسبب ما يسمى بمشكلة الارتباط الخطي المتعدد، وبالتالي لا يمكن الحصول على المقدرات باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية.

3. **تقدير معالم الانحدار المتعدد للشعاع** $\hat{\beta}$: يتم تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد بعدة طرق سيتم التطرق في هذا المحور إلى طريقتين على النحو التالي:

أولا: طريقة مربعات الصغرى (المصفوفات): تهدف هذه الطريقة إلى إيجاد تقدير للشعاع β الذي يُصَغِّر مجموع مربعات الانحراف $\hat{\varepsilon}_i$ بين كل من (القيمة المقدرة والقيمة الحقيقية) أي:

$$Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2=Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2$$
$$\hat{\varepsilon}_i=Y_i-\hat{Y}_i \qquad i=1.......n$$
$$Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)^2=Min\left(Y-\hat{Y}\right)'\left(Y-\hat{Y}\right)=Min\,\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}$$

أي:

$$Min(e'e)=(y-\hat{y})'(y-\hat{y})=\hat{y}'\hat{y}-2\hat{y}'y+y'y=\hat{\beta}'x'x\hat{\beta}-2\hat{\beta}'x'y+y'y$$

للحصول على النهاية الصغرى فيجب أن يحقق الشرط الضروري:

$$\frac{\partial\sum e_i^2}{\partial\hat{\beta}'}=0\Leftrightarrow 2(X'X)\hat{\beta}-2X'Y=0$$

ومنه:

$$2(X'X)\hat{\beta}-2X'Y=0 \quad \Rightarrow (X'X)\hat{\beta}-X'Y=0$$

نضرب طرفي المعادلة بـ$(X'X)^{-1}$ لنحصل على: $\hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'Y$ وهو تقدير للشعاع β ، حيث

تمثل كل من اطراف المعادلة كالآتي:

- $(X'X)^{-1}$ تمثل معكوس المصفوفة لـ$(X'X)$ على النحو التالي:

$$(X'X)=\begin{bmatrix} n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i} \\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^{2} & \sum X_{1i}X_{2i} \\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^{2} \end{bmatrix}$$

- $(X'Y)$ تمثل المصفوفة على الشكل التالي:

$$X'Y=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{1i}Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} X_{2i}Y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} X_{ki}Y_i \end{bmatrix}$$

- $\hat{\beta}$ يمثل شعاع المعالم كالآتي:

$$\hat{\beta}=\begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

مثال رقم (01): لنفترض وجود البيانات الآتية:

Y_i	0	2	5	10	12	20
X_{i1}	1	2	3	4	5	6
X_{i2}	1	1	7	10	15	16

المطلوب:

- تقدير معلمات نموذج خطي من متغيرين مستقلين باستخدام طريقة مربعات الصغرى (المصفوفات).

الحل:

- تقدير معلمات نموذج خطي من متغيرين مستقلين من الشكل الآتي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i ....1$$

تكون المصفوفة (X) كالآتي:

$$X=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 7\\ 1 & 4 & 10\\ 1 & 5 & 15\\ 1 & 6 & 16\end{bmatrix} \quad ، \quad X'=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 7 & 10 & 15 & 16\end{bmatrix}$$

$$(X'X)=\begin{bmatrix}n & \sum X_{1i} & \sum X_{2i}\\ \sum X_{1i} & \sum X_{1i}^2 & \sum X_{1i}X_{2i}\\ \sum X_{2i} & \sum X_{1i}X_{2i} & \sum X_{2i}^2\end{bmatrix}$$

أي:

$$(X'X)=\begin{bmatrix}6 & 21 & 50\\ 21 & 91 & 235\\ 50 & 235 & 632\end{bmatrix}$$

لإيجاد حلول معكوس مصفوفة $(X'X)^{-1}$ نتبع الخطوات التالية:

- إيجاد محددة $(X'X)$:

$$\det (X'X) = 1010$$

- إيجاد مصفوفة المرافقة والمجاورة لـ$(X'X)$:

$$\mathrm{cof}(X'X)=\begin{bmatrix}2287 & -1522 & 385\\ -1522 & 1292 & -360\\ 385 & -360 & 105\end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{adj}(X'X)=\begin{bmatrix}2287 & -1522 & 385\\ -1522 & 1292 & -360\\ 385 & -360 & 105\end{bmatrix}$$

- بقسمة كل عنصر من عناصر $\mathrm{adj}(X'X)$ على $(\det (X'X))$ تكون المصفوفة المعكوسة $(X'X)^{-1}$ وقيم المعلمات المقدرة كما يلي:

$$(X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}2.2644 & -1.506 & 0.3811\\ -1.506 & 1.2792 & -0.356\\ 0.3811 & -0.356 & 0.1039\end{bmatrix} \rightarrow (X'Y)=\begin{bmatrix}49\\ 239\\ 637\end{bmatrix} \quad \hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix}-6.21\\ 5.16\\ -0.23\end{bmatrix}$$

ثانيا: طريقة الانحرافات: توجد طريقة أخرى لتقدير معالم الانحدار المتعدد وذلك باستخدام أسلوب الانحرافات أو ما تسمى بالمتوسطات، أي انحرافات القيم الأصلية عن وسطها الحسابي لتصبح قيم مركزة، ولهذا الغرض نأخذ نموذج يحتوي متغيرين مستقلين X_1 وX_2:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{i1} + \hat{B}_2 X_{i2} + e_i$$

وبأخذ المتوسط لهذه المعادلة:

$$\bar{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \bar{X}_1 + \hat{B}_2 \bar{X}_2 + \bar{e}_i \quad ، \quad \bar{e}_i = 0$$

ويتم تقدير معالم الانحدار المتعدد باستخدام الانحرافات عن طريق مصفوفات قيم الانحرافات أو بالصيغ التالية:

$$\hat{\beta}_1=\frac{(\sum x_2^2)(\sum x_1y)-(\sum x_1x_2)(\sum x_2y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2)-(\sum x_1x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_2=\frac{(\sum x_1^2)(\sum x_2y)-(\sum x_1x_2)(\sum x_1y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2)-(\sum x_1x_2)^2}$$

$$\hat{\beta}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}_1-\hat{\beta}_2\bar{X}_2$$

ويتم استخراج قيم الانحرافات بتحويل القيم الأصلية إلى قيم ممركزة من خلال القوانين الآتية:

$$\sum x_1^2=\sum X_1^2-n\,\bar{X}_1^2$$
$$\sum x_2^2=\sum X_2^2-n\,\bar{X}_2^2$$
$$\sum x_1x_2=\sum X_1X_2-n\bar{X}_1\bar{X}_2$$
$$\sum x_1y=\sum X_1Y-n\bar{X}_1\bar{Y}$$
$$\sum x_2y=\sum X_2Y-n\bar{X}_2\bar{Y}$$

مثال رقم (02): لتكن لدينا القيم الأصلية كالآتي:

$n=12$ ، $\sum X_1=33$ ، $\sum X_2=97$ ، $\sum Y=172$ ، $\sum X_1^2=117$ ، $\sum X_2^2=819$ ، $\sum X_1X_2=258$ ، $\sum X_1Y=449$ ، $\sum X_2Y=1454$ ، $\sum Y^2=2596$

المطلوب:

- قدر معالم الانحدار المتعدد $(\hat{\beta}_2،\hat{\beta}_1،\hat{\beta}_0)$ باستخدام طريقة الانحرافات؟ اكتب المعادلة التقديرية؟

الحل:

يتم استخراج القيم المركزة كالآتي:

$$\sum x_1^2=\sum X_1^2-n\,\bar{X}_1^2=117-12(2.75)^2=26.25$$
$$\sum x_2^2=\sum X_2^2-n\,\bar{X}_2^2=819-12(8.08)^2=35.56$$
$$\sum x_1x_2=\sum X_1X_2-n\bar{X}_1\bar{X}_2=258-12(2.75)(8.08)=-8.64$$
$$\sum x_1y=\sum X_1Y-n\bar{X}_1\bar{Y}=449-12(2.75)(14.33)=-23.89$$
$$\sum x_2y=\sum X_2Y-n\bar{X}_2\bar{Y}=1454-12(8.08)(14.33)=64.56$$

- يتم تقدير معالم الانحدار المتعدد $(\hat{\beta}_2،\hat{\beta}_1،\hat{\beta}_0)$ من خلال الصيغ التالية:

$$\hat{\beta}_1=\frac{(\sum x_2^2)(\sum x_1y)-(\sum x_1x_2)(\sum x_2y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2)-(\sum x_1x_2)^2}=\frac{(35.56)(-23.89)-(-8.64)(64.56)}{(26.25)(35.56)-(-8.64)^2}$$
$$=\frac{-291.73}{858.80}=-0.33$$

$$\hat{\beta}_2=\frac{(\sum x_1^2)(\sum x_2y)-(\sum x_1x_2)(\sum x_1y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2)-(\sum x_1x_2)^2}=\frac{(26.25)(64.56)-(-8.64)(-23.89)}{(26.25)(35.56)-(-8.64)^2}$$
$$=\frac{1488.29}{858.80}=1.73$$

$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2 = 14.33 - (-0.33)(2.75) - (1.73)(8.08) = 1.25$

كتابة المعادلة التقديرية:

$$\widehat{Y_i} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_1 + \hat{B}_2 X_2$$
$$\widehat{Y_i} = 1.25 - 0.33 X_{i1} + 1.73 X_{i2}$$

المحاضرة السابعة.

1. **تقدير تباين الأخطاء و مصفوفة التباين-التباين المشترك للمقدرات.**
2. **معادلة التباين ومعامل التحديد المتعدد R^2.**
3. **معامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$.**
4. **جدول تحليل التباين(ANOVA Table).**

تقدير تباين الأخطاء و مصفوفة التباين-التباين المشترك للمقدرات.

أولا: تقدير تباين الأخطاء:

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}=\frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n-k-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_{i}^{2}}{n-k-1}$$

ثانيا: مصفوفة التباين-التباين المشترك: يتم الحصول على تباين المقدرات في نموذج الانحدار الخطي المتعدد من خلال مصفوفة التباين-التباين المشترك للمقدرات، على النحو الآتي:

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\sigma_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}$$

بما أن $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ غير معروف، فانه يمكن استبداله بمقدر تباين الأخطاء $\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}$ وعليه :

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}}=\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}$$

حيث أن:

$$\Omega_{\hat{\beta}}=\begin{bmatrix} \mathrm{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_0\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1\hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_2\hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

ملاحظة: القطر الرئيسي لمصفوفة التباين والتباين المشترك يعطينا تباين المقدرات، أما الانحرافات المعيارية (Standard déviations) هي الجذور التربيعية لتباينات المقدرات.

معادلة تحليل التباين ومعامل التحديد (المتعدد):

بنفس طريقة نموذج الانحدار الخطي البسيط تكون معادلة تحليل التباين على النحو الآتي:

$$\sum_{i}(Y_i-\bar{Y})^2=\sum_{i}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2+\sum_{i}\hat{\varepsilon}_i^2$$

$$SCT = SCE + SCR$$

كما أن:

$$SCT = Y'Y - N\bar{Y}^2 \quad \text{و}$$

$$SCE = \hat{\beta}'X'Y - N\bar{Y}^2 \quad \text{و}$$

$$SCR = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y$$

نعيد صياغة المعادلة السابقة على الشكل:

$$SCT = SCE + SCR$$

وبتقسيم كل الأطراف على الانحرافات الكلية SCT نجد:

$$1 = \frac{SCE}{SCT} + \frac{SCR}{SCT}$$

يحسب معامل التحديد كالآتي:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

معامل التحديد المصحح $\bar{R}^2$:

إن إضافة متغيرات مفسرة جديدة إلى المعادلة يؤدي إلى زيادة في قيمة $\bar{R}^2$، غير أن الاستمرار بإضافة المتغيرات المستقلة سيؤدي إلى انخفاض درجات الحرية $(n-k-1)$، مما يتطلب استخراج معامل التحديد المعدل أو المصحح $\bar{R}^2$ على النحو الآتي:

$$\bar{R}^2 = \left[1 - \frac{SCR \;/\; n-k-1}{SCT \;/\; n-1}\right]$$

وبتعويض بسيط نجد:

$$\bar{R}^2 = \left[1 - \left(\frac{SCR}{SCT}\right)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

$$\bar{R}^2 = \left[1-\left(1-R^2\right)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

تظهر العلاقة بين R^2 و $\bar{R}^2$ من المعادلة الأخيرة أعلاه أن:

- $R^2 \geq \bar{R}^2$ إذا كانت $k > 1$
- $R^2 = \bar{R}^2$ إذا كانت $k = 1$

جدول تحليل التباين (ANOVA Table):

يكون جدول تحليل التباين لنموذج الانحدار الخطي المتعدد كالتالي:

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات
المتغير المفسر	$SCE = \hat{\beta}'X'Y - N\bar{Y}^2$	k	$\frac{SCE}{k}$
البواقي	$SCR = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y = \sum_i \hat{\varepsilon}_i^2$	$n-k-1$	$\frac{SCR}{n-k-1}$
المجموع	$SCT = SCE + SCR$ $SCT = Y'Y - N\bar{Y}^2$	$n-1$	-

مثال:

لتكن لدينا:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 2.9026 & -0.198 & -0.281 \\ -0.198 & 0.0415 & 0.0104 \\ -0.281 & 0.0104 & 0.0312 \end{bmatrix}$$

وبالرجوع إلى بيانات المثال السابق رقم (02).

المطلوب:

1. احسب كل من SCE, SCT, SCR؟
2. قدر تباين الأخطاء ومصفوفة التباين –التباين المشترك للمقدرات؟
3. أوجد جودة التوفيق والارتباط بحساب كل من R^2 و $\bar{R}^2$؟ ماذا تستنتج؟
4. احسب جدول تحليل التباين؟

الحل:

1. حساب كل من SCE, SCT, SCR:

$$SCT = Y'Y - N\bar{Y}^2$$

$$SCT = \sum Y^2 - N\bar{Y}^2 = 2596 - 12\,(14.33)^2$$

$$SCT = 131.81$$

$$SCE = \hat{\beta}'X'Y - N\bar{Y}^2 = (1.25 \quad -0.33 \quad 1.73)\begin{pmatrix} 172 \\ 449 \\ 1454 \end{pmatrix} - 12\,(14.33)^2$$

$$SCE = 2582.25 - 2464.19$$

$$SCE = 118.06$$

$$SCR = Y'Y - \hat{\beta}'X'Y = 2596 - 2582.25$$

$$SCR = 13.75$$

2. تقدير تباين الأخطاء $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$:

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon}}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\varepsilon}_i^2}{n-k-1}$$

$$= \frac{13.75}{12-2-1} = 1.52$$

3. تقدير مصفوفة التباين –التباين المشترك للمقدرات $\Omega_{\hat{\beta}}$:

$$\hat{\Omega}_{\hat{\beta}} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (X'X)^{-1}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = 1.52 \begin{bmatrix} 2.9026 & -0.198 & -0.281 \\ -0.198 & 0.0415 & 0.0104 \\ -0.281 & 0.0104 & 0.0312 \end{bmatrix}$$

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} 4.412 & -0.301 & -0.427 \\ -0.301 & 0.0631 & 0.0158 \\ -0.427 & 0.0158 & 0.0475 \end{bmatrix}$$

4. حساب جودة التوفيق والارتباط لكل من من R^2 و $\bar{R}^2$:

- يتم حساب معامل التحديد R^2 كالآتي:

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT}$$

$$R^2 = \frac{118.06}{131.81} = 0.8956$$

- أما فيما يخص معامل المصحح $\bar{R}^2$ يحسب كالآتي:

$$\bar{R}^2 = \left[1 - \left(1 - R^2\right)\frac{n-1}{n-k-1}\right]$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{12-1}{12-2-1}(1 - 0.8956) = 0.8724$$

- نستنتج أن القدرة التفسيرية عالية جدا.

5. حساب جدول تحليل التباين (ANOVA Table):

مصدر التغير	مجموع المربعات	درجة الحرية	متوسط مجموع المربعات
المتغير المفسر	$SCE = 118.06$	2	$\frac{118.06}{2} = 60.725$
البواقي	$SCR = 13.75$	9	$\frac{13.75}{9} = 1.52$
المجموع	$SCT = SCE + SCR$ $SCT = 131.81$	11	-

المحاضرة الثامنة.

5. بناء مجالات المعالم عند مستوى ثقة $(1-\alpha)\%$.
6. اختبار الفرضيات

   اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم

   اختبار المعنوية الكلية للنموذج
7. المتغيرات الصورية.
8. التنبؤ للانحدار الخطي المتعدد.

I. بناء مجالات المعالم عند مستوى ثقة %(1-α).

لدينا:

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}, \hat{\beta}_0 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \right]$$

$$\beta_2 = \left[\beta_2 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\hat{\beta}3}, \hat{\beta}_3 + tn - 3, \frac{\alpha}{2} \sigma_{\hat{\beta}3} \right]$$

هذا يعني أن هناك احتمال %(1-α) أن تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع β_i بين الحدين الأعلى والأدنى، وأن هناك احتمال %(α) أن تقع خارج هذين الحدين.

II. اختبار الفرضيات:

سيتم توضيح ذلك باستعمال اختبار ستيودنت واختبار فيشر حيث:

- اختبار ستيودنت - t أو يسمى اختبار المعنوية الفردية: يستعمل لتحديد ما إذا كان كل واحد من المتغيرات الإحصائية له معنوية إحصائية، ويطبق على كل متغير مستقل في النموذج.
- اختبار فيشر - F أو تسمى اختبار المعنوية الكلية: يستعمل لتحديد ما إذا كانت هناك علاقة معنوية بين المتغير التابع ومجموع المتغيرات المستقلة.
- **اختبار المعنوية الإحصائية للمعالم**

للتحقق من معنوية معامل الانحدار لنموذج انحدار الخطي المتعدد، لابد من اختبار فرضتين (العدم والبديلة) كالاتي:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

أي:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

تحت الفرضية H_0:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

القرار الإحصائي:

- يتم قبول فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_{cal}) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اقل أو يساوي من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal}=\frac{|\hat{\beta}_1|}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} \le t_{n-k-1}^{0.05}$ مما يدل على ذلك على عدم معنوية معامل الانحدار β_1.
- يتم رفض فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_{cal}) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اكبر من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal}=\frac{|\hat{\beta}_1|}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} > t_{n-k-1}^{0.05}$ مما يدل ذلك على معنوية معامل الانحدار β_1 أو نقول المعلمة دالة.

نقوم بنفس الاختبار والطريقة مع معامل التقاطع (الثابت) β_0 وباقي معالم الانحدار الخطي المتعدد على انفراد، إضافة إلى ذلك عندما يكون حجم العينة كبيرا $(n > 30)$ فينبغي استعمال التوزيع الطبيعي و يمكن أخذ القيمة الحرجة $z_{\alpha/2}$ و ذلك بحساب المساحة المظلة للتوزيع الطبيعي.

ملاحظة هامة: يجب أن تكون قيمة ستيودنت موجبة لمقارنتها مع القيمة الجدولية لهذا نقوم بإدراج القيمة المطلقة، أما فيما يخص قيمة ستيودنت الحرجة أو الجدولية عند مستوى احتمال 5% نستخرجها من جدول ستيودنت للقيم الحرجة.

وتوجد حالات أخرى لاختبار فرضيات المعالم كالآتي:

1. حالة اختبار مساواة معلمة لعدد محدد:

في هذه الحالة تكتب الفرضيتين على النحو الآتي:

$$H_0: \beta_i = A \quad \text{(فرضية العدم)}$$

$$H_1: \beta_i \neq A \quad \text{(الفرضية البديلة)}$$

حيث:

A: عدد حقيقي معلوم، ونتحصل على إحصائية ستيودنت محسوبة كالآتي:

تحت الفرضية H_0:

$$t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_i - A|}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} \rightarrow t_{n-k-1}$$

وتتم المقارنة والقرار الإحصائي بنفس الطريقة كالآتي:

القرار الإحصائي:

- يتم قبول فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_l) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اقل أو يساوي من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal}=\frac{|\hat{\beta}_i-A|}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} \leq t^{0.05}_{n-k-1}$ مما يدل على ذلك على عدم معنوية معلمة β_i.
- يتم رفض فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_{cal}) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اكبر من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal}=\frac{|\hat{\beta}_i-A|}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} > t^{0.05}_{n-k-1}$ مما يدل على ذلك على معنوية معلمة β_i أو نقول المعلمة دالة.

2. حالة اختبار معلمة اكبر من قيمة معينة:

في هذه الحالة لا يتم التعامل مع المساواة وتكتب الفرضيات على النحو الآتي:

$H_0: \beta_i = A$ (فرضية العدم)

$H_1: \beta_i \geq A$ (الفرضية البديلة)

حيث:

A: عدد حقيقي معلوم، ونتحصل على إحصائية ستيودنت محسوبة كالآتي:

تحت الفرضية H_0:

$$t_{cal}=\frac{|\hat{\beta}_i-A|}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} \rightarrow t_{n-k-1}$$

القرار الإحصائي:

- يتم قبول فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_l) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اقل أو يساوي من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal}=\frac{|\hat{\beta}_i-A|}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} \leq t^{0.05}_{n-k-1}$ مما يدل على ذلك على عدم معنوية معلمة β_i.
- يتم رفض فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_{cal}) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اكبر من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal}=\frac{|\hat{\beta}_i-A|}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} > t^{0.05}_{n-k-1}$ مما يدل على ذلك على معلمة β_i أكبر معنويا من A عند مستوى احتمال $\alpha\%$.

3. حالة اختبار معلمة اقل من قيمة معينة:

بنفس طريقة الحالة الثانية كالآتي:

$H_0: \beta_i = A$ (فرضية العدم)

$H_1: \beta_i \leq A$ (الفرضية البديلة)

حيث:

A: عدد حقيقي معلوم، ونتحصل على إحصائية ستيودنت محسوبة كالآتي:

تحت الفرضية H_0:

$$t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_i - A|}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} \rightarrow t_{n-k-1}$$

القرار الإحصائي:

- يتم قبول فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_l) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اقل أو يساوي من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_i - A|}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} \leq t_{n-k-1}^{0.05}$ مما يدل ذلك على عدم معنوية معلمة β_i.
- يتم رفض فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_{cal}) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اكبر من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_i - A|}{\sigma_{\hat{\beta}_i}} > t_{n-k-1}^{0.05}$ مما يدل ذلك على معلمة β_i اقل (اصغر) معنويا من A عند مستوى احتمال α%.

4. حالة اختبار اكثر من معلمة:

في هذه الحالة يتم اختبار على الأقل معلمتين هل يتساويان مع قيمة معينة كالآتي:

(فرضية العدم) $H_0: \beta_i + \beta_j = A$

(الفرضية البديلة) $H_1: \beta_i + \beta_j \neq A$ $i \neq j$

حيث:

A: عدد حقيقي معلوم، ونتحصل على إحصائية ستيودنت محسوبة كالآتي:

تحت الفرضية H0:

$$t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j - A|}{\sigma_{\hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j}} \rightarrow t_{n-k-1}$$

حيث يتم حساب المقام $\sigma_{\hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j}$ وفق العلاقة التالية:

$$\sigma_{\hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j} = \sqrt{\sigma_{\hat{\beta}_i}^2 + \sigma_{\hat{\beta}_j}^2 + 2cov(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j)}$$

القرار الإحصائي:

- يتم قبول فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_{cal}) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اقل أو يساوي من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j - A|}{\sigma_{\hat{\beta}_i + \hat{\beta}_j}} \leq t_{n-k-1}^{0.05}$ مما يدل ذلك على أن مجموع المعلمتين المقدرتين لا يختلف معنويا عن A عند مستوى احتمال α%.

- يتم رفض فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_{cal}) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اكبر من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal}=\frac{|\widehat{\beta}_i+\widehat{\beta}_j-A|}{\sigma_{\widehat{\beta}_i+\widehat{\beta}_j}} > t_{n-k-1}^{0.05}$ مما يدل على أن مجموع المعلمتين المقدرتين يختلف معنويا عن A عند مستوى احتمال α%.

5. حالة اختبار معلمة تساوي معلمة أخرى:

في هذه الحالة يتم اختبار معلمتين متساويتين كالآتي:

$H_0: \beta_i = \beta_j$ (فرضية العدم)

$H_1: \beta_i \neq \beta_j \quad i \neq j$ (الفرضية البديلة)

تحت الفرضية H0:

$$t_{cal}=\frac{|\widehat{\beta}_i-\widehat{\beta}_j|}{\sigma_{\widehat{\beta}_i-\widehat{\beta}_j}} \rightarrow t_{n-k-1}^{\alpha\%}$$

حيث يتم حساب المقام $\sigma_{\widehat{\beta}_i-\widehat{\beta}_j}$ وفق العلاقة التالية:

$$\sigma_{\widehat{\beta}_i-\widehat{\beta}_j} = \sqrt{\sigma_{\hat{\beta}_i}^2 + \sigma_{\hat{\beta}_j}^2 - 2cov(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j)}$$

القرار الإحصائي:

- يتم قبول فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_{cal}) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اقل أو يساوي من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal}=\frac{|\widehat{\beta}_i-\widehat{\beta}_j|}{\sigma_{\widehat{\beta}_i-\widehat{\beta}_j}} \leq t_{n-k-1}^{0.05}$ مما يدل على أن المعلمتين المقدرتين غير متساويتين معنويا عند مستوى احتمال α%.
- يتم رفض فرضية العدم H_0: اذا كانت (t_{cal}) المحسوبة بمستوى معنوية $(\alpha\%)$ للقيمة المطلقة اكبر من المجدولة (t_{tab}) أي: $t_{cal}=\frac{|\widehat{\beta}_i+\widehat{\beta}_j-A|}{\sigma_{\widehat{\beta}_i+\widehat{\beta}_j}} > t_{n-k-1}^{0.05}$ مما يدل على أن المعلمتين المقدرتين غير متساويتين معنويا عند مستوى احتمال α%.

III. اختبار المعنوية الكلية للنموذج (F): F-test

يستخدم اختبار (F) للتحقق من معنوية نموذج الانحدار الخطي المتعدد ككل من عدم معنويته، ولتحقيق هذا الغرض لابد من اختبار الفرضتين الآتيتين:

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \dots \beta_K = 0$ (فرضية العدم)

$H_1: \beta_1 \neq \beta_2 \neq \cdots \beta_K \neq 0$ (الفرضية البديلة)

أي:

H_0: الانحدار ككل ليس له دلالة معنوية

H_1: الانحدار ككل له دلالة معنوية

ويمكننا الحصول على إحصائية فيشر F من حاصل قسمة SCE/k على $SCR/\ n-k-1$ من جدول تحليل التباين، أي أن:

$$F^* = \frac{\frac{SCE}{k}}{\frac{SCR}{n-k-1}} = \frac{\frac{\sum_i (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{k}}{\frac{\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2}{n-k-1}}$$

كما توجد هناك علاقة بين توزيع فيشر F ومعامل التحديد R^2:

$$F^* = \frac{\frac{R^2}{k}}{\frac{(1-R^2)}{n-k-1}}$$

القرار الإحصائي:

يتم رفض فرضية العدم (H_0)، إذا كانت إحصائية فيشر المحسوبة اكبر من فيشر الجدولية عند مستوى احتمال $(\alpha\%)$ حيث $F^* > F^{\alpha}_{(k,n-k-1)}$، مما يدل ذلك على معنوية نموذج الانحدار الخطي المتعدد ككل.

حيث أن: (k تمثل عدد متغيرات المستقلة (المفسرة)، وn تمثل عدد المشاهدات (حجم العينة)).

يتم قبول فرضية العدم (H_0)، إذا كانت إحصائية فيشر المحسوبة اصغر أو يساوي فيشر الجدولية عند مستوى احتمال $(\alpha\%)$ حيث $F^* \leq F^{\alpha}_{(k,n-k-1)}$، مما يدل ذلك على عدم معنوية نموذج الانحدار الخطي المتعدد ككل.

IV. المتغيرات الصورية:

كثيرًا ما يُفترض وجود متغيرات محددة ذات أهمية كبيرة، على الرغم من كونها نوعية في طبيعتها ولا تأخذ سوى قيمتين فقط: 0 أو1، يُستخدم هذا النوع من المتغيرات، المعروف بالمتغيرات الثنائية أو الدمية (Dummy Variables)، عند الحاجة إلى إدراج عامل مستقل ثنائي، مثل: "حدوث الظاهرة أو عدم حدوثها"، أو لتمثيل متغيرات مستقلة ذات طابع نوعي، كالجنس (ذكر أو أنثى) على سبيل المثال.

الظاهرة تحدث:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

الظاهرة لا تحدث:

$$Y_i = \alpha_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

يمكن كتابة هاتين المعادلتين في معادلة واحدة:

$$Y_i = \beta_0 + (\alpha_0 - \beta_0) D_i + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

مع $D_i = 1$ عندما لا تحدث الظاهرة

و $D_i = 0$ عندما تحدث الظاهرة.

في هذه الحالة، يتم إدراج متغير مفسر إضافي ضمن النموذج الأصلي، وتُطبَّق طرق التقدير الكلاسيكية على النموذج المعدل. ويُطلق على هذا النوع من المتغيرات اسم "المتغير الصوري" (Dummy Variable)، وهو متغير ثنائي يأخذ القيمة 1 إذا تحقق شرط معين، و0 إذا لم يتحقق. ويُعد استخدام المتغيرات الصورية توسيعًا مهمًا لتحليل الانحدار، إذ يُمكِّن الباحث من إدراج متغيرات نوعية لا يمكن التعبير عنها بوحدات كمية. وبهذا، يُتيح هذا النوع من المتغيرات إمكانية قياس تأثير العوامل النوعية ذات الأهمية على المتغير التابع، مما يُعزز من شمولية ودقة التحليل القياسي.

V. التنبؤ للانحدار الخطي المتعدد:

تتناول هذه الفقرة مسألة التنبؤ بالقيم المستقبلية (أو القيم خارج العينة) لمتجه الملاحظات الخاص بالمتغير التابع، وذلك استنادًا إلى المعرفة المسبقة بمصفوفة القيم المستقبلية للمتغيرات المستقلة. ولتحقيق ذلك، نفترض أن النموذج الخطي العام قد تم تقديره ضمن فترة العينة T، ويُعبّر عنه بالشكل التالي:

$$\hat{Y} = X\hat{\beta}$$

ومقدر المربعات الصغرى العادية $\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = AY$ ، ويكون المقدر بفترة واحدة في المستقبل هو:

$$\hat{Y}_T(1) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{T+1,1} + \hat{\beta}_2 X_{T+1,2} + \hat{\beta}_3 X_{T+1,3} + ... + \hat{\beta}_k X_{T+1,k}$$

التنبؤ بعد فترتين في المستقبل:

$$\hat{Y}_T(2) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{T+2,1} + \hat{\beta}_2 X_{T+2,2} + \hat{\beta}_3 X_{T+2,3} + ... + \hat{\beta}_k X_{T+2,k}$$

التنبؤ بعد الفترة h في المستقبل:

$$\hat{Y}_T(h) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{T+h,1} + \hat{\beta}_2 X_{T+h,2} + \hat{\beta}_3 X_{T+h,3} + ... + \hat{\beta}_k X_{T+h,k}$$

حيث $h = 1,2,....,H$ يسمى بأفق التنبؤ.

وعليه نصل إلى التنبؤ بالفترة H في المستقبل:

$$\hat{Y}_T(H) = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{T+H,1} + \hat{\beta}_2 X_{T+H,2} + \hat{\beta}_3 X_{T+H,3} + ... + \hat{\beta}_k X_{T+H,k}$$

إذن إذا أردنا التنبؤ بمجموعة من الملاحظات المستقبلية بفترة تساوي H ملاحظة مرة واحدة يكون شعاع القيم التقديرية:

$$\hat{Y}_T(H)=\underset{(H\times 1)}{\begin{pmatrix}\hat{Y}_T(1)\\ \hat{Y}_T(2)\\ \vdots\\ \vdots\\ \hat{Y}_T(H)\end{pmatrix}}$$

أما مصفوفة ملاحظة المتغيرات المستقلة المستقبلية فهي:

$$X_{T+H}=\underset{(H\times(k+1))}{\begin{pmatrix}1 & X_{T+1,1} & X_{T+1,2} & \cdots & X_{T+1,k}\\ 1 & X_{T+2,1} & X_{T+2,2} & \cdots & X_{T+2,k}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & X_{T+H,1} & X_{T+H,2} & \cdots & X_{T+H,k}\end{pmatrix}}$$

ومنه يمكن كتابة النموذج الخطي العام المتنبأ به على الشكل: $Y_{T+H}=X_{T+H}\beta+\varepsilon_{T+H}$ ، كما يكون النموذج المقدر من الشكل: $\hat{Y}_T(H)=X_{T+H}\hat{\beta}$ ، ويكون متوسط مقدر التنبؤ هو:

$$E\left(\hat{Y}_T(H)\right)=X_{T+H}E\left(\hat{\beta}\right)=X_{T+H}\beta=E\left(Y_{T+H}\right)$$

ونقول أن $\hat{Y}_T(H)$ هو تنبؤ خطي غير متحيز للعبارة:

$$X_{T+H}\beta=E\left(Y_{T+H}\right)$$

ليكون التباين :

$$\operatorname{var}\left(\hat{Y}_T(H)\right)=\left[\left(\hat{Y}_T(H)-X_{T+H}\beta\right)\left(\hat{Y}_T(H)-X_{T+H}\beta\right)'\right]$$
$$=\sigma_\varepsilon^2X_{T+H}\left(X'X\right)^{-1}X'_{T+H}$$

لنعرف شعاع أخطاء التنبؤ:

$$\hat{\varepsilon}_{T+H}=Y_{T+H}-\hat{Y}_T(H)$$
$$E\left(\hat{\varepsilon}_{T+H}\right)=E\left(Y_{T+H}-\hat{Y}_T(H)\right)=0$$

أما تباين شعاع أخطاء التنبؤ فهو:

$$\operatorname{var}\left(\hat{\varepsilon}_{T+H}\right)=\operatorname{var}\left(Y_{T+H}-\hat{Y}_T(H)\right)=E\left[\left(-X_{T+H}\left(\hat{\beta}-\beta\right)+\varepsilon_{T+H}\right)\left(-X_{T+H}\left(\hat{\beta}-\beta\right)+\varepsilon_{T+H}\right)'\right]$$

لنجد في الأخير: $\operatorname{var}\left(\hat{\varepsilon}_{T+H}\right)=\sigma_\varepsilon^2X'_{T+H}\left(X'X\right)^{-1}X_{T+H}+\sigma_\varepsilon^2I_H$

ويُعد هذا التنبؤ أفضل تنبؤ خطي غير متحيز (Best Linear Unbiased Predictor - BLUP) يمكن الحصول عليه، حيث إذا عرفنا $\tilde{Y}_T(H)$ تنبؤ آخر خطي لعينة ملاحظات المتغير التابع مع متوسط خطا التنبؤ مساو للصفر $E(\tilde{\varepsilon}_{T+H})=E\left(Y_{T+H}-\tilde{Y}_T(H)\right)=0$ تكون لدينا المتراجحة:

$$\mathrm{var}\left(Y_{T+H}-\tilde{Y}_T(H)\right)-\mathrm{var}\left(Y_{T+H}-\hat{Y}_T(H)\right)\geq 0$$

ومنه يمكن القول أن $\hat{Y}_T(H)=X_{T+H}\hat{\beta}$ هو أحسن تنبؤ خطي غير متحيز.

وتكون اختبارات التنبؤ عن طريق إيجاد التوزيع الذي يعتبر فرضية العدم، والقائلة بأن النموذج الخطي العام يبقى محافظا على شكله من الملاحظة الأولى إلى الملاحظة $T+H$ في المستقبل، أي نفترض عدم تغير البناء الهيكلي للنموذج،

$$H_0:\quad \hat{Y}=X\hat{\beta}\quad t=1,2,3,\ldots\ldots T,T+1,\ldots,T+h,\ldots.,T+H$$

وذلك ضد الفرضية البديلة، والتي تقول أن نموذج العينة الأولى T يختلف عن نموذج التنبؤ للفترة H.

$$F=\frac{\left(Y_{T+H}-\hat{Y}_T(H)\right)'\left[X_{T+H}(X'X)^{-1}X'_{T+H}+I_H\right]^{-1}\left(Y_{T+H}-\hat{Y}_T(H)\right)/H}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}\quad\rightsquigarrow\quad F_{H,T-k-1}$$

وإذا كان $H=1$ يصبح التوزيع أعلاه على الشكل:

$$F=\frac{\left(Y_{T+1}-\hat{Y}_T(1)\right)'\left[X_{T+1}(X'X)^{-1}X'_{T+1}+1\right]^{-1}\left(Y_{T+1}-\hat{Y}_T(1)\right)}{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}\quad\rightsquigarrow\quad F_{1,T-k-1}$$

تمارين محلولة.

التمرين الاول:

ليكن النموذج التالي: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i : \quad i = 1.........n$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0303 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0.02 \end{bmatrix} \quad , \quad X'X = \begin{bmatrix} 33 & 0 & 0 \\ & 40 & 20 \\ & & 60 \end{bmatrix} \quad , \quad X'Y = \begin{bmatrix} 132 \\ 24 \\ 92 \end{bmatrix}$$

$SCR = 7.6 \quad , \quad t_{tab} = 1.96 \quad , \quad F_{tab} = 5.394$

المطلوب:

1. ما هو حجم العينة ؟
2. احسب شعاع المقدرات $\hat{\beta}$ ؟
3. اختبر معنوية المعالم المقدرة "كل معلمة على حدى" عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ؟
4. إيجاد مجال الثقة لمعالم النموذج عند مستوى ثقة 95% ؟
5. اختبر معنوية النموذج ككل عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$ ؟

حل التمرين الثالث:

1. حجم العينة: هو 33

2. حساب شعاع المقدرات: $\hat{\beta}$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0303 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0.02 \end{bmatrix} \rightarrow X'Y = \begin{bmatrix} 132 \\ 24 \\ 92 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y = \begin{bmatrix} 3.99 \\ -0.2 \\ 1.6 \end{bmatrix}$$

3. اختبر معنوية المعالم المقدرة "كل معلمة على حدى" عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$:

إيجاد التباين المقدرللمعلمات المقدرة .

$$\Omega_{\hat{\beta}} = \begin{bmatrix} \mathrm{var}(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_0 \hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) & Cov(\hat{\beta}_1 \hat{\beta}_2) \\ Cov(\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_2 \hat{\beta}_1) & Var(\hat{\beta}_2) \end{bmatrix}$$

لدينا : $\boxed{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}}$ $\boxed{\hat{\sigma}_e^2 = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}{n-k-1}}$

ومنه:

$$\sigma_e{}^2 = \frac{\sum e_i{}^2}{n-k-1} = \frac{7.6}{33-2-1} = 0.25$$

$$\boxed{\Omega_{\hat{\beta}} = \sigma_{\varepsilon}^{2}(X'X)^{-1}} = 0.25\begin{bmatrix} 0.0303 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & -0.01 \\ 0 & -0.01 & 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0.0075} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0.0075} & -0.0025 \\ 0 & -0.0025 & \mathbf{0.005} \end{bmatrix}$$

اختبر معنوية الحد الثابت عند مستوى معنوية α = 5%

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_0 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_0 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t وتساوي :

حيث أن:
$$t_c = \frac{|\hat{\beta}_0 - \beta_0|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}}$$

نلاحظ أن : $|t_c| \succ t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ $\quad t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_0|}{\sigma_{\hat{\beta}_0}} = \frac{|4|}{0.086} = 46.51$

القرار: نرفض H_0 أي المعلمة لها معنوية إحصائية.

اختبار معنوية الميل الأول عند مستوى معنوية α = 5%.

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_1 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_C وتساوي:

حيث أن:
$$t_C = \frac{|\hat{\beta}_1 - \beta_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_1 فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي:

نلاحظ أن : $|t_c| \succ t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$ $\quad t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_1|}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} = \frac{|-0.2|}{0.086} = 2.32$

القرار: نرفض H_0 أي المعلمة لها معنوية إحصائية.

اختبار معنوية الميل الثاني عند مستوى معنوية α = 5%

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_2 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_2 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_C وتساوي :

حيث أن:
$$t_C = \frac{\left|\hat{\beta}_2 - \beta_2\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}$$

وما دمنا نختبر فرضية العدم وتنص على انعدام β_2 فإن قيمة t_C تصبح على الشكل التالي:

$$t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_2|}{\sigma_{\hat{\beta}_2}} = \frac{|1.6|}{0.070} = 22.85$$

نلاحظ أن: $|t_c| \succ t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$

القرار: نرفض H_0 أي المعلمة لها معنوية إحصائية.

4 مجال الثقة لمعالم النموذج عند مستوى ثقة 95%:

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}, \hat{\beta}_0 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0}\right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}, \hat{\beta}_1 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}\right]$$

$$\beta_2 = \left[\beta_2 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\hat{\beta}3}, \hat{\beta}_3 + tn-3, \frac{\alpha}{2} \sigma_{\hat{\beta}3}\right]$$

$$\beta_0 \in [\,3.83 \;,\; 4.16]$$

$$\beta_1 \in [\,-0.36\,, -0.031]$$

$$\beta_2 \in [\,1.46 \;,\; 1.73]$$

5- اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار F عند مستوى معنوية α = 5%

الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها كالآتي:

(فرضية العدم) $H_0\colon \beta_0 = \beta_1 = \ldots \beta_K = 0$

(الفرضية البديلة) $\mathrm{H}_1\colon \beta_0 \neq \beta_1 \neq \cdots \beta_K \neq 0$

$$F^* = \frac{\frac{\mathrm{SCE}}{1}}{\frac{\mathrm{SCR}}{\mathrm{n-k-1}}} = \frac{\frac{142.4}{1}}{\frac{7.6}{33-2-1}} = 284.8 > \mathrm{F_{tab}} = 5.394$$

القرار: نرفض H_0 ومنه النموذج ككل له دلالة معنوية إحصائية.

التمرين الثاني:

لتقدير نموذج انحدار خطي متعدد معطى بالعلاقة التالية:

$$Y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i$$

تم الحصول على الحسابات التالية:

$\sum x_{1i}^2=144$, $\sum x_{2i}^2=126$, $\sum x_{1i}x_{2i}=131$, $\sum x_{1i}y_i=225$, $\sum x_{2i}y_i=213$, $\sum {y_i}^2 = 366.1$

$n=10$, $R^2 = 0.987$, $\bar{R}^2=0.984$, $Var(\hat{\beta}_0)=0.9652$, $Var(\hat{\beta}_1)=0.0808$, $Var(\hat{\beta}_2)=0.0924$ $\bar{X}_2 = 8$, $Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2)=-0.08405$, $\bar{X}_1 = 11$, $\bar{Y} = 30.3$, $t_{tab}=2.365$, $F_{tab}= 4.74$

المطلوب:

1. قدر معلمات النموذج؟
2. اختبر معنوية للمعلمتين المقدرتين $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$ عند مستوى 5%؟
3. كون حدود الثقة للمعلمتين الحقيقيتين باحتمال95%؟
4. تم الحصول على جدول تحليل التباين ANOVA الاتي مع تقدير العلاقة السابقة:

MODEL	مجموع المربعات Sumof Squares	درجات الحرية DF	متوسط المربعات Mean Squares	احصائيةF
Régression الانحدار	......	......	......	
Residual البواقي	......	......	......	......
Total المجموع	......	......		

a. اكمل الجدول؟

b. اختبر المعنوية الإحصائية الكلية للنموذج المقدر؟

c. تنبا بقيمة $\hat{Y}_n$ ، عند $x_{1f} = 12$ و $x_{2f} = 13$.

حل التمرين الثاني:

4. تقدير معلمات النموذج:

$$\hat{\beta}_1=\frac{(\sum x_2^2)(\sum x_1 y)-(\sum x_1 x_2)(\sum x_2 y)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2)-(\sum x_1 x_2)^2}=\frac{(225)(126)-(213)(131)}{(144)(126)-(131)^2}$$

$$=\frac{447}{983}=0.45$$

$$\hat{\beta}_2=\frac{(\sum x_1^2)(\sum x_2 y)-(\sum x_1 y)(\sum x_1 x_2)}{(\sum x_1^2)(\sum x_2^2)-(\sum x_1 x_2)^2}=\frac{(213)(144)-(225)(131)}{(144)(126)-(131)^2}$$

$$= \frac{1197}{983} = 1.22$$

5. اختبر معنوية للمعلمتين المقدرتين $\hat{\beta}_2$ ، $\hat{\beta}_1$ عند مستوى 5%:

اختبار معنوية $\hat{\beta}_1$:

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_1 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_1 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_C وتساوي:

$$t_C = \frac{\left|\hat{\beta}_1 - \beta_1\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}$$

حيث أن:

نلاحظ أن :

نلاحظ أن : $\left|\frac{\hat{\beta}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1}}\right| \leq t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$

$$t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_1|}{\sigma_{\hat{\beta}_1}} = \frac{|0.45|}{\sqrt{0.0808}} = 1.58$$

القرار: نقبل H_0 أي المعلمة ليس لها معنوية إحصائية.

اختبار معنوية $\hat{\beta}_2$:

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0 : \beta_2 = 0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1 : \beta_2 \neq 0$ (الفرضية البديلة)

يتم هذا لاختبار بإيجاد القيمة المحسوبة t_C وتساوي :

$$t_C = \frac{\left|\hat{\beta}_2 - \beta_2\right|}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}_2}}$$

حيث أن:

نلاحظ أن: $|t_c| \succ t_{n-2,\frac{\alpha}{2}}$

$$t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_2|}{\sigma_{\hat{\beta}_2}} = \frac{|1.22|}{\sqrt{0.0924}} = 4.01$$

القرار: نرفض H_0 أي المعلمة لها معنوية إحصائية.

6. تكوين حدود الثقة للمعلمتين عند مستوى ثقة 95% :

$$\beta_0 \in \left[\hat{\beta}_0 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} , \hat{\beta}_0 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_0} \right]$$

$$\beta_1 \in \left[\hat{\beta}_1 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} , \hat{\beta}_1 + t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \hat{\sigma}_{\hat{\beta}_1} \right]$$

$$\beta_2 = \left[\beta_2 - t_{n-3,\frac{\alpha}{2}} \sigma_{\hat{\beta}3} , \hat{\beta}_3 + tn-3, \frac{\alpha}{2} \sigma_{\hat{\beta}3} \right]$$

$$\beta_1 \in [-0.21 \quad , \quad 1.11]$$

$$\beta_2 \in [0.51 \quad , \quad 1.92]$$

7. جدول تحليل التباين ANOVA.

a. اكمل الجدول:

MODEL	مجموع المربعات Sumof Squares	درجات الحرية DF	متوسط المربعات Mean Squares	احصائيةF
Régression الانحدار	361.11	2	180.55	254.30
Residual البواقي	4.99	7	0.71	
Total المجموع	366.1	9		

SCT = 366.1

$SCE = \hat{\beta}'X'Y = (0.45 \quad 1.22)\binom{225}{213} = 361.11$

SCR = 4.99

b. اختبار معنوية المعلمات باستخدام اختبار F عند مستوى معنوية:

الصيغة الرياضية للفرضية المراد اختبارها كالآتي:

(فرضية العدم) $\quad H_0: \beta_0 = \beta_1 = \dots \beta_K = 0$

(الفرضية البديلة) $\quad H_1: \beta_0 \neq \beta_1 \neq \cdots \beta_K \neq 0$

$$F^* = \frac{\frac{SCE}{2}}{\frac{SCR}{n-k-1}} = \frac{\frac{361.11}{2}}{\frac{4.99}{7}} = 254.30 > F_{tab} = 4.74$$

القرار: نرفض H_0 ومنه النموذج ككل له دلالة معنوية إحصائية (صلاحية النموذج).

التنبؤ بقيمة $\hat{Y}_n$: عند $x_{1f} = 12$ و $x_{2f} = 13$

$$Y_n = 0.45(12) + 1.22(13) = 21.26$$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول:

ليكن النموذج التالي: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i : \quad i = 1.........n$

لدينا:

$$\sum_i \hat{\varepsilon}_i^2 = 733.725 \quad , \quad R^2 = 0.995$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 30 & ؟ & ؟ \\ 94.55 & 527.4 & ؟ \\ 465 & 2162.25 & 9455 \end{bmatrix}, (X'Y) = \begin{bmatrix} 2849.66 \\ 12918.71 \\ 56784.312 \end{bmatrix} (X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.3438 & ؟ & ؟ \\ 0.1231 & 0.0744 & ؟ \\ -0.045 & -0.023 & 0.0076 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

1. أوجد القيم الناقصة في المصفوفتين $(X'X)^{-1}$ و $(X'X)$.
2. احسب القيم: n و $\bar{X}_1$ و $\bar{X}_2$ و $\bar{Y}$.
3. احسب شعاع المقدرات $\hat{\beta}$ باستخدام (المصفوفات).
4. احسب كل من: SCR, SCT, SCE.
5. احسب تباين الأخطاء.
6. احسب تباين معلمات النموذج.
7. أعطي التنبؤ لـY_{31} علما أن $X_{1,31}=5$ و $X_{2,31}=18$؟ أنشئ مجال التنبؤ ل Y_{31} عند مستوى معنوية 5%؟

التمرين الثاني:

لتكن لدينا بيانات واقع البيانات السنوية المتمثلة في حجم المبيعات Y (ألف وحدة) الذي يعتمد على (متوسط دخل الفرد السنوي (ألف دينار) (X_1) والمعدل السنوي لدرجة الحرارة (درجة مئوية) (X_2)، على النحو الآتي:

السنوات n	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Y	20	25	30	24	35	40
X_1	1.5	3	4	6	7	10
X_2	26	20	25	22	18	15

المطلوب:

1. قدر معادلة النموذج $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i : \quad i = 1.........n$ باستخدام طريقة الانحرافات (المختصرة)؟
2. احسب كل من: SCR, SCT, SCE.
3. احسب معامل التحديد؟ ثم فسر النتيجة؟

4. اختبار المعنوية الكلية للنموذج عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$؟

التمرين الثالث:

ليكن النموذج التالي: $Y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+\beta_2X_{i2}+\varepsilon_i:\quad i=1.........n$

لدينا:

$$(X'Y)=\begin{bmatrix}116\\1342\\1298\end{bmatrix}\quad,\quad (X'X)^{-1}=\begin{bmatrix}1.1725 & 0.0852 & -0.1921\\0.0852 & 0.0284 & -0.0362\\-0.1921 & -0.0362 & 0.0547\end{bmatrix}$$

مع العلم أن حجم العينة n=10 ومجموع مربعات الانحدار هو SCE=254.58

ومجموع المربعات الكلية هو SCT=256.4

المطلوب:

1. احسب شعاع المقدرات $\hat{\beta}$؟ كتابة النموذج المقدر.
2. احسب مجموع مربعات الأخطاء SCE.
3. احسب تباين الأخطاء.
4. احسب تباين معلمات النموذج؟ وكذا الانحراف المعياري لكل معلمة مقدرة.
5. احسب معامل التحديد؟ ثم فسر النتيجة؟
6. احسب إحصائية فيشر F؟

التمرين الرابع:

ليكن النموذج التالي: $Y_i=\beta_0+\beta_1X_{i1}+\beta_2X_{i2}+\varepsilon_i:\quad i=1.........n$

لدينا:

$$(X'X)=\begin{bmatrix}10 & 90 & 60\\90 & 954 & 671\\60 & 671 & 486\end{bmatrix}\quad,\quad (X'Y)=\begin{bmatrix}285\\2804\\1935\end{bmatrix},\quad SCT=\sum_i(Y_i-\bar{Y})^2=408.50$$

$$F_{tab}=4.74\quad,\quad t_{tab}=2.365$$

المطلوب:

1. احسب شعاع المقدرات $\hat{\beta}$ باستخدام (المصفوفات).
2. احسب تباين الأخطاء.
3. احسب تباين معلمات النموذج.
4. احسب انحراف معلمات النموذج.
5. إيجاد معادلة تحليل التباين.
6. إعداد جدول تحليل التباين.

7. أوجد معامل التحديد. معا تفسير النتيجة.
8. ايجاد معامل التحديد المصحح.
9. اختبر معنوية معالم النموذج عند مستوى معنوية 5%؟
10. اختبر معنوية الإحصائية الكلية للنموذج المقدر عند مستوى معنوية 5%؟

المحور الرابع: المشاكل القياسية.

المحاضرة التاسعة: مشكل التعدد (الازدواج) الخطي.

1 مفهوم التعدد الخطي.

2 أنواع التعدد الخطي.

3 اسباب ظهور الخطي.

4 اختبارات الكشف عن التعدد الخطي.

5 حلول (معالجة) التعدد الخطي.

1. مفهوم التعدد الخطي و أنواعه:

- **مفهوم مشكلة التعدد الخطي:**

جاءت هذه المشكلة على لسان Ragnar Frisch، في كتابه المرسوم "تحليل الأثر الإحصائي" سنة 1934 بان المتغيرات تترابط فيما بينها لمتغيرين أو اكثر دون الإشارة إلى ما تسببه هذه المشكلة من مشكلة وتشوهات في النموذج المقدر، أي فمثلا عند تقدير نموذج قد يظهر معامل التحديد المتعدد عالي جدا ويتبعه ارتفاع في معامل الارتباط الكلي وبالتالي قيمة اختبار F ستكون عالية جدا بينما ستكون تباينات المعالم كبيرة جدا مما يؤثر على قيم المعالم وتكون غير معنوية باستخدام t وبالتالي إلى حدوث تقدير مزيف لا يعكس حقيقة الظاهرة وقد يبنى عليها قرارات مزيفة أيضا، ويقصد بها أيضا وجود علاقة خطية تامة أو كاملة بين بعض أو كل المتغيرات المفسرة الموجودة في نموذج الانحدار الخطي المتعدد، ومن ثم فإن مشكلة التعدد الخطي لا توجد في حالة الانحدار البسيط و إنما يوجد فقط في حالة الانحدار المتعدد وهذه المشكلة قد تصيب احد أنواع من الارتباط الخطي المتعدد والذي ينقسم بدوره إلى قسمين على النحو الاتي:

- **الارتباط الخطي التام:**

عند وجود علاقة ارتباط تامة بين متغيرين تفسيريين أو بين جميع المتغيرات التفسيرية المكونة للنموذج يصبح محدد المصفوفة $(X'X)$ يساوي صفرا، حيث يستحيل إيجاد معكوس المصفوفة $(X'X)$، وبالتالي عدم إمكانية استخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS)،

- **الارتباط الخطي غير التام:**

يكون في هذه الحالة محدد المصفوفة قريبًا من الصفر الذي معه تضمحل قدرة (OLS) ، على عكس الخصائص الحقيقية للمعلمات، مما يؤدي إلى تقليل دقة النموذج في التنبؤ. على سبيل المثال، في نموذج ارتباط خطي متعدد يحتوي على متغيرين مستقلين كما يلي:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon_t$$

إذا حدث ارتباط بين X_1 و X_2 كما يلي :

$$X1 = AX_2$$

نقول أن هناك مشكلة ارتباط خطي متعدد، ومعامل الارتباط البسيط بين المتغيرين المستقلين يساوي الواحد الصحيح:

$$r_{X1X2} = \frac{\sum(X_{1i} - \bar{X}_1)(X_{2i} - \bar{X}_2)}{\sqrt{\sum(X_{1i} - \bar{X}_1)}\sqrt{\sum(X_{2i} - \bar{X}_2.)}.}$$

باستخدام معامل الارتباط r_{X1X2} أو مر بعها معامل التحديد $r^2{}_{X1X2}$ نحدد إذا كان هناك ارتباط خطي متعدد.

- إذا كان معامل الارتباط $r_{X1X2}=0$ يساوي الصفر فانه ليس هناك مشكلة ارتباط خطي متعدد.
- إذا كانت هناك ارتباط كامل آي أن $r_{X1X2}=1$ فنول أن هناك ارتباط خطي متعدد تام، وعند حدوث الارتباط الخطي التام لا نستطيع إجراء التقدير باستخدام المربعات الصغرى العادية ، ولكن هذه المشكلة لا تحدث كثيرا في الدراسات العملية إلا في ظروف استثنائية ويمكن معالجتها بحذف أحد المتغيرات لان الآخر يقوم مقامه..

أسباب التعدد الخطي :

ترجع مشكلة التعدد الخطي إلى عدة عوامل رئيسية، من أبرزها:

- تميل المتغيرات الاقتصادية إلى التغير بشكل متزامن على مر الزمن، حيث تتأثر جميعها بالعوامل نفسها. فعلى سبيل المثال، في فترات الرواج الاقتصادي أو النمو السريع، تزداد معظم المتغيرات الاقتصادية مثل الطلب الكلي على السلع والخدمات، مما يؤدي إلى زيادة الإنتاج، العمالة، الدخل، الاستثمار، الاستهلاك، والادخار، مع ارتفاع الأسعار. وعلى النقيض من ذلك، تحدث هذه التغيرات بشكل عكسي خلال فترات الكساد الاقتصادي.
- استخدام المتغيرات التي تحتوي على فجوات زمنية كمتغيرات تفسيرية في نماذج الانحدار. على سبيل المثال، قد يظهر الدخل الحالي ودخل الفترة السابقة في دالة الاستهلاك كمتغيرات مستقلة تؤثر في استهلاك الفترة الحالية، مما يجعل دالة الاستهلاك تتخذ الصيغة التالية:

$$C_t = \alpha + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_t$$

- على الرغم من أن مشكلة التعدد الخطي تظهر عادة عند استخدام بيانات السلاسل الزمنية، إلا أنها قد تظهر أيضًا في بعض الحالات عند استخدام بيانات قطاعية. على سبيل المثال، في حال استخدام بيانات قطاعية لمجموعة من المؤسسات الصناعية لتقدير دالة الإنتاج، قد تظهر علاقة قوية بين الكميات المستخدمة من العمل ورأس المال كمتغيرات مستقلة. ويعود ذلك إلى أن المؤسسات الكبيرة غالبًا ما تستخدم كميات كبيرة من كل من العمل ورأس المال، بينما تستخدم المؤسسات الصغيرة كميات أقل من كليهما.
- قد تؤدي قلة حجم العينة، بحيث يصبح عدد المشاهدات قريبًا من عدد المتغيرات التفسيرية، إلى ظهور مشكلة التعدد الخطي، وهي ما تُعرف بمشكلة صغر حجم العينة.

اختبار وجود مشكلة التعدد الخطي:

1. اختبار Klein:

يعتقد كلاين أن الارتباط الخطي المتعدد لا يعد مشكلة إلا إذا كان هذا الارتباط أكبر نسبياً من درجة الارتباط المتعدد الكلي بين جميع المتغيرات في النموذج في الوقت ذاته. ويعتبر كلاين أن الارتباط الخطي يصبح مؤذياً عندما يكون الارتباط الداخلي بين المتغيرات المستقلة أكبر من الارتباط الكلي. لكن $r^2_{X1X2} \succ R^2_{YX1X1....Xm}$ يُنتقد هذا الاختبار لأن درجة الارتباط الداخلي بين المتغيرات المستقلة ليست مقياسًا دقيقًا لتأثير التعدد الخطي على تقديرات المعلمات وقيم الأخطاء المعيارية. فقد تكون معاملات الارتباط البسيط بين المتغيرات المستقلة منخفضة رغم وجود مشكلة تعدد خطي كبيرة.

2. طريقة Farrar-Glauber:

لاكتشاف ظاهرة التعدد الخطي يتبع Farrar-Glauber الخطوات التالية:

1. حساب محدد مصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} & r_{X_1X_3} & \cdots & r_{X_1X_k} \\ r_{X_2X_1} & 1 & r_{X_2X_3} & \cdots & r_{X_2X_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{X_kX_k} & r_{X_kX_2} & r_{X_kX_3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

عندما تكون قيمة المحدد تقترب من الصفر، فإن هناك دليل على وجود تعدد خطي.

2. نستعمل اختبار χ^2 وذلك بوضع الفرضيات التالية:

$$H_0 : \mathrm{D} = 1 \quad \text{(استقلال خطي)}$$

$$H_1 : \mathrm{D} < 1 \quad \text{(ارتباط خطي)}$$

إحصائية Farrar-Glauber (القيمة المحسوبة) تعرف كما يلي:

$$\chi^2 * = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k+5)\right].\ln D$$

حيث n هو حجم العينة، k هو عدد المتغيرات في النموذج مضاف اليه الحد الثابت و ln هو اللوغاريتم النبيري.

إذا كانت قيمة $\chi^2 *$ أكبر تماما من القيمة المجدولة لتوزيع χ^2 بدرجة حرية $\frac{1}{2}k(k-11)$ ونسبة معنوية α، نقبل H_1 أي هناك تعدد خطي.

علاج مشكلة التعدد الخطي:

يعتمد علاج مشكلة التعدد الخطي على طبيعة المشكلة نفسها، ويمكن تمييز عدة حالات في هذا الصدد:

- إذا كانت المتغيرات التفسيرية المرتبطة لها تأثير ضئيل على الظاهرة المدروسة، فقد يكون الحل في استبعاد هذه المتغيرات. ومع ذلك، يجب أن نلاحظ أن هذا الحل قد يؤدي إلى ظهور مشكلة الارتباط الذاتي في المقابل.
- يمكن أيضًا توسيع حجم العينة بإضافة بيانات إضافية تتعلق بالمتغيرات الخاصة بالظاهرة المدروسة، مما يساعد في تقليل التباينات، حيث توجد علاقة عكسية بين حجم العينة وقيمة التباين.
- في حال توافرها، يمكن الاستفادة من المعلومات السابقة كأداة لحل المشكلة.
- من الأساليب الأخرى لعلاج التعدد الخطي هو تحويل المتغيرات. نظرًا لأن المتغيرات الاقتصادية تميل إلى التغير بنفس الاتجاه عبر الزمن، يمكن استخدام النسب والفروقات بدلاً من المتغيرات الأصلية لتفادي هذا التأثير. إلا أن هذه الطريقة ليست مضمونة بشكل كامل للتخلص من مشكلة التعدد الخطي.

المحاضرة العاشرة: مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء.

1 مفهوم مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء.

2 اسباب مشكلة الارتباط الذاتي.

3. أثار مشكلة الارتباط الذاتي.

4. طرق تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ .

5. اختبارات الكشف عن الارتباط الذاتي.

6 تصحيح النموذج.

- **مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء.**

1 مفهوم مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء.

يشير الارتباط الذاتي عمومًا إلى وجود ارتباط بين القيم المشاهدة لنفس المتغير. وفي نماذج الانحدار، تتعلق مشكلة الارتباط الذاتي بوجود ارتباط بين القيم المتتالية للحد العشوائي. في هذه الحالة، تكون قيمة معامل الارتباط بين القيم المتتالية للحد العشوائي غير صفرية $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0$، ويؤدي وجود مشكلة ارتباط ذاتي إلى خرق أحد الافتراضات التي تعتمد عليها طريقة المربعات الصغرى العادية، حيث يفترض أن الأخطاء في فترة معينة لا تؤثر على الأخطاء في الفترات التالية. وبالتالي، قد يتسبب ذلك في تأثير تكراري للخطأ نفسه عبر الفترات، مما يعني أن هناك خطأ واحد يتكرر في الفترات التالية ويؤدي إلى ظهور قيم الحد العشوائي بطريقة تختلف عن القيم الحقيقية.

يتم خرق فرض انعدام التغاير عادة في الدراسات التي تعتمد على بيانات سلاسل زمنية، مما يعني أن الحدث الذي وقع في سنة معينة يتأثر بالأحداث التي وقعت في السنة السابقة. يشبه الارتباط الذاتي في هذا السياق رمي حجر في الماء، حيث تبدأ تأثيرات الحجر في التلاشي تدريجيًا، لكن ذلك يستغرق وقتًا. وكلما تقلص الزمن بين المشاهدات، زاد احتمال وجود الارتباط الذاتي. لهذا السبب، وهذا ما يجعلنا نوجه اهتمام أكثر لوجوده في الفترات التي تضم أشهر أو فصول أكثر من المشاهدات التي تمر على سنوات.

من هذا فإننا عندما نتكلم عن الارتباط الذاتي للأخطاء يستخدم هذا التعبير $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-s}) \neq 0$ ويشير إلى أن التشتت الذي يحدث في الفترة t له علاقة للتشتت الذي يحدث في الفترة t-s كما أن النتائج المترتبة على الارتباط الذاتي في التقدير يعتمد على طبيعة الارتباط الذاتي نفسه،

2. أسباب وجود الارتباط الذاتي:

تتعدد الأسباب التي تؤدي إلى وجود الارتباط الذاتي بين القيم المشاهدة للحد العشوائي، وأهمها ما يلي:

- حذف بعض المتغيرات التفسيرية أو المستقلة من نموذج الانحدار.
- الأخطاء في صياغة الشكل الرياضي للنموذج.
- الأخطاء في معالجة البيانات: في بعض الأحيان، قد تكون البيانات المتاحة على أساس شهري، بينما يحتاج الباحث إلى بيانات ربع سنوية. في هذه الحالة، قد يقوم الباحث بتجميع بيانات كل ثلاثة أشهر وحساب متوسط لها، مما يؤدي إلى تمثيل هذه البيانات بنقطة واحدة فقط، وهو ما يتسبب في تقليل التقلبات ويؤدي إلى نوع من التقريب.
- تأثير الفقاعة والآثار الممتدة لها: قد تؤدي العوامل العشوائية الطارئة مثل الكوارث الطبيعية والحروب والاضطرابات إلى ترابط في قيم المتغير العشوائي على مدار عدة فترات. تمتد تأثيرات هذه العوامل لأكثر

من فترة زمنية، مما ينعكس على قيم المتغير التابع عبر عدة فترات، ويخلق حالة من الارتباط الذاتي الحقيقي.

3. آثار مشكلة الارتباط الذاتي:

يمكن تلخيص أهم آثار مشكلة الارتباط الذاتي فيما يلي:

- لا يؤثر وجود الارتباط الذاتي على درجة تحيز القيم المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية، حيث تبقى القيم المقدرة غير متحيزة رغم هذه المشكلة. كما تبقى تقديرات هذه الطريقة متسقة، ولكن تفتقر إلى الكفاءة.
- يؤدي وجود مشكلة الارتباط الذاتي إلى تقليص حجم الأخطاء المعيارية للمعلمات المقدرة عند استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية، مما يترتب عليه:

أ- تضخم معنوية المعلمات المقدرة.

ب- عدم دقة فترات الثقة التي يتم حسابها باستخدام الأخطاء المعيارية.

ج- قد يؤدي إلى عدم صلاحية استخدام اختبار ستودنت.

- تصبح التنبؤات المستخلصة من النموذج غير دقيقة.
- يحدث مبالغة في تقدير معامل التحديد R^2.

4. طرق تقدير معامل الارتباط الذاتي ρ :

1. تقدير بطريقة ديربن – واتسون:

وتحسب قيمة معامل الارتباط الذاتي من العلاقة التالية :

$$\hat{\rho} = 1 - \left(\frac{DW}{2}\right)$$

2. تقدير ρ بطريقة Theil-Nagar:

وتحسب قيمة معامل الارتباط الذاتي من العلاقة التالية:

$$\hat{\rho} = \frac{n^2\left[1-\left(DW/2\right)\right]+\left(k+1\right)^2}{n^2-\left(k+1\right)^2}$$

حيث: k هي عدد المتغيرات المستقلة.

n: هي عدد المشاهدات.

DW: هي إحصائية ديربن – واتسون .

اختبارات الكشف عن الارتباط الذاتي:

أولا: اختبار ديربن – و اتسون.

يعد اختبار ديربن-واتسون من أكثر الاختبارات استخدامًا في مختلف العينات، حيث توجد اختبارات أخرى قد تكون أكثر قوة من الناحية الإحصائية، لكن قوتها تظهر بشكل أكبر في العينات ذات الحجم الكبير. ولذلك، يفضل اختبار ديربن-واتسون على العديد من الاختبارات الأخرى، بالإضافة إلى بساطته من حيث الفكرة والتطبيق.

يتم تخصيص هذا الاختبار للكشف عن ارتباط الذاتي من الدرجة الأولى كما يلي:

$$\varepsilon_t = \rho u_{t-1} + w_t$$

لا يوجد ارتباط ذاتي بين الأخطاء $H_0 : \rho = 0$ (فرضية العدم)

يوجد ارتباط ذاتي بين الأخطاء $H_1 : \rho \neq 0$ (الفرضية البديلة)

إذا كانت ρ تساوي صفر تكون $\rho\varepsilon_{t-1}$ صفر ، وبذلك تكون $\varepsilon_t = w_t$ ، وحيث أن w_t تستوفي جميع فروض م ص ع ، وبالتالي يكون المتغير العشوائي للنموذج يستوفي م ص ع، كما هناك أكثر من فرضية بديله يمكن أن تفترض، فهناك الحالة التي يكون فيها الارتباط الذاتي موجب وهو الأكثر حدوثا في الدراسات الاقتصادية لكن أحيانا يكون عندك ارتباط ذاتي سالب.

ولاختبار فرضية العدم H_0 يجب حساب إحصائية $(D-W)$ من الصيغة التالية:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

أو $DW = 2(1-\rho)$ ويتضح من هذه المعادلة أنه:

- إذا كانت $\rho = 0$ فإن $DW \cong 2$.
- إذا كانت $\rho = +1$ فإن $DW \cong 0$.
- إذا كانت $\rho = -1$ فإن $DW \cong 4$.

العلاقة بين ديربن و اتسون ومعلمة الارتباط الذاتي:

إذا أخذنا إحصاء **ديربن – و اتسون** المحسوب

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

نلاحظ أن البسط يبدأ بالمشاهدة الثانية نسبة لظهور البواقي المتباطئة في البسط.

$$DW=\frac{\sum e_t^2}{\sum e_t{}^2}+\frac{\sum e_{t-1}^2}{\sum e_t^2}-2\frac{\sum e_t e_{t-1}^2}{\sum e_t^2}..................01$$

لدينا : " تقدير $\hat{\rho}$ عن طريق المربعات الصغرى العادية للعلاقة : $\varepsilon_t=\rho u_{t-1}+w_t$

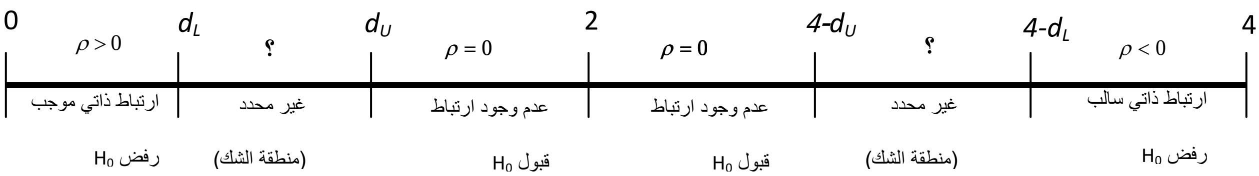
$$\hat{\rho}=\frac{\sum e_t e_{t-1}^2}{\sum e_t^2}\quad \sum e_t{}^2\approx\sum e^2{}_{t-1}$$

وبالتالي فإن العلاقة رقم 01 تصبح:

وبالتالي:

$$DW=1+1-2\hat{\rho}$$
$$DW=2-2\hat{\rho}$$
$$DW=2(1-\hat{\rho})$$

يوضح الشكل التالي القيم الجدولية للاختبار DW، التي تشير إلى وجود أو عدم وجود الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى سواء كان موجبًا أو سالبًا، أو التي تجعل نتيجة الاختبار غير حاسمة.



وبالاعتماد على هذا الشكل يمكن الحصول على نتيجة هذا الاختبار على النحو التالي:

- إذا كانت $DW\prec d_L$ أو $DW\succ 4-d_L$ يرفض H_0.
- إذا كانت $4-d_U\succ DW\succ d_U$ يقبل H_0.
- إذا كانت $4-d_U\le DW\le 4-d_L$ أو $d_L\le DW\le d_U$ تكون نتيجة الاختبار غير محددة.

عيوب اختبار ديربن – و اتسون:

- مناطق اللاحسم يقترح البعض ضم منطقة اللاحسم إلى منطقة الرفض.
- لا يطبق على النماذج التي لا تحتوي على قاطع.
- لا يستخدم إذا كان كان هناك متغيرة تابعة كمتغيرة مستقلة متأخرة زمنيا، على سبيل المثال:

$$Y_t=\beta_0+\beta_1X_t+\gamma Y_{t-1}+\varepsilon_t$$

للتعامل مع مثل هذه الحالات يقترح استخدام الاختبارين التاليين:

اختبار دير بن h أو اختبار لاجرانج LM.

ثانيا: اختبار Breush-Godfrey (LM).

يرتكز هذا الاختبار على مضاعف لاغرانج و الذي يسمح باختبار وجود ارتباط ذاتي من درجة أكبر من الواحد، لنموذج الانحدار الذاتي للأخطاء من الدرجة p يكتب على الشكل التالي:

$$\varepsilon_t = \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + u_t$$

ليكن النموذج العام حيث أن الأخطاء مرتبطة ذاتيا:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \ldots + \beta_k X_{tk} + \rho_1 \varepsilon_{t-1} + \rho_2 \varepsilon_{t-2} + \ldots + \rho_p \varepsilon_{t-p} + u_t$$

هناك ثلاث خطوات لإجراء هذا الاختبار:

- تقدير النموذج العام بطريقة المربعات الصغرى ثم حساب البواقي $\hat{\varepsilon}_t$
- تقدير المعادلة الوسيطية التالية:

$$\hat{\varepsilon}_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \ldots + \beta_k X_{tk} + \rho_1 \hat{\varepsilon}_{t-1} + \rho_2 \hat{\varepsilon}_{t-2} + \ldots + \rho_p \hat{\varepsilon}_{t-p} + u_t$$

ثم نحسب R^2 من المعادلة الأخيرة، بعد ذلك نجري الاختبار التالي:

لا يوجد ارتباط ذاتي: $H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_P = 0$

يوجد ارتباط ذاتي: على الأقل واحد لا يساوي الصفر $H_1 : \rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_P = 0$

- إذا كانت: $(n-p)*R^2 \prec \chi^2(P)$ فإننا نقبل H_0.
- إذا كانت: $(n-p)*R^2 \succ \chi^2(P)$ فإننا نقبل H_1 ويعني هذا وجود ارتباط ذاتي بين الأخطاء من الدرجة (P).

تصحيح النموذج: في حالة وجود الارتباط الذاتي تفقد المقدرات صفة الكفاءة، وللحصول على مقدرات تستوفي جميع شروط المربعات الصغرى العادية يتم تصحيح النموذج باستخدام شبه الفروق كما يلي:

- ✓ نقدر معامل الارتباط الذاتي بإحدى الطريقتين المذكورة سابقا.
- ✓ نحول المتغيرات الأصلية إلى متغيرات شبه الفروق كالاتي:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$$
$$X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

كما أن عند استخدام شبه الفروقات، نفقد المشاهدة الأولى لكل متغير ولتجنب ضياعها، نضع:

$$Y_1^* = Y_1 \sqrt{1-\rho^2}$$
$$X_{1,j}^* = X_{1,j} \sqrt{1-\rho^2}$$

المحاضرة الحادية عشر: مشكلة عدم ثبات التباين.

1 مفهوم و أثار مشكلة عدم ثبات التباين.

2 اختبارات مشكلة عدم ثبات التباين.

3 معالجة مشكلة عدم ثبات التباين.

- مشكلة الارتباط الذاتي بين الأخطاء.

أولا: مفهوم و أثار مشكلة عدم ثبات التباين.

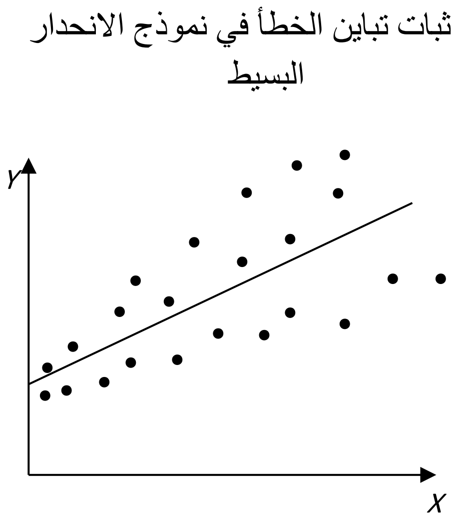
1 مفهوم مشكلة عدم ثبات التباين:(Heteroskedasticity) من الافتراضات التي نعتمد عليها في طريقة المربعات الصغرى العادية هو فرض ثبات التباين(Homoskedasticity) $V(\varepsilon_i)=\sigma_\varepsilon{}^2 \forall i=1,2,......n$، أي أن تباين الأخطاء يكون ثابتًا عبر جميع القيم الممكنة للمتغيرات التفسيرية، كما ان مشكلة عدم ثبات التباين تنشأ عندما يتغير تباين الحد العشوائي بناءً على تغيرات قيم المتغير التفسيري، مما يعني أن التغير في المتغير التفسيري يؤدي إلى تغير في المتغير التابع وكذلك في تباين الحد العشوائي.

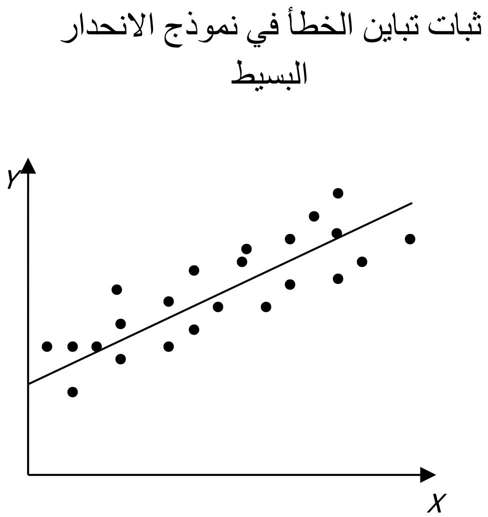
أما اذا كانت فرضية تجانس التباين غير محققة في حالة انحدار خطي متعدد، فإن مصفوفة التباين-التباين المشترك للأخطاء تعرف كما يلي:

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon')=\begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2_{\varepsilon,n} \end{pmatrix} \neq \sigma^2_\varepsilon I_n$$

يتبين أن تباين الأخطاء لا يكون ثابتًا في القطر الأول، مما يوضح ارتباط تباين الأخطاء بقيم المتغير المستقل، والشكل الموالي يوضح ذلك:

الشكل01: ثبات وعدم ثبات تباين الخطأ.





يوضح الشكل01 حالة عدم ثبات تباين حد الخطأ، حيث نلاحظ أن زيادة قيمة X تؤدي إلى زيادة في تباين حد الخطأ. كما يرتبط هذا المشكلة ببيانات المقطع المستعرض (Cross-section data) بشكل أكبر من بيانات السلسلة الزمنية(Cross-series data).هناك عدة أسباب تؤدي إلى عدم تجانس تباين

حد الخطأ، منها تحسين أساليب جمع البيانات، مما يقلل من الأخطاء المرتكبة في القياس وبالتالي يقل تباين حد الخطأ، ويترتب على مشكلة عدم ثبات التباين عدة آثار، تتمثل في:

تظل المعالم المقدرة باستخدام طريقة المربعات الصغرى غير متحيزة ومتسقة، لكنها تفقد صفة الكفاءة.

تصبح التباينات المقدرة والتباينات المشتركة (Covariances) الخاصة بالمعالم المقدرة متحيزة وغير متسقة، مما يجعل اختبارات الفرضيات غير دقيقة أو ملائمة.

رغم أن التنبؤات المبنية على المعالم المقدرة باستخدام المربعات الصغرى العادية تظل غير متحيزة، إلا أنها تفقد صفة الكفاءة، مما يعني أنها تكون أقل مصداقية مقارنة بالتنبؤات الأخرى.

في حالة عدم تجانس تباين الأخطاء، مقدرBLUE بطريقة المربعات الصغرى المعممة يكتب كما يلي:

$$\hat{\beta} = (X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}X)^{-1}(X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}Y)$$
$$\Omega_{\hat{\beta}} = (X'\Omega_{\varepsilon}^{-1}X)^{-1}$$

ثانيا: اختبارات الكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين.

1. أختباركولدفيلد-كر انت:

يُستخدم هذا الاختبار في حالة العينات الكبيرة جداً، حيث يتوفر عدد كبير من المشاهدات لكل من المتغير التابع والمتغير التفسيري. في هذه الحالة، يمكن تقسيم العينة إلى عينتين جزئيتين: العينة الجزئية الأولى تحتوي على القيم الصغيرة للمتغير التفسيري، بينما تحتوي العينة الجزئية الثانية على القيم الكبيرة له. يتم تقسيم العينة بحيث تكون أحجام العينتين الجزئيتين متساوية، وفي حال عدم تحقيق ذلك، يتم حذف القيم الوسطية سواء من العينة الأولى أو الثانية. تتبع خطوات الاختبار الآتي:

1-ترتب قيم المتغير التفسيري X تصاعديا، ثم توزع قيم متغير الاستجابة Y على القيم المناظرة للمتغير التفسيري X المرتبة تصاعديا.

2-اختيار عدد من المشاهدات التي تقع في الوسط ونقوم بحذفها، على الاغلب يكون عددها يمثل ربع العدد الكلي للمشاهدات.

3-بقية البيانات والتي قسمت إلى مجموعتين حيث:

العينة الجزئية الاولى: تضم القيم الصغيرة للمتغير التفسيري X و قيم متغير الاستجابة المناظرة لها.

العينة الجزئية الثانية: تضم القيم الكبيرة للمتغير التفسيري X و قيم متغير الاستجابة المناظرة لها.

4-يتم لكل عينة جزئية تقدير علاقة الانحدار الخطية (لكل عينة على انفراد).

5- حساب تباين الاخطاء العشوائية من معادلة الأنحدارالمقدرة للعينة الجزئية الاولى، وكذلك حساب تباين الاخطاء العشوائية من معادلة الأنحدارالمقدرة للعينة الجزئية الثانية، بموجب الصيغتين الآتيتين:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} e_{1i}^2}{n_1 - k - 1}$$

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} e_{2i}^2}{n_2 - k - 1}$$

اذ أن : $e_1 = Y_{1i} - \hat{Y}_{1i}$ تمثل الاخطاء العشوائية المقدرة معادلة الأنحدارالمقدرة للعينة الجزئية الاولى.

$e_2 = Y_{2i} - \hat{Y}_{2i}$ تمثل الاخطاء العشوائية المقدرة معادلة الأنحدارالمقدرة للعينة الجزئية الثانية.

n_1 حجم العينة الجزئية الجزئية الأولى، n_2 حجم العينة الجزئية الجزئية الثانية، k عدد المتغيرات التفسيرية.

6- يتم حساب المقدار ($\frac{S_2^2}{S_1^2}$) والذي هو عبارة عن متغير يتبع توزيع F بدرجتي حرية $(n_2 - k - 1)$ و $(n_1 - k - 1)$ ، ولمستوى معنوية معين.

7- يتم اختبار الفرضية الآتية:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

اما قاعدة الاختبار فتكون كالآتي:

تقبل فرضية العدم اذا كانت :

$$\frac{S_2^2}{S_1^2} \leq F_{[(n_2\text{-k-}1),(n_1\text{-k-}1),(1-\alpha)]}$$

ذلك يعني ان البيانات تخضع لفرضية تجانس تباين حدود الخطأ العشوائي، اي أن تباين حدود الخطا العشوائي متجانس، بخلافه يتم رفض فرضية العدم وقبول الفرضية البديلة بمعنى عدم تجانس تباين حدود الخطأ العشوائي.

والجدول التالي يلخص خطوات الاختبار كالاتي:

خطوات تطبيق اختبار جولد فيلد وكوانت Goldfeld and Quandt Test .

الخطوة	المجموعة الأولى (القيم الصغيرة للمتغير المستقل)	المجموعة الثانية (القيم الكبيرة للمتغير المستقل)
1	$Y_{1i} = a_1 + b_1 X_{1i} + e_{1i}$ $\hat{Y}_1 = \hat{a}_1 + \hat{b}_1 X_{1i}$	$Y_{2i} = a_2 + b_2 X_{2i} + e_{2i}$ $\hat{Y}_2 = \hat{a}_2 + \hat{b}_2 X_{2i}$
2	$\hat{e}_{1i} = y_{1i} - \hat{y}_{1i} \quad \Rightarrow \sum \hat{e}_{1i}^2$	$\hat{e}_{2i} = y_{2i} - \hat{y}_{2i} \quad \Rightarrow \sum \hat{e}_{2i}^2$
3	$df_1 = n_1 - k$	$df_2 = n_2 - k$
4	تباين الأخطاء: $\hat{\sigma}_{e_{1i}}^2 = \frac{\sum \hat{e}_{1i}^2}{df_1}$	تباين الأخطاء: $\hat{\sigma}_{e_{2i}}^2 = \frac{\sum \hat{e}_{2i}^2}{df_2}$
5	$F_{cal} = \frac{\hat{\sigma}_{e_{2i}}^2}{\hat{\sigma}_{e_{1i}}^2} = \frac{\sum \hat{e}_{2i}^2 / n_2 - k}{\sum \hat{e}_{1i}^2 / n_1 - k}$	
6	$F_{tab} = F_{n_2 - k, n_1 - k}$	

مثال01: من واقع بيانات العينة المبينة في الجدول التالي وبعد حذف ربع البيانات التي تتوسط العينة بعد ترتيبها تصاعديا، اختبر فيما اذا كانت حدود الخطا العشوائي تعاني من مشكلة عدم تجانس التباين مستعملا اختبار كولدفيلد-كرانت.

Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i
1.8	5	2	5	4.5	15	2.1	5
2	5	3.2	10	3.6	10	3.5	10
3	10	5	20	2	5	5	15
4.2	15	4.2	15	4.8	15	6	20
4.8	20	3.5	10	5.7	20	6.2	20

الحل: يتم أولا ترتيب قيم المتغير التفسيري X تصاعديا وتوزيع قيم متغير الاستجابة المناظرة على قيم المتغير التفسيري المرتبة تصاعديا، كما مبين في الجدول الآتي:

X_i	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10
Y_i	1.8	2	2	2	2.1	3	3.2	3.5	3.6	3.5
X_i	15	15	15	15	15	20	20	20	20	20
Y_i	4.2	4.2	4.5	4.8	5	4.8	5	5.7	6	6.2

من الجدول الأخير نقسم العينة الى عينتين جزئيتين كل منهما بحجم 10 مشاهدات.

العنية الجزئية الاولى تضم القيم الصغيرة للمتغير التفسيري X وكما مبينة في الجدول الآتي:

X_i	5	5	5	5	5	10	10	10	10	10
Y_i	1.8	2	2	2	2.1	3	3.2	3.5	3.6	3.5

لتقدير معادلة الانحدار وحساب تباين الاخطاء العشوائية المقدرة من تلك المعادلة للعينة الجزئية الاولى نحتاج الى العمليات الحسابية الاتية:

$$n_1 = 10\,, \sum_{i=1}^{10} Y_{1i} = 26.7 \;\;, \sum_{i=1}^{10} X_{1i} = 75 \;\;, \sum_{i=1}^{10} Y_{1i}^2 = 76.35$$

$$\sum_{i=1}^{10} X_{1i}^2 = 625 \;\;, \sum_{i=1}^{10} Y_{1i}\, X_{1i} = 217.5 \;\;, \overline{Y}_1 = 2.67 \;\;, \overline{X}_1 = 7.5$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{217.5-10(7.5)(2.67)}{625-10(7.5)^2} = 0.276$$

$$\hat{\beta}_0 = 2.67-(0.276)(7.5)$$

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_{1i}^2-\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{10} Y_{1i}-\hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{10} Y_{1i}X_{1i}}{n_1-2} = \frac{76.35-(0.6)(26.7)-(0.276)(217.5)}{10-2} = 0.0375$$

العنية الجزئية الثانية تضم القيم الكبيرة للمتغير التفسيري X وكما مبينة في الجدول الآتي:

X_i	15	15	15	15	15	20	20	20	20	20
Y_i	4.2	4.2	4.5	4.8	5	4.8	5	5.7	6	6.2

لتقدير معادلة الانحدار وحساب تباين الاخطاء العشوائية المقدرة من تلك المعادلة للعينة الجزئية الثانية نحتاج الى العمليات الحسابية الاتية:

$n_2 = 10\ , \sum_{i=1}^{10} Y_{2i} = 50.4\ \ , \sum_{i=1}^{10} X_{2i} = 175\ \ , \sum_{i=1}^{10} Y_{2i}^2 = 258.54\ \ ,\ \ \sum_{i=1}^{10} X_{2i}^2 = 3125\ \ , \sum_{i=1}^{10} Y_{2i} X_{2i} = 894.5\ \ , \overline{Y}_2 = 5.04\ \ ,\ \overline{X}_2 = 17.5$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{894.5 - 10(17.5)(5.04)}{3125 - 10(17.5)^2} = 0.2$$

$$\hat{\beta}_0 = 5.04 - (0.2)(17.5) = 1.54$$

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_{2i}^2 - \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{10} Y_{2i} - \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{10} Y_{2i} X_{2i}}{n_2 - 2}$$

$$S_2^2 = \frac{258.54 - (1.54)(50.4) - (0.2)(894.5)}{10 - 2} = 0.25$$

$$\therefore \quad \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{0.25}{0.0375} = 6.75$$

القيمة الجدولية لتوزيع F هي : $F_{(8,8,0.95)} = 3.44$

$$\because \quad \frac{S_2^2}{S_1^2} > F_{(8,8,0.95)}$$

لذا يمكن رفض فرضية العدم $(H_0\colon\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2)$ وقبول الفرضية البديلة $(H_1\colon\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2)$، بمعنى أن حدود الخطأ العشوائي تعاني من مشكلة عدم تجانس حدود الخطا العشوائي.

2. اختبار سبيرمان لأرتباط الرتب:

يستخدم معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لبيان درجة العلاقة بين قيم المتغير التفسيري X والقيم المطلقة للأخطاء $|e_i|$ ، علما ان e_i تمثل الاخطاء المحسوبة من أنموذج الانحدار المقدر بطريقة المربعات الصغرى. اذا كانت قيمة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان كبيرة فان ذلك يدل على وجود مشكلة عدم تجانس التباين. يتلخص هذا الاختبار بالخطوات الآتية:

1- يتم تقدير معلمات انموذج الانحدار الخطي بطريقة المربعات الصغرى ثم يتم حساب قيم الاخطاء e_i .

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

2- تحسب القيم المطلقة للأخطاء $|e_i|$، ثم يتم حساب قيمة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان بين قيم $|e_i|$ و قيم المتغير التفسيري X_i وفق الصيغة الاتية:

$$r_{|e_i|,X_i} = 1 - \frac{6\sum D_i^2}{n(n^2-1)}$$

اذ ان D_i تمثل الفروق بين رتب $|e_i|$ و رتب X_i ، مع ملاحظة أن معامل ارتباط الرتب لسبيرمان يحسب بين قيم $|e_i|$ وقيم كل متغير تفسيري من متغيرات انموذج الانحدار على حدة في حالة انموذج الانحدار الخطي العام.

3- يتم اختبار معنوية معامل ارتباط الرتب لسبيرمان r باستخدام احد الاختبارين الآتيين:

أ- اختبار Z : الذي يستخدم في حالة حجم العينة اكبر او يساوي 30 مشاهدة (n ≥30)، وان المختبر الاحصائي Z يحسب وفق الصيغة الاتية:

$$Z_c = \frac{r_{|e_i|,X_i}}{\sigma_{r_{|e_i|,X_i}}} = r_{|e_i|,X_i}(\sqrt{n-1}\,)$$

اذ ان:

$$\sigma_{r_{|e_i|,X_i}} = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

تقارن قيمة المختبر الاحصائي z المحسوبة (Z_C) مع قيمتها الجدولية والتي تساوي 1.96 عند مستوى معنوية 0.05 أو 1.64 عند مستوى معنوية 0.10 لأختبار الفرضية الآتية:

$$H_0: r_{|e_i|,X_i} = 0 \quad , H_1: r_{|e_i|,X_i} \neq 0$$

أما قاعدة الاختبار فتكون كالاتي: عند مستوى معنوية 0.05 اذا كانت

$$-1.96 \leq z_c \leq 1.96$$

أو عند مستوى معنوية 0.10 اذا كانت

$$-1.64 \leq z_c \leq 1.64$$

يتم قبول فرضية العدم أي أن الارتباط غير معنوي ويعني ذلك تجانس تباين حدود الخطأ العشوائي وبعكسه يتم رفض فرضية العدم بمعنى وجود مشكلة عدم تجانس تباين حدود الخطأ العشوائي.

ب- أختبار t: يستخدم اذا كان حجم العينة اقل من 30 (n<30)، المختبر الاحصائي t يحسب وفق الصيغة الآتية:

$$t_c = \frac{r_{|e_i|,X_i}(\sqrt{n-2}\,)}{\sqrt{1-r_{|e_i|,X_i}{}^2}}$$

تقارن القيمة المحسوبة للمختبر الاحصائي t عند مستوى معنويه (1-α/2) ولدرجة حرية (n-2)، في حالة انموذج الانحدار الخطي البسيط، لأختبار الفرضية السابقة الذكر، فاذا كانت القيمة المحسوبة للمختبر الاحصائي t اكبر من القيمة الجدولية يتم رفض فرضية العدم بمعنى وجود مشكلة عدم تجانس تباين حدود الخطأ العشوائي.

مثال1: أختبر فيما اذا كانت البيانات المبينة في الجدول التالي تخضع لفرضية تجانس تباين حدود الخطأ العشوائي باستعمال معامل ارتباط الرتب لسبيرمان، عند مستوى معنوية 0.05، اذا علمت ان معادلة الانحدار الخطي المقدرة كانت كالآتي:

X_i	Y_i	$\hat{Y}_i$	$\|e_i\|$	رتب X_i	رتب $\|e_i\|$	D_i^2
9	69	63	6	6.5	8.5	4
12	76	72.75	3.25	11.5	5	42.25
6	52	53.25	1.25	1.5	2	0.25

2.25	10	8.5	10.25	66.25	56	10
4	8.5	6.5	6	63	57	9
6.25	11	8.5	10.75	66.25	77	10
0	3	3	1.5	56.5	58	7
2.25	6	4.5	4.75	59.75	55	8
20.25	7	11.5	5.75	72.75	67	12
0.25	1	1.5	0.25	53.25	53	6
36	4	10	2.5	69.5	72	11
56.25	12	4.5	13.75	59.75	46	8
174	المجموع					

$$\hat{Y}_i = 33.75 + 3.25X_i$$

من بيانات الجدول السابق يتم حساب قيمة معامل ارتباط الرتب لسبيرمان وكالآتي:

$$r_{|e_i|,X_i} = 1 - \frac{6(\sum D_i^2 + \text{مقدار تعديل الكلي})}{n(n^2-1)}$$

ملاحظة: تم اضافة مقدار التعديل الكلي لبسط صيغة معامل ارتباط الرتب لوجود قيم مكررة بالنسبة لقيم كل من X_i و $|e_i|$، وان مقدار التعديل يحسب لكل قيمة مكررة وفق الصيغة الاتية :

$$\text{مقدار التعديل} = \frac{m(m^2-1)}{12}$$

اذ ان m تمثل عدد مرات تكرار القيمة.

بالنسبة لمثالنا لدينا ستة قيم تتكرر كل منها مرتين أي ان **M=2** ، لذا فان مقدار التعديل لكل قيمة من القيم الستة المتكررة يكون:

$$\text{مقدار التعديل لكل قيمة متكررة} = \frac{2(2^2-1)}{12} = 0.5$$

$$\text{مقدار التعديل الكلي} = 0.5*6 = 3$$

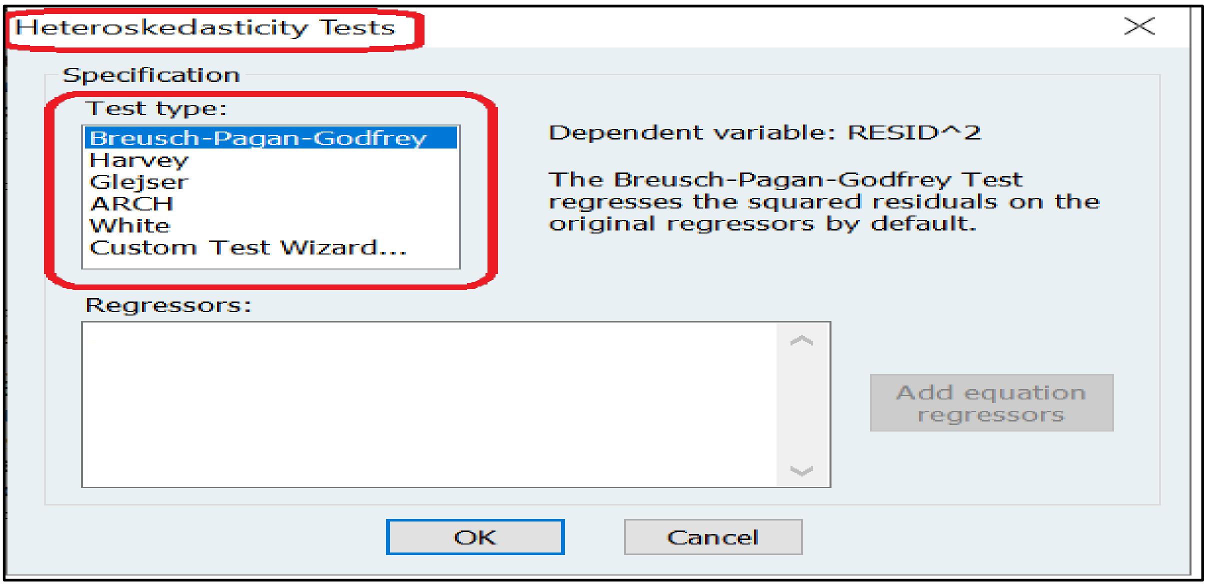
$$\therefore r_{|e_i|,X_i} = 1 - \frac{6(174+3)}{12(144-1)} = 0.38$$

نختبر معنوية معامل ارتباط الرتب لسبيرمان باستعمال المختبر الاحصائي t، لأن (n=12)، وكالآتي:

$$t_c = \frac{0.38\sqrt{10}}{\sqrt{1-0.38^2}} = = 1.2998$$

القيمة الجدولية لتوزيع t هي: 2.23= (10, 0.975) t، وبما أن القيمة المحسوبة اقل من القيمة الجدولية، لذا يتم قبول فرضية العدم بمعنى ان قيمة معامل ارتباط الرتب لا تختلف معنويا عن الصفر، ذلك يعني أن البيانات تخضع لفرضية تجانس تباين حدود الخطأ العشوائي، بمعنى ان تلك البيانات لا تعاني من مشكلة عدم تجانس تباين حدود الخطأ العشوائي.

3. **الاختبارات المستخدمة في برمجية Eviews للكشف عن عدم ثبات التباين:** يوفر برنامج EViews الاختبارات التالية كما هو موضح في الصورة:



يتم شرح اختبارات على النحو الآتي:

a. **اختبار Breusch Pagan Godfrey:**

تكون فرضية ثبات تباين الخطاء Homoskedasticity التي نريد اختبارها هي:

$$H0: \beta 0 = \beta 1 = \cdots = \beta k = 0$$

✓ يستخدم هذا الاختبار في حالة العينات كبيرة الحجم، كلما زاد حجم العينة زادت قوة هذا الاختبار.

✓ في حالة عدم توفر شروط التوزيع الطبيعي للبواقي، فإن هذا الاختبار يصبح حساس جدا ويفضل عدم استخدامه.

✓ يتم رفض الفرضية H_0 إذا كانت القيمة الاحتمالية المرافقة لـ $F - statistic$ أقل من 5% بمعنى يوجد عدم ثبات التباين.

Heteroskedasticity Test: Breusch-Pagan-Godfrey
Null hypothesis: Homoskedasticity

F-statistic	0.533866	Prob. F(1,29)	0.4708
Obs*R-squared	0.560369	Prob. Chi-Square(1)	0.4541
Scaled explained SS	0.800238	Prob. Chi-Square(1)	0.3710

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 03/09/24 Time: 22:24
Sample: 1993 2023
Included observations: 31

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.78E+12	1.20E+13	0.148723	0.8828
X	984913.1	1347974.	0.730662	0.4708

R-squared	0.018076	Mean dependent var	1.02E+13

b. **إختبار Harvey:**

تكون فرضية ثبات تباين الخطاء Homoskedasticity التي نريد اختبارها هي:

$$H0: \beta 0 = \beta 1 = \cdots = \beta k = 0$$

Heteroskedasticity Test: Harvey

F-statistic	5.313355	Prob. F(1,28)	0.0288
Obs*R-squared	4.784887	Prob. Chi-Square(1)	0.0287
Scaled explained SS	3.696088	Prob. Chi-Square(1)	0.0545

Test Equation:
Dependent Variable: LRESID2
Method: Least Squares
Date: 04/19/22 Time: 03:04
Sample: 1 30
Included observations: 30

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	3.700522	0.649123	5.700806	0.0000
X	-0.612983	0.265928	-2.305072	0.0288

c. **اختبار Glejser:**

يسمح هذا الاختبار بالكشف عن وجود عدم ثبات التباين، ما يميز هذا الاختبار هو امكانية تحديد نوعية عدم ثبات تباين الأخطاء، ويقترح عدة أشكال للمعادلة الوسيطية ليحدد من خلالها شكل عدم ثبات التباين:

نمط عدم ثبات التباين	الشكل المقترح
$\hat{\sigma}_u{}^2 = k^2 X_j{}^2$	$\lvert e_j \rvert = \beta_0 + \beta_1 X_j + v_j$
$\hat{\sigma}_u{}^2 = k^2 X_j$	$\lvert e_j \rvert = \beta_0 + \beta_1 X_j{}^{1/2} + v_j$
$\hat{\sigma}_u{}^2 = k^2 X_j{}^{-2}$	$\lvert e_j \rvert = \beta_0 + \beta_1 X_j{}^{-1} + v_j$

كما هو موضح فالشكل الموالي:

Heteroskedasticity Test: Glejser
Null hypothesis: Homoskedasticity

F-statistic	1.840277	Prob. F(1,29)	0.1854
Obs*R-squared	1.849808	Prob. Chi-Square(1)	0.1738
Scaled explained SS	2.232889	Prob. Chi-Square(1)	0.1351

Test Equation:
Dependent Variable: ARESID
Method: Least Squares
Date: 03/09/24 Time: 22:16
Sample: 1993 2023
Included observations: 31

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	512812.4	1393495.	0.368004	0.7155
X	0.212496	0.156642	1.356568	0.1854

R-squared	0.059671	Mean dependent var	2326218.
Adjusted R-squared	0.027246	S.D. dependent var	2221820.
S.E. of regression	2191343.	Akaike info criterion	32.10027
Sum squared resid	1.39E+14	Schwarz criterion	32.19278
Log likelihood	-495.5542	Hannan-Quinn criter.	32.13043
F-statistic	1.840277	Durbin-Watson stat	1.988481
Prob(F-statistic)	0.185386		

d. **اختبار ثبات التباين الشرطي للأخطاء ARCH-LM:**

تتيح نماذج ARCH نمذجة المتغيرات المالية التي تتسم بتباين شرطي غير ثابت للأخطاء العشوائية، حيث يعكس التطاير الشرطي، الذي غالباً ما يعبر عن المخاطرة، تغيرات غير ثابتة. يعتمد هذا الاختبار على مضاعف لاغرانج *LM*. وتتمثل خطوات الاختبار في الآتي:

❖ تقدير النموذج العام $Y = X\beta + \varepsilon$ بطريقة المربعات الصغرى العادية ثم حساب مربعات البواقي $\hat{\varepsilon}_t^2$.

❖ تقدير المعادلة التالية:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \theta_0 + \theta_1\hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + ... + \theta_q\hat{\varepsilon}_{t-q}^2 + u_t$$

مع حساب معامل التحديد الخاص بهذه المعادلة R^2. نفقد في هذه الحالة q مشاهدة.

❖ فرضية ثبات التباين الشرطي للأخطاء H_0 التي ينبغي اختبارها هي:

$$H_0 : \theta_0 = \theta_1 = ... = \theta_q = 0$$

إحصائية مضاعف لاغرانج $LM = (n-q)\times R^2$ تتبع توزيع χ^2 بدرجة حرية q. إذا كان $(n-q)\times R^2$ أكبر من $\chi^2(q)$ (القيمة الحرجة لتوزيع χ^2 بنسبة معنوية α)، فإننا نرفض H_0 أي إذا كان هناك على الأقل معامل واحد من معاملات معادلة ARCH يختلف معنويا عن الصفر فإن التباين الشرطي للأخطاء غير متجانس.

e. **اختبار وايت White test:** يتميز هذا الاختبار بعدم اعتماده على افتراض التوزيع الطبيعي، كما أنه لا يحتاج إلى معرفة أسباب عدم استقرار التباين. ومع ذلك، فهو مناسب فقط للعينات الكبيرة، ويتضمن اختبار وايت الخطوات التالية:

- يتضمن انحدار مربعات البواقي على المتغيرات المستقلة ومربعاتها $X_1^2, X^2{}_2$..........

$$e_t^2 = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \ddot{\beta}_2 X_{2i} + \hat{\beta}_3 X_{1i}^2 + \hat{\beta}_4 X_{2i}{}^2 + \hat{\beta}_5 X_{1i} X_{2i} ... + \beta_k X_{ik} + e_t$$

- حساب معامل التحديد الخاص بهذه المعادلة R^2.
- نقوم باختبار الفرضية الصفرية التالية:

$$H_0 : \beta_0 = \alpha_1 = \beta_1 = ... = \alpha_k = \beta_k = 0$$

- حساب إحصائية وايت: $WH = n\times R^2$ تتبع توزيع χ^2 بدرجة حرية $k-1$.

إذا كان $n\times R^2$ أكبر من $\chi^2(k-1)$ (القيمة الحرجة لتوزيع χ^2 بنسبة معنوية α)، فإننا نرفض H_0 أي إذا كان هناك على الأقل معامل واحد من معاملات المعادلة الوسيطية يختلف معنويا عن الصفر فإن تباين الأخطاء غير متجانس.

ثالثا: معالجة عدم ثبات تباين حد الخطأ.

تُعد طريقة المربعات الصغرى المرجحة من أبرز الأساليب المستخدمة لمعالجة مشكلة عدم ثبات التباين، وتعتمد هذه الطريقة على منح القيم التي تتميز بانحراف أقل عن خط الانحدار أوزانًا أكبر مقارنةً بالقيم ذات الانحراف الأكبر، وذلك عند تقدير العلاقة قيد الدراسة. ويعتمد الشكل النهائي للنموذج المُحوَّل على طبيعة نمط عدم استقرار التباين الذي تم اكتشافه في النموذج الأصلي المقدر.

وبفرض أن النموذج الأصلي كان كما يلي : $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i , i = 1,...,n$ فإن هناك عدة أنماط (افتراضات) لعدم ثبات تباين الأخطاء، ويختلف النموذج أو المعادلة المحولة من افتراض إلى آخر.

- ✓ الافتراض الأول: $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 X_i^2$ وطبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي إلى الشكل التالي:

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{\beta_0}{X_i} + \beta_1 + \frac{\varepsilon_i}{X_i} = \beta_0 \frac{1}{X_i} + \beta_1 + \theta_i$$

حيث : θ_i عبارة عن حد الخطأ المحول $\frac{\varepsilon_i}{X_i}$

وبإجراء انحدار $\frac{Y_i}{X_i}$ على $\frac{1}{X_i}$ مستخدما طريقة المربعات الصغرى العادية نحصل على:

$$\left(\frac{\hat{Y}_i}{X_i}\right) = \hat{\beta}_0 \frac{1}{X_i} + \hat{\beta}_1$$

وبضرب المعادلة المحولة المقدرة السابقة في X_i يتم الحصول على النموذج الأصلي $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$ بعد معالجة عدم ثبات التباين σ_ε^2 ، ويتضح مما سبق أن الحد الثابت في النموذج المحول (β_1) هو عبارة عن ميل معامل الانحدار للنموذج الأصلي، وميل معامل الانحدار للنموذج المحول هو عبارة عن الحد الثابت في النموذج الأصلي.

- ✓ الافتراض الثاني: $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 \ X_i$ وطبقا لهذا الافتراض يتم تحويل النموذج الأصلي إلى المعادلة التالية:

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{X_i}} + \beta_1 \sqrt{X_i} + \frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}} = \beta_0 \frac{1}{\sqrt{X_i}} + \beta_1 \sqrt{X_i} + \omega_i$$

حيث ω_i عبارة عن حد الخطأ المحول $\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{X_i}}$ ، $X_i > 0$

وبنفس الحالة الأولى نجري انحدار $\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}$ على $\frac{1}{\sqrt{X_i}}$ ، $\sqrt{X_i}$ بواسطة المربعات الصغرى العادية.

- ✓ الافتراض الثالث: $E(\varepsilon_i^2) = \sigma^2 \ Y_i^2$ ، وطبقا لهذا الافتراض تكون المعادلة المحولة من الشكل:

$$\frac{Y_i}{Y_i} = \frac{\beta_0}{Y_i} + \beta_1 \frac{X_i}{Y_i} + \frac{\varepsilon_i}{Y_i} = \beta_0 \frac{1}{Y_i} + \beta_1 \frac{X_i}{Y_i} + \varphi$$

✓ الافتراض الرابع: $E(\varepsilon_i^2)=\sigma^2\,|\hat{\varepsilon}_i|$ ، ويتضمن هذا الافتراض أن تباين حد الخطأ دالة خطية لبواقي طريقة المربعات الصغرى العادية، وطبقا لهذا تكون المعادلة المقدرة كما يلي :

$$\frac{Y_i}{\sqrt{|\hat{\varepsilon}_i|}}=\beta_0\frac{1}{\sqrt{|\hat{\varepsilon}_i|}}+\beta_1\frac{X_i}{\sqrt{|\hat{\varepsilon}_i|}}+\frac{\varepsilon_i}{\sqrt{|\hat{\varepsilon}_i|}}$$

✓ الافتراض الخامس: التحويلات اللوغاريتمية، إن تحويل النموذج الأصلي إلى الصيغة اللوغاريتمية المزدوجة سوف يؤدي غالبا إلى تقليل درجة عدم ثبات تباين حد الخطأ، ومن ثم طبقا لهذا الافتراض تكون المعادلة المحولة المناسبة للنموذج الأصلي كما يلي: $LnY_i=\beta_0+\beta_1 LnX_i+\varepsilon_i$

تمارين محلولة:

التمرين الأول:

بالاعتماد على مخرجات برنامج Eviews لعينة من 35 مشاهدة، تحصلنا على النتائج التالية:

$$LnQ_i=0.50+0.76Ln(L_i)-0.19Ln(K_i)+e_i$$

$$(0.71) \qquad (1,36)$$

$R^2=0.966$ $\qquad$ $r_{(L,\,k)}=0.992$ $\qquad$ $t_{tab}=1.96$

المطلوب:

1. ماذا يسمى (يشير) هذا النموذج الاقتصادي؟ وكيف يتم تصنيفه قياسيا؟
2. ماذا تمثل القيم بين قوسين؟
3. اختبر معنوية المعلمات عند مستوى معنوية 5%؟
4. في ظل المعطيات أعلاه ماهي المشاكل التي يعاني منها هذا النموذج؟

حل التمرين الأول:

1. **يسمى (يشير) هذا النموذج :** إلى دالة أسية وهي دالة كوب دوغلاس أو دالة عوامل الانتاج.

يتم تصنيف هذا النوع: إلى نموذج لوغاريتمي- خطي حيث انه خطي بالنسبة إلى المعلمات ولوغاريتمي بالنسبة إلى المتغيرتين لـ K و L.

2. **تمثل القيم بين قوسين:** الأخطاء المعيارية للمعلمات.
3. **اختبار معنوية المعلمات عند مستوى معنوية 5%:**

- **اختبار معنوية الميل الأول عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$.**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0:\beta_1=0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1:\beta_1\neq 0$ (الفرضية البديلة)

نلاحظ أن: $t_{cal}=\frac{|\widehat{\beta}_1|}{\sigma_{\widehat{\beta}_1}}=\frac{|0.76|}{0.71}=1.07\ <(t_{tab})=\ 1.96$

القرار: نقبل H_0 أي المعلمة β_1 ليس لها معنوية إحصائية.

- **اختبار معنوية الميل الثاني عند مستوى معنوية $\alpha=5\%$**

فرضيات هذا الاختبار هي:

المعلمة ليس لها دلالة معنوية $H_0:\beta_2=0$ (فرضية العدم)

المعلمة لها دلالة معنوية $H_1:\beta_2\neq 0$ (الفرضية البديلة)

نلاحظ أن: $t_{cal} = \frac{|\hat{\beta}_2|}{\sigma_{\hat{\beta}_2}} = \frac{|-0.19|}{1.36} = 0.32 \quad < (t_{tab}) = 1.96$

القرار: نقبل H_0 أي المعلمة β_2 ليس لها معنوية إحصائية.

4. **المشاكل التي يعاني منها هذا النموذج:** وجود مشكلة التعدد الخطي. (مع الشرح)

التمرين الثاني:

بافتراض أننا تحصلنا على البواقي لإحدى العلاقات النظرية الاقتصادية تتكون من متغيرين مفسرين ومتغير تابع، الموضحة في الجدول التالي:

t	1	2	3	4	5	6	7	8
e_t	−3.4	−2.9	−1.8	7.1	−1.6	−3.3	3.0	2.9

المطلوب:

1. اختبر وجود مشكلة الارتباط الذاتي؟ استنتج تقدير معامل الارتباط الذاتي؟
2. اشرح خطوات اللازمة لمعالجة هذه المشكلة إن وجدت.

حل التمرين الثاني:

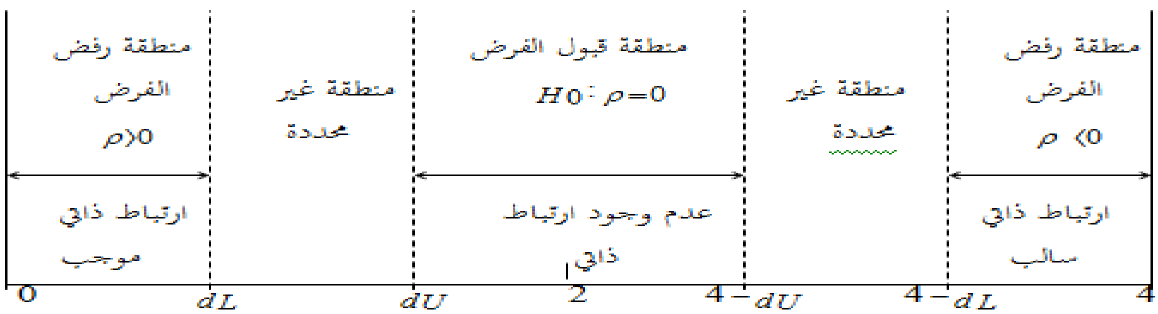
1- اختبار الكشف عن مشكل الارتباط الذاتي باستخدام اختبار دربن- و اتسون DW:

حيث:

لا يوجد ارتباط ذاتي بين الأخطاء $H_0 : \rho = 0$ (فرضية العدم)

يوجد ارتباط ذاتي بين الأخطاء $H_1 : \rho \neq 0$ (الفرضية البديلة)

ويوضح الشكل التالي قيم DW (القيم الجدولية للاختبار) كالآتي:



ولاختبار فرضية العدم H_0 يجب حساب إحصائية $(D-W)$ من الصيغة التالية:

$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n}(e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

DW=1.89

لاستخراج القيم الحرجة لدربن واتسون (DW) لدينا: $n=8$ و $k=2$

فنجد: $dL = 0.559$ و $du = 1.777$

أي: $d_U \succ DW \succ 4 - d_U$ يقبل H_0. وعليه لا توجد مشكلة الارتباط الذاتي لهذا النموذج.

تقدير معامل الارتباط الذاتي:

وتحسب قيمة معامل الارتباط الذاتي كالأتي:

$$\hat{\rho} = 1 - \left(\frac{DW}{2}\right) = 1 - \frac{1.89}{2} = 0.055$$

2- شرح خطوات اللازمة لمعالجة هذه المشكلة ان وجدت اي (تصحيح النموذج):

في حالة وجود الارتباط الذاتي تفقد المقدرات صفة الكفاءة، وللحصول على مقدرات تستوفي جميع شروط المربعات الصغرى العادية يتم تصحيح النموذج باستخدام شبه الفروق كما يلي:

- ✓ نقدر معامل الارتباط الذاتي بإحدى الطريقتين المذكورة سابقا.
- ✓ نحول المتغيرات الأصلية إلى متغيرات شبه الفروق كالاتي:

$$Y_t^* = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1}$$
$$X_t^* = X_t - \hat{\rho} X_{t-1}$$

كما أن عند استخدام شبه الفروقات، نفقد المشاهدة الأولى لكل متغير ولتجنب ضياعها، نضع:

$$Y_1^* = Y_1 \sqrt{1-\rho^2}$$
$$X_{1,j}^* = X_{1,j} \sqrt{1-\rho^2}$$

التمرين الثالث:

لتكن المعطيات التالية حول حجم الإنتاج والمدخلات من العمل ورأس المال لمؤسسة خلال الفترة 08 سنوات لتقدير دالة الإنتاج من نوع كوب دوغلاس: $Q = AK^{\alpha}L^{\beta}$

Q	16	29	45	79	115	150	198	250
L	07	09	16	20	29	39	69	100
K	07	17	25	40	67	89	90	100

نضع: $LNK = X_1$ $LNL = X_2$ $LNQ = Y$

ولدينا:

$$\sum_{i=1}^{n} X_1 = 29{,}49 \,,\quad \sum_{i=1}^{n} X_2 = 25{,}79 \,,\quad \sum_{i=1}^{n} X_1^2 = 115.08 \,,\quad \sum_{i=1}^{n} X_2^2 = 89.21 \,,\quad \sum_{i=1}^{n} X_1 X_2 = 100.89$$

المطلوب:

1. جد التحويل المناسب لتقدير النموذج على الشكل الخطي؟ اذا كانت مخرجات تقدير النموذج الموجودة كما يلي:

Dependent Variable: LNQ
Method: Least Squares
Date: 05/05/24 Time: 23:59
Sample: 2015 2023
Included observations: 8

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LNK	0.609206	0.068637	8.875748	0.0003
LNL	0.431853	0.070355	6.138185	0.0017
C	0.723107	0.093224	7.756669	0.0006

R-squared	0.997102	Mean dependent var	4.360161
Adjusted R-squared	0.995943	S.D. dependent var	0.970550
S.E. of regression	0.061822	Akaike info criterion	-2.449125
Sum squared resid	0.019110	Schwarz criterion	-2.419334
Log likelihood	12.79650	Hannan-Quinn criter.	-2.650050
F-statistic	860.1229	Durbin-Watson stat	2.568732
Prob(F-statistic)	0.000000		

2. اختبر مشكل التعدد الخطي باختبار Farrar-Glauber عند مستوى معنوية 5%؟ علما ان القيمة الجدولية لكاي هي: x^2=7.81.
3. اختبر مشكل الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى عند مستوى منوية 5%؟ ثم جد تقديرا لمعامل الارتباط الذاتي؟
4. اكتب النموذج في شكله الأصلي واحسب حجم الإنتاج عندK=105 و L=108؟
5. اذكر ثلاث اختبارات للكشف عن مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ؟

حل التمرين الثالث:

1- إيجاد التحويل المناسب لتقدير النموذج على الشكل الخطي:

لدينا دالة الإنتاج من نوع كوب دوغلاس: $Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$

نضع:

$LNK=X_1$ ، $LNL=X_2$ ، LNA=C ، LNQ=Y

بادخال اللوغاريتم على الطرفين نجد:

$$LnQ=LnAK^{\alpha}L^{\beta} \Longrightarrow LnQ=LnA+\alpha LnK+\beta LnL$$

فنجد:

$$\widehat{Y}_i = 0.7231 + 0.6092X_1 + 0.4318X_2$$

ويكتب الشكل المقدر على النحو الآتي:

$$\widehat{Y}_i = C + \alpha X_1 + \beta X_2$$

2- اختبار مشكل التعدد الخطي باستخدام اختبار Farrar-Glauber عند مستوى معنوية 5%:

يعتمد على قيمة محدد المصفوفة الارتباط للمتغيرات المفسرة D باختبار الفرضيتين الآتيتين:

$H_0 : \mathrm{D} = 1$ (استقلال خطي)

$H_1 : \mathrm{D} < 1$ (ارتباط خطي)

احصاءة الاختبار:

$$\chi^2 * = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k+5) \right] . \ln D$$

حساب معامل الارتباط بين المتغيرين المفسرين:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\sum_i^n X_1 X_2 - n\overline{X_1 X_2}}{\sqrt{(\sum_i^n X_1^2 - n\overline{X_1}^2)(\sum_i^n X_2^2 - n\overline{X_2}^2)}}$$

$\bar{X}_1^2 = 3.6862$ ، $\bar{X}_2^2 = 3.2237$

$$\boldsymbol{r} = \frac{100.89 - 8(3.6862)(3.2237)}{\sqrt{(115.08 - 8(3.6862^2))(89.21 - 8(3.2237^2))}}$$

$$\mathrm{r} = 0.9361$$

ومنه يكون محدد مصفوفة الارتباط كالآتي:

$\mathrm{D} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9361 \\ 0.9361 & 1 \end{bmatrix}$ det D=0.1237

احصاءة الاختبار المحسوبة:

$$\chi^2 * = -\left[8 - 1 - \tfrac{1}{6}((2)(2) + 5)\right] \mathrm{Ln}(0.1237)$$

$$\chi^2 * = 11.4944$$

نلاحظ أن قيمة χ^2 الجدولية هي 7.81 وهي أصغر من χ^2 المحسوبة وعليه نستنتج أن هناك مشكلة التعدد الخطي.

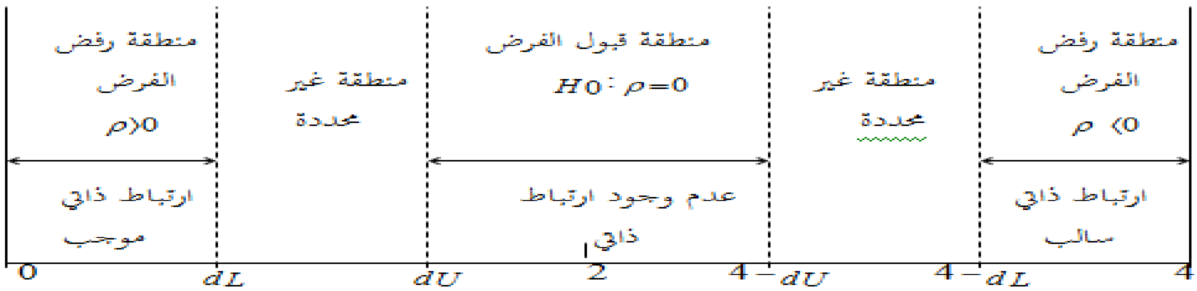
3- الكشف عن مشكل الارتباط الذاتي باستخدام اختبار دربن- واتسون DW:

حيث:

لا يوجد ارتباط ذاتي بين الأخطاء $H_0 : \rho = 0$ (فرضية العدم)

يوجد ارتباط ذاتي بين الأخطاء $H_1 : \rho \neq 0$ (الفرضية البديلة)

ويوضح الشكل التالي قيم DW (القيم الجدولية للاختبار) كالآتي:



ومن خلال النموذج المعطى لدينا:

DW=2.5687

لاستخراج القيم الحرجة لدربن واتسون (DW) لدينا: $n=8$ و $k=2$

فنجد: dL =0.559 و du =1.777

أي: $4-d_U \leq DW \leq 4-d_L$ ومنه نتيجة الاختبار غير محددة.

تقدير معامل الارتباط الذاتي:

وتحسب قيمة معامل الارتباط الذاتي كالأتي:

$$\hat{\rho} = 1-\left(\frac{DW}{2}\right) = 1-\frac{2.5687}{2} = -0.2843$$

4- كتابة النموذج في شكله الأصلي:

لدينا:

$$LNA=C \Longrightarrow A= e^{C}$$

ومنه:

$$A= e^{C} \Longrightarrow A= e^{0.7231} = 2.0608$$

ويكتب النموذج على الشكل الآتي:

$$Q=2.0608K^{0.6092}L^{0.4318}$$

حساب حجم الإنتاج عند K=105 و L=108:

بالتعويض في المعادلة اعلاه نجد:

$$Q=2.0608(105)^{0.6092}(108)^{0.4318}$$
$$Q=265.0798$$

5- ثلاث اختبارات للكشف عن مشكلة عدم ثبات التباين هي:

- اختبار *Whit*
- اختبار *ARCH*
- اخبار *Glijser*

التمرين الرابع:

بإجراء انحدار لـ 12 مشاهد الأولى و12 الأخيرة، حصلنا على نتائج التقدير التالية:

تقدير المشاهدات الثانية	تقدير المشاهدات الأولى
$y_t = 6.1 + 0.013\, x_t + e_t$ $t \quad (4.16) \quad (3.89)$ $n_2=12 \quad SCR_2= 3.095$ $R^2=0.60$	$y_t = 8{,}1 + 0{,}006\, x_t + e_t$ $t \quad (39.4) \quad (4{,}36)$ $n_1=12 \quad SCR_1= 0.507$ $R^2=0.66$

المطلوب:

1. ماهي المشكلة التي نحاول معالجتها؟
2. باستخدام اختبار *Goldfeld-Quandt* اختبر وجود هذه المشكلة من عدمها عند مستوى5%، حيث $F_t= 2.97$

حل التمرين الرابع:

1- **المشكلة التي نحاول معالجتها:** هي مشكلة عدم ثبات التباين

2- **باستخدام اختبار*Goldfeld-Quandt*:**

- حساب تباين الاخطاء العشوائية من النتائج الانحدار المقدرة للعينة الجزئية الاولى، وكذلك حساب تباين الاخطاء العشوائية من النتائج الانحدار المقدرة للعينة الجزئية الثانية، بموجب الصيغتين الآتيتين:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} e_{1i}^2}{n_1-k-1} = \frac{0.507}{10} = 0.0507$$
$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2} e_{2i}^2}{n_2-k-1} = \frac{3.095}{10} = 0.3095$$

- يتم حساب المقدار ($\frac{S_2^2}{S_1^2}$) والذي هو عبارة عن متغير يتبع توزيع F بدرجتي حرية ($n_2 - k - 1$) و ($n_1 - k - 1$) ، ولمستوى معنوية معين.
- يتم اختبار الفرضية الآتية:

$$H_0:\ \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$
$$H_1:\ \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$\therefore \quad \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{0.3095}{0.0507} = 6.10$$

القيمة الجدولية لتوزيع F هي : $F_{(8,8,0.95)} = 2.97$

$$\because \quad \frac{S_2^2}{S_1^2} > F_{(8,8,0.95)}$$

لذا يمكن رفض فرضية العدم ($H_0:\ \sigma_1^2=\sigma_2^2$) وقبول الفرضية البديلة ($H_1:\ \sigma_1^2\neq\sigma_2^2$)، بمعنى أن حدود الخطأ العشوائي تعاني من مشكلة عدم تجانس حدود الخطا العشوائي.

تمارين مقترحة.

التمرين الاول:

ليكن لدينا ثلاثة متغيرات مفسرة ضمن نموذج انحدار خطي متعدد مع متغير تابع واحد، اعتمادا على عينة من15 مشاهدة بحساب المشاهدات المركزة لتقدير معادلة الانحدار الخطي نتحصل على مصفوفة المتغيرات المركزة (X-$\bar{X}$) التالية:

$$(X'X)=\begin{bmatrix}2.3123 & 0.2320 & 0.0236\\ 0.2320 & 0.3114 & -0.0308\\ 0.0236 & -0.0308 & 0.1277\end{bmatrix}$$

المطلوب:

- اختبر وجود مشكل التعدد الخطي عند مستوى معنوية 5%، باستخدام اختبار Farrer- Glauber؟
- اختبار فرضية التعدد الخطي في النموذج المقدر باستخدام اختبار Klein؟ علما ان: R^2=0.85.

التمرين الثاني:

ليكن لدينا ثلاثة متغيرات مفسرة ضمن نموذج انحدار خطي متعدد مع متغير تابع واحد، اعتمادا على عينة من16 مشاهدة، كما هو موضح في الجدول التالي:

السنوات	Y	x1	X2	X3	السنوات	Y	x1	X2	X3
2007	5.9	0.685	31.8	53.2	2015	2.8	0.731	36	49.6
2008	1.7	0.69	31.8	55.7	2016	3.8	0.735	38.5	50.8
2009	3.4	0.697	32.5	55.4	2017	3.7	0.74	50.69	48.9
2010	2.4	0.705	33.3	56.2	2018	3.2	0.743	45.72	50.1
2011	1.6	0.714	33.9	56.6	2019	1.3	0.744	47.76	46.5
2012	3.6	0.721	34.4	56.9	2020	0.7	0.745	46.71	44.7
2013	2.9	0.727	34.9	52.4	2021	0.9	0.748	49.65	46.2
2014	3.4	0.729	35.4	51	2023	-0.6	0.736	48.6	46.9

حيث ان معادلة التقدير في هذه الحالة هي:

$$y_i= 7.009-3.325x_{1i}-0.086x_{2i}+ 0.026x_{3i}+ e_t$$
$$(0.23)\quad(-0.09)\quad(-0.72)\quad(0.13)$$
$$R^2= 0.2466\ ;\ (.) = \ t\ de\ student$$

المطلوب:

1. اختبر فرضية الارتباط الذاتي للأخطاء للنموذج باستعمال اختبار داربن-واتسون؟
2. اختبر مشكلة الارتباط الذاتي للأخطاء عند درجة أكبر من واحد حيث:

$$e_i = -5.244+5.261x_{1i}-0.007x_{2i}+0.032x_{3i}+0.154_{et-1}+0.201_{et-2}$$
$$R^2 = 0.0490$$
$$e_i = -3.721+3.385x_{1i}-0.002x_{2i}+0.025x_{3i}+0.152_{et-1}+0.196_{et-2}-0.072_{et-3}$$
$$R^2 = 0.052$$

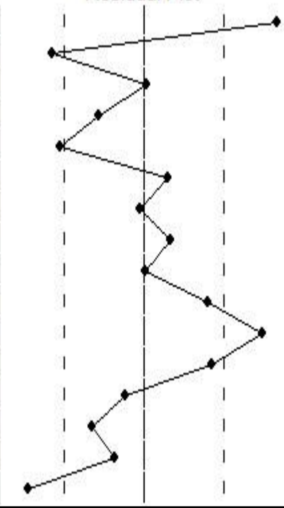
Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Date: 02/17/24 Time: 12:14
Sample: 2007 2023
Included observations: 16

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X1	-3.325145	35.74200	-0.093032	0.9274
X2	-0.086275	0.119105	-0.724358	0.4827
X3	0.026280	0.194307	0.135250	0.8947
C	7.009602	29.60912	0.236738	0.8169

R-squared	0.246664	Mean dependent var	2.543750
Adjusted R-squared	0.058330	S.D. dependent var	1.560756
S.E. of regression	1.514553	Akaike info criterion	3.880435
Sum squared resid	27.52644	Schwarz criterion	4.073582
Log likelihood	-27.04348	Hannan-Quinn criter.	3.890326
F-statistic	1.309714	Durbin-Watson stat	1.347198
Prob(F-statistic)	0.316571		

obs	Actual	Fitted	Residual
2007	5.90000	3.38644	2.51356
2008	1.70000	3.43551	-1.73551
2009	3.40000	3.34396	0.05604
2010	2.40000	3.26936	-0.86936
2011	1.60000	3.19818	-1.59818
2012	3.60000	3.13965	0.46035
2013	2.90000	2.95831	-0.05831
2014	3.40000	2.87173	0.52827
2015	2.80000	2.77652	0.02348
2016	3.80000	2.57907	1.22093
2017	3.70000	1.46082	2.23918
2018	3.20000	1.91117	1.28883
2019	1.30000	1.63723	-0.33723
2020	0.70000	1.67719	-0.97719
2021	0.90000	1.45299	-0.55299
2023	-0.60000	1.60187	-2.20187

Residual Plot



Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:
Null hypothesis: No serial correlation at up to 2 lags

F-statistic	0.257804	Prob. F(2,10)	0.7777
Obs*R-squared	0.784523	Prob. Chi-Square(2)	0.6755

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 02/17/24 Time: 14:32
Sample: 2007 2023
Included observations: 16
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X1	5.261201	38.88167	0.135313	0.8950
X2	-0.007687	0.128175	-0.059971	0.9534
X3	0.032750	0.213455	0.153430	0.8811
C	-5.244302	32.48040	-0.161460	0.8749
RESID(-1)	0.154222	0.350426	0.440099	0.6692
RESID(-2)	0.201756	0.363301	0.555342	0.5909

R-squared	0.049033	Mean dependent var	-4.44E-16
Adjusted R-squared	-0.426451	S.D. dependent var	1.354657
S.E. of regression	1.617923	Akaike info criterion	4.080160
Sum squared resid	26.17674	Schwarz criterion	4.369880
Log likelihood	-26.64128	Hannan-Quinn criter.	4.094996
F-statistic	0.103122	Durbin-Watson stat	1.654406
Prob(F-statistic)	0.989162		

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:
Null hypothesis: No serial correlation at up to 3 lags

F-statistic	0.165328	Prob. F(3,9)	0.9171
Obs*R-squared	0.835696	Prob. Chi-Square(3)	0.8409

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 02/17/24 Time: 14:34
Sample: 2007 2023
Included observations: 16
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X1	3.385505	42.30781	0.080021	0.9380
X2	-0.002240	0.138455	-0.016179	0.9874
X3	0.025721	0.228215	0.112706	0.9127
C	-3.721727	35.27865	-0.105495	0.9183
RESID(-1)	0.152451	0.368900	0.413258	0.6891
RESID(-2)	0.196328	0.383575	0.511839	0.6211
RESID(-3)	-0.072821	0.417854	-0.174274	0.8655

R-squared	0.052231	Mean dependent var	-4.44E-16
Adjusted R-squared	-0.579615	S.D. dependent var	1.354657
S.E. of regression	1.702570	Akaike info criterion	4.201791
Sum squared resid	26.08870	Schwarz criterion	4.539798
Log likelihood	-26.61433	Hannan-Quinn criter.	4.219100
F-statistic	0.082664	Durbin-Watson stat	1.693582
Prob(F-statistic)	0.996677		

التمرين الثالث: لدراسة العلاقة بين Y و X وكانت البيانات كالتالي:

Y_i	69	76	52	56	57	77	58	55	67	53	72	46
X_i	09	12	6	10	09	10	07	08	12	06	11	08

وكان تقدير معادلة الانحدار على النحو ألآتي:

$$\hat{Y}_i = 33.75 + 3.25X_i$$

المطلوب:

1. أختبر فرضية تجانس تباين حدود الخطأ العشوائي باستعمال معامل ارتباط الرتب لسبيرمان، عند مستوى معنوية 5%؟

التمرين الرابع: لدراسة العلاقة بين Y و X وكانت البيانات كالتالي:

Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i
1.8	5	2	5	4.5	15	2.1	5
2	5	3.2	10	3.6	10	3.5	10
3	10	5	20	2	5	5	15
4.2	15	4.2	15	4.8	15	6	20
4.8	20	3.5	10	5.7	20	6.2	20

المطلوب:

1. اختبر فيما اذا كانت حدود الخطا العشوائي تعاني من مشكلة عدم تجانس التباين مستعملا اختبار كولدفيلد-كوانت (Test Goldfeld-Quandt)، عند مستوى معنوية 5%؟

التمرين الخامس:

لتكن المعطيات التالية حول حجم الإنتاج والمدخلات من العمل ورأس المال لمؤسسة خلال الفترة 10 سنوات لتقدير دالة الإنتاج من نوع كوب دوغلاس $Q=AK^{\alpha}L^{\beta}$، وكانت مخرجات تقدير النموذج الموجودة كما يلي:

Dependent Variable: LNQ
Method: Least Squares
Date: 02/24/24 Time: 15:50
Sample: 2013 2023
Included observations: 10

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LNL	0.189010	0.233632	0.809008	0.4451
LNK	0.937476	0.162249	5.777999	0.0007
C	0.281444	0.277454	1.014379	0.3442

R-squared	0.981560	Mean dependent var	3.649073
Adjusted R-squared	0.976291	S.D. dependent var	1.767446
S.E. of regression	0.272144	Akaike info criterion	0.478357
Sum squared resid	0.518438	Schwarz criterion	0.569132
Log likelihood	0.608215	Hannan-Quinn criter.	0.378776
F-statistic	186.3044	Durbin-Watson stat	1.742491
Prob(F-statistic)	0.000001		

المطلوب:

1. جد التحويل المناسب لتقدير النموذج على الشكل الخطي؟
2. اختبر مشكل الارتباط الذاتي من الرتبة الأولى عند مستوى مئوية 5%؟
3. أوجد تقديرا لمعامل الارتباط الذاتي؟
4. متى يكون اختبار دربن واتسون غير فعال للكشف عن مشكل الارتباط الذاتي؟

5. بالاستعانة بالبرنامج الإحصائي Eviews تم الحصول على الأشكال (01) و(02) و(03) ماذا تمثل؟ وما الهدف من كل اختبار؟ وعلى ماذا يتم تحليل وقراءة هذه الاختبارات لأخذ القرار المناسب؟

الشكل (01)

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:
Null hypothesis: No serial correlation at up to 2 lags

F-statistic	0.257804	Prob. F(2,10)	0.7777
Obs*R-squared	0.784523	Prob. Chi-Square(2)	0.6755

Test Equation:
Dependent Variable: RESID
Method: Least Squares
Date: 02/17/24 Time: 14:32
Sample: 2007 2023
Included observations: 16
Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
X1	5.261201	38.88167	0.135313	0.8950
X2	-0.007687	0.128175	-0.059971	0.9534
X3	0.032750	0.213455	0.153430	0.8811
C	-5.244302	32.48040	-0.161460	0.8749
RESID(-1)	0.154222	0.350426	0.440099	0.6692
RESID(-2)	0.201756	0.363301	0.555342	0.5909

R-squared	0.049033	Mean dependent var	-4.44E-16
Adjusted R-squared	-0.426451	S.D. dependent var	1.354657
S.E. of regression	1.617923	Akaike info criterion	4.080160
Sum squared resid	26.17674	Schwarz criterion	4.369880
Log likelihood	-26.64128	Hannan-Quinn criter.	4.094996
F-statistic	0.103122	Durbin-Watson stat	1.654406
Prob(F-statistic)	0.989162		

الشكل (02)

Heteroskedasticity Test: Glejser
Null hypothesis: Homoskedasticity

F-statistic	1.840277	Prob. F(1,29)	0.1854
Obs*R-squared	1.849808	Prob. Chi-Square(1)	0.1738
Scaled explained SS	2.232889	Prob. Chi-Square(1)	0.1351

Test Equation:
Dependent Variable: ARESID
Method: Least Squares
Date: 03/09/24 Time: 22:16
Sample: 1993 2023
Included observations: 31

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	512812.4	1393495.	0.368004	0.7155
X	0.212496	0.156642	1.356568	0.1854

R-squared	0.059671	Mean dependent var	2326218.
Adjusted R-squared	0.027246	S.D. dependent var	2221820.
S.E. of regression	2191343.	Akaike info criterion	32.10027
Sum squared resid	1.39E+14	Schwarz criterion	32.19278
Log likelihood	-495.5542	Hannan-Quinn criter.	32.13043
F-statistic	1.840277	Durbin-Watson stat	1.988481
Prob(F-statistic)	0.185386		

الشكل (03)

Heteroskedasticity Test: Breusch-Pagan-Godfrey
Null hypothesis: Homoskedasticity

F-statistic	0.533866	Prob. F(1,29)	0.4708
Obs*R-squared	0.560369	Prob. Chi-Square(1)	0.4541
Scaled explained SS	0.800238	Prob. Chi-Square(1)	0.3710

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 03/09/24 Time: 22:24
Sample: 1993 2023
Included observations: 31

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.78E+12	1.20E+13	0.148723	0.8828
X	984913.1	1347974.	0.730662	0.4708

R-squared	0.018076	Mean dependent var	1.02E+13
Adjusted R-squared	-0.015783	S.D. dependent var	1.87E+13
S.E. of regression	1.89E+13	Akaike info criterion	64.03608
Sum squared resid	1.03E+28	Schwarz criterion	64.12859
Log likelihood	-990.5592	Hannan-Quinn criter.	64.06624
F-statistic	0.533866	Durbin-Watson stat	1.956616
Prob(F-statistic)	0.470848		

المحور الخامس: نماذج المعادلات الآنية

المحاضرة الثانية عشر: نماذج المعادلات الآنية

1. مفهوم نماذج المعادلات الآنية.
2. أمثلة اقتصادية لنماذج المعادلات الآنية.
3. الشكل الهيكلي والمختزل لنموذج المعادلات الآنية.
4. تحديد معادلات الشكل الهيكلي للنموذج بشرطين (الشرط الضروري، الشرط الكافي)
5. طرق تقدير نماذج المعادلات الآنية.

1.مفهوم نماذج المعادلات الآنية.

هي عبارة عن صيغ رياضية تعبر عن العلاقات المتشابكة التي تتميز بها النشاط الاقتصادي وعن التأثير المتبادل للظواهر الاقتصادية بصفة عامة لذلك فان هذه النماذج تتميز بالتأثير المتبادل للمتغير المستقل والمتغير التابع. بعكس النماذج ذات المعادلة الواحدة التي تتميز كما راينا سابقا بتأثير المتغير المستقل على المتغير التابع فقط.

2.امثلة اقتصادية لنماذج المعادلات الانية:

أولا: نموذج السوق.

يتكون نموذج السوق من ثلاث معادلات على النحو التالي:

$$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + u_1$$
$$Q_S = \beta_0 + \beta_1 P + u_2$$
$$Q_d = Q_s$$

ولعل من اهم الخصائص هذا النموذج هو ان الحدود العشوائية u_1 u_2 لا تؤثر فقط على المتغير التابع ممثلا في (الكمية المطلوبة و المعروضة) وإنما تؤثر أيضا على المتغير التفسيري ممثلا في السعر.

ثانيا: نموذج الكينزي للدخل القومي.

يتكون هذا النموذج من ثلاث معادلات في صورته المبسطة على النحو التالي:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_1 + u_1$$
$$\mathrm{I_t} = \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_{t-1} + u_2$$
$$Y_t = G_t + C_t + I_t$$

- تمثل المتغيرات الداخلية في:

C_t (الانفاق الاستهلاكي خلال الفترة الحالية

$\mathrm{I_t}$ الانفاق الاستثماري خلال الفترة الحالية

Y_t الدخل الكلي خلال الفترة الحالية

- تتمثل المتغيرات سابقة التحديد في:

G_t الانفاق الحكومي كمتغير خارجي

الدخل الكلي خلال الفترة السابقة

تتمثل الحدود العشوائية في u_1 و u_2

ونلاحظ على هذا النموذج انه لا يمكن تحديد القيمة التوازنية لأي متغير داخلي فيه دون استخدام كل معادلات النموذج. فلتحديد قيمة التوازنية للاستهلاك لا بد من معرفة قيمة Y_t و لتحديد قيمة Y_t لا بد

من معرفة I_t G_t C_t وهكذا يتعين استخدام كل المعادلات دفعة واحدة لتحديد القيمة التوازنية لأي متغير داخلي بالنموذج.

ثالثا: نموذج الأجور-الأسعار.

من ابرز نماذج الأجور نموذج Philips الذي يتكون من معادلتين على النحو التالي:

دالة الأجور $$W_t = \alpha_0 + \alpha_1 L_t + \alpha_2 P_t + u_1$$

دالة الأسعار $$P_t = \beta_0 + \beta_1 W_t + \beta_2 C_t + \beta_3 M_t + u_2$$

حيث:

W_t معدل التغير في الأجور النقدية حلال الفترة t

L_t معدل البطالة خلال الفترة t

P_t معدل التغير في الأسعار خلال الفترة t

C_t معدل التغير في تكلفة راس المال خلال الفترة t

M_t معدل التغيير في سعر واردات المواد الخام خلال الفترة t

u_1 u_2 الحدود العشوائية

ويلاحظ من هذا النموذج أن معدل التغير في الأجور يتحدد بمعدل التغير في الأسعار، كما أن معدل التغير في الأسعار يتحدد بمعدل التغير في الأجور، ومن ثم فإن معادلات النموذج مرتبطة مع بعضها البعض، ولذا لا يمكن تحديد القيمة التوازنية لأي متغير داخلي دون استخدام كل معادلات النموذج.

3. الشكل الهيكلي و المختزل لنموذج المعادلات الآنية.

- **الشكل الهيكلي للنموذج:**

مجموعة من المعادلات التي يتكون منها أي نموذج اني تسمى بالشكل الهيكلي للنموذج. وكل معادلة فيه تسمى بالمعادلة الهيكلية.

المتغيرات الداخلية: هي المتغيرات التي تتحدد قيمتها داخل نموذج المعادلات المعطى.

المتغيرات الخارجية: المتغيرات التي تتحدد قيمتها خارج النموذج.

المتغيرات المحددة سلفا: هي المتغيرات الخارجية مضافا اليها المتغيرات الداخلية ذات فترة الإبطاء، بمعنى المتغيرات داخلية في فترات زمنية سابقة.

معاملات المتغيرات (a/b/c/....) تسمى المعاملات الهيكلية للنموذج.

- **الشكل المختزل لنموذج المعادلات الآنية:**

هو عبارة عن نموذج معادلات خطية مشتق من النموذج الهيكلي الأصلي، يكون فيه كل متغير داخلي دالة في المتغيرات المحددة سابقا للنموذج:

مثال:

- ما هو الشكل المختزل للنموذج الهيكلي التالي:

$$y_1 = b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{13}x_3$$
$$y_2 = b_{21}y_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

بافتراض ان y_1 و y_2 هي متغيرات داخلية

الحل:

استخراج معادلات الشكل المختزل:

$$y_2 = b_{21}(b_{12}y_2 + a_{11}x_1 + a_{13}x_3) + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$
$$y_2 = (\frac{b_{21}a_{11}}{1 - b_{21}b_{12}})\,x_1 + (\frac{a_{22}}{1 - b_{21}b_{12}})x_2 + (\frac{b_{21}a_{13} + a_{23}}{1 - b_{21}b_{12}})x_3$$
$$y_1 = (\frac{a_{11}}{1 - b_{12}b_{21}})x_1 + (\frac{b_{12}a_{22}}{1 - b_{12}b_{21}})x_2 + (\frac{b_{21}a_{13}a_{23}}{1 - b_{12}b_{21}})\,x_3$$

و يكون شكلها المبسط كالتالي:

$$y_1 = v_1x_1 + v_2x_2 + v_3x_3$$
$$y_2 = v_4x_1 + v_5x_2 + v_6x_3$$

4. تحديد معادلات الشكل الهيكلي للنموذج:

يقال على أي معادلة من معادلات الشكل الهيكلي للنموذج أنها محددة تماما اذا كان بالإمكان الحصول على قيمة مقدرة واحدة فقط لكل معامل من معاملات انحدار هذه المعادلة. اذا كان ممكنا الحصول على اكثر من قيمة مقدرة واحدة لمعاملات معادلة هيكلية ما فان هذه المعادلة توصف بانها محددة اكثر من اللازم. أما اذا لم يكن بالإمكان الحصول على أي قيمة مقدرة لمعاملات انحدار معادلة ما، عندئذ نكون بصدد معادلة هيكلية غير محددة يتم تحديد أي معادلة هيكلية بواسطة تطبيق شرطين: الشرط الضروري و الشرط الكافي. يسمى أحيانا الشرط الضروري للتحديد بشرط الدرجة أما الشرط الكافي فيطلق عليه شرط الرتبة. نجري اختبار الشرط الضروري أولا اذا تحقق هذا الشرط في المعادلة المراد تحديدها، ننتقل إلى إجراء اختبار الشرط الكافي.

الشرط الضروري لتحديد المعادلة الهيكلية: إجراء هذا الاختبار يتطلب تحقيق القواعد التالية:

D+1=N: يعني ان المعادلة الهيكلية المعنية محددة تماما.

D+1<N: المعادلة غير محددة.

N D+1 : المعادلة محددة اكثر مما ينبغي.

حيث N هو عدد المتغيرات الداخلية في المعادلات الهيكلية المراد تقديرها.

D هو عدد المتغيرات المحددة سابقا او عدد المتغيرات الخارجية التي لا تظهر في المعادلة المعنية، و الموجودة في غيرها من معادلات النموذج.

الشرط الكافي للتحديد:

تكون المعادلة الهيكلية محددة حسب هذا الشرط اذا تحقق ما يلي:

نحصر كل المتغيرات التي لم تظهر في المعادلة الهيكلية المراد تحديدها.

نكون مصفوفة A بمعاملات هذه المتغيرات في المعادلات الاخرى.

نسجل رتبة هذه المصفوفة ونحسب محددها: اذا كان det A=0 او رتبة المصفوفة A اقل من عدد المتغيرات الداخلية في نموذج ناقص واحد فان المعادلة المعنية تعتبر غير محددة. أما اذا كان detA لا تساوي 0 ورتبة المصفوفة A ليس اقل من عدد المتغيرات الداخلية في النموذج ناقص واحد، فان المعادلة تكون محددة.

5. طرق تقدير نماذج المعادلات الآنية:

هناك العديد من الطرق المستخدمة لتقدير نماذج المعادلات الآنية نذكر طريقتين باختصار هما:

- **طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (MCI):** تستخدم هذه الطريقة لتقدير المعادلات محددة تماما فقط.

- **طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (DMC):** هي الطريقة الأكثر استخداما لتقدير المعالم الهيكلية للمعادلات محددة تماما والمعادلات المحدد اكثر من الازم في نموذج المعادلات الأنية.

تمارين محلولة:

تمرين الاول:

ليكن النموذج المحدد للدخل القومي كالتالي:

$$c = a_0 + b_1 y$$
$$y = c + I + G$$

المطلوب:

- تكوين الشكل المختزل لهذا النموذج الهيكلي بافتراض ان المتغيرات الداخلية هي: y/c

الحل:

$$c = a_0 + b_1(c + I + G) = a_0 + b_1 c + b_1 I + b_1 G$$
$$c - b_1 c = a_0 + b_1 I + b_1 G$$
$$(1 - b_1)c = a_0 + b_1 I + b_1 G$$
$$c = \left(\frac{a_0}{1 - b_1}\right) + \left(\frac{b_1}{1 - b_1}\right) I + \left(\frac{b_1}{1 - b_1}\right) G$$
$$y = a_0 + b_1 y + I + G$$
$$(1 - a_0)y = a + I + G \rightarrow y = \left(\frac{a_0}{1 - a_0}\right) + \left(\frac{1}{1 - a_0}\right) I + + \left(\frac{1}{1 - a_0}\right) G$$
$$c = v_1 + v_2 I + v_3 G$$
$$y = v_4 + v_5 I + v_6 G$$

التمرين الثاني:

ليكن الشكل الهيكلي لنموذج المعادلات الآنية التالي:

$$y_1 = \alpha_{11}.x_1 + \alpha_{12}.x_3 + \lambda_{13}.y_3$$
$$y_2 = \alpha_{22}.x_2 + \lambda_{21}.y_1 + \lambda_{23}.y_3$$
$$y_3 = \lambda_{31}.x_1 + \alpha_{33}.x_3 + \lambda_{32}.y_2$$

المطلوب:

1. بين طبيعة تحديد المعادلات الهيكلية المكونة لهذا النموذج مستعملا كل من شرط الضروري (الدرجة) وشرط الرتبة، حيث ان المتغيرات الداخلية له هي: (y_3, y_2, y_1) والمتغيرات الخارجية هي: (x_3, x_2, x_1)؟
2. هناك العديد من الطرق المستخدمة لتقدير نماذج المعادلات الآنية تم ذكر طريقتين فالمحاضرة اذكرهما مع الشرح في استخدام كل طريقة باختصار؟

حل التمرين الثاني:

تحديد المعادلات الهيكلية:

المعادلة الأولى:

اختبار الشرط الضروري(الدرجة):

المتغيرات الداخلية الموجودة في المعادلة الأولى هي: N=2 (y_3, y_1)

المتغيرات الخارجية الغير موجودة في هذه المعادلة وموجودة في غيرها: $D=1$ (x_2)

فيكون شكل الاختبار الضروري هو: D+1=N ⟵ 1+1=2 ومنه المعادلة الأولى محددة تماما.

اختبار الشرط الكافي (الرتبة):

في المعادلة الأولى لا تظهر المتغيرات (y_2, x_2): وعليه يتم تشكيل مصفوفة معاملات هذه المتغيرات في المعادلات الأخرى للنموذج كالآتي:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha_{22} \\ \lambda_{32} & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det A \neq 0$$

اذن محدد هذه المصفوفة لا يساوي 0 ورتبتها تساوي 2. وعليه فالمعادلة تستجيب لاختبار شرط الرتبة ومنه محددة تماما.

المعادلة الثانية:

اختبار الشرط الضروري(الدرجة):

المتغيرات الداخلية الموجودة في المعادلة الثانية هي: N=3 (y_3, y_2, y_1)

المتغيرات الخارجية الغير موجودة في هذه المعادلة وموجودة في غيرها: D=2 (x_3, x_1)

فيكون شكل الاختبار الضروري هو: D+1=N ⟵ 2+1=3 ومنه المعادلة الثانية محددة تماما.

اختبار الشرط الكافي (الرتبة):

في المعادلة الثانية لا تظهر المتغيرات (x_3, x_1): وعليه يتم تشكيل مصفوفة معاملات هذه المتغيرات في المعادلات الأخرى للنموذج كالآتي:

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \lambda_{31} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det A \neq 0$$

اذن محدد هذه المصفوفة لا يساوي 0 ورتبتها تساوي 2. وعليه فالمعادلة تستجيب لاختبار شرط الرتبة ومنه محددة تماما.

المعادلة الثالثة:

اختبار الشرط الضروري(الدرجة):

المتغيرات الداخلية الموجودة في المعادلة الثالثة هي: N=2 (y_3, y_2)

المتغيرات الخارجية الغير موجودة في هذه المعادلة وموجودة في غيرها: D=1 (x_2)

فيكون شكل الاختبار الضروري هو: D+1=N ⟵ 1+1=2 ومنه المعادلة الثانية محددة تماما.

اختبار الشرط الكافي (الرتبة):

في المعادلة الثانية لا تظهر المتغيرات $(y_1,\ x_2)$: وعليه يتم تشكيل مصفوفة معاملات هذه المتغيرات في المعادلات الأخرى للنموذج كالآتي:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \alpha_{22} & \lambda_{21} \end{bmatrix} \Longrightarrow \det A \neq 0$$

اذن محدد هذه المصفوفة لا يساوي 0 ورتبتها تساوي 2. وعليه فالمعادلة تستجيب لاختبار شرط الرتبة ومنه محددة تماما.

2- طرق تقدير نماذج المعادلات الآنية:

هناك العديد من الطرق المستخدمة لتقدير نماذج المعادلات الآنية تم ذكر طريقتين فالمحاضرة هما:

- **طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (MCI):** تستخدم هذه الطريقة لتقدير المعادلات محددة تماما فقط.
- **طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (DMC):** هي الطريقة الأكثر استخداما لتقدير المعالم الهيكلية للمعادلات محددة تماما والمعادلات المحدد اكثر من الازم في نموذج المعادلات الأنية.

الملاحق

$\Phi(z) = P(Z \le z),\ -3.49 \le z \le 0\ ,\quad Z\sim N(0,1)$ جدول (1) التوزيع الطبيعي

z	0.0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
−3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
−3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
−3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
−3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
−3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
−2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
−2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
−2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
−2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
−2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
−2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
−2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
−2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
−2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
−2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
−1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
−1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
−1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
−1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
−1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
−1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
−1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
−1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
−1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
−1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
−0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
−0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
−0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
−0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
−0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
−0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
−0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
−0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3829
−0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
−0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641

تابع – جدول (1) التوزيع الطبيعي

$\Phi(z) = P(Z \leq z),\ 0 \leq z \leq 3.49\ ,\quad Z \sim N(0,1)$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

جدول (2) توزيع مربع كاي

$$P(X \geq a), \qquad X \sim x^2(\alpha, \vartheta)$$

ϑ \ α	0.995	0.99	0.975	0.95	0.90	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	–	–	0.001	0.004	0.016	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.646	2.180	2.733	3.490	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.042	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.085	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.865	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	11.651	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	12.443	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	13.240	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	14.041	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	14.848	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	15.659	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559
25	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	34.382	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	35.563	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	36.741	40.113	43.195	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	37.916	41.337	44.461	48.278	50.993
29	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	39.087	42.557	45.722	49.588	52.336
30	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	40.256	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	51.805	55.758	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.707	32.357	34.764	37.689	63.167	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.534	37.485	40.482	43.188	46.459	74.397	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.758	51.739	55.329	85.527	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.153	60.391	64.278	96.578	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.647	69.126	73.291	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.222	77.929	82.358	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169

$P(X \geq a)$, $X \sim t(\vartheta)$ جدول (3) توزيع t

ϑ \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527	3.819
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485	3.767
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450	3.725
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.690
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385	3.646
40	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
60	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232	3.460
120	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160	3.373
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090	3.291

جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.05, \vartheta_1, \vartheta_2)$

$\vartheta_2 \backslash \vartheta_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75
inf	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67

تابع - جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.05, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
2	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
3	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
6	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
26	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
27	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
28	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
29	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
30	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
inf	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

تابع - جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.1, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	39.86	49.5	53.59	55.83	57.24	58.2	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.22
2	8.53	9	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.41	9.42
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.2
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.9	3.87
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.4	3.37	3.34	3.32	3.3	3.27	3.24
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.9	2.87
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.7	2.67	2.63
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.5	2.46
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.38	2.34
10	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.28	2.24
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.3	2.27	2.25	2.21	2.17
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.15	2.1
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.2	2.16	2.14	2.1	2.05
14	3.1	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.1	2.05	2.01
15	3.07	2.7	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.02	1.97
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.99	1.94
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.1	2.06	2.03	2	1.96	1.91
18	3.01	2.62	2.42	2.29	2.2	2.13	2.08	2.04	2	1.98	1.93	1.89
19	2.99	2.61	2.4	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.91	1.86
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2	1.96	1.94	1.89	1.84
21	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.87	1.83
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.9	1.86	1.81
23	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.84	1.8
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.1	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.83	1.78
25	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.82	1.77
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.81	1.76
27	2.9	2.51	2.3	2.17	2.07	2	1.95	1.91	1.87	1.85	1.8	1.75
28	2.89	2.5	2.29	2.16	2.06	2	1.94	1.9	1.87	1.84	1.79	1.74
29	2.89	2.5	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.78	1.73
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.77	1.72
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.71	1.66
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.66	1.6
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.9	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.6	1.55
inf	2.71	2.3	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.6	1.55	1.49

تابع - جدول (4) توزيع F

$$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.1, \vartheta_1, \vartheta_2)$$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	61.74	62	62.26	62.53	62.79	63.06	63.33
2	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.49
3	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.14	5.13
4	3.84	3.83	3.82	3.8	3.79	3.78	3.76
5	3.21	3.19	3.17	3.16	3.14	3.12	3.11
6	2.84	2.82	2.8	2.78	2.76	2.74	2.72
7	2.59	2.58	2.56	2.54	2.51	2.49	2.47
8	2.42	2.4	2.38	2.36	2.34	2.32	2.29
9	2.3	2.28	2.25	2.23	2.21	2.18	2.16
10	2.2	2.18	2.16	2.13	2.11	2.08	2.06
11	2.12	2.1	2.08	2.05	2.03	2	1.97
12	2.06	2.04	2.01	1.99	1.96	1.93	1.9
13	2.01	1.98	1.96	1.93	1.9	1.88	1.85
14	1.96	1.94	1.91	1.89	1.86	1.83	1.8
15	1.92	1.9	1.87	1.85	1.82	1.79	1.76
16	1.89	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72
17	1.86	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69
18	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66
19	1.81	1.79	1.76	1.73	1.7	1.67	1.63
20	1.79	1.77	1.74	1.71	1.68	1.64	1.61
21	1.78	1.75	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59
22	1.76	1.73	1.7	1.67	1.64	1.6	1.57
23	1.74	1.72	1.69	1.66	1.62	1.59	1.55
24	1.73	1.7	1.67	1.64	1.61	1.57	1.53
25	1.72	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52
26	1.71	1.68	1.65	1.61	1.58	1.54	1.5
27	1.7	1.67	1.64	1.6	1.57	1.53	1.49
28	1.69	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.48
29	1.68	1.65	1.62	1.58	1.55	1.51	1.47
30	1.67	1.64	1.61	1.57	1.54	1.5	1.46
40	1.61	1.57	1.54	1.51	1.47	1.42	1.38
60	1.54	1.51	1.48	1.44	1.4	1.35	1.29
120	1.48	1.45	1.41	1.37	1.32	1.26	1.19
inf	1.42	1.38	1.34	1.3	1.24	1.17	1

تابع - جدول (4) توزيع F

$$P(X \geq a), \qquad X\sim F(0.025, \vartheta_1, \vartheta_2)$$

ϑ_2 \ ϑ_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	647.79	799.5	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63	976.71	984.87
2	38.51	39	39.17	39.25	39.3	39.33	39.36	39.37	39.39	39.4	39.41	39.43
3	17.44	16.04	15.44	15.1	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.25
4	12.22	10.65	9.98	9.6	9.36	9.2	9.07	8.98	8.9	8.84	8.75	8.66
5	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.52	6.43
6	8.81	7.26	6.6	6.23	5.99	5.82	5.7	5.6	5.52	5.46	5.37	5.27
7	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.9	4.82	4.76	4.67	4.57
8	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.3	4.2	4.1
9	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.2	4.1	4.03	3.96	3.87	3.77
10	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.62	3.52
11	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.43	3.33
12	6.55	5.1	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.28	3.18
13	6.41	4.97	4.35	4	3.77	3.6	3.48	3.39	3.31	3.25	3.15	3.05
14	6.3	4.86	4.24	3.89	3.66	3.5	3.38	3.29	3.21	3.15	3.05	2.95
15	6.2	4.77	4.15	3.8	3.58	3.41	3.29	3.2	3.12	3.06	2.96	2.86
16	6.12	4.69	4.08	3.73	3.5	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.89	2.79
17	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.82	2.72
18	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.1	3.01	2.93	2.87	2.77	2.67
19	5.92	4.51	3.9	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.72	2.62
20	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.68	2.57
21	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.8	2.73	2.64	2.53
22	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.7	2.6	2.5
23	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.9	2.81	2.73	2.67	2.57	2.47
24	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.7	2.64	2.54	2.44
25	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.51	2.41
26	5.66	4.27	3.67	3.33	3.1	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.49	2.39
27	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.8	2.71	2.63	2.57	2.47	2.36
28	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.9	2.78	2.69	2.61	2.55	2.45	2.34
29	5.59	4.2	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.43	2.32
30	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.41	2.31
40	5.42	4.05	3.46	3.13	2.9	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.29	2.18
60	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.17	2.06
120	5.15	3.8	3.23	2.89	2.67	2.52	2.39	2.3	2.22	2.16	2.05	1.95
inf	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.11	2.05	1.94	1.83

تابع - جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.025, \vartheta_1, \vartheta_2)$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	993.1	997.25	1001.41	1005.6	1009.8	1014.02	1018.26
2	39.45	39.46	39.47	39.47	39.48	39.49	39.5
3	14.17	14.12	14.08	14.04	13.99	13.95	13.9
4	8.56	8.51	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5	6.33	6.28	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6	5.17	5.12	5.07	5.01	4.96	4.9	4.85
7	4.47	4.42	4.36	4.31	4.25	4.2	4.14
8	4	3.95	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9	3.67	3.61	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10	3.42	3.37	3.31	3.26	3.2	3.14	3.08
11	3.23	3.17	3.12	3.06	3	2.94	2.88
12	3.07	3.02	2.96	2.91	2.85	2.79	2.73
13	2.95	2.89	2.84	2.78	2.72	2.66	2.6
14	2.84	2.79	2.73	2.67	2.61	2.55	2.49
15	2.76	2.7	2.64	2.59	2.52	2.46	2.4
16	2.68	2.63	2.57	2.51	2.45	2.38	2.32
17	2.62	2.56	2.5	2.44	2.38	2.32	2.25
18	2.56	2.5	2.45	2.38	2.32	2.26	2.19
19	2.51	2.45	2.39	2.33	2.27	2.2	2.13
20	2.46	2.41	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
21	2.42	2.37	2.31	2.25	2.18	2.11	2.04
22	2.39	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2
23	2.36	2.3	2.24	2.18	2.11	2.04	1.97
24	2.33	2.27	2.21	2.15	2.08	2.01	1.94
25	2.3	2.24	2.18	2.12	2.05	1.98	1.91
26	2.28	2.22	2.16	2.09	2.03	1.95	1.88
27	2.25	2.19	2.13	2.07	2	1.93	1.85
28	2.23	2.17	2.11	2.05	1.98	1.91	1.83
29	2.21	2.15	2.09	2.03	1.96	1.89	1.81
30	2.2	2.14	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40	2.07	2.01	1.94	1.88	1.8	1.72	1.64
60	1.94	1.88	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120	1.82	1.76	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
inf	1.71	1.64	1.57	1.48	1.39	1.27	1

تابع - جدول (4) توزيع F

$P(X \geq a), \quad X \sim F(0.01, \vartheta_1, \vartheta_2)$

$\vartheta_2 \backslash \vartheta_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15
1	4052.18	4999.5	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85	6106.32	6157.29
2	98.5	99	99.17	99.25	99.3	99.33	99.36	99.37	99.39	99.4	99.42	99.43
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87
4	21.2	18	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.8	14.66	14.55	14.37	14.2
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72
6	13.75	10.93	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.1	7.98	7.87	7.72	7.56
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.8	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.2	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.4	4.25
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.5	4.39	4.3	4.16	4.01
13	9.07	6.7	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.3	4.19	4.1	3.96	3.82
14	8.86	6.52	5.56	5.04	4.7	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.8	3.66
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4	3.9	3.81	3.67	3.52
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.2	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41
17	8.4	6.11	5.19	4.67	4.34	4.1	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.02	3.84	3.71	3.6	3.51	3.37	3.23
19	8.19	5.93	5.01	4.5	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.3	3.15
20	8.1	5.85	4.94	4.43	4.1	3.87	3.7	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.4	3.31	3.17	3.03
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98
23	7.88	5.66	4.77	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.3	3.21	3.07	2.93
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.9	3.67	3.5	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.82
27	7.68	5.49	4.6	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.9	2.75
29	7.6	5.42	4.54	4.05	3.73	3.5	3.33	3.2	3.09	3.01	2.87	2.73
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.7	3.47	3.3	3.17	3.07	2.98	2.84	2.7
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.8	2.67	2.52
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.5	2.35
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19
inf	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.8	2.64	2.51	2.41	2.32	2.19	2.04

تابع - جدول (4) توزيع F

$$P(X \geq a), \qquad X \sim F(0.01, \vartheta_1, \vartheta_2)$$

ϑ_2 \ ϑ_1	20	24	30	40	60	120	inf
1	6208.73	6234.63	6260.65	6286.78	6313.03	6339.39	6365.86
2	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.5
3	26.69	26.6	26.51	26.41	26.32	26.22	26.13
4	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
5	9.55	9.47	9.38	9.29	9.2	9.11	9.02
6	7.4	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	5.36	5.28	5.2	5.12	5.03	4.95	4.86
9	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.4	4.31
10	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4	3.91
11	4.1	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.6
12	3.86	3.78	3.7	3.62	3.54	3.45	3.36
13	3.67	3.59	3.51	3.43	3.34	3.26	3.17
14	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3
15	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	3.26	3.18	3.1	3.02	2.93	2.85	2.75
17	3.16	3.08	3	2.92	2.84	2.75	2.65
18	3.08	3	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	3	2.93	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	2.94	2.86	2.78	2.7	2.61	2.52	2.42
21	2.88	2.8	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	2.83	2.75	2.67	2.58	2.5	2.4	2.31
23	2.78	2.7	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	2.74	2.66	2.58	2.49	2.4	2.31	2.21
25	2.7	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
26	2.66	2.59	2.5	2.42	2.33	2.23	2.13
27	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.2	2.1
28	2.6	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
29	2.57	2.5	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
30	2.55	2.47	2.39	2.3	2.21	2.11	2.01
40	2.37	2.29	2.2	2.11	2.02	1.92	1.81
60	2.2	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.6
120	2.04	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
inf	1.88	1.79	1.7	1.59	1.47	1.33	1

Durbin Watson جدول اختبار دربن واتسون

Significance level (alpha) 0.05

n	k=1		k=2		k=3		k=4		k=5		k=6		k=7		k=8		k=9		k=10	
	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU
6	0.61	1.4	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
7	0.7	1.356	0.467	1.896	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.367	2.287	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
9	0.824	1.32	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
10	0.879	1.32	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.315	2.645	0.203	3.004	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.38	2.506	0.268	2.832	0.171	3.149	-----	-----	-----	-----	-----	-----
13	1.01	1.34	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.444	2.39	0.328	2.692	0.23	2.985	0.147	3.266	-----	-----	-----	-----
14	1.045	1.35	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.03	0.505	2.296	0.389	2.572	0.286	2.848	0.2	3.111	0.127	3.36	-----	-----
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.75	0.685	1.977	0.562	2.22	0.447	2.471	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157	0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.86	0.222	3.09	0.155	3.304
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.71	0.779	1.9	0.664	2.104	0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.82	1.872	0.71	2.06	0.603	2.258	0.502	2.461	0.407	2.668	0.321	2.873	0.244	3.073
19	1.18	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023	0.649	2.206	0.549	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.29	2.974
20	1.201	1.411	1.1	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991	0.691	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885
21	1.221	1.42	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964	0.731	2.124	0.637	2.29	0.546	2.461	0.461	2.633	0.38	2.806
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.94	0.769	2.09	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.735
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.66	0.986	1.785	0.895	1.92	0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.36	0.545	2.514	0.465	2.67
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902	0.837	2.035	0.75	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613
25	1.288	1.454	1.206	1.55	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886	0.868	2.013	0.784	2.144	0.702	2.28	0.621	2.419	0.544	2.56
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873	0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513
27	1.316	1.469	1.24	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861	0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.47
28	1.328	1.476	1.255	1.56	1.181	1.65	1.104	1.747	1.028	1.85	0.951	1.959	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.649	2.431
29	1.341	1.483	1.27	1.563	1.198	1.65	1.124	1.743	1.05	1.841	0.975	1.944	0.9	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.681	2.396
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.65	1.143	1.739	1.071	1.833	0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363
31	1.363	1.496	1.297	1.57	1.229	1.65	1.16	1.735	1.09	1.825	1.02	1.92	0.95	2.018	0.879	2.12	0.81	2.226	0.741	2.333
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.65	1.177	1.732	1.109	1.819	1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.73	1.127	1.813	1.061	1.9	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.796	2.281
34	1.393	1.514	1.333	1.58	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808	1.079	1.891	1.015	1.978	0.95	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.16	1.803	1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799	1.114	1.876	1.053	1.957	0.991	2.041	0.93	2.127	0.868	2.216
37	1.419	1.53	1.364	1.59	1.307	1.655	1.249	1.723	1.19	1.795	1.131	1.87	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.197
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.722	1.204	1.792	1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.97	2.098	0.912	2.18
39	1.435	1.54	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789	1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.99	2.085	0.932	2.164
40	1.442	1.544	1.391	1.6	1.338	1.659	1.285	1.721	1.23	1.786	1.175	1.854	1.12	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.952	2.149
45	1.475	1.566	1.43	1.615	1.383	1.666	1.336	1.72	1.287	1.776	1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.022	1.038	2.088
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.335	1.771	1.291	1.822	1.246	1.875	1.201	1.93	1.156	1.986	1.11	2.044
55	1.528	1.601	1.49	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768	1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.17	2.01
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.48	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767	1.372	1.808	1.335	1.85	1.298	1.894	1.26	1.939	1.222	1.984
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767	1.404	1.805	1.37	1.843	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768	1.433	1.802	1.401	1.838	1.369	1.874	1.337	1.91	1.305	1.948
75	1.598	1.652	1.571	1.68	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.77	1.458	1.801	1.428	1.834	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.56	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772	1.48	1.801	1.453	1.831	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925
85	1.624	1.671	1.6	1.696	1.575	1.721	1.55	1.747	1.525	1.774	1.5	1.801	1.474	1.829	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776	1.518	1.801	1.494	1.827	1.469	1.854	1.445	1.881	1.42	1.909
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778	1.535	1.802	1.512	1.827	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.78	1.55	1.803	1.528	1.826	1.506	1.85	1.484	1.874	1.462	1.898
150	1.72	1.747	1.706	1.76	1.693	1.774	1.679	1.788	1.665	1.802	1.651	1.817	1.637	1.832	1.622	1.846	1.608	1.862	1.593	1.877
200	1.758	1.779	1.748	1.789	1.738	1.799	1.728	1.809	1.718	1.82	1.707	1.831	1.697	1.841	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874

قائمة
المراجع

قائمة المراجع:

1. أموري هادي كاظم، (2013)، القياس الاقتصادي، دار زهران للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.
2. تومي صالح، (2011)، مدخل لنظرية القياس الاقتصادي، الطبعة الثانية، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.
3. حسن ياسين طعمة و إيمان حسين حنوش، (2009)، أساليب الإحصاء التطبيقي، الطبعة الأولى، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.
4. حسين علي بخيت و سحر فتح الله، (2009)، الاقتصاد القياسي، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.
5. خالد محمد السواعي، (2015)، مبادئ الاقتصاد القياسي، دار الكتاب الثقافي.
6. دادومار غوجاراتي، ترجمة مها محمد زكي،(2019)، الاقتصاد القياسي بالأمثلة، دار حميثرا للنشر،الطبعة الأولى. القاهرة، مصر.
7. محمد شيخي، (2011)، طرق الاقتصاد القياسي، محاضرات وتطبيقات، الطبعة الأولى، دار النشر الحامد، الجزائر.
8. مكيد علي، (2011)، الاقتصاد القياسي: دروس ومسائل محلولة، الطبعة الثانية، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر.
9. عبد القادر محمد عبد القادر عطية، الحديث في الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الدار الجامعية، الإسكندرية، مصر.
10. وليد إسماعيل السيفو وأخرون، (2006)، أساسيات الاقتصاد القياسي التحليلي، الطبعة الأولى، الأهلية للنشر والتوزيع، الأردن.
11. عبد الرزاق بني هاني، (2014)، الاقتصاد القياسي نظرية الانحدار البسيط والمتعدد، الطبعة الأولى، دار وائل، الأردن.
12. حمداوي الطاوس، (2016)، مدخل للاقتصاد القياسي، الطبعة الأولى، دار هومه للطباعة والنشر والتوزيع، الجزائر.
13. Régis Bourbonnais, (2015), Econométrie: Cours et exercices corrigés, DUNOD, 9eme édition.
14. Dimitrios, Asteriou, Stephen G. Hall. (2007). Applied Econometrics: a modern approach using EViews and Microfit, Published by Palgrave Macmillan.
15. Nirmal Ravi Kumar, (2020), Econometrics, CRC Press Taylor and Francis Group, Narendra Publishing House, 1st edition.