Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Algèbre et Mathématique Discrète

Thème

Algèbres de Lie nilpotentes

Présentée par :
M^{elle} MAHROUG Amal

Soutenu publiquement le : 06/07/2022.

Devant le jury composé de :

MIHOUBI Douadi	Prof,	Université de M'sila	**Président**.
MIDOUNE Noureddine	MCA,	Université de M'sila	**Encadreur**.
HEBOUB Lakhdar	MAA,	Université de M'sila	**Examinateur**.

Année universitaire 2021/2022.

Table des matières

Remerciment

Avant tout Nous remercions Allah, le tout puissant d'avoir, éclaire notre vie, renforce notre courage et notre volanté pour finir ce travail .

Nous tenons à remercier particulièrement notre directeur de thése Monsieur **MiDOUNE Noureddine**, pour toute l'aide qu'il m'a apporté et leur patience, leur conseil et pour avoir guidé ce travail avec beaucoup d'intéret .

Nous tenons à remercier **Mihoubi Douadi et Heboub Lakhdar**, pour avoir accepté d'examiner notre mémoire .

Nos remerciements s'adressent à tous les professeurs du département de mathématiques sans oublier aussi nos collègues et amies, tous les étudiants et étudiantes de notre promotion, ainsi tous ceux qui participent de loin ou de près à l'elaboration de ce mémoire .

Nous accordons tout notre respect à ceux qui nous ont soutenus, en particulier à mon mari **Tebbani Mohamed Amine** et nos chers nos mères, ma soeur, nos frères, et notre Fils **Tebbani ihab Abde Alaziz** à qui nous dédions ce travail pour leur grand soutien .

Nous remercions toutes les personnes, fammille, amis, qui directement ou indirectement on contribue à la réalisation de ce travail .

Introduction

Les algèbres de Lie nilpotentes jouent un rôle qui va grandissant ces dernières années. Sachant leur intérêt dans les problèmes de classification des algèbres de Lie ou sur le plan géométrique.

Les premiers résultats fondamentaux sur l'étude des algèbres de Lie nilpotentes sont certainement dus à Umlauf. Dans sa thèse (Leipzig 1891). L'étude des algèbres réelles et complexes est commencée indépendamment par Dixmier et Morozov. Les classifications complètes en dimension inférieure ou égale à six sont données et les problèmes concernant les dimensions supérieures mis en évidence, problèmes relatifs à l'existence, dès la dimension sept, d'une infinité d'algèbres de Lie nilpotentes complexes non isomorphes. Une approche plus formelle, s'inserrant dans le cadre de la géométrie algébrique a été développée par Michèle Vergne. Les physiciens théoriciens, intéressés par les lien entre les diverses mécaniques, développent l'idée de contractions d'algèbres de Lie (Segal, Inonu, Wigner). Cet outil se révéla en fait très pratique dans la détermination des composantes. On l'associer à la notion formelle de déformations, laquelle fut introduite par Gerstenhaber. En fait le lien entre ces deux notions ne fut décrit que ces dernières années.

Le but de ce mémoire est de rassembler les résultats obtenus. On s'intéresse ègalement à deux classes d'algèbres nilpotentes, qui sont grosso modo des modèles d'algèbres nilpotentes : ce sont les algèbres filiformes (les moins commutatives) et les algèbres caractéristiquement nilpotentes (toutes les dérivations sont nilpotentes).

Dans le premier chapitre, on donne des généralités sur les algèbres de Lie (resolubles et nilpotentes) et les invariants classiques des algèbres de Lie nilpotentes.

Le deuxième chapitre est consacré à la classification de certaines classes d'algèbres de Lie nilpotentes de dimension ≤ 7 : nous rappelons l'essentiel des résultats connus sur la classification des algèbres de Lie filiformes, algèbres de Lie 2- nilpotentes et algèbres de Lie caracteristiquement nilpotentes.

Chapitre 1

GENERALITES.

Le but de ce chapitre est de rappeler les notions fondamentales concernant les algèbres de Lie de dimension finie et de-présenter les classes de ces algèbres .

1.1 Algèbres de Lie

1.1.1 Notion d'algèbre de Lie.

Définition 1 *Une algèbre de Lie* $\boldsymbol{g}$ *sur un corps* K *est un espace vectoriel sur* K *muni d'une multiplication, c'est-à-dire d'une application bilinéaire de* $g \times g$ *dans* g

$$(x, y) \to [x, y]$$

vérifiant les identités suivantes

1. $[x, x] = 0$
2. $[x, [y, z]] + [z, [x, y]] = 0$ *quels que soient* x, y, z *dans* g

Remarques :

1. Dans cette définition, on identifie l'algèbre de Lie et son espace vectoriel sous jacent.

2. L'identité (2) est dite identité de Jacobi.

3. L'identité (1) implique l'antisymétrie de la multiplication

c'est-à-dire $[x, y] = -[y, x]$.

Notons que si la caractéristique du corps K est différente de 2, l'antisymétrie implique aussi $[x, x] = 0$

1.1.2 Exemples

1. Tout espace vectoriel peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie en prenant comme loi $[x, y] = 0$. Cette algèbre de Lie est dite abélienne.

2. Soit l'espace $M_n(K)$ des matrices carrées d'ordre n sur K. La multiplication :

$$[A, B] = AB - BA$$

vérifie les conditions 1 et 2. Ainsi $M_n(K)$ muni de ce crochet est une.algèbre de Lie . Elle est notée $gl(n, K)$.

3. Soit V un espace vectoriel sur K. L'espace $End\ (V)$ des endomorphismes de V peut être muni d'une structuré d'algèbre de Lie en posant

$$[f, g] = fog - gof, \forall f, g \in End\ V.$$

Cette algèbre de Lie est notée $gl(V, K)$ ou $gl(V)$ si la précision du corps de référence n'est pas nécessaire.

4. Soient V l'espace vectoriel de dimension $2k+1$ et $(e_1, e_2, ..., e_{2k+1})$ une base de V. Posons

$$[e_{2i}, e_{2i+1}] = e_1 \qquad \text{pour } i = 1, ..., k$$

La multiplication définie par ces relations munit V d'une structuré d'algèbre de Lie.

Cette algèbre de Lie, qui va jouer un rôle prépondérant dans la théorie des, algèbres de Lie nilpotentes, est appelée l'algèbre de Heisenberg notée H_k.

1.1.3 Sous algèbres de Lie

Définition 2 *Soit g une algèbre de Lie sur K. Un sous espace vectoriel g_1 de g est appelé sous-algèbre de Lie si la restriction de la multiplication de g munit g_1 d'une structure d'algèbre de Lie.*

Exemples

1. Tout sous espace d'une algèbre de Lie abélienne est une sous algèbre de Lie abélienne.

2. Le sous espace de $gl(n, K)$ formé des matrices triangulaires (c'est-à-dire des matrices (a_{ij}) avec $a_{ij} = 0$ dés que $i < j$) est une sous algèbre de Lie de $gl(n, K)$.

3. Le sous espace de $gl(n, K)$ formé des matrices diagonales est aussi une sous algèbre de Lie.

1.1.4 Les algèbres de Lie classiques.

1° **L'algèbre de Lie,** $sl(n, \mathbb{C})$

L'ensemble de matrices $A = (a_{ij}) \in gl(v, \mathbb{C})$ de trace nulle

c'est-à-dire vérifiant

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$$

est une sous algèbre de Lie de $gl(n, \mathbb{C})$.

Elle est appelée l'algèbre spéciale linéaire complexe.

2° **L'algèbre de Lie** $so(n, \mathbb{C})$

$$so(n, \mathbb{C}) = \{A = (a_{ij}) \in gl(n, \mathbb{C}) \text{ tel que } {}^tA = -A\}$$

où ${}^tA$ désigne là transposée de la matrice A. C'est aussi une sous algèbre de $gl(n, \mathbb{C})$. Elle est appelée l'algèbre orthogonale.

3° **L'algèbre symplectique** $sp(2n, \mathbb{C})$

$$sp(n, \mathbb{C}) = \{A = (a_{ij}) \in gl(n, \mathbb{C}) \text{ tel que } {}^tAJ = -JA\}$$

où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & Id_n \\ -Id_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Toute matrice $A \in sp(2n, \mathbb{C})$ se décompose sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix},$$

où N et P sont des matrices carrées d'ordre n symétriques et les matrices M et Q vérifient ${}^tM = -Q$

1.1.5 Idéaux

Définition 3 *Une sous algèbre de Lie* g_1 *de* g *est un idéal de* g*. si* $[g_1, g] \subset g_1$ *c'est-à dire* $[x, y] \in g_1$ *quels que soient* x *dans* g_1 *et* y *dans* g*.*

Exemples

1. Soit $g = gl(n, \mathbb{C})$ et $g_1 = sl(n, \mathbb{C})$

Ici g_1 est un idéal de g. En effet toute matrice A peut s'écrire sous la forme

$$A = \alpha Id + A' \text{ avec } A' \in sl(n, \mathbb{C})$$

Soit $B \in sl(n, \mathbb{C})$. Alors

$$[A, B] = [\alpha Id + A', B] = [\alpha Id, B] + [A', B] \in sl(n, \mathbb{C}).$$

2. Soit $g = gi(n, \mathbb{C})$ et $g_1$la sous algèbre des matrices triangulaires définie dans l'exemple 2 de 1.3. Il est évident que g_1 n'est pas un idéal (des que $n > 1$).

Remarque.

Si I et J sont deux idéaux de l'algèbre de Lie g, alors $I + J, I \cap J$ et $[I, J]$ sont encore des idéaux de g.

1.1.6 Algèbres de Lie quotients

Soient g une algèbre de Lie et I un idéal de g. L'espace vectoriel, quotient g/I peut être muni naturellement d'Une structure d'algèbre de Lie en posant

$\left[\bar{x}, \bar{y}\right] = \overline{[x, y]}$ avec $x, y \in \mathbf{g}$

où la barre désigne la classe d'équivalence.

1.2 Algèbres de Lie résolubles et nilpotentes .

1.2.1 Suite dérivée.

Soit g une algébre de Lie sur K. posons $D^0 g = g$, $D^1 g = [g, g]$ et plus généralemenent $D^{k+1} g = \left[D^k g, D^k g\right]$ pour $k \geq 0$. Chaucun des sous espaces $D^k g$ est un idéal de g et on a la suite décroissante suivante :

$$g = D^0 g \supset D^1 g \supset ... \supset D^k g \supset ...$$

Cette suite est appelée la suite dérivée de g.

1.2.2 Suite centrale descendante

1° **Centré et idéaux centraux**

Le centre de l'algèbre de Lie g est l'idéal abélien

$Z(g) = (x \in g$ tel que $[x, y] = 0 \qquad \forall y \in g)$

Un idéal I de g contenu dans le centré sera dit central.

2° **Suite centrale descendante**.

Posons

$$\left\{ \begin{matrix} C^0 g = g & \\ C^{k+1} g = [C^k g, g] & k \geq 0 \end{matrix} \right\}$$

chacun des $C^i g$ est un idéal de g et l'on a

$$C^0 g \supset C^1 g \supset ... \supset C^k g \supset ...$$

cette suite est appelée la suite centrale descendante de g et l'algébre quotient $C^{i+1}(g)/C^{i+2}(g)$ est un idéal central de $C^i(g)/C^i(g)$.

1.2.3 Suite centrale ascendante.

Posons $C_0(g) = \{0\}$ *et* $Ck(g) = \{x \in g$ tel que $[x, g] \subset C_{k-1}(g)\}$ *pour* $k \geq 1$ *On a* $\{0\} = C_0(g) \subset C_1(g) \subset ... \subset C_k(g) \subset ...$ et chacun des $C_k(g)$ est un idéal de g.

Cette suite est dite suite centrale ascendante de g.

Remarquons que $C_1(g)$ est le centre de g, et $C_{k+1}(g)$ est l'image réciproque pour l'application canonique de g sur $\frac{g}{C_k(g)}$ du centre de $\frac{g}{C_k(g)}$.

1.2.4 Définition des algèbres de Lie résolubles

Définition 4 *Une algèbre de Lie g est dite résoluble s'il existe un entier k tel que*

$$D^k g = \{0\}.$$

Exemples

1. Toute algèbre abélienne est résoluble.
2. Toute sous algèbre, toute algèbre quotient d'algèbres résolubles est résoluble.
3. la sous algèbre de $gl(n, \mathbb{C})$composée des Matrices triangulaires est résoluble.

Proposition 1 *L'algèbre de Lie g est résoluble si et seulement si il existe une suite décroissante d'idéaux de*

$$g = I_0 \supset I_1 \supset ... \supset I_k = \{0\}$$

telle que $[I_j, I_j] \subset I_{j+1}$ *pour* $0 \leq j \leq k-1$

Démonstration.

- condition nécessaire : on prend $Ij = D^j(g)$
- condition suffisante : on a $D^1 g \subset I_1$ et plus généralement $D^j g \subset I_j$ comme $I_k = \{0\}$, alors $D^k g$ est nul.

■

1.3 Définition des algèbre de Lie nilpotentes

Définition 5 *Une algèbre de Lie g est dite nilpotente s'il existe un entier k tel que*

$$C^k g = \{0\}.$$

Le plus petit enlier k tel que $C^k g = \{0\}$ est appelé l'indice de nilpotente de g.

Exemples

1. Toute algèbre abélienne est nilpotente d'indice 1.
2. L'algèbre de Heisenberg H_k est nilpotente d'indice 2.
3. L'algèbre de dimension n définie dans une base $(e_1, ..., e_n)$ par les crochets

$$[e_1, e_i] = e_{i+1}.$$

est nilpotente d'indice $(n-1)$.

4. La sous algèbre de $gl(n, K)$ formée des matrices triangulaires strictement supérieures (c'est-à-dire des matrices $A = (a_{ij})$ telles que $a_{ij} = 0$ pour $i \leq j$) est nilpotente.
5. Toute sous algèbre, toute algèbre quotient d'algèbres nilpotentes est nilpotente.

Définition 6 *Une algèbre de Lie nilpotente d'indice* 2. *est dite* ***metabéliennee.*** *Une algèbre nilpotente de dimension n d'indice de nilpotente $(n-1)$ est dite* ***filiforme*** *(l'indice est ici maximum).*

Proposition 2 *toute algèbre nilpotente est résoluble.*

En effet $C^i g \supset D^i g$.

Proposition 3 *Une algèbre de Lie g est nilpotente si et seulement. s'il existe une suite décroissante d'idéaux*

$$g = I_0 \supset I_1 \supset ... \supset I_k = \{0\}$$

telle que

$$[g, I_j] \subset I_{j+1} \quad 0 \leq j \leq k-1$$

La démonstration est analogue à celle présentée dans le cas résoluble.

Proposition 4 *Une algèbre de Lie g est nilpotente d'indice k si et seulement si pour tout $x_0, x_1, ..., x_k \in g$ on a*

$$[x_0, [x_1, [x_2, ..., [x_{k-1}, x_k]]] ....] = 0$$

Cela découle directement de la définition.

1.3.1 Le théorème d'Engel

1° **L'opérateur adjoint**

Soit g une algèbre de Lie et $x \in g$. On note adx l'endomorphisme de g défini par :

$$adx(y) = [x, y]$$

Ceci montre que :

$$g \to gl(g)$$

est une représentation de g appelée représentation adjointe de g

2° **Le théorème d'Engel**

Théorème 1 *une algèbre de Lie g est nilpotente si et seulement si adx est nilpotent pour tout x de g.*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 1 *(Engel). Soit V un espace vectoriel non trivial sur K et g une sous algèbre de $gl(V)$. Supposons que chaque x de g soit un endormorphisme nilpotent de V. Alors il existe $v \neq 0 \in V$ tel que*

$$x(v) = 0 \ \forall x \in g.$$

Démonstration.

Elle se fait par récurrence sur la, dimension n de g. Le lemme est vrai pour $n = 0$. Supposons le vrai pour les dimensions inférieures à n.On commence, par montrer que g possède un idéal de codimension 1. Soit **h** une sous algèbre de dimension $m < n$ de g. Soit $x \in h$; c'est un endomorphisme nilpotent de V. Il en est de même de l'endomorphisme adx de h. En effet (ad x) $P(y)$ se décompose comme une somme de termes de là formé $x^i y x^k$ avec $i + k = p$. Comme $xP = 0$ pour une certaine puissance, adx est aussi nilpotent.Soit $\sigma(x) : g/_h \to g/_h$ défini par passage au quotient de adx. Comme adx est nilpotent. il en est de même de $\sigma(x)$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un vecteur $\bar{y} \neq 0$ dans $g/_h$ tel que $\sigma(x)(\bar{y}) = 0$ pour tout x de h. Soit $y \in g$ un représentant de $\bar{y}$: Alors $[x, y] \in h$ pour tout $x \in h$ et h et h est un idéal dans une sous algèbre de dimension $m + 1$. En itérant cette procédure on montre qu'il existe un idéal h de codimension 1.

Soit h cet idéal. Choisissons un $a \in g$ tel que $a \notin h$. L'ensemble U des $v \in V$ tel que $x(v) = 0$ pour tout $x \in h$ est non nul. C'est un sous espace invariant par a . En effet, $x(a(v))[x, a](v) = 0$ donc $a(v) \in U$. L'hypothèse de récurrence montre qu'il existe un élément u non nul de U tel que $a(u) = 0$. Comme $x(u) = 0$, $\forall x \in h$, le lemme est démontré.

Démonstration du théorème 1.

La nécessité découle de la proposition $4(2 - 5)$.

La suffisance se démontre par récurrence.

Supposons le théorème vrai pour toutes les algèbres de Lie de dimension inférieure à n Soir g de dimension n telle que adx soit nilpotent pour tout x.

D'après le lemme d'Engel, il existe $y \neq 0$ dans g tel que $[x, y] = 0\ \forall x \in g$. Ceci signifie que le centre $Z(g)$ de g est non trivial. Considérons l'algèbre $g/_{Z(g)}$. Par récurrence cette algèbre est nilpotente.

Lasuite centrale descendante de $g/_{Z(g)}$ s'annule au bout d'un certain pas $p : C^P\left(\frac{g}{Z(g)}\right) = 0$. Ceci signifie que $C^P(g) \subset Z(g)$ et donc $C^{P+1}(g) = \{0\}$.

L'algèbre g est nilpotente.

Corollaire 1 *Le centre d'une algèbre de Lie nilpotente non nulle est non trivial.*

Corollaire 2 *Soient g Une algèbre de Lie I un idéal de g, Si l'algèbre quotient g/I est nilpotente et si pour tout x de g la restriction de adx à I est nilpôtente . alors l'algèbre g est aussi 'nilpotente.*

Les démonstrations de ces corollaires sont quasiment contenus dans les commentaires du théorème d'Engel.

Corollaire 3 *Si g est une sous algèbre de Lie $gl(n, K)$ dent tous les éléments sont nilpotents, alors g est nilpotente.*

1.3.2 Le théorème de Lie (le corps K est algébriquement clos de caractéristique nulle)

Rappelons quelques notions classiques.

Soit g une algèbre de Lie sur K et V un espace vectoriel sur K. Une représentation linéaire de g dans V est un homomorphisme d'algèbre

$$\phi : g \rightarrow gl(V)$$

c'est-à-dire une application linéaire vérifiant

$$\Phi\,[x,y]\,g = [\Phi(x),\Phi(y)]_{gl(v)} = \Phi(x)\circ\Phi(y) - \Phi(y)\circ\Phi(x)$$

avec x et y dans g ($[,]_g$ désigne le crochet dans g). Dans ce cas l'espace Vectoriel V est muni naturellement d'une structure du g-module dès que l'on pose :

$$x.v = \Phi(x)(v) \qquad x \in g \ \ etv \in V$$

En fait, il y a équivalence ente les deux notions de représentations linéaires et de g-modules.

Remarque : Si l'algèbre de Lie g est résoluble, l'algèbre dérivée $D(g)$ est nilpotente.

1.4 Les invariants classiques des algèbres de Lie nilpotentes .

La classification des algèbres de Lie classification à isomorphisme près, est un problème fondamental. C'est probablement un des premiers problèmes que l'on rencontre dès que l'on veut comprendre " l'ensemble " des algèbres de Lie. nous donnerons une structure algébrique à cet ensemble afin d'avoir une idée sur le comportement des algèbres de Lie les unes par rapport aux autres. Classer les algèbres de Lie revient à "fibrer" cet ensemble, les fibres correspondant aux classes d'isomorphies. Les algèbres simples et semi simples complexes sont entièrement classées et ce depuis longtemps. Modulo l'étude des dérivations des algèbres de Lie résolubles, la classification des algèbres de Lie se ramène, via le théorème de Lévi à celle des résolubles et en particulier à celle des nilpotentes. Distinguer deux algèbres non isomorphes n'est pas une chose aisée. Il est bon de connaître un certain nombre d'invariants (c'est-à-dire des propriétés stables par isomorphisme), faciles à décrire ou à calculer. Le but de ce paragraphe est de présenter les plus courants.

1.4.1 Les dimensions des idéaux caractéristiques et l'indice de nilpotence

Soit g une algèbre de Lie nilpotente (et bien sûr complexe et de dimension finie).

Est-il bon de préciser que dim g est le plus simple des invariants ?

On classe donc les algèbres de Lie dans une dimension donnée. A l'heure actuelle, on connait les classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à 7. Cette classification est rappelée au chapitre suivant. Il est clair que la mise en place de cette classification a nécessité l'usage d'autres invariants plus fins que la dimension de g.

i) L'indice de nilpotence de g

C'est le plus petit entier positif s tel que $C^s(g) = \{0\}$En particulier, si s est l'indice de nilpotence, on a $(adX)^s = 0$ On peut aussi étudier

$\min\left\{k \text{ tel que } (adx)^k = 0 \quad , \forall x \in g\right\}$

Exemple.

1. Si $s = 1$, g est abélienne. Elle est unique, à isomorphisme près pour une dimension donnée.

2. Si $s = 2$, g est métabélienne. La classification des métabéliennes est encore aujourd'hui un problème ouvert .

3. Si $s = dimg - 1, g$ est filiforme. L'étude de ces algèbres est également entreprise au chapitre 2.

ii) La dimension des idéaux caractéristiques

Soient

$$g = d^0 g \supset D^1 g \supset D^2 g \supset ... \supset D^P g = \{0\}\,.$$

$$g = C^0 g \supset C^1 g \supset C^2 g \supset ... \supset C^s g = \{0\}\,.$$

$$\{0\} = C_0 g \subset C_1 g \subset ... \subset C_2 g = g$$

Notons d^i =dim $D^i g$ c^i =dim $c^i g$, et $c_i =$ dim $C_i g$.

Alors la suite des dimensions : $(n, d_1, ..., d_{p-1}/c^1, ..., c^{s-1}/C_1, ..., C_{s-1})$

est un invariant de g. La classification des nilpotents de dimension inférieure ou égale à six peut être obtenue en n'utilisant que cet invariant.

1.4.2 Suite caractéristique

Soit $x \in g$. On note $c(x)$ la suite ordonnée des invariants de similitude de l'opérateur nilpotent adx, c'est-à-dire la suite des dimensions des blocs de Jordan de cet opérateur. Considérons, dans l'ensemble des suites $c(x)$, l'ordre lexicographique :

$$(c_1, c_2, ..., c_s) \geq (d_1, ..., d_p) \Leftrightarrow \exists i tq c_j = d_j pour j < i \quad et c_i > d_i.$$

Soit $c(g) = \underset{X \in g - D^1(g)}{max} c(x)$ La suite $c(g)$ est un invariant de g appelé suite caractéristique.

Exemples :

1) $c(g) = (n-1, 1)$.

Il existe $x \in g$ tel que $(\text{ad } x)^{n-2} \neq 0$, la matrice réduite de Jordan de adx ayant la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 0\ 1.........\ 1 \\ 0\ 0.......... \\ .\ .... \\ ....\ 1 \\ 0\ ....\ 0 \end{pmatrix}$$

L'indice de nilpotence de g est n-1 et g est filiforme.

1) $c(g) = (1, 1, ..., 1)$.Pour tout X de $g - D(g)$ la matrice de Jordan et donc adx est nul. L'algèbre g est abélienne.

La classification des nilpotents de dimension 7 peut se faire en utilisant cet invariant .

1.4.3 Le rang d'une algèbre de Lie nilpotente

Dans l'algèbre de Lie Der(g)des dérivations de g, on considère les sous algèbres abéliennes maximales composées des éléments semi simples .D'après Mostow ($[Mo]$), ces algèbres sont deux à deux conjuguées par un automorphisme intérieur

Ainsi la dimension de ces algèbres ne dépend que de la classe d'isomorphie de g. Elle est appelée le rang de g.

Exemple : g est de rang maximal si le rang de g est égal à la codimension de l'algèbre dérivée.

Chapitre 2

Certaines classes d'algèbres de Lie nilpotentes

On définit dane ce chapitre les algèbres de Lie nilpotentes ainsi que leurs classification en petite dimension.

2.1 Algèbres de Lie filiformes

2.1.1 Définitin :

Soit g une algébre de Lie nilpotente de dimension n. Soit $C^k(g)$ la suite centrale descendante de g.

Définition 7 *L'algèbre de Lie g est dite filiforme si sa suite centrale descendante vérifie :*

$$C^k(g) = n - k - 1 \quad \textit{pour } k \geq 1.$$

La propriété suivante donne un autre caractérisation des algèbres filiformes :

Proposition 5 *L'algèbre de Lie g est filiforme si et seuiement si il existe un vecteur X non nul dans le cone* $g - C^1(g)$ *dont la suite caractéristique* $\mathbf{s}(X)$ *est* $(n-1,1)$.

Démonstration. Rappelons que $s(X)$ est la suite ordonnée des invariants de similitude de adx.

Si $s(X) = (n - 1{,}1)$, il existe une base de jordan $(X = X_1,...,X_n)$ de adX vérifiant $[X_1,X_2] = X_{i-1}$ pour $i = 3,...,n$ et $C^i(g)$ est engendré par $\{X_2,X_3,...,X_{n-i}\}$ des que $i \geq 2$ L'algébre g est filiforme. Réciproquement, on choisit une base $\{X_0,X_{1,...,}X_{n-1}\}$ adaptée à la filtration $g = C^0(g) \supset C^1(g) \supset C^2(g) \supset ...C^{n-1}(g)$.

Cette base peut etre choisie de manière à vérifier $s(X_0) = (n - 1{,}1)$.

Remarque : Les algèbres de Lie filiformes admettent un indice de nilpotentes maximal et égal à $n-1$ Ces algèbres constituent donc les classes des algèbres nilpotentes les "moins" nilpotentes.

2.1.2 Exemples

1. Soit L_n l'algèbre de Lie de dimension n +1 définie par

$[X_{0,}X_i] = X_{i+1}$, $i = 1,...,n-1$ ou $(X_0,...,X_{n+1})$ est une base de L_n. Rappelons que, par convention, les crochets non définis, sont nécessairement nuls.Cette algèbre est filiforme. Elle joue un role trè particulier dans l'étude des algèbres filiformes. C'est en quelque sorte la plus simple de ces algèbres.

2. Soit Q_n l'algèbre nilpotente définie dans la base $(X_{0,...},X_n)$ par

$$[X_0,X_i] = X_{i+1},\ i = 1,...,n-1$$

$$[X_i,X_{n-i}] = (-1)iX_n,\ i = 1,...,n-1$$

Cette algèbre est aussi filiforme.

3. Soit R_n définie dans la base $(X_0,\ldots,X_n)$par

$$\left\{ \begin{array}{c} [X_0,X_i] = X_{i+1},\ i = 1,\ldots,n-1 \\ [X_1,X_i] = X_{i+2},\ i = 2,\ldots,n-1 \end{array} \right\}$$

elle est filiforme.

4. Soit w_n l'algèbre dont les crochets sont dans la base $(X_0,\ldots,X_n)$:

$$\left\{ \begin{array}{cc} [X_0,X_i] = X_{i+1}, \quad i = 1,..,n-1 & \\ [X_0,X_j] = \frac{6(i-1)!(j-1)!(j-i)}{(i+j)!} X_{i+j+1}, & 1 \leq i < j \leq n-1 \\ & i+j+1 \leq n \end{array} \right\}$$

Cette algèbre filiforme est isomorphe à l' algèbre définie par :

$$\{[Y_i,Y_j] = (i+j)Y_{i+j} \quad \text{pour } i+j \leq n+1,\ 1 \leq i \leq j \leq n+1\}$$

qui est un quotient fini de la partie nilpotente de l'algèbre de Witt.

$$\alpha_i = (-1)^{i+1}(i - \frac{n}{2})c$$

L'identité de Jacobi appliquée aux éléments $(X_1,X_{\frac{n}{2}},X_{\frac{n}{2}})$ impliquent $\alpha = 0$ et $\alpha_i = 0$. D'ou le théoréme.

Corollaire 4 *Si n est impair, il n'existe que deux algèbres de Lie filiformes graduées (à isomorphisme près) de dimension $n+1$. Ces algèbres sont L_n et Q_n.*

2.2 Algèbres de Lie 2- nilpotentes

2.2.1 Définition.

Définition 8 *une algèbre de Lie nilpotente g est dite 2-nilpotente (ou métabélienne) si elle vérifie : $C^2(g) = 0$.*

Exemples :

i) L'algèbre abélienne est métabélienne

ii) l'algebre de Heisenberg de dimension $2p+1$ définie par

$$[X_1,X_2] = [X_3,X_4] = ... = [X_{2p+L}X_{2p}] = X_{2p+1}$$

est également métabélienne. Cett algèbre est une sorte de modèle parmi cette classe d'algèbres. Elle est caractérisée par la propriété suivante :

Proposition 6 *L'algèbre de Heisenberg est l'unique algèbre de Lie (à isomorphisme près) vérifiant :*

$$Z(g) = C^1(g) \ et \dim Z(g) = 1.$$

2.2.2 Structure des algèbres 2-nilpotentes.

Notons V une supplémentaire de $C^1(g)$ dans g :

$$g = C^1(g) \oplus v.$$

On peut remarquer que le nombre $s = \dim\, v = \dim\, g/C(g)$ est le nombre minimum de génerateurs de l'algèbre g Comme g est 2-nipotente, l'agèbre dérivée $C^1\,(g)$ est contenue dans le centre et si U désigne le sous-espace $Z(g) \cap V$ alors U est un idéal abélien de g. Considérons uns supplémentaire U de U dans V . On a la décomposition suivant :

$$g = C^1(g) \oplus U \oplus U' et Z(g) = C^1(g) \oplus U \text{ ou } U \text{ est un idéal abélien de } g..$$

On en déduit que $g' = C^1(g) \oplus U'$ est une sous-algèbre 2-nilpotente de g vérifiant

$$\begin{aligned} Z(g') &= C^1(g) \\ C^1(g') &= C^1(g). \end{aligned}$$

Ainisi toute algèbre de Lie 2-nipotente est une extension triviale d'une algèbre de Lie 2-nipotente dont le centre coïncide avec l'algèbre dérivée par un idéal abélien.On peut donc supposer que l'algèbre g vérifie $C^1(g) = Z(g)$.

Soit $(X_1,...,X_p,Y_1,...,Y_{n-p})$ une base de g adaptée à la décomposition

$$g = C^1(g) \oplus V = Z(g) \oplus V.$$

avec dim $C^1(g) = p$.

On a évidemment. $[X_i,X_j] = [X_i,X_k] = 0$ la structure de l'algèbre de Lie g est entiérement déterminée par les seuls crochets :

$$[Y_i,Y_j] \sum_{n=-1}^{p} a^k X_K, \; 1 \leq i \leq j \leq n-p$$

et les conditions de jacobi relatives aux constantes a_{ij}^k sont trivialement satisfaits.

Intrinséquement, ceci signifie que la structure de g est définie par une application linéaire surjective

$$\varphi : \Lambda^2 V \to Z(g).$$

Le point de vue dual permet une analyse plus concréte :l'application duale

$$\varphi^* : Z(g)^* \to \Lambda^2 V^* \text{ est injective.}$$

Se donner une telle application φ^*(et donc φ et donc le crochet de g) est équivalent à se donner un sous espace de dimension $p = \dim Z(g)$ de $\Lambda^2 V^*$.

Revenons à l'écriture du crochet dans la base fixée $(X_1,...,X_{p,}Y_1,...,Y_{n-p,})$.

Si $\left(\alpha_1,...,\alpha_{p,}\beta_1,...,\beta_{n-p,}\right)$ désigne la base duale alors les équations de structures se ramènent à

$$d\alpha_k = \sum_{1 \leq i < j \leq n-p} a_{\rceil}^k \beta_i \wedge \beta_j.$$

Les 2-formes linéaires($\theta_1 = d_{\alpha_1},...,\theta_k = d_{\alpha_k}$) sont des 2-formes sur V. Elles engendrent le sous espace $\varphi^*(Z(g)^*)$. Il apparait des seules constantes de structure$\left(a_{ij}^k\right)$.

2.2.3 Sur la classification des algèbres 2-nilpotentes

Le problème de la classification des algèbres 2-nilpotentes peut de prime abord apparaitre comme facile à résoudre. Pour bien situer ce propos rappelons que le problème général de classification des algébres de Lie nilpotentes, qui est un problème majour, bien que décrit et dégrossit voici plus d'un siècle (voir par exemple les travaux de Umlauf $[U]$ est toujours à l'heure actuelle , un problème ouvert.Enfin de chapitre , on notera les rares résultats qui ne concernent que les petites dimensions, L'introduction d'une hypothèse trés forte comme la 2-nilpotence peut faire espérer une approche plus simple de la classification .

Proposition 7 *La classification à isomorphisme prés des algèbres de Lie 2-nilpotente est*

équivalente à la classification des orbites sous l'action du groupe linéaire $gl(p,\mathbb{C})$ *dans la grassmannienne des 2-plans dans l'espace vectoriel* $\Lambda^2(C^p)$ *.*
Cette classification correspond à une réduction simultanée de p-formes de degré 2 et dans ce domaine-là nous manquons singulièrement de résultats. On peut donc, à l'heure actuelle avancer que la classification des algèbres de Lie 2-nilpotentes (et donc est algèbres de Lie) est impossible à établir.

2.2.4 La suite caractéristique.

L'indice maximal d'une algèbre 2-nilpotente g est 2 (si on la suppose non abélienne). Ainsi la suite caractéristique de g est de la forme

$$s(g) = (2,...,2,1,...,1)$$

Les algèbres 2-nilpotentes les moins abéliennes ont pour suite $(2,2,...,2,1)$. Dans ce cas si $\dim g = 2p+1$,alors $\dim Z(g) = p$ et les équations de structure s'écrivent :

$$d\alpha_k = \sum_{1 \leq i < j \leq p+1} \alpha_{i,j}^k \beta_i \wedge \beta_k$$

Comme ces équations définissent une structure d'agébre de Lie métabeliennes dont la suite caractéristique est égale à $(2,2,...,2,1)$ est isomorphe à l'ensemble des applications bilinéaires de $C^P \times C^P$ à valeurs dans C^P (ou $2p+1$ est la dimension de g).
Connaitre la classification de ces algébres 2-nilpotantes revient à connaitre la cllassification de ces applications bilinéaires et en particulier de toutes les algèbres de Lie de dirnension p. Ceci etaye notre précédente supposition sur l'impossibilité de classer les algèbres de de Lie.

2.3 Algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes

2.3.1 Sur un théorème de Jacobson

Théorème 2 *Toute algèbre de Lie sur un corps de caractéristique 0 admettant une dérivation non dégénérée est nilpotente.*

Commentaire :

Une dérivation f d'une algèbre de Lie g est définie par

$$df\left(X,Y\right)=\left[f\left(X\right),Y\right]+\left[X,f\left(Y\right)\right]-f\left[X,Y\right]=0$$

Cette dérivation est no, dégénérée si elle est non dégénérée en tant qu'application linéaire (et donc son déterminant est différent de 0). Par exemple, pour une algèbre semi-simple complexe, toutes les dérivations sont intérieures (c'est-à-dire du type $f = adX$) et admettent nécessairement un noyau. Elles sont toutes, dans ce cas, dégénérées.
Dans son travail, Jacobson pose le problème inverrse : est-ce que toute algèbre de Lie nilpotente admet une dérivation non dégénérée ?Une facon de répondre négativement à cette question est de construire une algèbre nilpotente dont toutes les dérivations sont nilpotentes.Le premier exemple d'une telle algèbre a été construit par Dixmier et Lister en 1957 $[DL]$: c'est l'algèbre de Lie g de dimension 8 définie par :

$$\begin{array}{lll}
[X_1,X_2] = X_5 & [X_2,X_3] = X_8 & [X_3,X_5] = X_7 \\
[X_1,X_3] = X_6 & [X_2,X_4] = X_6 & [X_4,X_6] = X_8 \\
[X_1,X_4] = X_7 & [X_2,X_6] = X_7 & \\
[X_1,X_5] = X_8 & [X_3,X_4] = X_5 &
\end{array}$$

Cet exemple fut le point de départ de l'étude d'une nouvelle classe d'algèbre nilpotente baptisée algèbre caractéristiquement nilpotente.

Définition 9 *Soit g une algèbre nilpotente et $Der\ g$ son algèbre de dérivation. On dit que g est caractéristiquement nilpotente si pour tout $f \in Der\ g$, f est un endormorpbisme nilpotente.*

2.3.2 Caractérisations des algèbres caractéristiquement nilpotentes.

i) Posons $g^{[1]} = Der\ g\,(g) = \{Y\ \varepsilon\ g$ tel que $Y = f\,(X)$ avec f dans $Der\,(g)$ et X dans $g\}$ et plus généralement $g^{[i]} = Der\ g\left(g^{[i-1]}\right) \quad i > 1$. L'algèbre g est caractéristiquement nilpotente si et seulement si il existe $k \in N$ tel que $g^{[k]} = \{0\}$. Cette suite est en quelque sorte construite de la meme manière que la suite centrale descendante : l'ensemble des dérivations internes jouantt la role de $Der\ g$.

ii) **Théoréme**$[LT]$

Théorème 3 *Soit g une algèbre de Lie nilpotente de dimension supérieure ou égale à 2. Alors g est caractéristiquement nilpotente si et seulement si l'algèbre $Der\ g$ est nilpotente.*

Notons que la nilpotente de $Der\ g$ n'implique pas directement la nilpotente de ces éléments (mais de ces opérateurs adjoints). La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 2 *Soit L une algèbre de Lie nilpotente qui est somme directe de deux idéaux non triviaux dont l'un des deux est central. Alors l'algèbre des dérivations n'est pas nilpotente.*

Démonstration Soit $L = I_1 \oplus I_2$ avec $[I_1, L] = 0$ (I_1 est central) et $[L, I_2] \subset I_2$.
Soit $x \neq 0, x \in I_1$,et soit U un supplémentaire de $\mathbb{C}\{x\}$dans I_1. Comme I_2 est un idéal de L,il est nilpotent ; il admet un centre non trivial . Soit y un élément non nul de ce centre.

On construit les dérivations suivantes :

$f_1 \in Der\ (L)$ vérifiant

$$f_1\left(I_2\right)=0, f_1\left(x\right)=y,$$

$$f_1\left(U\right)=0 \ f_2 \in Der\ L \text{ vérifiant } f_2\left(I_2\right)=0, f_2\left(x\right)=x, f_2\left(U\right)=0$$

On a $[f_1, f_2] = f_1$ (le crochet dans $Der\ L$).Ainsi $Der\ L$ n'est pas nilpotente. D'ou le lemme.

Démonstration du théoréme 3

La condition nécessaire est évidente.

Supposons donc $Der\ g$ nilpotente et dim $g > 1$.

Soit $\alpha \in (Der\ g)^*$(le dual de $Der\ g$) et soit V_α le sous espace.

$$V_\alpha = \left\{ \begin{array}{c} X\ \varepsilon\ g \text{ tel qu'il existe m dans N avec } \left(f-\alpha\left(f\right)Id\right)^m\left(X\right)=0, \\ \text{pour tout f de } Der\left(g\right) \end{array} \right\}$$

Si $V_\alpha \neq 0; \alpha$ est appelé le poids de l'algèbre $Der\ g$.

Notons Ω l'ensemble des poids de $Der\ g$.On a $g = \underset{\alpha\in\Omega}{\oplus} V_\alpha$ et

$$\left\{ \begin{array}{ll} [V\alpha, V_\beta] \subset V_{\alpha+\beta} & \text{si } \alpha+\beta\in\Omega \\ \quad = 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

Les espaces V_α sont en fait des idéaux de g car pour chaque X de g; $ad\ X$ est une dérivation de g. On en déduit

$$[V_\alpha, V_\beta] \subset V_\alpha \cap V_\beta \cap V_{\alpha+\beta}.$$

Par conséquent, $[V_\alpha, V_\beta] = \{0\}$ dès que $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$.

posons

$$I_1 = \underset{\substack{\alpha\in\Omega \\ \alpha\neq 0}}{\oplus} V_\alpha \qquad \text{et} \qquad I_2 = V_0.$$

On a $g = I_1 \oplus I_2$, I_1 est un idéal. central et I_2 est un idéal de g. D'aprés le lemme, on doit avoir soit $I_1 = \{0\}$, soit $I_2 = \{0\}$.

Si $I_1 = \{0\}$, $g = I_2 = V_0$ et toutes les dérivation de g sont nilpotentes.

Si $I_2 = \{0\}$, alors $g = I_1$. C'est une algèbre de Lie abélienne et $Der\ g$ corespond à $gl\,(n, C)$. Comme $Der\ g$ est par hypothése nilpotente , nécessairement $n = 1$ ce qui est exclu. D 'ou le théoréme.

2.3.3 Exemples

1) La plus petite dimension ou l'on rencontre un exemple d'algèbre caractéristiquement nilpotente complexe est 7.L'allgèbre suivante a été donnée par favre$[Fa]$.

$$\begin{array}{rclcl}
[X_1, X_2] & = & X_3 & \qquad & [X_2, X_3] = X_6 \\
[X_1, X_3] & = & X_4 & & [X_2, X_4] = [X_2, X_5] = [X_3, X_4] = X_7 \\
[X_1, X_4] & = & X_5 & & \\
[X_1, X_5] & = & X_6 & & \\
[X_1, X_6] & = & X_7 & &
\end{array}$$

Signalons qu'en dimension 7, il existe une famille à 1 paramétre d'algèbre deux à doux non isomorphes et qui soient toutes caractéristiquement nilpotente.

Contrairemant à l'algèbre de Favre, ces derniéres ne sont pas filiformes .

2) Dans le chapitre 1 sur les algèbres de Lie du traité de Bourbaki, il est donné l'algèbre de dimension 8 suivante :

$$
\begin{array}{lll}
[X_1, X_2] = X_3 & [X_2, X_3] = X_5 & [X_3, X_4] = -X_7 + X_8 \\
[X_1, X_3] = X_4 & [X_2, X_4] = X_6 & [X_3, X_5] = -X_8 \\
[X_1, X_4] = X_5 & [X_2, X_5] = X_7 & \\
[X_1, X_5] = X_6 & [X_2, X_6] = X_8 & \\
[X_1, X_6] = X_8 & & \\
[X_1, X_7] = X_8 & &
\end{array}
$$

On peut vérifier qu'elle est caractéristiquement nilpotente (et non filiforome).

2.4 La classification des algèbres de Lie nilpotentes de dimension inférieure ou égale à 7

2.4.1 La classification en dimension inférieure ou égale à 6

Rappelons que les classifications données dans ce chapitre (et les suivants) ne. concernent que les algèbres de Lie complexes et que les crochets non définis sont nuls.

Dimension 1

$n_1{}^1 = a_1 =$ l'algèbre abélienne de dimension 1

Dimension 2

$n_1{}^2 = a_1^2 =$ l'algèbre abélienne de dimension 2

Dimension 3

$n_1{}^3 = a_1{}^3 =$ l'algèbre abélienne de dimension 3

$n_2{}^3 = h^3 =$l'algèbre de Heisenberg définie par $[X_1, X_3] = X_2$

A partir de la dimension 4 , on n'écrira plus les algèbres décomposables c'est -à-dire qui sont somme directes d'idéaux propres.

Dimension 4

$$n_1\ ^4 : [X_1, X_4] = X_3; [X_1, X_3] = X_2. \text{ C'est une loi filiforme}$$

Dimension 5

$$n_1\ ^5 : [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_4] = X_3; [X_1, X_3] = X_2$$

$$n_2\ ^5 : [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_4] = X_3; [X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_4, X_5] = X_2$$

Ces deux lois sont les lois filiformes de dimension 5.

$$n_3\ ^5 : [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_3] = X_2; [X_2, X_3] = X_4$$

$$n_4\ ^5 : [X_1, X_5] = X_4; [X_2, X_3] = X_4$$

$$n_5\ ^5 : [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_3] = X_2; [X_3, X_5] = X_4$$

$$n_6\ ^5 : [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_3] = X_2$$

Dimension 6

$$n_1\ ^6 : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_4] = X_3; [X_1, X_3] = X_2$$

$$n_2\ ^6 : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_4] = X_3; [X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_5, X_6] = X_2$$

$$n_3\ ^6 : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_4] = X_3; [X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_3, X_6] = X_2; [X_4, X_5] = -X_2$$

$$n_4\ ^6 : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_4] = X_3; [X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_5, X_6] = X_3; [X_4, X_6] = X_2$$

$$n_5\ ^6 : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_4] = X_3; [X_1, X_3] = X_2$$

$$[X_3, X_6] = X_2; [X_4, X_5] = -X_2$$

Ces cinq lois sont les lois filiforme.

$n_6{}^6 : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_4] = X_3; [X_2, X_6] = X_4$

$[X_2, X_5] = -X_3$

$n_6{}^7 : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_4] = X_3; [X_2, X_6] = X_3$

$n_6{}^8 : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_4] = X_3; [X_2, X_6] = X_2$

$[X_5, X_6] = X_3$

$n_6{}^9 : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_3] = X_2; [X_5, X_6] = X_3$

$[X_4, X_6] = X_2$

$n_6{}^{10} : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_3; [X_3, X_6] = X_2; [X_4, X_5] = X_2$

$n_6{}^{11} : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_3] = X_2; [X_2, X_3] = X_4$

$n_6{}^{12} : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_2, X_3] = X_4$

$n_6{}^{13} : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_1, X_4] = X_3; [X_5, X_6] = X_2$

$n_6{}^{14} : [X_1, X_6] = X_5; [X_5, X_6] = X_3; [X_4, X_6] = X_2$

$n_6{}^{15} : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_4] = X_3; [X_5, X_6] = X_3; [X_4, X_6] = X_2$

$n_6{}^{16} : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_4] = X_3; [X_5, X_6] = X_2$

$n_6{}^{17} : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_5, X_6] = X_2; [X_3, X_6] = X_4$

$n_6{}^{18} : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_5] = X_4; [X_3, X_6] = X_2; [X_5, X_6] = X_2$

$n_6{}^{19} : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_4] = X_3; [X_2, X_6] = X_3$

$n_6{}^{20} : [X_1, X_6] = X_5; [X_1, X_4] = X_3; [X_4, X_6] = X_2$

2.4.2 La classification en dimension 7

Les tableaux précédents montent que pour les dimensions inférieures ou égales à 6, il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphise d'algébres de lie nilpotentes complexes. mais dés la dimension 7, nous allons rençontrer des familles à un ou plusieurs paramètres d'algèbres deux à deux non isomorphes, ce que l'on peut traduire en disant que la variété des classes d'isomorphie est de dimension non nulle dès que la dimension des algèbres est supérieure ou égale à sept.

Outre la décomposition de ces familles à un paramètre, la classification en dimension 7 (et au delà) est quelque peu difficile à établir compte tenu du grand nombre de classes d'isomorphie correspondant à des points isolés dans la variété des classes. Ceci rend quelque peu suspectes toutes les listes que l'on peut présenter.

Nous allons tout de meme en proposer une afin de donner une idée de la grande difficulté rencontrée lors de la vérification de cette liste. A L'heure actuelle, on possède trois voire quatre listes établies par ces auteurs différents. Malheureusement les techniques employées et surtout les invariants essentiels utilisés étant propres à chacun d'eux (suite caratéristique, rang, axtension), les classifications établies sont difficilement comparables.

Théorème 4 *Il existe six familles à un paramètre d'algèbres de Lie nilpotentes de dimension 7 deux à deux non isomorphes.*

$n_7{}^{1,a} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad i = 3, ..., 7$

$[X_4, X_7] = \alpha X_2 \qquad [X_5, X_7] = (1 + \alpha) X_3$

$[X_5, X_6] = X_2 \qquad [X_6, X_7] = (1 + \alpha) X_4$

$n_7{}^{2,\alpha} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad i = 4, ..., 7$

$[X_2, X_6] = X_3 \qquad [X_2, X_7] = X_3 + X_4$

$[X_5, X_7] = \alpha X_3 \qquad [X_6, X_7] = \alpha X_4 + X_2$

$n_7{}^{3,\alpha} : [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad i = 3, 4, 5, 7$

$[X_4, X_5] = X_6 \qquad [X_4, X_7] = \alpha X_2$

$[X_5, X_6] = X_2$ $\qquad$ $[X_5, X_7] = (1+\alpha)\, X_6$

$n_7{}^{4,\alpha:}$ $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\qquad$ $i = 3, 4, 5, 7$

$[X_4, X_7] = \alpha X_2$ $\qquad$ $[X_5, X_6] = X_2$

$[X_5, X_7] = (1+\alpha) X_3$

$n_7{}^{5,\alpha}$: $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\qquad$ $i = 3, 4, 5, 7$

$[X_5, X_6] = [X_6, X_7] = X_2$ $\qquad$ $[X_4, X_5] = \alpha X_2$

$[X_5, X_7] = X_3$

$n_7{}^{6,\alpha}$: $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\qquad$ $i = 3, 4, 5, 7$

$[X_4, X_7] = X_2$; $\qquad$ $[X_2, X_4] = \alpha X_5$

$[X_2, X_7] = [X_3, X_4] = X_5$

Remarque : La famille $n_7{}^{1,\alpha}$ est constituée de lois filiformes et chaque loi de la famille $n_7{}^{2,\alpha}$ est caractéristiquement nilpotente.

La classification en dimension 7.

Algèbres de Lie ayant comme suite caractéristique s $(g) = (6, 1)$ (Algèbres de Lie filiformes).

$n_7{}^{1,a}$: $[X_1, X_i] = X_{i-1}$ $\qquad$ $3 \leq i \leq 7$

$[X_4, X_5] = aX_6$; $\qquad$ $[X_5, X_7] = (1+a)\, X_3$ $\qquad$ $a \neq 0$

$[X_5, X_6] = X_2$; $\qquad$ $[X_6, X_7] = (1+a)\, X_4$

$n_7\ ^2 : \ [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 7$

$[X_4, X_7] = X_2\,; \qquad [X_5, X_7] = X_3 \qquad [X_6, X_7] = X_4$

$n_7\ ^3 : \ [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 7$

$[X_4, X_7] = X_2\,; \qquad [X_5, X_7] = X_3 \qquad [X_6, X_7] = X_2 + X_4$

$n_7\ ^4 : \ [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 7$

$[X_4, X_7] = X_2\,; \qquad [X_5, X_6] = -X_2$

$[X_5, X_7] = X_2 \qquad [X_6, X_7] = X_3$

$n_7\ ^5 : \ [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 7$

$[X_5, X_7] = X_2\,; \qquad [X_6, X_7] = X_2 + X_3$

$n_7\ ^6 : \ [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 7$

$[X_5, X_7] = X_2\,; \qquad [X_6, X_7] = -X_3$

$n_7\ ^7 : \ [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 7$

$[X_6, X_7] = X_2\,;$

$n_7\ ^8 : \ [X_1, X_i] = X_{i-1} \qquad 3 \leq i \leq 7$

Conclusion

L'étude présenté dans ce mémoire s'articule essentiellement sur la classification de certaines classes d'algèbres de Lie nilpotentes de dimension ≤ 7.

Cette classification est intéressé par les physiciens théoriciens.

Bibliographie

[1] [AG 2] Ancochéa - Bermudez J.M. Goze M. Classification des algèbres de Lie filiformes de dimension 8, Arch. Math, 1988, v. 50, 511-525.

[2] [AG 3] Ancochéa - Bermudez J.M. Goze M. Classification des algèbres de Lie nilpotentes comple xes de dimension 7, Arch. Math, 1989, v. 52 ,**n**° 2, 157-185.

[3] [BOU 1] Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie, Ch I, Hermann, 1960.

[4] [BOU 2] Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie, Ch II - III, Hermann, 1972.

[5] [BOU 3] Boyrbaki N. Groupes et algèbres de Lie, Ch IV - VI, Hermann, 1968.

[6] [BOU 4] Bourbaki N. Groupes et algèbres de Lie,Ch VII - VIII , Hermann, 1975.

[7] [KH 7] Khakimdjanov Yu. Algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes. Math. Sbomik, 1990, v. 181, **N**° 5, 642-655 (en russe). English transl. in Math. USSR Sbornik, 1991, v. 70, **N**° 1.

[8] Goze M Khakimdganove. ALGEBRES DE LIE NILPOTENTES COMPLEXES, Prépublication de l'institut de de recherchematématiques avancée, Université de Haute-Alsace Mulhouse-Colomar I.R.M.A STRASBOURG 1992-1993.

Résumé

L'étude présenté dans ce mémoire s'articule essentiellement sur la classification de certaines classes d'algèbres de Lie nilpotentes de dimension ≤7

Pour classifier ces algèbres, on utilise les invariants classiques, qui permettent de mieux

comprendre la classification de ces algèbres .

Dans ce mémoire, nous rappelons l'essentiel des résultats connus sur la classification des algèbres de Lie filiformes, algèbres de Lie 2- nilpotentes et algèbres de Lie caracteristiquement nilpotentes ………..

Abstract

The study presented in this thesis is essentially based on the classification of certain classes of nilpotent Lie algebras of dimension ≤7.

To classify these algebras, we use the classical invariants, which allow us to better

understand the classification of these algebras

In this memoir, we recall the main results known on the classification of

filiform Lie algebras, 2-nilpotent Lie algebras and characteristic Lie algebras

ment nlpotent ....

الخلاصة

تستند الدراسة المقدمة في هذه الأطروحة أساسًا إلى تصنيف فئات معينة من الجبر العديم القوة للبعد ≤7.

لتصنيف هذه الجبر ، نستخدم متغيرات كلاسكية، والتي تتيح لنا فهم أفضل لتصنيف هذه الجبر.

في هذه الأطروحة، نتذكر النتائج الرئيسية المعروفة عن تصنيف الجبر العديم القوة ، و الجبر العديم القوة - 2 وخصائص الجبر العديم القوة