UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **Master**
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option : Equations Différentielles Partielle et ses application

Par

CHARIF Wafa

Sujet

Résolution de problèmes aux limites non linéaires par la méthode des opérateurs monotones

Devant le jury :

Mr. TALLAB Abdelhamid	Prof. Univ de M'sila	Président
Mr. MECHTER Rabah	Prof. Univ de M'sila	Rapporteu
Mr. BOUAFIA Dahmane	Prof. Univ de M'sila	Examinateur

Promotion : 2017 / 2018

Table des Matières

Remerciements

Je remercie avant tous **ALLAH** pour m'a aidé, ses innombrable dons, **ALLAH** qui m'a donné la force, la volonté et le moral pour accomplir m'a étude en master en mathématique.

Je remercie du fond du coeur Monsieur **MECHETER Rabah** pour m'avoir proposé le thème de ce mémoire et m'avoir dirigée tout le long de mon travail, ses critiques,ses encouragement et ces conseils m'ont été précieux.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury a pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

Il est important pour moi de remercier ma famille:
mes parents, mes soeurs, mes frères qui ont toujours été une source inépuisable d'encouragements.

Également, un remerciement a tous mes collègues de promotion 2018 pour les bons moments qui nous avons passé ensemble.

Notation

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes.

$\mathbb{R}^N$	espace euclidien de dimension N, N un nombre naturel non nul
x	vecteur de $\mathbb{R}^N$, $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$, $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq N$
dx	mesure de Lebesgue N-dimensionnelle
$\|E\|$	ou mes (E) mesure de Lebesgue d'un ensemble E
Ω	partie ouverte de $\mathbb{R}^N$
$\langle .,. \rangle$	crochet de dualité entre X et son dual
$\int_\Omega f(x)\, dx$	intégrale de f sur Ω par rapport à la mesure de Lebesgue
supp u	Support de la fonction u
$\nabla u = Du$	$= (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N})$ gradient de u
div u	divergence du vecteur u, $divu = \frac{\partial u}{dx_1} + \frac{\partial u}{dx_2} + ... + \frac{\partial u}{dx_N}$
$f_n \to f$	dénote que la suite $\{f_n\}$ converge vers f.
$f_n \rightharpoonup f$	dénote que la suite $\{f_n\}$ converge faible vers f.
$L^p(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable $\left(\int_\Omega \|u(x)\|^p\right) dx < +\infty$ tel que $1 \leq p < \infty\}$
$\|u\|_p$	$= \left[\int_\Omega \|u(x)\|^p dx\right]^{1/p} = \|u\|_{L^p}$.
$L^\infty(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable, $\exists M > 0 \mid \|u(x)\| \leq M$p.p.$\}$ La norme est notée $\|\cdot\|_{L^\infty}$.
q	conjugué de Hölder de p : $q = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $q = \infty$ si $p = 1$
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment dérivables sur Ω,
	à support compact dans Ω
$W^{1,p}(\Omega)$	$= \left\{u \in L^p(\Omega) \mid \nabla u \in L^p(\Omega)\right\}$.
p.p.	presque partout
$W_0^{1,p}(\Omega)$	adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.
$W^{-1,p'}(\Omega)$	dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.
$H^1(\Omega)$	$= W^{1,2}(\Omega)$.
$H_0^1(\Omega)$	$= W_0^{1,2}(\Omega)$.
$H^{-1}(\Omega)$	dual de $H_0^1(\Omega)$.

Introduction

Les mathématiques consistent d'abord en un langage, qui permet de transcrire des problèmes de nature quantitative : C'est la modélisation. Une fois cette trans- cription faite, des outils sont disponibles pour comprendre et résoudre les problèmes issus des phénomènes du monde réel qui utilise les lois de la physique (mécanique, thermodynamique, électromagnétisme, etc.), ces lois sont, généralement, écrites sous la forme de bilans qui se traduisent mathématiquement par des Equations Diférentielles Ordinaires ou par des Equations aux Dérivées Partielles.

Les équations aux dérivées partielles (EDPs) interviennent aussi dans beaucoup d'autres domaines : en chimie pour modéliser les réactions, en économie pour étudier le comportement des marchés, en finance pour étudier les produits dérivés et en traitement d'images pour restaurer les dégradations.

L'étude systématique des EDPs est bien plus récente, et c'est seule- ment au cours du 20ème siècle que les mathématiciens ont commencé à développer l'arsenal nécessaire. Un pas de géant a été accompli par Schwartz lorsqu'il a fait naître la théorie des distributions (autour des années 1950), et un progrès au moins comparable est du à Hörmander pour la mise au point du calcul pseudo diférentiel (au début des années 1970). Il est certainement bon d'avoir à l'esprit que l'étude des EDPs reste un domaine de recherche très actif en ce début de 21ème siècle. D'ailleurs, ces recherches n'ont pas seulement un retentissement dans les sciencesappliquées, mais jouent aussi un rôle très important dans le développement actuel des mathématiques elles-mêmes, à la fois en géométrie et en analyse. L'analyse mathématique de ces équations aux dérivées partielles nécessite un choix approprié des espaces fonctionnels et une définition claire de la notion de solution (l'existence et parfois l'unicité).

Dans ce cadre on va étudier dans ce mémoire l'existence d'une solution de l'équation

$$\mathrm{Au} = \mathrm{f} ,$$

telle que A un opérateur non linéaire .

Généralement il'ya plusieurs méthodes de la resolution de problèmes aux limites : Némériquement comme la méthode des élèments finis ou la méthode des différences finis . Ou bien Théoriquement comme la méthode du point fixe ou la méthode variationnelle . la méthode des opérateurs monotones qui on va utilisée dans ce travail, situeé dans un cadre théorique ayant plusieurs applications dans l'analyse fonctionnelle et la théorie des opérateurs . Cette méthode basseé sur des conditions qui on appliqueé sur l'opérateur A vérifie toutes les hypotéses du théorème (2.6) . De plus on va étudie l'opérateur pseudo-monotone et l'opérateur de Leray-Lions qui est trés important pour donnée l'éxistence de la solution de probléme traité .

Notre objectif dans ce sujet comment utilisé la méthode des opérateurs monotones qui a initiée par G.Minty en 1962 pour prouvons l'existence d'une solution d'un problème aux limites non linéaires Au = f . On prender comme exemple l'opérateur p-laplacien non linéaire

$$-\Delta_p u = -div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u), 1 < p < \infty.$$

Ce mémoire est décompose en trois chapitres de la manière suivante:

Dans le premier chapitre, on dennera quelque équations modeles linéaires et non linéaires .

Dans le seconde chapitre nous avons utilisé des définitions, des inégalités principales et quelque conditions sur opérateur A qui sont nécessaires pour une bonne compréhension de la résolution de problémes traités . Ce chapitre basée sur le théorème (2.6) qui donnée l'existence d'un solution pour la même équation

$$Au = f.$$

Dans le troisième chapitre s'intéresse á appliquer la méthode pricedent sur deux types, l'opérateur pseudo-monotone et l'opérateur de Leray-Lions .

Chapitre 1

Équation modèles

Ce chapitre consistue un rappel de quelque notions et compléments mathématiques en relation avec le travail, on présentons en particulier certain exemples sur l'équations linéaires et non linéaires, de plus on va effectuer quelques rappels sur les problèmes aux limites linéaires et non linéaires [3],[4].

1.1 Quelques notations

Dans tout ce qui suit Ω désignera un domaine borné de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$,i.e.un ouvert connexe et borné de $\mathbb{R}^N$. Sa frontière sera désignée par Γ ou $\partial\Omega$ et son adhérence par $\overline{\Omega}$.

Nous supposons qu'en chaque point $x \in \partial\Omega$ (sauf éventuellement en un nombre fini d'entre aux) le vecteur unitaire normale à $\partial\Omega$, et sortant de Ω, est défini et nous désignerons par $\nu = \nu(x)$:

$$\nu = (\nu_1, ..., \nu_N).$$

Soit $u = u(x_1, ..., x_N)$ un fonction définie dans $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. En supposant qu'il exist,on appelle gradient de u au point x le vecteur

$$\nabla u(x) = (\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}(x))$$

La norme euclidienne de ∇u est notée par $|\nabla u|$:

$$|\nabla u| = \left[\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|^2 + ... + \left|\frac{\partial u}{\partial x_N}\right|^2\right]^{1/2}$$

Pour la fonction u, la dérivée dans la direction de la normale sortante est définit par

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\nu_1 + ... + \frac{\partial u}{\partial x_N}\nu_N. \tag{1.1}$$

Dans le cas bidimensionnel, le point générique de $\mathbb{R}^2$ étant noté (x, y), on définit la dérivée tangentielle par:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{\partial u}{\partial x}\nu_y + \frac{\partial u}{\partial y}\nu_x, \nu = (\nu_x, \nu_y). \tag{1.2}$$

Soint $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction. On introduit

- L'opérateur de Laplace par

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_N^2} \tag{1.3}$$

- L'opérateur biharmonique par

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial^4 u}{\partial x_i^2 \partial x_j^2}. \tag{1.4}$$

En écrivant les expression (1.1),(1.3),(1.4) nous supposans que toutes les dérivées qui y figurent existent-disons-pour le moment, au sens usuel.

Dans le cas **N=2**, on préfère , comme à l'accoutuée, désigner les deux variables par x et y de sorte que l'opérateur de Laplace (ou laplacien)s'ècrite :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

et l'opérateur biharmonique(ou bilaplacien)s'écrit :

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$$

1.2 Exemples d'équations linéaires

1.2.1 L'équation de Poisson à 2 dimensions

Soit Ω un domaine plan et soit $f = f(x, y)$ une fonction donnée dans Ω . On cherche une fonction $u = u(x, y)$ définie sur $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ et satisfaisant l'équation

$$-\Delta u = f \text{ dans } \Omega.$$

Cette équation (appelée équation de Poisson) modélise plusieurs phénomènes physiques, tels que

- la forme d'une membrane placée au dessus de Ω et soumise à des forces verticales.

- la distribution stationnaire de la chaleur sur un plaque de forme Ω avec une conductivité et des sources internes de chaleur indépendantes du temps.

La fonction f représente soit la charge verticale soit les sources de chaleur.

On peut adjoindre à l'équation de Poisson différentes condition sur $\partial\Omega$.
Par exemple, la condition

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

qui signifie que la membrane est fixée sur tout son pourtour ou que la plaque est tenue à la température zéro sur son pourtour; la condition

$$\tfrac{\partial u}{\partial \nu} = g \text{ sur } \partial\Omega, \text{ (} g = (x, y) \text{ définie sur } \partial\Omega)$$

signifie que l'émission de chaleur est prescrite sur la frontière de la plaque ; la condition

$$\tfrac{\partial u}{\partial \nu} + cu = d \text{ sur } \partial\Omega$$

où $c = c(x, y)$ et $d = d(x, y)$ sont des fonctions donnes définies sur $\partial\Omega$, signifie que l'échange de chaleur entre la plaque et le milieu ambiant obéit à une loi donnée.

1.2.2 L'équation de la plaque

Soient , de nouveau, Ω un domaine plan et $f = f(x, y)$ une fonction donnée sur Ω . On cherchons une fonction $u = u(x, y)$ satisfaisant l'équation

$$\Delta^2 u = f \quad \text{dans} \quad \Omega. \tag{1.5}$$

La fonction u décrit le fléchissement d'une plaque mince (d'épaisseur constante, homogène et isotrope), chargée verticalement par la charge f.
L'équation (1.5) avec les conditions

$$u = 0 \text{ et } \tfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \partial\Omega$$

décrit le fléchissement d'une plaque dont le pourtour est encastré.
C'est en première approximation que les phénomènes physiques sont modélisés par des équatoins linéaires . Si on veut plus de précisions on aboutit à des équations non linéaires.

1.3 Exemples d'équations non linéaires

1.3.1 L'opérateur de Laplace non linéaire ou le p-laplacien

C'est l'opérateur donné, en N dimension par

$$-\Delta_p u(x) = -\mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i})$$

où $p > 1$ est un nombre réel . Si $|\nabla u| = 0$ et $1 < p < 2$ on convient de poser $|\nabla u|^{p-2}\nabla u = 0$; cela est raisonnable puisque, pour $N = 1$ cela s'écrite $\left|\frac{du}{dx}\right|^{p-2}\frac{du}{dx} = 0$, et ceci peut se justifier en remarquant que , pour tout nombre réel r, on a

$$r = |r|\, sign(r), sign(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r > 0; \\ 0 & \text{si } r = 0\ ; \\ -1 & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

de sorte que $|r|^{p-2} r = |r|^{p-1} sign(r)$ qui est nul pour $r = 0$.

On peut considérer l'équation

$$-\Delta_p u = f(x) \quad dans \quad \Omega \tag{1.6}$$

qui se réduit à l'équation de Poisson dans un ouvert de $\mathbb{R}^N$ pour $p = 2$. En étudiant la torsion d'un barre cylindrique de section transversale constante, on peut trouver une équation où intervient le p-laplacien voir[8].

L'équation (1.6) nous sera trés utile du point de vue méthodologique , nous la prendrons pour modèle pour illustrer de nombreux concepts et assertions .Nous utiliserons aussi comme modèle l'équation:

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2} u = f(x) \text{ dans } \Omega,$$

qui à une dimension ($N = 1$) s'écrit

$$-\tfrac{d}{dx}(\left|\tfrac{du}{dx}\right|^{p-2}\tfrac{du}{dx}) + |u|^{p-2} u = f(x), x \in \Omega = [a, b]\,.$$

1.3.2 L'équation de Monge-Ampére

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^2$. le problème de trouver une surface représentée par la fonction $u = u(x, y)$,$(x, y) \in \overline{\Omega}$ dont la forme sur $\partial\Omega$ et la courbure sont imposées conduit à l'équation non linéaire, dite de Monge-Ampére:

$$\tfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\tfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (\tfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y})^2 = f(x, y) \text{ dans } \Omega$$

avec la condition

$$u = g \text{ sur } \partial\Omega$$

1.4 Classification des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre

Soit Ω un domaine de $\mathbb{R}^N$. Considérons l'équation linéaire aux dérivées partielles du seconde ordre

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} a_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x), x \in \Omega \tag{1.7}$$

où les coefficients $a_{ij}, a_i, i, j = 1, ..., N, a$ et f sont des fonctions réelles définies sur Ω. Les solutions de (1.7) sont supposées de classe C^2 dans Ω. La matrice carrée $A(x) = (a_{ij}(x))_{ij}$ d'ordre N , formée des coefficients des dérivées d'ordre le plus élevé et supposée symétrique.
Soit x_0 un point quelconque de Ω et $\lambda_1(x_0), ..., \lambda_N(x_0)$ les valeurs propres (qui sont alors réelles) de la matrice $A(x_0)$. Désignons par $N_+ = N_+(x_0)$ le nombre de valeurs propres positives ,par $N_- = N_-(x_0)$ le nombre de valeurs propres négatives et par $N_0 = N_0(x_0)$ celui des valeurs propres nulles. Donc $N = N_+ + N_- + N_0$.

1.4.1 Définitions

L'équation (1.7) est dite du type **elliptique** (ou elliptique) au point x_0 de Ω si $N = N_+$ ou $N = N_-$. Elle est dite elliptique sur un ensemble $E \subset \Omega$ si elle est elliptique en tout point de E.

L'équation (1.7) est dite du type **hyperbolique** (ou hyperbolique) au point x_0 de Ω si $N_+ = N - 1$ et $N_- = 1$ ou bien $N_+ = 1$ et $N_- = N - 1$. Elle est dite hyperpolique sur un ensemble $E \subset \Omega$ si elle est hyberpolique en tout point de E.

L'équation (1.7) est dite du type **ultrahyperbolique** au point x_0 de Ω si $1 < N_+ < N - 1$. Elle est dite ulrahyperpolique sur un ensemble $E \subset \Omega$ si elle est ultrahyberpolique en tout point de E.

L'équation (1.7) est dite du type **parabolique** (ou parabotique) au point x_0 de Ω si $N_0 > 0$. Elle est dite parabotique sur un ensemble $E \subset \Omega$ si elle est parabotique en tout point de E.

1.5 Problème aux limites

On parle de problèmes aux limites lorsqu'on se donne:

- une équation différentielle (par exemple l'équation (1.6)).
- un certain nombre de conditions aux limites (indépendantes en un certain sens).

Conditions initiales et conditions aux limites :

Contrairement aux EDOs, les conditions initiales ne suffisent pas à assurer l'unicité de solution. Il faut également fournir des conditions aux limites. Pour certains types d'équations (ex. EDPs elliptiques), le concept de condition initiale n'a pas de sens.

Les conditions initiales et les conditions aux limites se distinguent de la manière suivante :

u Une condition initiale s'applique pour une valeur donnée (et unique) d'une variable indépendante. A partir de cette condition initiale, il est possible de déduire la solution pour toutes les autres valeurs de la variable indépendante.

u Une condition aux limites est appliquée en tout point de la frontière du domaine sur lequel on souhaite résoudre l'équation (et non en un point unique). Il n'est pas possible de déterminer la solution en partant simplement d'un seul point de la limite de domaine et en progressant à l'intérieur de celui-ci, car la solution est également conditionnée par sa valeur en tous les autres points de la frontière.

1.5.1 Problème aux limites linéaires

Soient un réel $L > 0$ et trois fonctions données $f(x), p(x), q(x) : [0, L] \to \mathbb{R}$ continues par rapport à la variable x . On cherche à déterminer une fonction $u(x) \in C^2([0, L])$ qui satisfait (pour deux réel c_0 et c_L donnés)

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{rcl} -\frac{d^2u}{dx^2} + p(x)\frac{du}{dx} + q(x)u &=& f(x), x \in [0, L] \quad \text{(équation differentiélle)} \\ cl(0) &=& c_0 \\ cl(L) &=& c_L, \quad \text{(conditions aux limites)} \end{array} \right.$$

avec $cl(x)$ correspondant à une des deux options suivantes

$$cl(x) = \left\{ \begin{array}{ll} u(x) & \text{(condition de Dirichlet)} \\ \frac{du}{dx}(x) & \text{(condition de Neumam)} \end{array} \right.$$

Le problème (1) est un problème aux limites linéaire unidimentionnel du second ordre.

1.5.2 Problème aux limites non linéaires

Nous prendrons comme modéles d'équations paraboliques non linéaires les équations

$$u_t - \triangle_p u = f(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, (T>0)$$

et

$$u_t - \triangle_p u + |u|^{p-2}u = f(x,t) \quad \text{dans} \quad \Omega\times]0,T[, (T>0)$$

avec la condition de Dirichlet homogène

$$u = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \times [0,T]$$

et la condition initiale

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

1.6 Équation d'évolution

Les phénomènes physiques dépendent généralement du temps de sorte que les équations qui les modélisent dépendent elles aussi du temps; elles sont évolutives. Les équation d'évolution les plus simples sont l'équation de la chaleur et des ondes.

1.6.1 Équation de la chaleur

C'est l'équation du type **parabolique** la plus simple; elle s'écrit dans le cylindre $\Omega\times]0,+\infty[\subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$:

$$u_t - \Delta u(x,t) = f(x,t) \quad dans \quad \Omega\times]0,+\infty[, \tag{1.8}$$

où $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$. L'équation de la chaleur modélise plusieurs phénomènes physiques de type diffusion; en particulier la distribution de la température u dans le domaine Ω avec une source de chaleur f dépendant du temps.
On peut adjoindre à l'équation de la chaleur différentes conditions sur $\partial\Omega \times [0,+\infty[$.

Par exemple, la `condition aux limites de Dirichlet homogène`:

$$u = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \times [0,+\infty[\tag{1.9}$$

qui signifie que l'on maintient le bord de Ω à la température zéro ;ou la `condition aux limites de Neumann homogène`:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega \times [0,+\infty[, \tag{1.10}$$

qui signifie que le flux de chaleur à travers la frontière $\partial\Omega$ est nulle; ou encore la condition :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + cu = d \quad sur \quad \partial\Omega \times [0, +\infty[$$

où $c = c(x,t)$ et $d = d(x,t)$ sont des fonctions données définies sur $\partial\Omega \times [0, +\infty[$, qui signifie que l'échange de chaleur entre le domaine Ω et le milieu ambiant obeit à une loi donnée.
Pour espérer que le phénomène modélisé par (1.8) soit complètement déterminé, il faut encore adjoindre à cette équation une condition unitiale ou donnée de Cauchy:

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \quad et \quad u_0 \in \bar{\Omega} \tag{1.11}$$

qui décrite l'état initial du phénomène étudié

1.6.2 Équation des ondes

C'est l'équation de type **hyperbolique** la plus simple ; elle s'écrit dans le cylindre $\Omega\times]0, +\infty[\subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+$:

$$u_{tt} - \Delta u(x,t) = f(x,t) \;\; dans \quad \Omega\times]0, +\infty[, \tag{1.12}$$

où $u_{tt} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. L'équation des ondes modélise,par exemple:

- Losque $N = 1$ et $\Omega =]a, b[$, les petites vibrations d'une corde qui est soumise à une force extérieure f.
- Lorsque $N = 2$ et $\Omega =]a, b[$, les petites vibrations d'une membrane élastique. Pour chaque $t \geq 0$, le graphe de la fonction $x \to u(x,t)$ coincide avec la configuration de la membrane à l'instant t.
- En généralement la propagation d'une ondes dans un milieux élastique homogéne (acoustique, électromagnétique,...).

On peut adjoindre à l'équation des ondes différentes conditions sur $\partial\Omega \times [0, +\infty[$.Par exemple, la condition aux limites de Dirichlet (1.9) qui exprime que la corde ou la membrane est fixée à ses extrémiés; ou la condition aux limites de Neumann (1.10) qui exprime que les extrémités sont libres.
Ici, pour espérer que le phénomène modélisé par (1.12) soit complètement déterminé,

il encore en plus de la condition initiale (1.11) adjoindre une autre condition initiale comme :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = v_0(x), \quad x \in \Omega \quad v_0 \in \bar{\Omega} \tag{1.13}$$

qui décrit la **vitesse initiale** de l'onde étudiée . Les équations (1.9) et (1.13) traduisent l'état initiale du système étudié.

Chapitre 2

Existence de la solution de $Au = f$

Dans ce chapitre, nous introduisons le cadre fonctionnel qui permet la résolution d'un problème aux limites non linéaire. Nous définissons pour cela les espaces fonctionnels de Sobolev dans lesquels nous travaillons. Ce chapitre aussi a pour but de présenter un certain nombre d'outils d'analyse de théorie des espaces de Sobolev qui seront utilisés dans la suite de ce mémoire. Nous en profiterons également pour introduire les principales notations. La méthode de la résolution basée sur le théorème (2.6). De plus on va prenderons comme exemple l'opérateur p-laplacien qui vérifie touts les hypothèses de théorème précedent

2.1 Définitions et premières propriétés

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et p un nombre réel supérieur ou égale à 1. On définit l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{mesurable et} \quad \Big(\int_\Omega \mid f \mid^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty \Big\}.$$

On le munit de la norme suivante

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f|^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1.$$

Quand $p = 2$, cette norme provient d'un produit scalaire. De plus si $p = +\infty$ on a :

$$\| \ f \ \|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} \mid f(x) \mid .$$

Définition 2.1 *L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in L^p(\Omega) \mid \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \Big\}.$$

Remarque 2.1 *Les espaces $L^p(\Omega)$ sont caractérisés par des classes de fonctions identifiées en dehors d'ensembles de mesure nulle.*

On vérifié sans difficulté que l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace fonctionnel muni de la norme

$$\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} = \| u \|_p + \| \nabla u \|_p \tag{2.1}$$

Lemme 2.1 *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme (2.1)est un espace de Banach pour $1 \leq p < +\infty$.*

Preuve — Soit $\{u_n\}$ une suite de Cauchy dans l'espace $W^{1,p}(\Omega)$. Alors, la suite $\{\nabla u_n\}$ est de Cauchy dans $L^p(\Omega)$. Rappelons alors que l'espace $L^p(\Omega)$ est complet et de ce fait, il existe des fonctions u et ξ telles que u_n et ∇u_n convergent vers u, respectivement vers ξ dans $L^p(\Omega)$. De plus, vu que $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, on voit que

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad L^1_{loc}(\Omega) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

ou encore

$$u_n \to u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Donc, on a d'une part

$$\nabla u_n \to \nabla u \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

et d'autre part

$$\nabla u_n \to \xi \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Maintenant, grâce à la séparabilité de $\mathcal{D}(\Omega)$, on voit que $\nabla u = \xi$. Alors, le lemme en découle. ∎

Définition 2.2 *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est défini par la fermeture de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$, relativement à la norme (2.1), $W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}$. Autrement dit*

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \Big\{ u \in W^{1,p}(\Omega), \quad \mathit{avec} \quad u = 0 \quad \mathit{sur} \quad \partial\Omega \Big\}.$$

Cette espace muni d'une norme équivalente à la norme (2.1), donnée par

$$\| u \|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} .$$

Pour les résultats sur les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ le lecteur pourra trouvé toutes les démonstrations dans l'ouvrage de Adams [1]. Citons cependant, que dans la plupart des cas, les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{1,p}(\Omega)$ ne coïncident pas.

2.2 Inégalités principales

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq q \leq \infty$ deux réels et $p^{'}$ l'exposant conjugué de p, i.e., $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^{'}} = 1$.

Lemme 2.2 (Inégalité de Hölder) *Si $f \in L^p(\Omega)$,$g \in L^{p^{'}}(\Omega)$, alors $f \cdot g \in L^1(\Omega)$ et*

$$\| f \cdot g \|_{L^1(\Omega)} \leq \| f \|_{L^p(\Omega)} \| g \|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Si de plus $\mid \Omega \mid < \infty$ et $f \in L^q(\Omega)$, alors $f \in L^p(\Omega)$ et

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \mid \Omega \mid^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q(\Omega)}$$

En paticulier

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega), \quad \forall\, 1 \leq p \leq q < \infty$$

Lemme 2.3 *Soient $p_i \in [1, +\infty]$ des exposants avec $1 \leq i \leq k$ tels que : $1/p = 1/p_1 + ... + 1/p_k \leq 1$. Alors, pour toutes fonctions $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, nous avons $f = f_1 ... f_k \in L^p(\Omega)$ et l'inégalité de Hölder généralisée*

$$\|f\|_p \leq \| f \|_{p_1} \cdots \| f \|_{p_k} .$$

Lemme 2.4 (Inégalité de Young) *Soient a et b deux réels positifs. Soit $p > 1$, alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \quad avec \quad p^{'} = \frac{p}{p-1}. \tag{2.2}$$

Lemme 2.5 (Inégalité de Poincaré) *Soient $1 \leq p < \infty$ et Ω un domaine de mesure finie. Alors, il existe une constante C dépend de p telle que pour toute fonction $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)} . \tag{2.3}$$

De plus, par la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'inégalité (2.3) reste vraie pour toute fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 2.2 *Il est évident que cette inégalité ne peut être généralisée aux espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer les fonctions constantes sur Ω borné (ou de mesure finie).*

2.3 Dualité

Nous allons dans ce paragraphe nous intéresser au dual d'un espace de Sobolev. Le dual d'un espace de Banach existe toujours, nous nous proposons d'identifier ses éléments dans le cas des espaces de Sobolev. Il est souvent commode de considérer les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ comme le produit de copie des espaces fonctionnels $L^p(\Omega)$. Nous introduirons pour cela un nouvel espace de fonctions, qui nous donnera notamment quelques nouveaux résultats concernant les espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$.

définissons l'opérateur linéaire P par

$$\begin{array}{llll} P: & W^{1,p}(\Omega) & \to & (L^p(\Omega))^{N+1} \\ & u & \mapsto & Pu = (u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_N}) \end{array}$$

On remarque sans difficulté que pour toute fonction $u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a

$$\|Pu\|_{L^p(\Omega)^{N+1}} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

Autrement dit, P est un isomorphisme isométrique de $W^{1,p}(\Omega)$ dans $W \subset (L^p(\Omega))^{N+1}$.On peut de plus montrer que

1. $\forall\ 1 \leq p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est séparable.
2. $\forall\ 1 < p < \infty$, $L^p(\Omega)$ est réflexif
3. $L^1(\Omega)$ est séparable mais pas réflexif, son dual est $L^\infty(\Omega)$ par contre le dual de $L^\infty(\Omega)$ contient strictement $L^1(\Omega)$.
4. Le produit d'espaces vectoriels séparable, respectivement réflexif, est encore un espace séparable, resp. réflexif.

On peut donc conclure que $W^{1,p}(\Omega) = P^{-1}(W)$, possède les mêmes propriétés. Avant de donner une caractérisation de l'espace dual d'un de l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, rappelons deux principaux résultats d'analyse fonctionnelle bien connus, dont on trouvera les preuves respectives par exemple dans l'ouvrage de Brezis [**?**].

Théorème 2.1 (Hahn-Banach) *Soient* $(\mathbf{E}, \|\|)$ *un espace normé sur le corps* $\mathbf{K}$, $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbf{E} \to \mathbf{K}$ *une application linéaire et bornée. Alors il existe un élément* $\widehat{T} \in \mathbf{E}'$ *tel que*

$$\widehat{T}(u) = T(u), \forall u \in \mathcal{D}(T) \quad et$$

$$\|\widehat{T}\|_{E'} = \sup\{|T(u)| : u \in \mathcal{D}(T) \quad et \quad \|u\| = 1\}$$

Théorème 2.2 (Théorème de Représentation de Riesz) *Soient* $1 \leq p < \infty$, $T \in L^{p'}(\Omega)$ *et* p' *le conjugué de* p. *Alors, il existe* $v \in L^{p'}(\Omega)$ *tel que pour tout* $u \in L^p(\Omega)$

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx = \langle u, v\rangle \quad et \quad \|v\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|T\|_{(L^p(\Omega))'}$$

Corollaire 2.1 *Soit* $1 \leq p < \infty$ *Pour tout opérateur* $T \in (L^p(\Omega)^{N+1})'$ *il existe un unique* $v = (v_0, v_1, ..., v_N) \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}$ *telle que pour toute fonction* $u = (u_0, u_1, ..., u_N) \in (L^p(\Omega))^{N+1}$

$$T(u) = \sum_{i=0}^{N} \langle u_i, v_i\rangle \quad et \quad \|v\|_{(L^{p'}(\Omega))^{N+1}} = \|T\|_{(L^p(\Omega)^{N+1})'}$$

Théorème 2.3 *Soit* $1 \leq p < \infty$,*Pour tout opérateur* $T \in (W^{1,p}(\Omega))'$, *il existe un élément* $v \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}$, *telle que pour tout* $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$T(u) = \langle u, v_0\rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v_i\rangle \quad et \quad \min \|v\|_{(L^{p'}(\Omega))^{N+1}} = \|T\|_{(W^{1,p}(\Omega))'}$$

où le minimum (atteint) est pris sur tout les $v \in (L^{p'}(\Omega))^{N+1}$, pour qui vérifie la condition précédente.

Preuve — Définissons

$$\begin{array}{llll} T^* : & W & \to & \mathbb{R} \\ & Pu & \mapsto & T^*(Pu) = T(u) \end{array}$$

Vu que P est un isomorphisme isométrique, $T^* \in W'$ et $\|T^*\|_{W'} = \|T\|_{(W^{1,p}(\Omega))'}$. Par le théorème de Hahn -Banach

$$\widetilde{T}(u) = \sum_{i=0}^{N} \langle u_i, v_i\rangle$$

Ainsi $\forall u \in W^{1,p}(\Omega)$, on a

$$T(u) = T^*(Pu) = \widetilde{T}(Pu) = \langle u, v_0\rangle + \sum_{i=1}^{N} \langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, v_i\rangle$$

$$\|T\|_{(W^{1,p}(\Omega))'} = \|T^*\|_{W'} = \|\widetilde{T}\|_{W'} = \|v\|_{(L^{p'}(\Omega))^{N+1}}$$

■

Théorème 2.4 ([1]) *Soient* $1 < p < \infty$ *et* $p' = \frac{p}{p-1}$. *Le dual de l'espace* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *est* $W^{-1,p'}(\Omega)$.

Théorème 2.5 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) *par Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* $L^1(\Omega)$ *. On suppose que*

1. $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ *p.p.sur* Ω *,*
2. *il existe un fonction* $g \in L^1(\Omega)$ *telle que pour chaque* n*,* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω*.*

   Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$*.*

Lemme 2.6 (Formule de la divergence et de Green) *Soit* Ω *un domaine de* $\mathbb{R}^N$*, et* $n(x)$ *sa normale extérieure. Soit* u *et* v *deux fonctions régulières,* w *un champ de vecteurs défnis sur* Ω*. Alors*

$$\int_\Omega \mathrm{div} w \quad dx = \int_{\partial\Omega} w \cdot n d\sigma \quad \textit{(formule de la divergence)}$$

$$\int_\Omega (\Delta u) v \quad dx = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \quad d\sigma \quad \textit{(formule de green)}$$

2.4 Opérateurs monotones

V désigne un espace de banach réel , V' son dual topologique de V

Définition 2.3 *Un opérateur* $A : V \to V'$ *est dit :*

- *monotone si* $\quad \langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0, \forall u, v \in V$
- *strictement monotone si* $\quad \langle Au - Av, u - v \rangle > 0, \forall u, v \in V, u \neq v$

Exemple 2.1 *L'opérateur* $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ *défini par* $Au = -\Delta u$ *est monotone,* $H_0^1(\Omega)$ *étant muni de la norme du gradient. En effet, pour* $u, v \in H_0^1(\Omega)$*, on a :*

$$\begin{aligned} \langle Au - Av, u - v \rangle &= \int_\Omega \nabla(u - v).\nabla(u - v) \\ &= \|u - v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

2.5 Opérateurs bornés

Définition 2.4 *Soit* V *et* W *deux espaces de banach et soit* $A : V \to W$ *un opérateur. On dira que* A *est borné s'il envoie tout borné de* V *dans un borné de* W*; i.e*

$$\forall \rho > 0, \quad \exists C_\rho > 0 : \quad A(B_V(0, \rho)) \subset B_W(0, C_\rho)$$

2.6 Opérateurs hémicontinus

Définition 2.5 *Un opérateur $A : V \to W$ est dit hémicontinu au point u_∞ de V si pour toute suite $\{u_n\}$ convergeant vers u_∞ le long d'une ligne, la suite $\{Au_n\}$ converge faiblement vers Au_∞ dans W. En d'autres termes :*

$$\forall v \in V, \quad \forall \{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}, \quad \lambda_n \to 0, \quad A(u_\infty + \lambda_n v) \rightharpoonup Au_\infty$$

faiblement dans W.
Si A est hémicontinu en tout point de V , on dit qu'il est hémicontinu sur V . Dans les espaces réflexifs et pour $W = V'$, et passant du sequentiel au continu, on peut définir l'hémicontinuité sur V en exigeant que :

$$\forall u, v, w \in V \quad l'application \quad \mathbb{R} \ni \lambda \mapsto \langle A(u + \lambda v), w\rangle \in \mathbb{R}$$

est continue .

Exemple 2.2 *L'opérateur $A : H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ défini par $Au = -\Delta u = -\mathrm{div}(\nabla u)$ est hémicontinu . En effet ; soient $u, v, w \in H_0^1(\Omega)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a:*

$$\begin{aligned}
\langle A(u + \lambda v), w\rangle &= \int_\Omega \nabla(u + \lambda v).\nabla w \\
&= \int_\Omega \nabla u.\nabla w + \lambda \int_\Omega \nabla v \nabla w \\
&= a + b\lambda.
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\lambda \longrightarrow \langle A(u + \lambda v), w\rangle$ est continue.

2.7 Théorème d'Existence

Notre resultat principale dans ce mémoire est :

Théorème 2.6 *Soient V un banach réflexif séparable et $A : V \to V'$ un opérateur*

- *borné*
- *hémicontinu*
- *coercitif, au sens que*

$$\lim_{|v|_V \to +\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_V} = +\infty$$

- *monotone*

Alors,

$$\forall f \in V^{'}, \exists u \in V \quad tel \quad que \quad Au = f$$

Pour la preuve de ce théorème, on peut renvoyer le lecteur au livre [10]

Lemme 2.7 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, et soit l'opérateur*

$$A : V = W_0^{1,p}(\Omega) \to V^{'} = W^{-1,p^{'}}(\Omega)$$

défini par

$$Au = -\text{div}(|\ \nabla u\ |^{p-2}\ \nabla u), \quad 1 < p < \infty$$

Alors, l'opérateur A vérifie toutes les hypothèses du théorème (2.6) donc

$$\forall f \in W^{-1,p^{'}}(\Omega), \quad \exists u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad tel \quad que \quad Au = f$$

Preuve — D'aprés la formule de green on a

$$\forall \varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) : \langle Au, \varphi \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla \varphi$$

Montrons que l'opérateur A est borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,p^{'}}$. Soit $\rho > 0$, pour $u \in B_V(0, \rho)$, on peut écrire :

$$\|\ Au\ \|_{V'} = \sup_{\substack{\varphi \in V \\ \|\varphi\| \leq 1}} |\langle Au, \varphi \rangle| = \sup_{\substack{\varphi \in V \\ \|\varphi\| \leq 1}} \Big| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla \varphi \Big|.$$

Mais

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u.\nabla \varphi \Big| &\leq \int_\Omega |\nabla u|^{p-1}.|\nabla \varphi| \\ &\leq \Big(\int_\Omega |\nabla u|^p \Big)^{\frac{1}{p'}} \Big(\int_\Omega |\nabla \varphi|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|\ u\ \|_V^{p-1} \|\ \varphi\ \|_V \\ &\leq \rho^{p-1} \end{aligned}$$

D'où $\|\ Au\ \|_{V'} \leq \rho^{p-1}$. cela montre que $A(B_V(0, \rho)) \subset B_{V'}(0, \rho^{p-1})$

Montrons que l'opérateur A est hémicontinu de V dans $V^{'}$. soit $v \in V$, et $\{\lambda_n\}$ une suite réelle qui converge vers 0

$$\forall g \in V, \quad \langle A(u_\infty + \lambda_n v), g \rangle \to \langle Au_\infty, g \rangle$$

on a

$$\langle Au_\infty, g\rangle = \int_\Omega |\nabla u_\infty|^{p-2}\nabla u_\infty.\nabla g$$

Alors

$$\begin{aligned}\langle A(u_\infty + \lambda_n v), g\rangle &= \int_\Omega |\nabla(u_\infty + \lambda_n v)|^{p-2}\nabla(u_\infty + \lambda_n v)\nabla g \\ &= \int_\Omega |(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)|^{p-2}(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)\nabla g\end{aligned}$$

1. $|(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)|^{p-2}(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)\nabla g \to^{p.p} |\nabla u_\infty|^{p-2}(\nabla u_\infty)\nabla g$

on peut metter $|\lambda_n| \leq 1$, Alors

$$\begin{aligned}\Big||(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)|^{p-2}(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)\nabla g\Big| &= \Big||(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)|^{p-1}\nabla g\Big| \\ &\leq \Big[|\nabla u_\infty| + |\lambda_n||\nabla v|\Big]^{p-1}|\nabla g| \\ &\leq \Big[|\nabla u_\infty| + |\nabla v|\Big]^{p-1}|\nabla g|\end{aligned}$$

On rappelle que

$$(\sum_{i=1}^{N} a_i)^\alpha \leq \max\{1, N^{\alpha-1}\}\sum_{i=1}^{N} a_i^\alpha, \quad \forall a_i \geq 0,\ \alpha > 0 \tag{2.4}$$

En utilisant 1 et (2.4), on écrit

$$\begin{aligned}\Big||(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)|^{p-2}(\nabla u_\infty + \lambda_n \nabla v)\nabla g\Big| &\leq \frac{|\nabla g|^p}{p} + \frac{\Big[|\nabla u_\infty| + |\nabla v|\Big]^p}{p'} \\ &\leq \frac{1}{p}|\nabla g|^p + \frac{max(1, 2^{p-1})}{p'}\Big(|\nabla u_\infty|^p + |\nabla v|^p\Big).\end{aligned}$$

Le fait que $g, v, u_\infty \in W_0^{1,p}(\Omega)$, implique que

$$\frac{1}{p}|\nabla g|^p + \frac{max(1, 2^{p-1})}{p'}\Big(|\nabla u_\infty|^p + |\nabla v|^p\Big) \in L^1(\Omega)$$

D'aprés théoréme de convergence dominée de lebesgue

$$\lim_{n\to+\infty}\langle A(u_\infty + \lambda_n v), g\rangle = \langle A(u_\infty), g\rangle$$

d'où l'hémicontinuité de A.

l'opérateur A est coercitif puisque :

$$\begin{aligned}
\lim_{|v|_V \to +\infty} \frac{\langle Av, v\rangle}{\|v\|_V} &= \lim_{|v|_V \to +\infty} \frac{\int_\Omega |\nabla v|^p}{\| v \|_V} \\
&= \lim_{|v|_V \to +\infty} \frac{\| v \|_V^p}{\| v \|_V} \\
&= \lim_{|v|_V \to +\infty} \| v \|_V^{p-1} = +\infty \quad car \quad 1 < p < +\infty.
\end{aligned}$$

Montrons que l'opérateur A est monotone :

On rappelle que $\forall x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y)(x - y) \geq \alpha|x - y|^p, \alpha > 0$
Alors $\forall u, v \in V$

$$\begin{aligned}
\langle Au - Av, u - v\rangle &= \int_\Omega \Big(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\Big)\nabla(u - v) \\
&\geq \int_\Omega \alpha|\nabla u - \nabla v|^p \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Alors, l'opérateur A vérifie toutes les hypothèses du théorème (2.6) donc

$$\forall f \in W^{-1,p'}(\Omega), \quad \exists u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad tel \quad que \quad Au = f$$

■

Chapitre 3

Application du théorème 2.6

3.1 une application du théorème 2.6

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et soit $p \in]1, +\infty[$ un nombre réel. Considérons l'opérateur $A : V = W_0^{1,p}(\Omega) \to V'$ donné par

$$Av = -\text{div}\left(\hat{a}(x, \nabla v)\right), \quad v \in V$$

avec les hypothèses suivantes sur $\hat{a}$:

$\hat{a}_*.0)$ $\hat{a} : \Omega \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est Carathéodory, rappelons que cela signifie que: Pour presque tout $x \in \Omega$, l'application $\xi \mapsto \hat{a}(x, \xi)$ est continue (de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)et pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'application $x \in \Omega \mapsto \hat{a}(x, \xi)$ est mesurable .

$\hat{a}_*.1)$ $\exists \alpha > 0$ tel que

$$\hat{a}(x, \xi).\xi \geq \alpha \parallel \xi \parallel_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}^p, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad p.p \quad en \quad x \in \Omega$$

Le point est mis pour le produit scalaire dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.On dit que $\hat{a}$ est coercitive

$\hat{a}_*.2)$ $\exists C > 0$ et une fonction $a_0 \in L^{p'}(\Omega)$, $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ positive , telles que :

$$\| \hat{a}(x,\xi) \|_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \leq C\Big\{ \| \xi \|_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}}^{p-1} + a_0(x)\Big\}, \forall \xi \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad et \quad p.p \quad en \quad x \in \Omega$$

Cette condition est dite de croissance.

$\hat{a}_*.3)$, $\hat{a}$ est strictement monotone i,e.

$$\Big[\hat{a}(x,\xi) - \hat{a}(x,\xi')\Big].\Big[\xi - \xi'\Big] > 0, \forall \xi, \xi' \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \xi \neq \xi' \quad \text{p.p} \quad \text{en} \quad x \in \Omega$$

Théorème 3.1 *sous les hypothèses $(\hat{a}_*.0-3)$ pour tout $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, il existe une fonction $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, unique solution de probléme illiptique*

$$(P) \qquad \begin{cases} -\text{div}\Big(\hat{a}(x,\nabla u)\Big) & = & f, \ dans \ \Omega \\ u & = & 0, \ sur \ \partial\Omega, \end{cases}$$

Preuve — soit $V = W_0^{1,p}$, muni de la norme du gradient, et considérons l'opérateur $A : V \to V'$ défini , pour $u, \varphi \in V$ par

$$\langle Au, \varphi \rangle = \Big\langle -\text{div}\Big(\hat{a}(x,\nabla u)\Big), \varphi \Big\rangle = \int_\Omega \hat{a}(x,\nabla u).\nabla \varphi$$

On a d'aprés $\hat{a}_*.2)$ et l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} |\langle Au, \varphi \rangle| &\leq C \int_\Omega \Big\{ |\nabla u|^{p-1} + a_0 \Big\}.|\nabla \varphi| \\ &\leq C\Big\{ \| \nabla u \|_{L^{p'}(\Omega)}^{p-1} + \| a_0 \|_{L^{p'}(\Omega)} \Big\} \| \nabla \varphi \|_{L^p(\Omega)} \end{aligned}$$

Ce qui montre que, pour $u \in V$, Au est bien défini et que A est borné

A est coercitif, puisque, d'aprés $\hat{a}_*.1)$:

$$\begin{aligned} \langle Au, u \rangle &= \int_\Omega \hat{a}(x,\nabla u).\nabla u \\ &\geq \alpha \int_\Omega |\nabla u|^p = \alpha \| u \|_V^p \end{aligned}$$

A est hémicontinu. En effet soient $u, v, w \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Montrons que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\lambda \mapsto \langle A(u+\lambda v), w\rangle = \int_\Omega \hat{a}\Big(x, \nabla(u+\lambda v)\Big).\nabla w$$

est continue. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ fixé et soit $\{\lambda_n\}$une suite de $\mathbb{R}$ convergeant vers λ. Posons

$$f_n(x) = \hat{a}\Big(x, \nabla(u+\lambda_n v)\Big).\nabla w$$

Comme $\hat{a}$ est de Carathéodory et $\lambda_n \to \lambda$ dans $\mathbb{R}$, on a:

$$\hat{a}\Big(x, \nabla(u+\lambda_n v)\Big) \to \hat{a}\Big(x, \nabla(u+\lambda v)\Big) \quad p.p \quad dans \quad \Omega$$

et comme

$$\begin{aligned}
\hat{a}\Big(x, \nabla(u+\lambda_n v)\Big).\nabla w &\leq C\Big\{|\nabla u + \lambda_n \nabla v|^{p-1} + a_0\Big\}.|\nabla w| \\
&\leq C_p\Big\{|\nabla u|^{p-1} + |\lambda_n|^{p-1}|\nabla v|^{p-1} + a_0\Big\}.|\nabla w| \\
&\leq C\Big\{|\nabla u|^{p-1} + |\nabla v|^{p-1} + a_0\Big\}.|\nabla w|
\end{aligned}$$

avec $C_p = C\max\{1, 2^{p-2}\}$ puisque la suite $\{\lambda_n\}$ est bornée, il résulte alors du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\lim_{n\to\infty} \langle A(u+\lambda_n v), w\rangle = \langle A(u+\lambda v), w\rangle$$

d'où l'hémicontinuité de A

A est strictement monotone : Soient $u, v \in V$ avec $u \neq v$, d'aprés $\hat{a}_*.3)$, on a

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_\Omega \Big[\hat{a}(x, \nabla u) - \hat{a}(x, \nabla v)\Big].\Big[\nabla u - \nabla v\Big] > 0$$

Donc, d'aprés le théorème(2.6) pour tout $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$, il existe $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tel que $Au = f$

i,e.,

$$\begin{cases} \int_\Omega \hat{a}(x, \nabla u).\nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle, & \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$

Montrons que u est unique. Supposons l'existence de u_1 et u_2 tels que :

$$\int_\Omega \hat{a}(x, \nabla u_i).\nabla\varphi = \langle f, \varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad i = 1, 2$$

Donc par soustraction :

$$\int_\Omega \Big[\hat{a}(x, \nabla u_1) - \hat{a}(x, \nabla u_2)\Big].\nabla\varphi = 0, \quad \forall\varphi \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

d'où, en prenant $\varphi = u_1 - u_2$:

$$\int_\Omega \Big[\hat{a}(x, \nabla u_1) - \hat{a}(x, \nabla u_2)\Big].\Big[\nabla u_1 - \nabla u_2\Big] = 0$$

Cela implique, grâce à $(\hat{a}_*.3)$,que :

$$\Big[\hat{a}(x, \nabla u_1) - \hat{a}(x, \nabla u_2)\Big].\Big[\nabla u_1 - \nabla u_2\Big] = 0 \quad p.p \quad dans \quad \Omega$$

de sorte que $\nabla u_1 = \nabla u_2 \quad p.p \quad dans \quad \Omega$, donc $u_1 = u_2$ sur chaque composante connexe de Ω et comme $u_1 = u_2$ sur $\partial\Omega$, on a $u_1 = u_2 \quad p.p \quad dans \quad \Omega$. ■

3.2 Opérateures pseudo-monotones

Définition 3.1 *Un opérateur* $A : V \to V'$

i) On dit que A est pseudo-monotone (au sense 1) s'il est

- *pour tout* $u_n \rightharpoonup u$ *dans V faible avec* $\lim_{n\to\infty} sup\ \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq 0$

on a

$$\lim_{n\to\infty} inf \langle Au_n, u_n - v\rangle \geq \langle Au_n, u - v\rangle, \quad \forall v \in V$$

ii)On dit que A est pseudo-monotone (au sense 2) s'il est

- *pour tout $u_n \rightharpoonup u$ dans V faible avec $A(u_n) \rightharpoonup \xi$ dans V' faible et*

$$\lim_{n\to\infty} \sup\langle Au_n, u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle$$

on a

$$\xi = A(u) \quad et \quad \langle Au_n, u_n\rangle \to \langle Au, u\rangle$$

Proposition 3.1 *Si A est borné, alors A est pseudo-monotone au sense 1 si seulement si il est pseudo-monotone au sense 2*

Preuve — Supposons d'abord que A soit pseudo-monotone au sens 1(mais pas nécessairement borné). Soit u_n une suite telle que $u_n \rightharpoonup u, \quad A(u_n) \rightharpoonup \xi$ et

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} sup\langle A(u_n), u_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle$$

On en déduit que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} sup\langle A(u_n), u_n - u\rangle = \lim_{n\longrightarrow\infty} sup(\langle A(u_n), u_n\rangle - \langle A(u_n) - u\rangle) \leq 0.$$

Donc, par pseudo-monotonie au sense 1,il vient que pour tout $v \in V$,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} inf\langle A(u_n), u_n - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle,$$

d'où en développant le crochet de gauche,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} inf\langle A(u_n), u_n\rangle - \langle \xi, v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle.$$

Prenant $v = u$, on en déduit que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \inf\langle A(u_n), u_n\rangle \geq \langle \xi, v\rangle$,d'où

$$\langle A(u_n), u_n\rangle \to \langle \xi, u\rangle$$

et en reportant dans l'inégalité ci-dessus

$$\langle \xi, u - v\rangle \geq \langle A(u), u - v\rangle.$$

Prenant $v = u + w$, on en déduit que $\xi = A(u)$ et que A est pseudo-monotone au sense 2.

Supposons maintenant que A soit pseudo-monotone au sens 2 et borné. Soit u_n une suite telle que $u_n \rightharpoonup u$ et $\lim_{n\longrightarrow\infty} sup\langle A(u_n), u_n - u\rangle \leq 0$. Soit $v \in V$. Comme A est borné, on peut extraire une suite telle que

$$A(u_{n'}) \rightharpoonup \xi \quad \text{et} \quad \langle A(u_{n'}), u_{n'} - v\rangle \to \lim_{n\longrightarrow\infty} inf\langle A(u_n), u_n - v\rangle.$$

Comme

$\langle A(u_{n'}), u\rangle \to \langle \xi, u\rangle$, on a d'abord $\lim_{n\longrightarrow\infty} sup\langle A(u_{n'}), u'_n\rangle \leq \langle \xi, u\rangle$. Donc, par pseudo-monotonie au sense 2, il vient que $\xi = A(u)$ et $\langle A(u'_n), u'_n\rangle \to \langle A(u), u\rangle$. On voit donc que

$$\langle A(u'_n), u'_n - v\rangle \to \langle A(u), u - v\rangle$$

donc A est pseudo-monotone au sense 1 ■

Proposition 3.2 *Si $A : V \to V'$ est borné, hémicontinu et monotone, alors A est pseudo-monotone (au sense 1).*

Preuve —

a) Soit $\{u_j\}$ une suite convergeant faiblement vers u dans V.Supposons que

$$\lim_{j\to\infty} \sup\langle Au_j, u_j - u\rangle \leq 0$$

Si A est monotone,on a

$$\lim_{j\to\infty} \quad \langle Au_j, u_j - u\rangle \quad \to \quad 0 \tag{3.1}$$

En effet,la monotonie de A et la convergence faible de $\{u_j\}$ vers u implique que

$$\langle Au_j, u_j - u\rangle \geq \langle Au, u_j - u\rangle \to 0 \quad pour \quad j \to \infty$$

Et donc

$$0 \geq \lim_{j\to\infty} \sup\langle Au_j, u_j - u\rangle \geq \lim_{j\to\infty} inf\langle Au_j, u_j - u\rangle \geq \lim_{j\to\infty} \sup\langle Au, u_j - u\rangle = 0$$

D'où (3.1)

b) pour $v \in V$ et $t \in]0,1[$, posons $w = (1-t)u + tv$. On a $\langle Au_j - Aw, u_j - w\rangle$ de sort que :

$$t\langle Au_j, u - v\rangle \geq -\langle Au_j, u_j - u\rangle + \langle Aw, u_j - u\rangle - t\langle Aw, v - u\rangle.$$

D'où, grâce à (3.1):

$$t \lim_{j\longrightarrow\infty} inf\langle Au_j, u - v\rangle \geq -t\langle Aw, v - u\rangle,$$

d'où, en divisant par t et tenant compte de (3.1):

$$\lim_{j\longrightarrow\infty} inf\langle Au_j, u_j - v\rangle \quad \geq \quad \langle Aw, u - v\rangle \tag{3.2}$$

$$w = (1-t)u + tv \quad \forall t \in]0,1[$$

En faisant tendre t vers 0 dans (3.2), et en utilisant l'hémicontinuité, on déduit

$$\lim_{j\to\infty} inf\langle Au_j, u_j - v\rangle \geq \langle Au, u - v\rangle, \quad \forall v \in V$$

Ce qui signifie que A est pseudo-monotone au sense 1 . ■

3.3 les opérateurs de Leray-Lions

On travaille dans les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ une fonction telle que

i) F est mesurable par rapport à $x \in \Omega$, continue par rapport à $(s, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

ii) Il existe $k \in L^{p'}(\Omega)$ et une constante C tels que

$$\forall (x, s, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad |F(x, s, \lambda)| \leq k(x) + C(|s|^{p-1} + |\lambda|^{p-1}),$$

iii) Pour x et s fixés, F est monotone par rapport à λ,

iv) Il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall (x, s, \lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N, \quad F(x, s, \lambda) \cdot \lambda \geq \alpha |\lambda|^p.$$

Théorème 3.2 *L'opérateur* $A(u) = -\mathrm{div}(F(x, u, \nabla u))$ *est borné, pseudo-monotone et coercif de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *dans* $W^{-1,p'}(\Omega)$

Cette famille d'opérateurs contient ce qu'on appelle les opérateurs de Leray-Lions[9]

Preuve — Voir [9] ■

Corollaire 3.1 *: Si A est un opérateur pseudo-monotone(au sense 1) coercitif, alors*

$$\forall f \in V' \quad \exists u \in V \quad tel \quad que \quad Au = f$$

conclusion

Dans ce travail nous utilisons le cadre théorique pour prouvons l'existence d'une solution d'un problème aux limites non linéaire $Au = f$. La méthode de la résolution s'appelle la méthode des opérateur monotones .

Bibliography

[1] Adams.R.A. *Anisotropic sobolev inequalties.* Casopis pro pestovani matematiky **113**, 276-279 (1988).15

[2] Benedek.A and Panzone.R. *The space L^p with mixed norme.* Duke Math. J**28**, 301-324 (1961).17

[3] Brézis.H. *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris (1987).117

[4] Brézis.H. *Equation et inéquation non linéaire dans les espaces vectoriels en dualité.* Annales de l'institut Fourier 18.1 115-175 (1968).

[5] Dall'aglio.Aand Orsina.L. *Existence results for some nonlinear parabolic equations with nonregular data*, Differential and Integral Equations, **5**,1335-1354 (1992).90,98,100

[6] El Hamidi.A and Rakotoson.J.M. *On a pertubed anisotropic equation with a critical exponent*, Ricerche di Mathematica **55**,55-69 (2006).76

[7] Haskovec.J and Schmeiser.C.A *note on the anisotropic generalizations of the sobolev and morrey embedding theorems.* Monatshefte für Math **158**,181-195 (2009). 29

[8] B.KAWOHL *from p-laplacin to mean curvature operator and related questions.* In progress in P.D.E the Metz surveys, M.chipot and Saint Jean Poulain editors, Pitman research Notes in Mathematics series, No **249**, Longman, Harlow,(1991),40-56

[9] J. L Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes au limites non linéaire*, Dunod, Paris, 1969.

[10] Y. Atik, *Introduction aux problèmes aux limites non-linéaires* , Thèse de Magister d'analyse fonctionelle,Alger.(1999).

Résumé

Dans ce travail, nous prouvons l'existence d'une solution d'un problème Au =f avec des conditions aux limites, tel que l'opérateur A est un opérateur non linéaire. La méthode de la résolution de notre problème basée sur le Théorème (2.6). Cette méthode s'appel méthode des opérateurs monotones qui a initiée par G.Minty en 1962.

Mots clés

espace de Sobolev, monotone, pseudo-monotone, opérateur non linéaire, equation Au =f

الملخص

في عملنا هذا يكون باسيطاعتنا ايجاد الحل للمشكل Au=f مع وجود شروط حدودية

العامل A عامل غير خطي و طريقة الحل تعتمد على النظرية(2.6) هذه الطريقة تسمى طريقة العامل المحدودي التي بدات 1962 من طرف G.Minty

الكلمات المفتاحية

فضاء سوبلافي , رتيب , كنية الرتابة , عامل غير خطي , معادلة Au=f.

Abstract

In this work, we prove the existence of a solution of a problem Au = f with boundary conditions, the operator A is a nonlinear operator, thode of the solution of our problem based on the theorem (2.6). This method is called the monotonic operator method which was initiated by G.Minty in 1962.

Key words

Sobolev space, monotone, pseudo-monotone, operator nonlinear, equation Au =f