

UNIVERSITÉ DE M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DEPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES



Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de **Master**

Domaine: Mathématiques et Informatiques

Filière: Mathématiques

Option: Mathématiques Appliquées et discrètes

Par

Heraiz Zahia

THÈME

SUR LES L-ENSEMBLES FLOUS

Soutenu le : .. / 0. / 2016

Devant le jury composé de :

- 1).....
- 2).....
- 3).....

Dirigé par:

Mr. ZIANE BARAHIM

Année: 2015/2016

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercier Mr. ZIANE Brahim directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères et ma soeur qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A mes soeurs

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

NOTATIONS

$L^p(\Omega)$	Espace de Lebesgue
$L^2(\Omega)$	Espace de Hilbert
$L^\varphi(\Omega)$	Espace de Orlicz
$\widetilde{L^\varphi}$	Les classes des espaces d'Orlicz
F	Opérateur de Nemytskij
H	Opérateur intégral de Hammerstein
$p.p$	presque partout.
Ω	ensemble mesurable

Table des matières

Introduction	1
1 Les espaces de Lebesgue et Orlicz	2
1.1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$	2
1.1.1 Inégalité de Hölder	3
1.1.2 Inégalité de Minkowski	4
1.1.3 Complétude des espaces	5
1.2 Espace d'Orlicz	8
1.2.1 Les classes des espaces d'Orlicz	10
1.2.2 La norme de l'espace d'Orlicz $L^\varphi(\Omega)$	12
1.2.3 Complétude des espaces	14
1.2.4 L'espace E^φ	14
1.2.5 Critères de compacité	15
2 L'opérateur de superposition	17
2.1 Propriétés de l'opérateur de superposition dans l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$	17
2.2 Propriétés de l'opérateur de superposition dans l'espace de Orlicz $L^\varphi(\Omega)$	21
3 Application	25
3.1 Résoudre l'équation de Hammerstein dans espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$	25
3.1.1 Existence et unicité des solutions	26
Conclusion générale	34

Bibliographie	35
----------------------	-----------

Introduction

Dans ce mémoire on a étudié les propriétés topologiques de l'opérateur de Nemytskii qui est défini de la forme suivante: $N_f = f(y, \varphi(y))$ dans les espaces fonctionnels notamment les espaces de Lebesgue et leur espace généralisé l'espace d'Orlicz.

Cette étude comporte plusieurs informations sur l'opérateur de superposition (la continuité, lipschitzienne, transforme des ensembles mesurables en ensembles mesurables, ...etc). Et une technique importante ce que n'appelle linéarisation:

linéarisation dans l'espace de Lebesgue:

$$|f(s, u)| \leq a(s) + b|u|^{p/q}$$

et dans l'espace d'Orlicz:

$$|g(s, u)| \leq a(s) + bM\left(s, \frac{u}{r}\right)$$

telle que $g(s, u) = N\left\{s, \frac{1}{R}[f(s, rM^{-1}(s, u))]\right\}$. à cet effet, on utilise cette technique pour résoudre un type très utile dans les domaines que soit mathématique ou soit physique, ce sont les équations intégrales non linéaires de type Hammerstein

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{\Omega} k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy$$

Notre travail est organisé (partagé) en trois chapitres.

le premier chapitre, est consacré de définition des espaces fonctionnels: Lebesgue et Orlicz.

Le deuxième chapitre est très important car il est consacré aux propriétés de l'opérateur de superposition dans les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et Orlicz $L^\varphi(\Omega)$.

Dans le troisième chapitre, on résout l'équation de Hammerstein dans l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et démontre l'existence et l'unicité de la solution de cette équation. avec une solution numérique à ses équations et leur comparaison avec les solutions exactes.

Chapitre 1

Les espaces de Lebesgue et Orlicz

Dans ce chapitre , nous présentons quelques définitions et théorèmes sur les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et Orlicz $L^\varphi(\Omega)$ qui l'on utilisera dans le chapitre qui suit.

1.1 Espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.1.1 Soit $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$, l'espace

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \int |f|^p d\mu < \infty \right\}$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$$

Définition 1.1.2 L'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ est défini par

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et } \exists C \geq 0 \text{ tel que } |f(x)| \leq C \quad \mu - pp\}$$

Pour toute fonction $f \in L^\infty(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C \geq 0, |f(x)| \leq C \quad \mu - pp\}$$

1.1.1 Inégalité de Hölder

Nous allons voir maintenant une inégalité très utile : l'inégalité de Hölder.

Définition 1.1.3 Pour $1 < p < \infty$, l'exposant conjugué de p est le nombre $q > 1$ vérifiant $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On notera que $p = 2 \Leftrightarrow q = 2$ (et d'ailleurs c'est le seul cas où p et q sont tous les deux entiers), que $q \rightarrow +\infty \Leftrightarrow p \rightarrow 1$ et $q \rightarrow 1 \Leftrightarrow p \rightarrow +\infty$. On a $q = \frac{p}{p-1}$ et $(q-1)(p-1) = 1$.

Théorème 1.1.1 (inégalité de Hölder) Soit $1 < p < \infty$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors pour toutes fonctions mesurables $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ positives, on a :

$$\int_{\Omega} fg d\mu \leq \left(\int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} g^q d\mu \right)^{1/q}.$$

Pour $p = 2$:

$$\int_{\Omega} fg d\mu \leq \left(\int_{\Omega} f^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} g^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

s'appelle l'inégalité de **Cauchy-Schwarz**.

Corollaire 1.1.1 Pour $1 < p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a :

$$f \in L^p(\Omega) \text{ et } g \in L^q(\Omega) \Rightarrow fg \in L^1(\Omega)$$

et :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Preuve. (l'inégalité de Hölder)

1) Réductions

• Si $\|f\|_p = 0$, alors $\int_{\Omega} f^p d\mu = 0$, et comme $f \geq 0$, on a $f^p = 0$ μ -pp. alors $fg = 0$ μ -pp. et $\int_{\Omega} fg d\mu = 0$. L'inégalité est donc vérifiée dans ce cas.

De même, si $\|g\|_q = 0$.

On peut donc supposer $\|f\|_p > 0$ et $\|g\|_q > 0$.

• L'inégalité est alors évidente si $\int_{\Omega} f^p d\mu = +\infty$ ou si $\int_{\Omega} g^q d\mu = +\infty$ (car, comme on a supposé les intégrales > 0 , le produit sera $+\infty$). On peut donc supposer qu'elles sont toutes les deux $< +\infty$ (c'est-à-dire que $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$).

• Il suffit de plus de montrer l'inégalité lorsque $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. En effet, pour f, g arbitraires avec $0 < \|f\|_p < +\infty$ et $0 < \|g\|_q < +\infty$, si l'on pose :

$$f_1 = \frac{1}{\|f\|_p} f \quad \text{et} \quad g_1 = \frac{1}{\|g\|_q} g,$$

on a $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$ et alors:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f g d\mu &= \int_{\Omega} (\|f\|_p f_1) (\|g\|_q g_1) d\mu = \|f\|_p \|g\|_q \int_{\Omega} f_1 g_1 d\mu \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_q (\int_{\Omega} f_1^p d\mu)^{1/p} (\int_{\Omega} g_1^q d\mu)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

2) Preuve proprement dite. On suppose donc $\|f\|_p = \|g\|_q = 1$. On utilisera le lemme suivant.

Lemme 1.1.1 Si $1 < p, q < +\infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a pour tous nombres réels positifs $a, b \geq 0$:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Ce lemme reste vrai, de façon évidente si $a = +\infty$ ou $b = +\infty$. On a donc ainsi:

$$f(x)g(x) \leq \frac{f(x)^p}{p} + \frac{g(x)^q}{q}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Il suffit alors d'intégrer pour obtenir:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f g d\mu &\leq \int_{\Omega} \frac{f^p}{p} d\mu + \int_{\Omega} \frac{g^q}{q} d\mu = \frac{1}{p} (\int_{\Omega} f^p d\mu) + (\int_{\Omega} g^q d\mu) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

■

1.1.2 Inégalité de Minkowski

Théorème 1.1.2 Pour $1 \leq p < \infty$, on a, pour toutes fonctions mesurables $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$$\left(\int_{\Omega} |f + g|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Pour $f, g \in L^p(\Omega)$, cette inégalité s'écrit:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Preuve. Si $\int_{\Omega} |f|^p d\mu = +\infty$ ou si $\int_{\Omega} |g|^p d\mu = +\infty$, l'inégalité est évidente ; on peut donc supposer que $f, g \in L^p(\Omega)$. D'autre part, on peut aussi supposer que ces deux intégrales ne sont pas nulles car sinon f ou g serait nulle μ -presque partout, et alors, $f + g$ serait égale μ -presque partout à f ou à g , et l'inégalité serait, là aussi, évidente.

On écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{f+g}{\|f\|_p + \|g\|_p} &= \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{f}{\|f\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{g}{\|g\|_p} \\ \frac{f+g}{\|f\|_p + \|g\|_p} &\leq \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|f|}{\|f\|_p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|g|}{\|g\|_p}. \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto x^p$ étant convexe, on a $[\alpha x + (1 - \alpha) y]^p \leq \alpha x^p + (1 - \alpha) y^p$ pour tous $x, y \geq 0$ et $0 \leq \alpha \leq 1$. Par conséquent (en utilisant ceci avec $\alpha = \|f\|_p / (\|f\|_p + \|g\|_p)$) :

$$\frac{|f + g|^p}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p} \leq \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{|g|^p}{\|g\|_p^p}.$$

En intégrant, on obtient :

$$\frac{\|f + g\|_p^p}{(\|f\|_p + \|g\|_p)^p} \leq \frac{\|f\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} + \frac{\|g\|_p}{\|f\|_p + \|g\|_p} \frac{\|g\|_p^p}{\|g\|_p^p} = 1$$

ce qui est l'inégalité de Minkowski. ■

1.1.3 Complétude des espaces

Théorème 1.1.3 (théorème de Riesz-Fisher.) Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace vectoriel normé $L^p(\Omega)$ est complet : c'est un espace de Banach.

Preuve. C'est presque la même que dans le cas $p = 1$.

Soit $f_n \in L^p(\Omega)$ telles que $\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p < +\infty$.

Posons :

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n(x)\|_p < +\infty,$$

et

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=1}^N |f_n(x)|.$$

Puisque $\|\cdot\|_p$ est une norme (inégalité de Minkowski), on a :

$$\|\varphi_N\|_p \leq \sum_{n=1}^N \|f_n\|_p.$$

Appliquons le Lemme de Fatou (puisque $\varphi^p = \lim_{N \rightarrow +\infty} \uparrow \varphi_N^p$) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi^p d\mu &\leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \varphi_N^p d\mu = \liminf_{N \rightarrow +\infty} \|\varphi_N\|_p^p \\ &\leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^N \|f_n\|_p^p \right) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|f_n\|_p^p \right) < +\infty. \end{aligned}$$

Il en résulte que φ^p est μ -intégrable et donc, en particulier, que $\varphi(x)^p < +\infty$ pour μ -presque tout $x \in \Omega$. Alors $\varphi(x) < +\infty$ pour μ -presque tout $x \in \Omega$.

Cela signifie que, pour ces x , la série $\sum_n f_n(x)$ est absolument convergente. A fortiori, elle converge, et l'on peut donc poser, pour ces x :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

(et $f(x) = 0$ pour les autres). Alors $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est mesurable, et:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| f - \sum_{n=1}^N f_n \right|^p d\mu &= \int_{\Omega} \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n \right|^p d\mu \leq \int_{\Omega} \left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} |f_n| \right)^p d\mu \\ &= \int_{\Omega} (\varphi - \varphi_N)^p d\mu \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

par le **Théorème de convergence dominée**, que l'on peut utiliser car:

$$(\varphi - \varphi_N)^p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

et:

$$|(\varphi - \varphi_N)^p| = (\varphi - \varphi_N)^p \leq \varphi^p \in L^1(\Omega),$$

en utilisant le fait que $\varphi_N \geq 0$.

Cela prouve en particulier que $\int_{\Omega} \left| f - \sum_{n=1}^N f_n \right|^p d\mu < +\infty$, au moins pour N assez grand

, et donc que $f - \sum_{n=1}^N f_n \in L^p(\Omega)$, ce qui entraîne que $f \in L^p(\Omega)$. Ensuite, cela prouve que

$$\left\| f - \sum_{n=1}^N f_n \right\|_p \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0, \text{ et cela termine la preuve. } \blacksquare$$

Cas particulier important $p=2$.

Pour $f, g \in L^2(\Omega)$, on pose, dans le cas réel:

$$(f/g) = \int_{\Omega} f g d\mu$$

et, dans le cas complexe:

$$(f/g) = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu$$

On pose de plus $(\dot{f}/\dot{g}) = (f/g)$.

Cela définit un **produit scalaire** sur $L^2(\Omega)$, et $\|\dot{f}\|_2 = (\dot{f}/\dot{f})$. Le Théorème de Riesz-Fisher assure alors que

$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Corollaire 1.1.2 Si μ est une mesure positive bornée : $\mu(\Omega) < +\infty$, alors, on a pour $1 \leq p_1 < p_2 < \infty$:

$$\|f\|_{p_1} \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \|f\|_{p_2}, \forall f \in L^{p_2}(\Omega).$$

En particulier, si $\mu(\Omega) < +\infty$;

$$1 \leq p_1 < p_2 < \infty \Rightarrow L^{p_2}(\Omega) \subseteq L^{p_1}(\Omega) \subseteq L^1(\Omega).$$

Preuve. Soit $p = p_2/p_1$; on a $p > 1$. Alors, avec $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = 1 - \frac{p_1}{p_2}$, l'inégalité de Hölder donne:

$$\begin{aligned} \|f\|_{p_1}^{p_1} &= \int_{\Omega} |f|^{p_1} d\mu = \int_{\Omega} |f|^{p_1} \Pi d\mu \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^{p_1 p} d\mu \right)^{1/p} \left(\int_{\Omega} \Pi^q d\mu \right)^{1/q} = \|f\|_{p_2}^{p_1} \mu(\Omega)^{1 - \frac{p_1}{p_2}}. \end{aligned}$$

■

Définition 1.1.4 Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme sur $L^p(\Omega)$.

Théorème 1.1.4 (Müntz) Soient $C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ et $\alpha_n, n \geq 0$, une suite strictement croissante à valeurs positives. Alors, l'espace vectoriel

$$E = \text{vect}(f_n(x) = x^{\alpha_n}; n \geq 0)$$

est dense dans $C([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ si et seulement si la série de terme générale α_n^{-1} diverge.

Théorème 1.1.5 (*Théorème de représentation de Riesz*) Soient (Ω, F, μ) un espace mesuré $1 < p < \infty, q$ l'exposant conjugué de p et $\varphi : L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire. Alors il existe une unique fonction $u \in L^q(\Omega)$ telle que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u f d\mu \quad \text{pour tout } f \in L^p(\Omega)$$

De plus, $\|u\|_{L^q} = \|\varphi\|$.

1.2 Espace d'Orlicz

Les espaces d'Orlicz ont été présentés la première fois en 1931 par le mathématicien polonais W. Orlicz et plus tard a été baptisé du nom de lui.

Dans cette section on expose les propriétés générales

Définition 1.2.1 (a) Soit I un intervalle dans $\mathbb{R}$. puis $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $x, y \in I$ et

$$\alpha \in [0,1] \quad f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

se tiennent .si l'inegalite est strict pour tout $x \neq y$ et $\alpha \in (0,1)$, alors f est strictement convexe.

(b) l'inegalite 1.2.1 est renversée, puis f serait concave. si elle est strict pour tout $x \neq y$ et $\alpha \in (0,1)$, puis f serait strictement concave

N-fonction

Définition 1.2.2 Soit $\varphi(u) = |u|^p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction, telle que:

(i) φ est paire, convexe et continue,

(ii) $\forall t > s \geq 0, \varphi(t) > \varphi(s) \geq 0$,

(iii) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(s)}{s} = 0$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(s)}{s} = +\infty$

La fonction φ est appelée fonction de Young ou N-fonction

Définition 1.2.3 (Définition équivalente)

Une fonction $\varphi(u)$ s'appelle N-fonction s'elle admette la représentation

$$\varphi(u) = \int_0^u p(t) dt$$

où la fonction $p(t)$ est continue pour $t \geq 0$, positive pour $t > 0$ et non décroissante qui vérifiée les conditions

$$p(0) = 0, p(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty \quad (1.2.1)$$

Définition 1.2.4 Soit la fonction positive $p(t), t > 0$, continue à droite pour $t \geq 0$, croissante est satisfaite la condition (1.2.1). On définit la fonction $q(s), (s \geq 0)$ par l'égalité

$$q(s) = \sin t. \quad (1.2.2)$$

La fonction q est dite fonction conjuguée de la fonction p .

Définition 1.2.5 Si φ est une N -fonction, alors la fonction conjuguée (duale) $\psi: [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$, est définie par

$$\psi = \sup \{xy - \varphi(x)\}. \quad (1.2.3)$$

Exemple 1.2.1 Soient M_1 et M_2 deux N -fonctions

1. $M_1(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}$, $\alpha > 0$, où $p_1(t) = M_1'(t) = t^{\alpha-1}, (t \geq 0)$, donc $q_1(s) = s^{\beta-1} (s \geq 0)$ avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Alors la fonction conjuguée est

$$N_1(\nu) = \int_0^{|\nu|} q_1(s) ds = \frac{|\nu|^\beta}{\beta}.$$

2. $M_2(u) = \exp |u| - |u| - 1$, où $p_2(t) = M_2'(t) = \exp(t) - 1$ ($t \geq 0$) donc $q_2(s) = \ln(s+1), (s \geq 0)$. Alors la fonction conjuguée est

$$N_2(\nu) = \int_0^{|\nu|} q_2(s) ds = (1 + |\nu|) \ln(1 + |\nu|) - |\nu|. \quad (1.2.4)$$

Inégalité de Young

Nous utilisons la ligne du raisonnement habituellement utilisée dans la dérivation de l'inégalité de Hölder, géométriquement il est clair que l'inégalité suivante est vérifiée

$$u\nu \leq M(u) + N(\nu) \quad (1.2.5)$$

Remarque 1.2.1 On déduit d'après (1.2.5) l'inégalité

$$N(\nu) \geq u\nu - M(u),$$

et par conséquent on a

$$N(\nu) = \max_{u \geq 0} [u|\nu| - M(u)]. \quad (1.2.6)$$

La formule (1.2.6) est une définition de N -fonction complémentaire de M .

La condition Δ_2

Définition 1.2.6 On dit que la N -fonction $M(u)$ satisfait la condition Δ_2 , s'il existe une constante $k > 0$ telle que

$$M(2u) \leq kM(u), (u \geq u_0) \quad (1.2.7)$$

pour une valeur positive de u_0 .

Remarque 1.2.2 On le voit facilement que nous avons toujours $k \geq 2$ on a

$$M(2u) > 2M(u) \text{ pour } u \neq 0.$$

Exemple 1.2.2 1- La fonction $M(s) = |s| \ln(|s| + 1)$ est satisfaite la condition Δ_2 . En effet, on peut vérifier que M est N -fonction et on a

$$a: k = 4.$$

2- On a aussi, la fonction $M(s) = \frac{1}{p} |s|^p$, pour $p > 1$ est vérifiée la condition Δ_2 . En effet, on a $k = 2^p$

1.2.1 Les classes des espaces d'Orlicz

Définition 1.2.7 L'ensemble de toutes les fonctions mesurables $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, telles que

$$\int_{\Omega} \Phi(|f|) d\mu < \infty,$$

est noté par $\tilde{L}^{\varphi}(\mu)$.

Remarque 1.2.3 1- $\tilde{L}^{\varphi}(\mu)$ l'ensemble des classes des espaces d'Orlicz.

2- Les classes d'Orlicz $\tilde{L}^{\varphi}$ ne sont pas des espaces vectoriels.

Exemple 1.2.3 On considère $\Omega =]0, 1[$ et $\phi(t) = \exp t$, alors la fonction $u(x) = -\frac{1}{2} \ln x$ appartient à $\tilde{L}^\varphi$, mais la fonction $v(x) = 2u(x) = -\ln x$, n'appartient pas.

Définition 1.2.8 Soit $\tilde{L}^\varphi(\mu)$ l'ensemble, présenté dans la définition (1.2.6), sur un espace de mesure arbitraire (Ω, Σ, μ) . Alors l'espace $\tilde{L}^\varphi(\mu)$ de toutes les fonctions mesurables $f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, telle que $\alpha f \in \tilde{L}^\varphi(\mu)$ pour $\alpha > 0$, s'appelle l'espace d'Orlicz. Autrement dit

$$L^\varphi(\mu) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \text{ mesurable; } \int_{\Omega} \Phi(\alpha f) d\mu < \infty \text{ pour } \alpha > 0 \right\} \quad (1.2.8)$$

Nous inclurons maintenant deux propriétés supplémentaires liées aux espaces classiques de Lebesgue $L^1(\mu)$ et $L^\infty(\mu)$, dépendant la détermination de la théorie de l'espace d'Orlicz.

Proposition 1.2.1 (a) Soit

$$(i) L^1 = \cup \{ \tilde{L}^\varphi(\mu) : \Phi \text{ portée sur toute } N\text{-fonctions} \},$$

$$(ii) L^\infty = \cup \{ \tilde{L}^\varphi(\mu) : \Phi \text{ portée sur toute } N\text{-fonctions} \}.$$

(b) Si (Ω, Σ, μ) un espace mesuré et (Φ, Ψ) couple de N -fonctions complémentaires, alors

$$L^1(\mu) = \tilde{L}^\psi \cdot \tilde{L}^\varphi \text{ où } \tilde{L}^\varphi \cdot \tilde{L}^\psi = \left\{ f \cdot g : f \in \tilde{L}^\varphi(\mu), g \in \tilde{L}^\psi \right\}.$$

Définition 1.2.9 Soit $\Phi(u)$ une N -fonction. On note par $\tilde{L}^\varphi(\Omega)$ la classe de ces fonctions à valeurs réelles, définie sur Ω , par

$$\rho(u; \Phi) = \int_{\Omega} \Phi[u(x)] d\mu < \infty.$$

1- Les fonctions qui sont différentes seulement sur un ensemble de mesure zéro, noteront soient considérées distinctes.

2- La classe $\tilde{L}^\varphi(\Omega)$ s'appelle classe d'Orlicz, nous écrirons $\tilde{L}^\varphi$ au lieu de $\tilde{L}^\varphi(\Omega)$.

3- Toutes les fonctions bornées, mais non toutes les fonctions sommables, appartiennent à $\tilde{L}^\varphi$.

4- On le voit facilement que chaque fonction dans la classe $\tilde{L}^\varphi$ est sommable.

Comparaison de classes

Les Classes d'Orlicz $\tilde{L}^{\varphi_1}$ et $\tilde{L}^{\varphi_2}$, qui sont déterminées par des N -fonctions distinctes $\varphi_1(u)$ et $\varphi_2(u)$, est généralement distincte.

Théorème 1.2.1 *L'inclusion suivant*

$$L^{\varphi_1} \subset L^{\varphi_2}$$

est vérifié si et seulement si ,s'il existe des conctantes positives u_0 et a telles que

$$\varphi_2(u) \leq a\varphi_1(u), (u \geq u_0)$$

Remarque 1.2.4 *En déduit de théorème ci-dessus que les deux fonctions φ_1 et φ_2 déterminer la même classe d'Orlicz,si et seulement si,s'il existe des constantes positives a , b et u_0 telles que*

$$a\varphi_2(u) \leq \varphi_1(u) \leq b\varphi_2(u), (u \geq u_0) \quad (1.2.9)$$

1.2.2 La norme de l'espace d'Orlicz $L^\varphi(\Omega)$

La norme d'Orlicz

Définition 1.2.10 *Soit (Ω, Σ, σ) un espace mesuré.*

Soient $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable et (φ, ψ) couple complémentaire,de N -fonctions, alors on définit la norme d'Orlicz $\|\cdot\|_\varphi : u \mapsto \|u\|_\varphi$, par

$$\|u\|_0 = \|u\|_\varphi^o = \sup \left\{ \int_\Omega |uv| d\mu : \int_\Omega \psi(\nu) d\mu \leq 1 \right\}. \quad (1.2.10)$$

Les assertions juste prouvées nous permettrons de présenter la norme d'Orlicz dans l'ensemble L^φ à l'aide de l'égalité suivante:

$$\|u\|_\varphi = \sup_{\rho(\nu;\psi) \leq 1} \left| \int_\Omega u(x)\nu(x)dx \right|. \quad (1.2.11)$$

D'après la définition la norme ci-dessus,est que satisfaite les axiomes habituels:

$$1-\|u\|_\varphi = 0 \text{ ssi } u(x) = 0 \text{ p.p.};$$

$$2-\|\alpha u\|_\varphi = \alpha \|u\|_\varphi ;$$

$$3-\|u_1 + u_2\|_\varphi \leq \|u_1\|_\varphi + \|u_2\|_\varphi .$$

L'ensemble L^φ devient un espace linéaire normé qui s'appel l'espace d'Orlicz.

Proposition 1.2.2 *La formule (1.2.11) définit une norme dans L^φ .*

La norme de Luxemburg

L'ensemble L^φ peut être transformé en espace de Banach à l'aide des normes distinctes de la norme présentée ci-dessus.

Considérons une telle norme qui a été étudiée en détail par Luxembourg([4]).

Définition 1.2.11 Soient φ une fonction de Young et u une fonction mesurable définie sur Ω , le nombre

$$\|u\|_1 = \|u\|_\varphi^L = \inf \{k > 0; \int_{\Omega} \varphi(\frac{1}{k} |ux|) dx \leq 1\}$$

est appelé la norme de Luxemburg de u .

Remarque 1.2.5 On peut noter, par

$$\|u\|_1 = \inf k,$$

où le minimum est sur tout $k > 0$, tel que

$$\rho(\frac{u}{k}; \varphi) = \int_{\Omega} \varphi \left[\frac{u(x)}{k} \right] dx \leq 1.$$

La norme de Amemiya

Définition 1.2.12 Soient φ une fonction de Young et u une fonction mesurable définie sur Ω , le nombre

$$\|u\|_2 = \|u\|_\varphi^A = \min_{k>0} \frac{1}{k} (1 + \int_{\Omega} [ku(x)] dx).$$

est appelé la norme de Amemiya de u .

Théorème 1.2.2 Soit $\varphi(u)$ une N -fonction arbitraire, avec $u(x) \in L^\varphi$, alors la formule

$$\|u\|_\varphi = \inf_{k>0} \frac{1}{k} (1 + \int_{\Omega} \varphi[ku(x)] dx)$$

est valide.

Théorème 1.2.3 Soit $u \in L^\varphi(\Omega)$, alors

$$\|u\|_1 \leq \|u\|_0 \leq 2 \|u\|_1.$$

Remarque 1.2.6 Dans le papier ([4]) les auteurs que la norme de Amemiya et d'Orlicz sont égales.

Inégalité de Hölder

Théorème 1.2.4 Soit (φ, ψ) le couple complémentaires de fonctions de Young.

Si $u \in L^\varphi(\Omega)$ et $v \in L^\psi(\Omega)$, alors $u, v \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_{\Omega} |u(x)v(x)| dx \leq \|u\|_{\varphi} \|v\|_{\psi}$$

1.2.3 Complétude des espaces

Théorème 1.2.5 Les espaces d'Orlicz L^φ sont complets, i.e., sont des espaces de Banach.

Convergence au moyenne

Nous disons que la suite des fonctions $u_n(x) \in L^\varphi, (n = 1, 2, \dots)$ est convergente au moyenne vers la fonction $u_0 \in L^\varphi$, si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \varphi[u_n(x) - u_0(x)] dx = 0.$$

D'après l'inégalité $\rho(u; \varphi) \leq \|u\|_{\varphi}$ que chaque suite $u_n(x), (n = 1, 2, \dots)$ converge en norme dans l'espace L^φ vers une fonction $u_0(x)$ est également la convergence au moyenne vers $u_0(x)$. L'inverse, d'une façon générale n'est pas vraie.

Théorème 1.2.6 Soit φ une N -fonction satisfaite la condition Δ_2 , alors la convergence en norme équivalente à la convergence au moyenne.

Remarque 1.2.7 pour chaque fonction $u(x) \in L^\varphi$, nous avons

$$\|u\|_{\varphi} = \sup_{\rho(v; \psi)} |(u, v)| \leq \rho(u; \varphi) + 1. \quad (1.2.12)$$

L'inégalité (1.2.12) aussi s'appelle inégalité de Hölder.

1.2.4 L'espace E^φ

Définition 1.2.13 On note par E^φ la fermeture dans L^φ de l'ensemble de fonctions bornées.

1.2.5 Critères de compacité

Critère de Vallée Poussin

Nous nous rappelons qu'une famille $\mathfrak{R}$ de fonction $\varphi(x)$ équi-continue absolument en intégrale, si pour un ε arbitraire et un $h > 0$ peut être trouvé, tels que, on a

$$\int_{\varepsilon} |\varphi(x)| dx < \varepsilon$$

pour toutes les fonctions dans la famille $\mathfrak{R}$, où $\varepsilon < h$.

Le critère général pour l'équi-continue absolument en intégral d'une famille des fonctions est donné par le théorème suivant.

Théorème 1.2.7 (de Vallée Poussin) Soit $\varphi(u)$, ($0 \leq u < \infty$) une fonction monotone et croissant qui satisfait la condition

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\varphi(u)}{u} = \infty$$

Supposons que $u(x)$ une fonction d'une certaine famille de $\mathfrak{R}$, l'intégrale de fonction $\varphi[|u(x)|]$ est uniformément bornée

$$\int_{\Omega} \varphi[|u(x)|] dx \leq A < \infty, u(x) \in \mathfrak{R}$$

Alors la famille $\mathfrak{R}$ est équi-continue absolument.

Critère de compacité de Kolmogorov pour l'espace E^φ

Une famille $\mathfrak{R}$ des fonctions de l'espace E^φ est compacte si et seulement si, les conditions suivantes sont satisfaisantes

- (i) $\|u\|_\varphi \leq A, u(x) \in \mathfrak{R}$
- (ii) Pour $\varepsilon > 0$ arbitraire, et un $\delta > 0$ peut être trouvé, tel que $r < \delta$, implique $\|u - u_r\|_\varphi < \varepsilon$ pour toutes les fonctions du famille $\mathfrak{R}$.

Théorème 1.2.8 On suppose que le N -fonction $\varphi(u)$ satisfait la condition Δ_2 .

La condition nécessaire et suffisante qu'une famille de fonctions $\mathfrak{R} \subset L^\varphi = \tilde{L}^\varphi$ est compacte, s'il est les deux conditions suivantes soient satisfaisantes:

(i) $\int_{\Omega} \varphi[u(x)] dx \leq A, u(x) \in \mathfrak{R}$

(ii) pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, et un $\delta > 0$ peut être trouvé, tel que

$$\int_{\Omega} \varphi[u(x) - u_r(x)] dx < \varepsilon$$

pour toute les fonctions du famille $\mathfrak{R}$.

Critère de Riesz pour la compacité des espaces E^φ

Nous donnerons un critère pour la compacité pour qu'une famille de fonctions dans E^φ

Théorème 1.2.9 *Une famille $\mathfrak{R}$ de fonctions dans l'espace E^φ est compacte si seulement si, les deux conditions suivantes soient satisfaisantes:*

(i) $\|u\|_\varphi \leq A, u(x) \in \mathfrak{R}$

(ii) Pour un $\varepsilon > 0$ arbitraire, et un $\delta > 0$ peut être trouvé, tel que $d(h, 0) < \delta$, alors

$$\|u(x+h) - u(x)\|_\varphi < \varepsilon, \text{ pour tout } u(x) \in \mathfrak{R}$$

Chapitre 2

L'opérateur de superposition

Dans ce chapitre , nous présentons quelques propriétés topologiques de l'opérateur de superposition dans les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$ et Orlicz $L^\varphi(\Omega)$

Définition 2.0.14 Soit la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on dit que f est satisfaite la condition de Carathéodory, si

- (i) La fonction $x \mapsto f(x, y)$ mesurable dans l'ensemble Ω , pour $y \in \mathbb{R}$
- (ii) La fonction $y \mapsto f(x, y)$ est continue dans $\mathbb{R}$, pour $x \in \Omega$

Définition 2.0.15 Soit la fonction $f : \Omega \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, satisfaite la condition de Carathéodory, alors pour chaque fonction $x(s)$ étant mesurable sur l'ensemble Ω , nous définissons l'opérateur F de superposition comme

$$(Fx)s = f(s, x(s)) \quad , s \in \Omega$$

L'opérateur F s'appelle aussi l'opérateur de Nemytskij

2.1 Propriétés de l'opérateur de superposition dans l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Théorème 2.1.1 L'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q si seulement si il existe une fonction $a \in L_q$ et des constantes $b \geq 0, \delta > 0$ tels que

$$|f(s, u)| \leq a(s) + b|u|^{p/q} \quad (2.1.1)$$

pour tous les $(s, q) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda(s) \leq \delta, \mu(s) |u|^p \leq \delta^p. \quad (2.1.2)$$

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.2 *Si F application de L_p dans L_q , alors F est localement borné si et seulement si la fonction $f(s, \cdot)$ est borné pour chacun $s \in \Omega_d$.*

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.3 *Si F application de L_p dans L_q , alors F est borné sur les ensembles borné si et seulement si pour chacun $r > 0$ il existe une fonction $a_r \in L_1$ et une constante $b_r \geq 0$ tels que $|f(s, u)|^q \leq a_r(s) + b_r |u|^p$ soutient pour tous les $(s, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tels que $\mu(s) |u|^p \leq r^p$. D'ailleurs, évaluation suivant.*

$$\mu_F(r) \leq v_f(r) \leq \|F\theta\|_q + 3\mu_F(r) \quad (2.1.3)$$

se tient, par $\mu_F(r) = \mu(F, B_r) = \sup_{\|x\| \leq r} \|Fx\|$ et $v_f(r) = \inf \{\|a_r\|_1 + b_r r^p\}$.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.4 *Soit f une fonction admissible, et supposer que la superposition opérateur F est généré par l'application f dans l'espace L_1 . Alors la fonction de growth $\mu_F(r) = \mu(F, B_r) = \sup_{\|x\| \leq r} \|Fx\|$ de F est donné par*

$$\mu_F(r) = \begin{cases} \|Fw_r\|_1 & \text{if } r < r_*, \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|Fw_{r,\epsilon}\|_1 & \text{if } r \geq r_*, \end{cases} \quad (2.1.4)$$

là où $w_r \in W_r$ et $w_{r,\epsilon} \in W_{r,\epsilon}$, arbitraire. D'ailleurs, l'égalité

$$\mu_F(r) = v_f(r) \quad (2.1.5)$$

se tient, où

$$v_f(r) = \inf \{\|a\|_1 + b_r : |f(s, u)| \leq a(s) + b |u|\} \quad (2.1.6)$$

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.5 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que la superposition opérateur F est généré par l'application f dans l'espace L_1 , où la mesure fondamentale μ est atomique. Soit $\tilde{f}$ l'opérateur admissible majorant de f , et $\tilde{F}$ l'opérateur de superposition généré par $\tilde{f}$ dans L_1 . Puis $\mu_{\tilde{F}}(r) = \mu_F(r)$ et $v_{\tilde{F}}(r) = v_f(r)$; par conséquent, (2.1.5) se tient.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.6 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que l'opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_p dans L_q . Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

- (a) F est absolument borné
- (b) Pour chacun $r > 0$ il existe une fonction monotoniquement croissante Φ_r dessus $[0, \infty)$ tels que Φ est une fonction croissant non négative sur $[0, \infty)$ tels que $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty$ prises, et l'opérateur de superposition $\tilde{F}_r$ est généré par la fonction $\tilde{f}_r(s, u) = u_0(s) \Phi_r[|f(s, u)| u_0(s)^{-1}]$ (avec u_0 une unité arbitraire dans L_q) est borné sur la boule $B_r(L_p)$.
- (c) Pour chacun $r > 0$ et $\epsilon > 0$ un peuvent trouver une fonction $a_\epsilon \in L_1$ tels que

$$|f(s, u)|^q \leq a_\epsilon(s) + \epsilon |u|^p (\mu(s) |u|^p \leq r^p). \quad (2.1.7)$$

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.7 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que la superposition opérateur F est généré par l'application f de L_p dans L_q . Est F alors continu si et seulement si f est sup-équivalent à une certaine fonction de Carathéodory.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.8 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que la superposition opérateur F est généré par l'application f de L_p dans L_q . Est F alors uniformément continu dessus ensembles borné si et seulement si pour chacun $\epsilon > 0$ et $r > 0$ un peut trouver $b_\epsilon \geq 0$, $\delta > 0$ et $a_\epsilon \in L_q$ avec $\|a_\epsilon\|_q \leq \epsilon$ tels que $|f(s, u) - f(s, v)| \leq a_\epsilon(s) + \epsilon (|u|^{p/q} + |v|^{p/q}) + b_\epsilon |u - v|^{p/q}$ se tient pour $\mu(s) |u|^p \leq r^p, \mu(s) |v|^p \leq r^p$ et $\mu(s) |u - v|^p \leq \delta^p$. D'ailleurs, l'évaluation suivante:

$$w_F(r, \delta) \leq v_f(r, \delta) \leq (1 + 2^{1+1/q}) w_F(r, \delta) \quad (2.1.8)$$

se tient, par $w_F(r, \delta)$ où est défini $w_F(r, \delta) = \sup \{ \|Fx_1 - Fx_2\| : \|x_1\| \leq r, \|x_2\| \leq r, \|x_1 - x_2\| \leq \delta \}$ et $v_f(r, \delta)$, près $v_f(r, \delta) = \inf \left\{ \|a_\epsilon\|_q + 2\epsilon r^{p/q} + b_\epsilon \delta^{p/q} \right\}$

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.9 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que la superposition opérateur F est généré par l'application f de L_p dans L_q . Est F alors faiblement continu si et seulement si la restriction de $\Omega_c \times \mathbb{R}$ satisfait

$$f(s, u) \simeq a(s) + b(s)u \quad (s \in \Omega_c, u \in \mathbb{R}), \quad (2.1.9)$$

avec $a \in L_q$ et $b \in L_q/L_p$, et la restriction de f à $\Omega_d \times \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.10 Soit f une fonction de Carathéodory, et supposer que la superposition opérateur F généré par l'application f de L_p dans L_q . Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(a) L'opérateur F satisfait une condition de Lipschitz

$$\|Fx_1 - Fx_2\|_q \leq k(r) \|x_1 - x_2\|_p \quad (x_1, x_2 \in B_r(L_p)). \quad (2.1.10)$$

(b) Donné deux fonctions x_1, x_2 , on peut trouver une fonction $\zeta \in B_{k(r)}(L_q/L_p)$ tels que $Fx_1(s) - Fx_2(s) = \zeta(s)[x_1(s) - x_2(s)]$ prises.

(c) La fonction f satisfait une condition de Lipschitz

$$|f(s, u) - f(s, v)| \leq g(s, w) |u - v| \quad (|u|, |v| \leq w), \quad (2.1.11)$$

là où la fonction g produit d'un opérateur de superposition G qui applique la boule $B_r(L_p)$ dans la boule $B_{k(r)}(L_q/L_p)$. D'ailleurs, dans le cas $p = q$ ($p < q$, respectivement) la fonction g dans (2.1.11) est essentiellement est lié (identiquement zéro, respectivement). En conclusion, dans le cas $p > q$, chacun des conditions ci-dessus est équivalente à les suivantes :

(d) Pour chacun $\lambda > 0$, il existe une fonction $a_\lambda \in L_1$ tels que $c(\rho) = \sup_{\lambda \geq \rho} \|a_\lambda\|_1 < \infty$ ($\rho > 0$) et

$$|f(s, u) - f(s, v)|^q \leq \lambda^{-q} a_\lambda(s) + \lambda^{p-q} |u - v|^p. \quad (2.1.12)$$

l'état de Darbo

$$\alpha_N(FN) \leq k(r) \alpha_p(N) \quad (N \subseteq B_r(L_p)),$$

là où α_p dénote la mesure de Hausdorff de noncompactness $\alpha(N) = \inf\{r : r > 0, N \subseteq B_r(X) + c, c \text{ finite}\}$ dans l'espace L_p . Puisque l'espace de Lebesgue L_q est α -nondegenerate pour $1 \leq q < \infty$,

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.1.11 Soit f une fonction de Caratheodory, et supposer que la superposition opérateur F est généré par l'application f de L_p dans L_q . Puis l'état de Lipschitz (2.1.10) et l'état de Darbo $\alpha_q(FN) \leq k(r) \alpha_p(N) (N \subseteq B_r(L_p))$ sont équivalents.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

2.2 Propriétés de l'opérateur de superposition dans l'espace de Orlicz $L^\varphi(\Omega)$

Lemme 2.2.1 L'opérateur de superposition F est généré par certains sup-mesurables l'application f de la boule $B_r(L_M)$ dans la boule $B_R(L_N)$ si et seulement si la superposition opérateur G est généré par la fonction

$$g(s, u) = N \left\{ s, \frac{1}{R} [f(s, rM^{-1}(s, u))] \right\} \quad (2.2.1)$$

l'application de la boule d'unité $B_1(L_1)$ dans elle-même.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.2.1 L'opérateur de superposition F est généré par l'application f de la boule $B_r(L_M)$ dans l'espace L_N si et seulement si il exist $R > 0, \delta > 0, \epsilon > 0, b \geq 0$ et $a \in L_1$ tels cela

$$N(s, \frac{1}{R} f(s, u)) \leq a(s) + bM\left(s, \frac{u}{r}\right) \quad (2.2.2)$$

pour satisfaire $(s, u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ tout $\lambda(s) \leq \epsilon$ et $\mu(s) M(s, u/r) \leq \delta$

Preuve. Pour la preuve [1]. ■

Théorème 2.2.2 *Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que le domaine de la définition $D(F)$ de l'opérateur de superposition F , produite près f et considérée en tant que l'opérateur entre les deux espaces d'Orlicz L_M et L_N , a les points intérieurs. Alors F est borné dessus chaque boule contenue dans $D(F)$ si et seulement si, pour chacun $s \in \Omega_d$, la fonction $f(s, \cdot)$ est borné sur chaque intervalle borné dans $\mathbb{R}$.*

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.2.3 *Soit f une fonction sup-mesurable. L'opérateur de superposition F est généré par f est borné de la boule $B_r(L_M)$ dans l'espace L_N (l'espace E_N , respectivement) si et seulement si pour certains $R > 0$ (pour tous $R > 0$, respectivement) la relation (2.2.2) prises pour presque tous $s \in \Omega$ avec $\mu(s) M(s, u/r) \leq 1$, et certains $a \in L_1$ et $b \geq 0$. D'ailleurs, les (2.1.3) prises d'évaluation où $\mu_F(r)$ est défini par $\mu_F(r) = \mu(F, B_r) = \sup_{\|x\| \leq r} \|Fx\|$, et $v_f(r) = \inf \{\|a_r\|_1 + b_r r^p\}$ dénote l'infimum de tous les $R > 0$ tels que (2.2.2) se tient avec $\|a\|_1 \leq 1$ et $b \leq 1$.*

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.2.4 *Soit f une fonction sup-mesurable. Puis l'opérateur de superposition F généré près f est absolument borné de la boule $B_r(L_M)$ dans l'espace L_N si et seulement si il existe une fonction monotoniquement croissante Φ_r sur $[0, \infty)$ tels que (2.29) prises, et l'opérateur de superposition $\tilde{F}_r$ généré par la fonction $\tilde{f}_r(s, u) = u_0(s) \Phi_r[|f(s, u)| u_0(s)^{-1}]$ (avec u_0 une unité arbitraire dans L_N) est borné sur la boule $B_r(L_M)$.*

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.2.5 *Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que l'intérieur G du domaine de la définition $D(F)$ de l'opérateur de superposition F , généré par f et considéré en tant qu'opérateur entre L_M et L_N , non vide. Puis, si l'opérateur F est allumée continue G , la fonction f est allumée sup-équivalente à une certaine fonction de Caratheodory $\delta(G)$. Réciproquement, si la fonction f est sup-équivalente à un certain Caratheodory la fonction dessus $\delta(G)$ et $N \in \Delta_2$, l'opérateur F est allumée continue sur G .*

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.2.6 Soit f une fonction de Caratheodory, et Soit x_0 un point intérieur du domaine de la définition $D(F)$ de l'opérateur de superposition F , généré par f et considéré en tant qu'opérateur entre L_M et L_N . Est F alors continu à x_0 si et seulement si l'opérateur de superposition $\tilde{F}$ est généré par l'application de la fonction $\hat{f}(s, u) = f(s, x_0(s) + u) - f(s, x_0(s))$ de l'espace L_M^0 dans l'espace L_N^0 . D'ailleurs, si F est continu à x_0 , F est continu à chaque point de ensemble $x_0 + L_M^0$.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.2.7 Soit f une fonction sup-mesurable, et supposer que la superposition opérateur F généré par l'application f de L_M dans L_N . Est F alors faiblement continu si et seulement si la restriction de $f : \Omega_c \times \mathbb{R}$ satisfait (2.1.9) avec $a \in L_N$ et $b \in L_N/L_M$, et la restriction de $f : \Omega_d \times \mathbb{R}$ est une fonction de Caratheodory.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Théorème 2.2.8 Soit f une fonction de Caratheodory, et supposer que la superposition opérateur F généré par l'application f de L_M dans L_N . Alors les trois conditions suivantes sont équivalent :

(a) L'opérateur F satisfait une condition de Lipschitz

$$\|Fx_1 - Fx_2\|_N \leq k(r) \|x_1 - x_2\|_M \quad (x_1, x_2 \in B_r(L_M)). \quad (2.2.3)$$

(b) Donné deux fonctions $x_1, x_2 \in B_r(L_M)$, on peut trouver une fonction $\zeta \in B_{k(r)}(L_N/L_M)$ tels que $Fx_1(s) - Fx_2(s) = \zeta(s) [x_1(s) - x_2(s)]$ prises.

(c) La fonction f satisfait une condition de Lipschitz

$$|f(s, u) - f(s, v)| \leq g(s, w) |u - v| \quad (|u|, |v| \leq w), \quad (2.2.4)$$

là où la fonction g est généré d'un opérateur de superposition G qui applique la boule $B_r(L_M)$ dans la boule $B_{k(r)}(L_N/L_M)$.

Dans le théorème 2.1.10, on a donné encore un autre état équivalent (d) qui peut être considéré comme famille de Lipschitz conditionne pour la fonction $f(s, u)$. Un fait semblable

peut être avéré ici : si M et N sont deux fonctions de Young avec $M \sqsubset N$, tous les états de théorème 2.2.8 sont équivalents à le suivant :

(d) Pour chacun $\lambda > 0$, il existe une fonction $a_\lambda \in L_1$ tels que $c(\rho) = \sup_{\lambda \geq \rho} \|a_\lambda\|_1 < \infty$ ($\rho > 0$) et

$$N(s, \frac{1}{k(r)} |f(s, u) - f(s, v)|) \leq a_\lambda(s) + M\left(s, \frac{u}{r}\right) + M(s, \lambda |u - v|). \quad (2.2.5)$$

Lemme 2.2.2 Soit $\Omega_d = \phi$, et soit $M = M(u)$ et $N = N(u)$ être deux autonomes fonctions de Young. Est (L_M, L_N) alors a V - pair si et seulement si

$$\overline{\lim}_{u \rightarrow 0} \frac{N^{-1}(1/u)}{M^{-1}(1/u)} < \infty \quad (2.2.6)$$

De même (L_M, L_N) est a V_0 -pair si et seulement si

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{N^{-1}(1/u)}{M^{-1}(1/u)} < 0 \quad (2.2.7)$$

Théorème 2.2.9 Soit $\Omega_d = \phi$ soit f une fonction de Caratheodory, et supposer que opérateur de superposition F est généré par l'application f de L_M dans L_N , où le fonctionns de Young M et N satisfaire la relation (2.2.7). Satisfait F alors la condition de Lipschitz (2.2.3) si et seulement si F est constant, c.-à-d. la fonction f ne dépend pas dessus u .

Maintenant analysons l'état de Darbo

$$\alpha_N(FN) \leq k(r) \alpha_M(N) \quad (N \subseteq B_r(L_M)), \quad (2.2.8)$$

là où α_M dénote la mesure de Hausdorff de noncompactness $\alpha(N) = \inf \{r : r > 0, N \subseteq B_r(X) + c, c \text{ finite}\}$ dans l'espace L_M ceci finir ¶

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Lemme 2.2.3 L'espace d'Orlicz L_M avec ou la norme du Luxembourg ou La norme d'Orlicz-Amemiya est α - nondegenerate si $\Omega_d = \phi$.

Théorème 2.2.10 Soit f une fonction de Caratheodory, et supposer que la superposition opérateur F généré par l'application f de L_M dans L_N . Puis l'état de Lipschitz (2.2.3) et l'état de Darbo (2.2.8) sont équivalent.

Preuve. Pour la preuve voir [1]. ■

Chapitre 3

Application

Dans ce chapitre nous discuterons sur l'objectif de notre article dont on prouve l'existence de la solution d'une équation intégrale non linéaire de type Hammerstein en utilisant la technique de décomposition dans les espaces de Lebesgue et on montre l'efficacité de ce résultat par des exemples numériques.

3.1 Résoudre l'équation de Hammerstein dans espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 3.1.1 *Dans tout ce qui suit Ω désigne un ensemble mesurable de l'espace euclidien.*

L'objet présent est l'étude de l'équation

$$u(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, u(y)) dy \quad (3.1.1)$$

avec x, y désignant des variables indépendantes. L'équation plus générale

$$\varphi(x) = g(x) + \int_{\Omega} k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy \quad (3.1.2)$$

dans laquelle $g(x)$ est une fonction connue, se ramène à l'équation (3.1.1) par la substitution

$$u(y) = \varphi(y) - g(y), \quad (3.1.3)$$

cette équation a été étudiée par M.M. Hamerstein.

Théorème 3.1.1 Soit $S = \{u(x)\}$ un ensemble de fonctions dans l'espace hilbertien, si l'on a pour $u \in s$

- (i) $\int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x, y) dx dy \leq L^2,$
- (ii) $\sup f^2(x, u(x)) < D(x)$
- (iii) $f(x, u(x))$ est continue en u , alors l'opérateur

$$Au = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, u) dy \quad (3.1.4)$$

est continu sur S dans l'espace hilbertien, où L est une constante et $D(x)$ est une fonction sommable.

3.1.1 Existence et unicité des solutions

Dans cette section on donne quelques théorèmes d'existence et unicité des solutions des équations intégrales non-linéaires, on s'intéresse aux équations de type Hammerstein.

Théorème 3.1.2 L'équation (3.1.1) admet une solution, si les conditions suivantes sont vérifiées:

- (i) $\int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x, y) dx dy \leq C_1,$
- (ii) $f^2(x, u(x)) < C(x)$ pour $\int_{\Omega} u^2(x) dx < K,$
- (iii) $f(x, u)$ est continue en u pour $\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < K,$
- (iv) $C_1 C_2 < K$ où $C_2 = \int_{\Omega} C(x) dx.$

Preuve. Considérons L l'ensemble des fonctions mesurables $u(x)$, telles que

$$L = \left\{ u(x); \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx < K \right\}.$$

l'ensemble L est convexe et fermé dans l'espace hilbertien, en vertu de théorème (3.1.1), l'opérateur

$$Au(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, u) dy$$

est compact et continu dans l'espace hilbertien.

L'opérateur est évidemment mesurable, puis nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} A^2 u(x) dx &\leq \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} k(x, y) f(y, u(y)) dy \right]^2 dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x, y) dx dy \cdot \int_{\Omega} f^2(y, u(y)) dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1 C_2 < K.\end{aligned}$$

D'après le théorème de Schauder, il existe dans l'ensemble des fonctions $\{u(x) < k\}$ une fonction $u(x)$ pour laquelle, on a

$$u(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, u) dy,$$

cette fonction est la solution cherchée. ■

Théorème 3.1.3 *L'équation (3.1.1) admet une solution unique, si l'on a :*

- (i) $\int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x, y) dx dy < C_1$,
- (ii) $\int_{\Omega} f^2(y, u(y)) dy < C_2$, pour u tel que $\int_{\Omega} u(x)^2 dy < k$,
- (iii) $\int_{\Omega} [f(x, u_1) - f(x, u_2)]^2 dx \leq L \int_{\Omega} |u_1 - u_2|^2 dx$, pour u tel que $\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq k$,
- (iv) $C_1 L = q < 1$,
- (v) $C_1 C_2 < k$.

Preuve. De la même manière du théorème précédent, on voit que l'existence de la solution sera démontrée.

Si nous prouverons que l'ensemble $S = \{u(x)\}$ des fonctions $u(x)$ pour laquelle

$$\int_{\Omega} u^2(x) dx \leq k,$$

la sphère $S(0, k)$, se transforme en sous-ensemble, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} [A u_1(x) - A u_2(x)]^2 dx &\leq \int_{\Omega} \left[\int_{\Omega} k(x, y) (f(y, u_1) - f(y, u_2)) dy \right]^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{\Omega} k^2(x, y) dx dy \int_{\Omega} [f(y, u_1) - f(y, u_2)]^2 dy \\ &\leq C_1 L \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 dy \\ &= q \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 dy, \text{ avec } q < 1,\end{aligned}$$

de plus cette solution est unique en vertu du principe de Cacciopoli. ■

Théorème 3.1.4 *On suppose que les fonctions $k(x, y)$ et $f(y, \varphi(y))$ vérifiant les conditions suivantes*

(A1) le noyau $k(x, y)$ est mesurable sur $[a, b] \times [a, b]$ et tel que

$$\left(\int_a^b |k(x, y)|^\sigma dx \right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq M_1, \text{ pour tout } y \in [a, b],$$

où $\sigma < p$ et $\sigma, p > 1$.

(A2) Le noyau $k(x, y)$ est mesurable sur $[a, b] \times [a, b]$ et tel que

$$\left(\int_a^b |k(x, y)|^{\frac{p-\sigma}{p-1}} dy \right)^{\frac{p-1}{p-\sigma}} \leq M_2, \text{ pour tout } x \in [a, b].$$

(A3) La fonction non linéaire $f(y, \varphi(y))$ de $[a, b] \times \mathbb{R}$, dans $\mathbb{R}$ satisfait la condition de Carathéodory et telle que

$$|f(y, \varphi(y))| \leq a_0(y) + b_0 |\varphi(y)|^{\frac{p}{q}},$$

où $a_0(y) \in L^q([a, b], \mathbb{R})$, $b_0 > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Sous les conditions (A1), (A2), (A3) l'opérateur

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi(y)) dt, \quad (3.1.5)$$

est de L^p dans L^p .

Preuve. D'après la condition (A3), on peut écrire

$$|f(y, \varphi(y))|^q \leq \left(|a_0(y)| + b_0 |\varphi(y)|^{\frac{p}{q}} \right)^q,$$

donc

$$\|f(y, \varphi(y))\|_q = \left(\int_a^b |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\int_a^b \left(|a_0(y)| + b_0 |\varphi(y)|^{\frac{p}{q}} \right)^q dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

en utilisant l'inégalité de Minkovski, on a

$$\begin{aligned} \|f(y, \varphi(y))\|_q &\leq c \left(\left(\int_a^b |a_0(y)|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_a^b b_0^q |\varphi(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{q}} \right) \\ &\leq c \left(\|a_0(y)\|_q + b_0 \|\varphi(t)\|_p^{\frac{p}{q}} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent l'opérateur $f(y, \varphi(y))$ est un élément continu de $L^q([a, b], \mathbb{R})$.

Dans l'espace $L^p([a, b], \mathbb{R})$ on considère

$$A\varphi(x) = \int_a^b k(x, y)f(y, \varphi(y))dy,$$

on obtient

$$\begin{aligned} |A\varphi(x)| &= \left| \int_a^b k(x, y)f(y, \varphi(y))dy \right|, \\ &\leq \int_a^b |k(x, y)f(y, \varphi(y))| dy, \\ &= \int_a^b (|k(x, y)|^\sigma |f(y, \varphi(y))|^q)^{\frac{1}{p}} |k(x, y)|^{1-\frac{\sigma}{p}} |f(y, \varphi(y))|^{1-\frac{q}{p}} dy, \\ &\leq \left(\int_a^b |k(x, y)|^\sigma |f(y, \varphi(y))|^q dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |k(x, y)|^{p-\sigma} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{p-q}{pq}}, \\ |A\varphi(x)| &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{\frac{(p-q)}{p}} \left(\int_a^b |k(x, y)|^\sigma |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

alors,

$$\begin{aligned} |A\varphi(x)|^p &\leq \left(M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{\frac{(p-q)}{p}} \left(\int_a^b |k(x, y)|^\sigma |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\ \left(\int_a^b |A\varphi(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{\frac{(p-q)}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^\sigma |f(x, \varphi(y))|^q dy dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{1-\frac{q}{p}} \left(\int_a^b |k(x, y)|^\sigma dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\left(\int_a^b |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{1}{p}} \right) \\ &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{1-\frac{q}{p}} M_1^{\frac{\sigma}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|^{\frac{q}{p}} \\ \|A\varphi(x)\|_p &\leq M_2^{\frac{(p-\sigma)}{p}} M_1^{\frac{\sigma}{p}} \|f(y, \varphi(y))\|_q. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'opérateur $A\varphi(x)$ est bien défini de L^p vers L^p par l'interpolation. ■

On considère l'équation intégrale non linéaire suivante

$$\varphi(x) = \int_a^b k(x, y)f(y, \varphi(y))dy,$$

Nous voudrions savoir quelles sont les conditions exiger dessus sur $k(x, y)$ et $f(y, \varphi(y))$ pour que cette équation admet une solution $\varphi(y) \in L^p([a, b])$.

Théorème 3.1.5 *On suppose que les fonctions $k(x, y)$ et $f(y, \varphi(y))$ vérifiant les conditions suivantes*

(B1) le noyau $k(x, y)$ appartient à l'espace L^p pour tout $x \in [a, b]$

$$\left(\int_a^b |k(x, y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \leq N_1(x), \forall x \in [a, b].$$

(B2) la fonction $f(y, \varphi(y))$ appartient à l'espace L^p pour tout $x \in [a, b]$

$$\left(\int_a^b |f(y, \varphi(y))|^q dy \right)^{\frac{1}{q}} \leq C.$$

et satisfait la condition de *Lipschitz*

$$|f(y, \varphi_1(y)) - f(y, \varphi_2(y))| \leq L(y) |\varphi_1(y) - \varphi_2(y)|,$$

avec la fonction $L(y)$ appartient à l'espace $L^{\frac{pq}{p-q}}$ avec $q \leq p$,

$$\left(\int_a^b |L(y)|^{\frac{pq}{p-q}} dy \right)^{\frac{p-q}{pq}} \leq N_2.$$

Sous les assumptions (B1) et (B2), l'approximation successive

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi_n(y)) dy,$$

converge presque partout à la solution de l'équation (3.1.1) vérifier

$$N_2^p \int_a^b N_1^p(y) dy = N^p < 1.$$

Preuve. Pour cette méthode, on pose $\varphi_0(y)$ comme fonction identiquement nulle et successivement

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_a^b k(x, y) f(y, \varphi_n(y)) dy, n = 0, 1, 2, \dots, n \dots,$$

donc, on obtient

$$\begin{aligned} |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| &\leq \int_a^b |k(x, y)| |f(y, \varphi_n(y)) - f(y, \varphi_{n-1}(y))| dy \\ |\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| &\leq \int_a^b |k(x, y)| |L(y)| |\varphi_n(y) - \varphi_{n-1}(y)| dy, \\ &\leq \left(\int_a^b |k(x, y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |L(y)|^{\frac{pq}{p-q}} dy \right)^{\frac{p-q}{pq}} \left(\int_a^b |\varphi_n(y) - \varphi_{n-1}(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)|^p \leq N_1^p(x) N_2^p \int_a^b |\varphi_{n+1}(y) - \varphi_n(y)|^p dy, \quad (3.1.6)$$

utilisons la condition $\varphi_0(y) = 0$, on obtient

$$|\varphi_1(x)|^p \leq N_1^p(x) \left(\int_a^b |f(x, 0)|^q dy \right)^{\frac{p}{q}} = N_1^p(x) C^p,$$

et par (3.1.6), elle vient

$$\begin{aligned} |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|^p &\leq N_1^p(x) N_2^p \int_a^b N_1^p(x) C^p dx = C^p N^p N_1^p(x) \\ |\varphi_3(x) - \varphi_2(x)|^p &\leq N_1^p(x) N_2^p \int_a^b C^p N_1^p(x) N^p dx = C^p N^{2p} N_1^p(x), \end{aligned}$$

plus généralement

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)|^p \leq C^p N_1^{2np} N_1^p(x),$$

et d'après la simplification

$$|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)| \leq C N^{2n} N_1(x).$$

Cette expression donne la suite suivante $\varphi_n(x)$ et on exprime par la série

$$\varphi_1(x) + (\varphi_2(x) - \varphi_1(x)) + \dots + (\varphi_p(x) - \varphi_{p-1}(x)) + \dots,$$

majorant par

$$\varphi N_1(x) (1 + N + N^2 + \dots N^{p-1} + \dots)$$

Naturellement cette série est convergente, et par conséquent la suite $\varphi_n(x)$ converge vers la solution de l'équation (3.1.1). ■

Implémentations numériques

Dans cette section on donne certains exemples numériques pour résoudre l'équation de Hammerstein, où la fonction φ représente la solution exacte et $\tilde{\varphi}$ représente la solution approchée.

Exemple 3.1.1 On considère l'équation intégral de Hammerstein

$$10\varphi(x) + \int_0^1 \exp(t^4 + x^4) (\varphi(t))^3 dt = 10x - \frac{1}{4}(e - 1) \exp(x^4),$$

où la solution exacte est $\varphi(t) = t$.

t	<i>solution exacte</i>	<i>solution appro</i>	<i>Erreur</i>	<i>Erreur [10]</i>
0.000000	0.000000e + 000	2.209477e - 005	2.209477e - 005	2.1462e - 003
0.250000	2.500000e - 001	2.500222e - 001	2.218125e - 005	2.1546e - 003
0.500000	5.000000e - 001	5.000235e - 001	2.351976e - 005	2.2846e - 003
0.750000	7.500000e - 001	7.500303e - 001	3.031818e - 005	2.9450e - 003
1.000000	1.000000e + 000	1.000060e + 000	6.005982e - 005	2.8340e - 003

Tableau 1 .Coparaision entre la solution exacte ,approchée et l'erreur [10]

Exemple 3.1.2 On considère l'équation intégral de Hammerstein

$$20\varphi(x) - \int_0^1 \sin(\exp(t) + x) \exp(\varphi(t)) dt = 20x + \cos(\exp(1) + x) - \cos(1 + x),$$

avec la solution exacte est $\varphi(t) = t$.

points de t	<i>solution exacte</i>	<i>solution appro</i>	<i>Erreur</i>	<i>Erreur[10]</i>
0.000000	0.000000e + 000	-3.184043e - 006	3.184043e - 006	1.6361e - 005
2.500000	2.500000e - 001	2.499964e - 001	3.602525e - 006	4.3978e - 005
0.500000	5.000000e - 001	4.999962e - 001	3.797019e - 006	6.8861e - 005
0.750000	7.500000e - 001	7.499962e - 001	3.755433e - 006	8.9462e - 005
1.000000	1.000000e + 000	9.999965e - 001	3.480352e - 006	1.0450e - 004

Tableau 2 .Coparaision entre la solution exacte ,approchée et l'erreur [10]

Exemple 3.1.3 On considère l'équation intégral de Hammerstein

$$\varphi(x) - \int_0^1 tx(\varphi(t))^3 dt = \frac{1}{x^2+1} - \frac{3}{16}x,$$

où la solution exacte est $\varphi(t) = \frac{1}{t^2+1}$.

point de t	solution exacte	solution appro	Erreur	Erreur[25]
0.000000	1.000000e + 000	1.000000e + 000	0.000000e + 000	0.000000e + 000
0.200000	9.615385e - 001	9.615348e - 001	3.642846e - 006	1.154620e - 004
0.400000	8.620690e - 001	8.620617e - 001	7.285693e - 006	2.389660e - 004
0.600000	7.352941e - 001	7.352832e - 001	1.092854e - 005	3.581180e - 004
0.800000	6.097561e - 001	6.097415e - 001	1.457139e - 005	4.780980e - 004

Tableau 3 .Coparaison entre la solution exacte ,approchée et l'erreur [10]

Exemple 3.1.4 On considère l'équation intégral de Hammerstein

$$\varphi(x) - \int_0^1 \sin(t+x) \ln(\varphi(t)) dt = \exp(x) - 0.382 \sin(x) - 0.301 \cos(x), 0 \leq x \leq 1,$$

où la solution exacte est $\varphi(t) = \exp(t)$.

points de t	solution exacte	solution appro	Erreur	Erreur[55]
0.000000	1.000000e + 000	1.000195e + 000	1.953229e - 004	0.000000e + 000
0.200000	1.221403e + 000	1.221559e + 000	1.567282e - 004	1.940000e - 004
0.400000	1.491825e + 000	1.491937e + 000	1.118852e - 004	5.410000e - 004
0.600000	1.822119e + 000	1.822181e + 000	6.258175e - 005	3.360000e - 004
0.800000	2.225541e + 000	2.225552e + 000	1.078332e - 005	2.890000e - 004

Tableau 4 .Coparaison entre la solution exacte ,approchée et l'erreur [55]

conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons étudié les propriétés topologiques de l'opérateur de superposition qui est défini de la forme suivante:

$$(Fx) s = f[s, x(s)] \quad , s \in \Omega \quad (1)$$

Où Ω un ensemble mesurable.

Et aussi s'appelle opérateur de Nemytskij

Cette étude a un intérêt dans le domaine des équations intégrales non linéaires, particulièrement les équations de type Hammerstein, de cette forme:

$$H\varphi(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y, \varphi(y)) dy. \quad (2)$$

Alors pour montrer que l'équation (2) admet une solution, on utilise la décomposition de Nemytskij pour dire que l'opérateur H de Hammerstein est contractant d'où admet un point fixe qui est représenté la solution et pour démontrer que cette équation a une solution unique, on utilise la technique d'approximation successive.

Bibliographie

- [1] J. APPELL AND P.P. ZABREIKO, *Nonlinear superposition operators*, **spring 1989**.
- [2] K. BARON AND H. HUNDZIK, *Orlicz spaces which are L^p -spaces*, *Aequationes Mathematicae*. Vol 48 (1994).
- [3] L. DIENING, *Maximal function on generalized Lebesgue spaces $L^p(\Omega)$* , *Math. Inequal. App.*, Vol 7 (2004).
- [4] B. GAGUI, *Sur les équations intégrales dans les espaces d'Orlicz*, université de M'sila, 2014-2015.
- [5] M.A. KRASNOSELSKII, P.P. ZABREIKO, E.I. PUSTYL'INK AND P.E. SBOLEVSKII, *Integral operators in spaces of summable functions*, (English translation : Noordhoff, Leyden, 1976), Nauka Moscow, 1966.
- [6] D. LI, *Mesure et Integration*, université d'Artois. July 8. 2010.
- [7] M. NADIR AND B. GAGUI, *A numerical approximation for solutions of Hammerstein integral equations in L^p spaces*, *Sao paulo Journal of Mathematical Sciences* Vol 8 (2014).
- [8] P.P. ZABREIKO AND J.I. PUSTYL'INK, *On the continuity and complete continuity of nonlinear integral operators in L^p spaces*, *Uspehi Mat. Nauka*, Vol 19 (1982).