



DEMOCRATIC AND POPULAR REPUBLIC OF ALGERIA
Ministry of Higher Education and Scientific Research
Mohamed Boudiaf university of M'sila
Faculty of Mathematics and Computer Science
Department of Mathematics



MASTER THESIS

Field: Mathematics and Informatics

Stream: Mathematics.

Option: Mathematical and Numerical Analysis

Presented by : Ms. Benthada Dalal

Theme

Operational Matrices of Lucas Polynomials for Solving Linear Volterra Integral Equations

Publicly supported:10\06\2024.

Board of jury :

| | | | |
|-------------------|--------|----------------------|-------------------|
| Dr. NADIR Mostefa | Prof, | University of M'sila | <i>President</i> |
| Dr. KHIRANI Amina | M.C.A, | University of M'sila | <i>Supervisor</i> |
| Dr. GAGUI Bachir | M.C.A, | University of M'sila | <i>Examiner</i> |

Academic year : 2023/2024.



REPUBLIQUE ALGERIENNE
DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT
SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



Université Mohamed Boudiaf de M'sila
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département des Mathématiques

Mémoire de Master

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématiques et Numérique

Thème

Matrices Opérationnelles des polynômes de Lucas pour la Résolution des Equations Intégrales Linéaires de Volterra

Présenté par :

M^{elle} BENGHADA Dalal

Soutenu publiquement le : 10/06/2024.

Devant le jury composé de :

Président : *M^r NADIR Mostefa*

Encadreur : *M^{me} KHIRANI Amina*

Examineur : *M^r GAGUI Bachir*

Proof, Université de M'sila

M.C.A, Université de M'sila

M.C.A, Université de M'sila

Année universitaire 2023/2024.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Préliminaire | 2 |
| 1.1 | Notion d'analyse fonctionnelle | 2 |
| 1.1.1 | Espace vectoriel normé | 2 |
| 1.1.2 | Espace de Banach | 3 |
| 1.1.3 | Espaces de Hilbert | 3 |
| 1.2 | Notions sur les opérateurs | 4 |
| 1.2.1 | Opérateurs linéaires | 4 |
| 1.2.2 | Opérateurs bornés | 4 |
| 1.2.3 | Opérateurs compact | 5 |
| 1.2.4 | Équations aux Opérateurs compacts | 7 |
| 1.3 | Notions d'analyse numérique | 9 |
| 1.3.1 | Méthodes spectrales | 9 |
| 2 | Équations intégrales et leurs classification | 13 |
| 2.1 | Classification des équations intégrales | 13 |
| 2.1.1 | Équations intégrales linéaires | 13 |
| 2.1.2 | Équations intégrales linéaires de Fredholm | 13 |
| 2.1.3 | Équations intégrales linéaires de Volterra | 14 |
| 2.1.4 | Équation intégrale mixtes (de Volterra-Fredholm) | 15 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.2 | Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra | 15 |
| 2.2.1 | Introduction à la méthode de théorie du point fixe : | 15 |
| 2.2.2 | La méthode de Gronwall | 16 |
| 2.3 | Méthodes de résolution analytiques des équations intégrale de Volterra | 19 |
| 2.3.1 | Méthode des approximations successives | 19 |
| 2.3.2 | Méthode de développement en séries | 20 |
| 2.3.3 | La méthode de décomposition d'Adomian | 22 |
| 2.4 | Définition de polynôme de Lucas et ses propriétés : | 23 |
| 2.4.1 | Approximation d'une fonction par le polynôme de Lucas | 26 |
| 3 | Résolution numérique des équations intégrale linéaires de Volterra avec | |
| | les polynômes de Lucas | 27 |
| 3.1 | Description des méthode | 27 |
| 3.2 | Relations matricielles | 28 |
| 3.3 | exemple numériques | 31 |
| 3.4 | Exemples Illustratifs | 33 |

Table des figures

| | |
|--|----|
| 2.1 Les Polynômes de Lucas | 25 |
| 3.1 graphe des solutions exacte et approchée | 34 |
| 3.2 graphe des solutions exacte,approchée et err | 35 |
| 3.3 graphe des solutions exacte et approchée | 37 |
| 3.4 graphe des solutions exacte et approchée | 38 |

Liste des tableaux

| | | | |
|-----|--|-----------|----|
| 3.1 | L'erreur entre la solutions exacte et approchée pour l'exemple (3.2) | . . . | 33 |
| 3.2 | L'erreur entre la solutions exacte et approchée pour l'exemple (3.3) | . . . | 34 |
| 3.3 | Comparaison pour l'exemple (3.3) | | 35 |
| 3.4 | L'erreur entre la solutions exacte et la solution approchée pour exemple (3.4) | | 36 |
| 3.5 | Comparaison entre les Solutions de polynôme de Lucas et Legendre (3.4) | | 36 |
| 3.6 | Comparaison L'erreur entre la solutions exacte et la solution approchée | | |
| | pour exemple (3.5) | | 37 |

Remerciements

Je remercie ALLAH , qui m'a donné la force , la santé et la volonté de commencer et

de terminer ce mémoire.

Tout d'abord ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans

l'aide et l'encadrement de professeur KHATIBI AMIN je le remercie pour la qualité de

son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant mon

préparation de ce mémoire.

J'adresse mes sincères remerciements le professeur Nadir mustapha J'adresse mes sincères

remerciements à Messieurs les professeurs GUY Bachir et ABDEL-KEBIR Laad.

qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'évaluer ce mémoire.

Enfin, je remercie tous les étudiants de ma promotion de spécialité Analyse Mathématique et Numérique

Dédicaces

je souhaite dédier ce travail à la mémoire de mes chers parents Docteur
BENGHODD CHERIF & ELFAH H .

je ne saurais trop vous remercier pour vos conseils votre soutien et vos
encouragements, ainsi que pour vos

prières qui m'ont accompagné tout le long de mes études. Ce travail est le
fruit de tous vos sacrifices bien au-delà des mots. Il reflète tout l'amour
que je ressens pour

vous.

À mes chers frères : AMEL & MOUHAMMED

À mes chères sœurs : SALMA & JANA

À toutes les personnes que j'aime.

Introduction

Les méthodes numériques permettent d'obtenir une solution approximative des problèmes pour lesquels la solution exacte est difficile, voire impossible à trouver analytiquement, d'où l'importance des méthodes numériques. Différents méthodes ont été développées et utilisées par plusieurs recherches pour obtenir une solution approchée des équations intégrales. Dans ce mémoire, nous considérons l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce, qui prend la suivante :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad x \in [a,b]$$

Les équations intégrales de Volterra de deuxième espèce jouent un rôle important dans l'étude des problèmes mathématiques, physiques et d'ingénieries, tels que les problèmes de mécanique, les théories potentiels, électrostatiques, astrophysiques, et le problème de transport, aussi les équations différentielles fractionnaires, les systèmes dynamiques. Parmi les méthodes utilisées nous avons la méthode de Galerkin, la méthode de collocation, et d'autres. nous cherchons à trouver la solution approchée des VIE's de deuxième espèce par le polynôme de Lucas que nous utilisons en raison de ses caractéristiques pratiques, telle que sa définition simple, sa rapidité d'exécution et sa représentation efficace des fonctions, ce qui accélère le rapprochement des solutions avec précision et efficacité, en plus d'autres propriétés utiles des polynômes de Lucas.

L'objectif de ce mémoire est de présenter des méthodes de résolution numérique

optimales pour les équations intégrale de Volterra en utilisant les polynômes de Lucas, en mettant l'accent particulier sur la méthode de collocation.

Ce mémoire on va traiter les équations intégrales linéaires de Volterra, on va chercher une solution approché par le polynôme de Lucas est partagé en trois chapitres :

Le premier chapitre pose les bases nécessaires à la compréhension des problèmes traités. Il introduit les définitions essentielles et les outils mathématiques fondamentaux qui seront utilisés tout au long de l'étude.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons des définition précises des équations intégrale linéaires et les classifions, dans le but de familiariser le concept d'équations intégrale. On trouve aussi une étude sur l'existence et l'unicité est les méthodes analytique pour résoudre les équations intégrale linéaire de type Volterra.

Le Troisième chapitre est consacré à l'étude d'une solution numérique de l'équation intégrale linéaire de Volterra en utilisant la méthode de collocation avec le polynôme de Lucas en montrant l'efficacité de cette méthode à travers les exemples pour comparer entre la solution exacte et la solution approchée sera présente par des figure et des tableaux à la fin de chaque exemple suivi par une conclusion générale.

L'objectif de ce chapitre est de définir quelques notions fondamentales et théorèmes que nous utiliserons dans les autres chapitres.

1.1 Notion d'analyse fonctionnelle

Tous ces espaces constituent un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle en permettant la résolution d'équations par approximation avec des solutions non nécessairement dérivable même continues .

1.1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.1 Soit E un espace vectoriel sur un corps $K = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} on appelle Une norme sur est une fonction E est une fonction $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui satisfait les propriétés suivantes : Pour tout x, y de V et λ de K

1. Positivité : $\| x \| \geq 0$ et $\| x \| = 0$ si et seulement si $x = 0$

2. Homogénéité absolue : $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$

3. Inégalité triangulaire : $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$

Un espace vectoriel V muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé.

1.1.2 Espace de Banach

Définition 1.2 (*suite de Cauchy*) Soit V un espace vectoriel normé on dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq n_0, \|x_p - x_q\| < \varepsilon$$

Définition 1.3 Un espace vectoriel normé V est dit complet si tout les suites de Cauchy convergent dans V

Remarque 1.1 Un espace de Banach est un espace vectoriel normé et complet.

Exemple 1.1 Tout espace vectoriel normé de dimension finie (en particulier \mathbb{R}^n) est un espace de Banach.

1.1.3 Espaces de Hilbert

Définition 1.4 Soit H un espace vectoriel normé. On appelle produit scalaire sur H toute fonction qui satisfait les propriétés suivantes :

Pour tout $x; y; z$ de H , et α, β de \mathbb{k}

1. $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$
3. $\langle x, x \rangle \geq 0$ et $\langle x, x \rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$

Définition 1.5 Un espace de Hilbert est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Remarque 1.2 À partir du produit scalaire on peut définir une norme induite par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

qui est appelée norme euclidienne ou norme de Hilbert.

Exemple 1.2 $L^2([a, b])$ l'espace des fonctions de carrées intégrables est un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire :

$$\forall f, g \in L^2([a, b]) : \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

1.2 Notions sur les opérateurs

1.2.1 Opérateurs linéaires

Définition 1.6 Soit E et F deux espace vectoriel, une application $A : E \rightarrow F$ est dit linéaire s'il vérifie les conditions suivantes

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in E, \text{ on a } A(\varphi_1 + \varphi_2) = A(\varphi_1) + A(\varphi_2).$$

$$\forall \varphi \in E, \lambda \in K = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}), \text{ on a } A(\lambda\varphi) = \lambda A(\varphi).$$

Continuité des opérateurs linéaires

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F est dit continu au point x_0 de G si, on a la propriété suivante

Pour toute suite x_n de G converge vers x_0 , la suite $A(x_n)$ converge vers $A(x_0)$ c'est à dire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(x_n) = A(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = A(x_0).$$

L'opérateur linéaire A est dit continu sur G , s'il est continu en chaque point de l'ensemble G .

Soient E et F deux espaces normés, un opérateur linéaire A défini sur un sous ensemble $G \subset E$ dans F , est dit continu partout sur G s'il est continu en point x_0 de G .

1.2.2 Opérateurs bornés

Définition 1.7 Soient E et F deux espaces normés. Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est dit borné s'il existe une constante $M \geq 0$, telle que :

$$\|Ax\| \leq M\|x\|_E, \quad \forall x \in E.$$

Définition 1.8 Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On définit une norme sur l'espace vectoriel de tous les opérateurs linéaires bornés de E dans F par :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=0} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|=1} \|A(x)\|_F = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\|_F$$

L'espace des opérateurs linéaires bornés de E dans F muni de cette norme est noté par $L(E, F)$, et $L(E)$ si $E = F$

Proposition 1.1 La norme $\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|A(x)\|_F$ sur la boule unité est toujours finie pour tout opérateur linéaire continu.

Un opérateur linéaire A est continu, si et seulement si, il est borné.

Théorème 1.1 Soient E et F deux espaces vectoriels normés et $A : E \rightarrow F$ un opérateur linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est borné.
2. A est continu sur E .
3. A est continu à l'origine.

Théorème 1.2 Tout espace vectoriel normé de dimension finie est complet et par conséquent tout sous espace de dimension finie d'un espace vectoriel normé est fermé.

1.2.3 Opérateurs compact

Définition 1.9 Soit A un opérateur linéaire d'un espace normé E dans un espace normé F , on dit que A est un opérateur compact s'il envoie tout ensemble borné G dans E à un ensemble relativement compact $A(G)$ dans F . Autrement dit, la fermeture $\overline{A(G)}$ est compacte.

Ensembles relativement compacts

Un ensemble $G \subset E$ est relativement compact si pour toute suite $\{u_n\}$ de G , il existe une sous suite $\{u_{n(k)}\}$ qui converge dans F .

Théorème 1.3 (*critère de compacité*)

Un opérateur linéaire $A : E \rightarrow F$ est compact si et seulement si pour toute suite bornée φ_n de E , la suite $A\varphi_n$ contient une sous suite convergente dans F .

Proof. Il suffit d'appliquer les définitions appropriés d'un ensemble borné et un ensemble relativement compact. \square

Théorème 1.4 *Une combinaison linéaire $A = \alpha A_1 + \beta A_2$ des opérateurs compacts est un opérateur compact.*

Théorème 1.5 *Le produit AB de deux opérateurs bornés A et B est compact si l'un des opérateurs A ou B est compact.*

Proof. Soit $\{\varphi_n\}$ un suite bornée de E , alors si B est un opérateur borné la suite $B\varphi_n(x)$ est aussi bornée, et de la compacité é de l'opérateur A il existe une sous suite de $A(B\varphi_n(x))$ qui converge, ce qui implique que AB est compact.

D'autres part si B est compact, on peut extraire de la suite $B\varphi_n(x)$ une sous suite convergente $B\varphi_{n(k)}(x)$, et de la continuité de l'opérateur A car il est borné la suite $A(B\varphi_{n(k)}(x))$ converge, ce qui implique que AB est compact. \square

Théorème 1.6 *Soit E un espace normé et F un espace de Banach, et soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs compacts de E dans F , convergente en norme vers l'opérateur linéaire A de E dans F*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Alors A est compact.

Corollaire 1.1 *La boule unité $B(0,1)$ dans un espace de dimension infinie n'est pas compact.*

Théorème 1.7 *Un opérateur compact est un opérateur borné. La réciproque est fausse.*

Théorème 1.8 *L'opérateur intégral A de $C(G)$ dans $C(G)$ à noyau continu est un opérateur compact.*

1.2.4 Équations aux Opérateurs compacts

Équations de second espèce

Soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ définit l'équation de second espèce donnée par

$$\varphi - A\varphi = f ; \quad \varphi, f \in X$$

où f est une fonction donnée et φ la fonction inconnue

Théorème 1.9 *Le noyau de l'opérateur T défini par*

$$\ker T = N(T) = \{\varphi \in X ; T\varphi = (I - A)\varphi = 0\},$$

est un sous espace fermé et de dimension finie

Théorème 1.10 *La suite d'ensemble des noyaux*

$$N(T), N(T^2), \dots, N(T^n), \dots$$

est une suite croissante stationnaire. Autrement dit, elle ne contient qu'un nombre fini d'ensembles distincts, c'est à dire il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{0\} \subset N(T), N(T^2) \subset \dots \subset N(T^p) = N(T^{p+1}) = \dots$$

Le nombre p est appelé le nombre de Riez de l'opérateur compact A pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$

Théorème 1.11 *L'image de l'opérateur T défini par ,*

$$ImT = T(X) = R(T) = \{\psi\} = \{T\varphi\}; \text{ telle que } \varphi \in X$$

est un sous espace fermé

Le nombre de Riez p pour l'ensemble des noyaux $\{N(T^n)\}$ et le nombre de Riez q pour l'ensemble des images $\{R(T^n)\}$ sont égaux. Autrement dit

$$p = q$$

Théorème 1.12 *Les sous espaces $N(T^n)$ et $R(T^n)$ sont supplémentaires. Autrement dit*

$$X = \ker T^n \oplus ImT^n \equiv N(T^n) \oplus R(T^n)$$

où $r = p = q$ est le nombre de Riesz

Lemme 1.1 *L'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si, T^r est injectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Lemme 1.2 *L'opérateur $T = I - A$ est surjectif si et seulement si T^r est surjectif pour tout $r \in \mathbb{N}$*

Théorème 1.13 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors l'opérateur $T = I - A$ est injectif si et seulement si il est surjectif, de plus l'opérateur admet une inverse $T^{-1} = (I - A)^{-1}$ borné*

Théorème 1.14 *soit A un opérateur compact d'un espace normé X dans lui même alors, pour que l'équation non homogène*

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = f$$

admette une solution unique $\varphi \in X$, pour tout $f \in X$, il faut et il suffit que l'équation homogène

$$T\varphi = \varphi - A\varphi = 0$$

admette la solution triviale $\varphi = 0$.

1.3 Notions d'analyse numérique

1.3.1 Méthodes spectrales

L'objectif de cette section est de présenter des méthodes numériques basées sur une approximation spectrale pour les équations intégrale

Méthode de collocation

Le principe de la méthode de collocation appliqué la résolution numérique d'équation intégrales . L'idée est de choisir un espace de dimension finie de solutions approximative (généralement des polynômes jusqu'à un certain degré) et un certain nombre de points dans le domaine (appelés points de collocation), et de sélectionner la solution qui satisfait l'équation donnée aux points de collocation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (1.3.1)$$

L'équation (1.3.1) peut être mise sous la forme d'une équation fonctionnelle linéaire.

$$\varphi(x) - A\varphi(x) = f(x) \quad (1.3.2)$$

Pour la solution de l'équation (1.3.1) dans l'espace fonctionnel complet $C([a, b])$, ou $L^2([a, b])$ est généralement pris.

On choisit une suite de sous-espaces de dimension finie V_n ($\dim V_n = n$), $n \geq 1$ et soit $\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\}$ une base de V_n .

On cherche la fonction approximative $\varphi_n(x) \in V_n$ de la fonction $\varphi(x)$ donnée par.

$$\varphi_n(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(x), \quad x \in [a, b] \quad (1.3.3)$$

Pour déterminer les coefficients (α_i) , on substituant, cette fonction dans l'équation (1.3.3)

et on exigeant que l'équation soit exacte dans le sens ou le résidu $r_n(x)$ est nul sur un système de nœuds $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$; (i.e, aux points de collocation)

avec

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \varphi(x) - A\varphi(x) - f(x) \\ r_n(x) &= \varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt - f(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(x) - \alpha_i \int_a^x k(x, t)\psi_i(t)dt - f(x) \\ &= \sum_{i=1}^n [\psi_i(x) - \int_a^x k(x, t)\psi_i(t)dt] \alpha_i - f(x) \end{aligned}$$

ce qui conduit à la résolution du système linéaire

$$\sum_{i=1}^n [\psi_i(x_j) - \int_a^{x_j} k(x_j, t)\psi_i(t)dt] \alpha_i = f(x_j) \quad (1.3.4)$$

qui s'écrit sous la forme $WA = F$, où

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^n [\psi_i(x_j) - \int_a^{x_j} k(x_j, t)\psi_i(t)dt] \alpha_i & j = 1, \dots, n \\ A &= \alpha_i & , i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$F(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n$$

ce système admet une solution unique si $\det(W) \neq 0$, ce qui dépend d'ailleurs du choix des points de collocation.

Méthode de Galerkin :

Soit V un espace de Hilbert on se donne une suite de sous espace $V_n \subset V$ de dimension finie. Soit $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ une base orthonormale de V_n on cherche une fonction $\varphi(x) \in V_n$ proche de la solution exacte du problème original (1.3.3).

pour le problème (1.3.3) L'objectif est de minimiser la disparité entre la solution recherchée est la solution exacte, donnée par :

$$r_n(x) = \sum_{i=0}^n \alpha_i (I - A)\psi_i(x) - f(x) \quad (1.3.5)$$

d'où on impose la condition d'orthogonalité suivante

$$\langle r_n, \psi_j \rangle = \left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i (I - A)\psi_i(x) - f(x); \psi_j(x) \right\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.3.6)$$

ce qui implique

$$\left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i (I - A)\psi_i(x), \psi_j(x) \right\rangle - \langle f(x), \psi_j(x) \rangle = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n \quad (1.3.7)$$

ou

$$\sum_{i=0}^n [\langle \psi_i(x), \psi_j(x) \rangle - \langle A\psi_i(x), \psi_j(x) \rangle] \alpha_i = \langle f(x), \psi_j(x) \rangle, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.3.8)$$

Ainsi, on obtient le système linéaire :

$$\sum_{i=0}^n \left[\int_a^b [\psi_i(x) - A\psi_i(x)] \psi_j(x) dx \right] \alpha_i = \int_a^b f(x) \psi_j(x), \quad j = 1, \dots, n \quad (1.3.9)$$

de la forme $WA = F$

où

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b [\psi_i(x) - A\psi_i(x)] \psi_j(x) dx \right], \quad j = 1, \dots, n \\ A &= \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n \\ F &= \int_a^b f(x) \psi_j(x), \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Évidemment, ce système admet une solution unique si le $\det(W) \neq 0$.

Équations intégrales et leurs classification

Dans ce chapitre, on donne la définition d'équation intégrale linéaire et leur classification, ainsi que résultat d'existence pour l'équation intégrale linéaire

2.1 Classification des équations intégrales

2.1.1 Équations intégrales linéaires

Définition 2.1 On appelle *équation intégrale linéaire* une équation où la fonction inconnue figure sous le signe \int , telle que :

$$\psi(x)\varphi(x) - \lambda \int_{\Omega} k(x,t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.1.1)$$

où f et k et ψ sont des fonctions données, λ est un paramètre numérique et φ la fonction inconnue, Ω est une ensemble fermé, borné et mesurable

1. Si $f(x) \neq 0$ l'équation est dite équation intégrale non homogène.
2. si $f(x) = 0$ l'équation est dite équation intégrale homogène .

2.1.2 Équations intégrales linéaires de Fredholm

Définition 2.2 On appelle les *équations intégrales linéaires de Fredholm*, sont données par la forme :

$$\psi(x)\varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \quad a < x, t < b \quad (2.1.2)$$

où k et f sont des fonctions connues et λ un paramètre non nul, et $\varphi(x)$ la fonction inconnue, les bornes d'intégration sont constantes. C'est la caractéristique principale d'une équation de Fredholm.

Définition 2.3 1. Si $\psi(x) = 0$ l'équation (2.1.1) s'écrit sous la forme :

$$\lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt = f(x).$$

2. Si $\psi(x) = 1$ l'équation (2.1.1) s'écrit sous la forme :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t) \varphi(t) dt$$

équation intégrale de Fredholm du second espèce

2.1.3 Équations intégrales linéaires de Volterra

Les équations de Volterra sont des cas particuliers d'équations intégrales de Fredholm il suffit de prendre le noyau k est tel que $k(x, t) = 0$ pour $x < t$

Définition 2.4 Les équations intégrales linéaires de Volterra, sont données par la forme :

$$\psi(x) \varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x), \quad a < x, t < b \quad (2.1.3)$$

où $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et un paramètre non nul, et $\varphi(x)$ la fonction inconnue

1. Si $\psi(x) = 0$ l'équation (2.1.2) s'écrit sous la forme :

$$\lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

appelée équation intégrale de Volterra du premier espèce.

2. si $\psi(x) = 1$ l'équation (2.1.2) s'écrit sous la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x k(x, t) \varphi(t) dt = f(x)$$

appelée équation intégrale de Volterra du second espèce.

2.1.4 Équation intégrale mixtes (de Volterra-Fredholm)

Une équation intégrale de Volterra -Fredholm est une combinaison des intégrales de Volterra

et Fredholm disjoints, apparait dans une équation intégrale

Définition 2.5 *On appelle équation intégrale de Volterra-Fredholm une équation de la forme :*

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^b k_1(x, t)\varphi(t)dt + \lambda_2 \int_a^x k_2(x, t)\varphi(t)dt, \quad x \in [a, b] \quad (2.1.4)$$

Où les fonctions k_1 , k_2 et $f(x)$ sont connues et $\varphi(x)$ la fonction inconnue, et λ_1 et λ_2 sont des paramètres non nuls

2.2 Existence et unicité de la solution des équation intégrale linéaire de Volterra

Nous pouvons démontrer l'existence et l'unicité en utilisant plusieurs méthodes telles que la contraction de Banach et la méthode de Gronwall.

2.2.1 Introduction à la méthode de théorie du point fixe :

Définition 2.6 [13] *Soient H est un espace de Hilbert et A un opérateur borné, l'opérateur A est dit opérateur contractant s'il existe une constante k telle que : $0 < k < 1$ et*

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\|, \quad \text{pour tout } \varphi_1, \varphi_2 \in H$$

Théorème 2.1 [13] *Soit A un opérateur contractant dans un espace de Hilbert H , alors l'équation*

$$A\varphi = \varphi$$

admet une solution unique φ dans H , cette solution est le point fixe de cet opérateur.

Corollaire 2.1 *Supposons que l'opérateur A admet un point fixe dans l'espace de Hilbert H alors l'opérateur A^n admet le même point fixe φ .*

Corollaire 2.2 Soit A un opérateur dans l'espace H tel que l'opérateur est un opérateur contractant, alors A admet un point fixe unique φ dans l'espace H .

Théorème 2.2 [13] Soit H est un espace de Hilbert et A un opérateur borné dans H avec la propriété suivant :

$$\|A\varphi_1 - A\varphi_2\| \leq k \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$

alors l'équation suivante

$$\varphi - \lambda A\varphi = f$$

admet une solution unique pour toute $f \in H$ à condition que est $|\lambda|$ petit.

Théorème 2.3 Soit $k(x, t)$ est une fonction continue pour $x, y \in [a, b]$ alors l'équation de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad a \leq x \leq b \quad (2.1.5)$$

admet une solution unique φ pour tout f dans $L^2[a, b]$ et λ dans \mathbb{R} .

2.2.2 La méthode de Gronwall

Théorème 2.4 [3] Soit l'équation de Volterra de première espèce

$$\int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt = f(x)$$

telle que f, k des fonctions continue ,dérivable sur $[a, b]$; si

$$k(x, x) \neq 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b \int_a^b |k(x, y)|^2 dx dy < +\infty$$

Alors ,il existe une solution unique et continue de l'équation de Volterra de première espèce

Lemme 2.1 (Gronwall)

Soit $f, g : [0, \alpha] \rightarrow [0, \infty]$ deux fonctions continues et soit c un nombre positif

$$f(t) \leq c + \int_a^t g(s)f(s)ds \quad , 0 \leq t \leq \alpha$$

Alors

$$f(t) \leq c + \exp \int_a^t g(s)ds \quad , 0 \leq t \leq \alpha$$

Théorème 2.5 Soit $0 < \alpha \leq \infty$, on suppose que $f : [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $k(x, t)$ et un matrice $n \times n$ des fonctions telle que $0 \leq t \leq x \leq \alpha$, si $0 < t < \alpha$, alors il existe une unique solution $\varphi(x)$ pour l'équation intégrale de Volterra (2.1.5)

Proof. Soit l'équation de Volterra (2.1.5) On définit la suite $(\psi_n(x))$ sur l'intervalle $[0, T]$ par la méthode d'approximation successive, on obtient :

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= f(x) \\ \psi_1(x) &= \int_a^x k(x, t)\psi_0(t)dt \\ &\vdots \\ \psi_{i+1}(x) &= \int_a^x k(x, t)\psi_i(t)dt \\ K &= \max_{0 \leq t \leq T} k(x, t) \\ F &= \max_{0 \leq t \leq T} \left| f \right| \left| \psi_1(x) \right| \leq \int_a^x |k(x, t)\psi_0(t)| dt \leq K F x(x) \\ |\psi_2(x)| &\leq \int_a^x |k(x, t)\psi_1(t)| dt \leq \frac{1}{2} K^2 F x^2 \\ &\vdots \\ |\psi_n(x)| &\leq \int_a^x |k(x, t)\psi_{n-1}(t)| dt \leq \frac{F (K x)^n}{n!} \end{aligned}$$

par récurrence la relation précédente est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{F (K x)^i}{i!} = F e^{Kx}$$

est une série de Taylor qui converge uniformément et absolument sur $[0; T]$, Alors la suite $\varphi_n(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x)$ converge vers $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(x)$

$$\begin{aligned} \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt &= \int_a^x k(x,t)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i(t)\right)dt \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_a^x k(x,t)\psi_i(t)dt\right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \psi_{i+1}(t) \\ &= \varphi(x) - f(x) \end{aligned}$$

Donc il existe une solution $\varphi(x)$ telle que

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \quad (2.1.6)$$

Nous pouvons montrer l'unicité, on suppose qu'il existe deux solutions $X(x)$ et $Y(x)$ de l'équation (1.1.6), donc

$$X(x) - Y(x) = \int_a^x k(x,t)(X(x) - Y(x))$$

On obtient donc la suite suivante :

$$|X(x) - Y(x)| \leq k \int_a^x |X(x) - Y(x)| dt$$

cette relation est de la forme suivante

$$|Z(x)| \leq k \int_a^x |Z(t)| dt$$

telle que $Z(x) = X(x) - Y(x)$, on a $\forall c > 0$ la relation

$$|Z(x)| \leq c + k \int_a^x |Z(t)| dt$$

la relation précédente est vraie pour $c = 0$ telle c est une constante, d'après le lemme de Gronwall

$$|Z(x)| \leq ce^{Kx} = 0$$

puisque $c = 0$, donc

$$Z(x) = X(x) - Y(x) = 0$$

$$X(x) = Y(x)$$

Alors la solution de l'équation (2.1.5) est unique. \square

2.3 Méthodes de résolution analytiques des équations intégrale de Volterra

nous allons présenter quelques méthodes Analytiques pour obtenir la solution de l'équation intégrale de Volterra.

Considérons l'équation intégrale de Volterra :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad 0 \leq x \leq \quad (2.1)$$

où $k(x, t)$ et $f(x)$ sont des fonctions connues et un paramètre non nul, et $\varphi(x)$ la fonction inconnu ; $x \in [0, a]$ il existe plusieurs techniques pour résoudre les équations intégrale de Volterra, et la méthode de Picard permet de résoudre facilement celles de la deuxième espèce.

2.3.1 Méthode des approximations successives

Soit une fonction $\varphi_0(x)$ continue sur $[0, a]$ (Notons qu'un bon choix de l'approximation initiale)

Substituons $\varphi_0(x)$ dans [2.1](#)

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi_0(t)dt \\ \varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)\varphi_1(t)dt \end{aligned}$$

En continuant le processus on obtient une suite :

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

où

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi_{n-1}(t)dt$$

les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sont définies et continues sur $[0, a]$ d'après la théorème du point fixe [7]. $\varphi_n(x)$ converge vers la solution $\varphi(x)$ de l'équation intégrale.

Exemples 2.1 Soit l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \varphi(t)dt$$

En posant $\varphi_0(x) = 0$ alors

$$\varphi_1(x) = 1 + \int_0^x (t-x)\varphi_0(t)dt$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \int_0^x (t-x)\varphi_1(t)dt$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{6!}x^6$$

Généralment, nous obtenons pour (n) approximation. (2.2)

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!}, n \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right) \\ &= \cosh x \end{aligned}$$

2.3.2 Méthode de développement en séries

la solution peut écrite sous la forme

$$\varphi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{2.3}$$

où a les coefficients et x sont des constantes qui doivent être déterminés. Remplacent dans l'équation [2.1] On trouve

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt \\ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots &= f(x) + \lambda \int_0^x k(x,t) a_0 dt + \lambda \int_0^x k(x,t) a_1 x dt + \lambda \int_0^x k(x,t) a_2 x^2 dt \dots \end{aligned}$$

Après le calcul des intégrales [2.1](#), En comparant les coefficients des deux membres de l'équation [2.1](#) on trouve les a_n et par conséquent en remplaçant dans la solution

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Exemple 2.1 Soit l'équation intégrale de Volterra suivante :

$$\varphi(x) = 1 + 2 \sin(x) - \int_a^x \varphi(t) dt$$

Nous supposons que la solution sous la forme de série $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ remplaçant donc la série dans l'équation et nous avons la série de Taylor de $\sin(x)$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n dt \\ &= 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

En comparant les coefficients de la même puissance de x donnent l'ensemble de valeurs suivant :

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 2 - a_0$$

$$a_2 = -\frac{a_1}{2}$$

$$a_3 = -\frac{2}{3!} - \frac{a_2}{3!}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4!}$$

Ainsi, les valeurs des coefficients peuvent être calculées pour être

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{2!}, \quad a_3 = \frac{1}{3!} \quad \text{et} \quad a_4 = \frac{1}{4!}$$

où ce résultat donne :

$$a_k = \frac{1}{k!}$$

donc

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$$

Par conséquent , la solution est donnée par

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\right) \\ &= \cos(x) + \sin(x)\end{aligned}$$

est la solution de l'équation.

2.3.3 La méthode de décomposition d'Adomian

La méthode d'Adomian s'applique dans les équations intégrales linéaire et non linéaire et même les équation intégro-différentielle.Elle a été introduite par George Adomian et ressemble à la méthode précédente.

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$$

avec $\varphi_0(x)$ comme le terme en dehors du signe intégral.

donc

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

Substituer l'équation () dans l'équation () rendements

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \right\} dt$$

Les composantes $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$..de la fonction inconnue $\varphi(x)$

peut être complètement déterminée d'une manière de récurrence si nous fixons

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= f(x) \\ \varphi_1(x) &= \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_0(x) \\ \varphi_2(x) &= \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_1(x) \\ &\vdots \\ \varphi_n(x) &= \lambda \int_0^x k(x, t) \varphi_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Cet ensemble d'équations 2.4 peut être écrit comme système de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= f(x) \\ \varphi_{n+1}(x) &= \lambda \int_0^x k(x,t)\varphi_n(x)\end{aligned}$$

on va illustrer cette technique par l'exemple suivant

Exemple 2.2 Soit l'équation intégrale de Volterra suivante $\varphi(x) = x + \int_a^x (t-x)\varphi(t)dt$

Considérons la solution sous la forme de la série $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x)$

Ensuite Substituant cette série dans l'équation donnée, nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) = x + \int_a^x (t-x) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(t)dt$$

On choisit $\varphi_0(x) = 0$, ceci donne $\varphi_1(x) = x$ et

$$\begin{aligned}\varphi_2(x) &= x + \int_a^x (t-x)\varphi_1(t)dt \\ \varphi_2(x) &= x + \int_a^x (t-x)t dt \\ &= x - \left[\frac{xt^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^x = x - \frac{x^3}{3!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= x + \int_a^x (t-x)\varphi(t)dt \\ \varphi(x) &= x + \int_a^x (t-x)\left(t - \frac{t^3}{3!}\right)dt \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\end{aligned}$$

En continuant de cette façon, nous obtenons une série $\varphi(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sin(x)$

2.4 Définition de polynôme de Lucas et ses propriétés :

Définition 2.7 Le polynôme de Lucas est un type de polynôme à coefficients entiers défini récursivement,

il est noté $L_n(x)$ est défini comme suite :

1. **Les polynôme de Lucas initiaux** : sont définis comme ($L_0(x) = 2$) et ($L_1(x) = x$)

2. Le polynôme de Lucas ($L_n(x)$) est défini par la relation de récurrence ($L_n(x) = xL_{n-1}(x) - L_{n-2}(x)$).

ou par série :

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}$$

Les premier polynômes de Lucas sont :

| | |
|-----|-------------------|
| n | $L_n(t)$ |
| 0 | 2 |
| 1 | t |
| 2 | $t^2 + 2$ |
| 3 | $t^3 + 3t$ |
| 4 | $t^4 + 4t^2 + 2$ |
| 5 | $t^5 + 3t^3 + 5t$ |

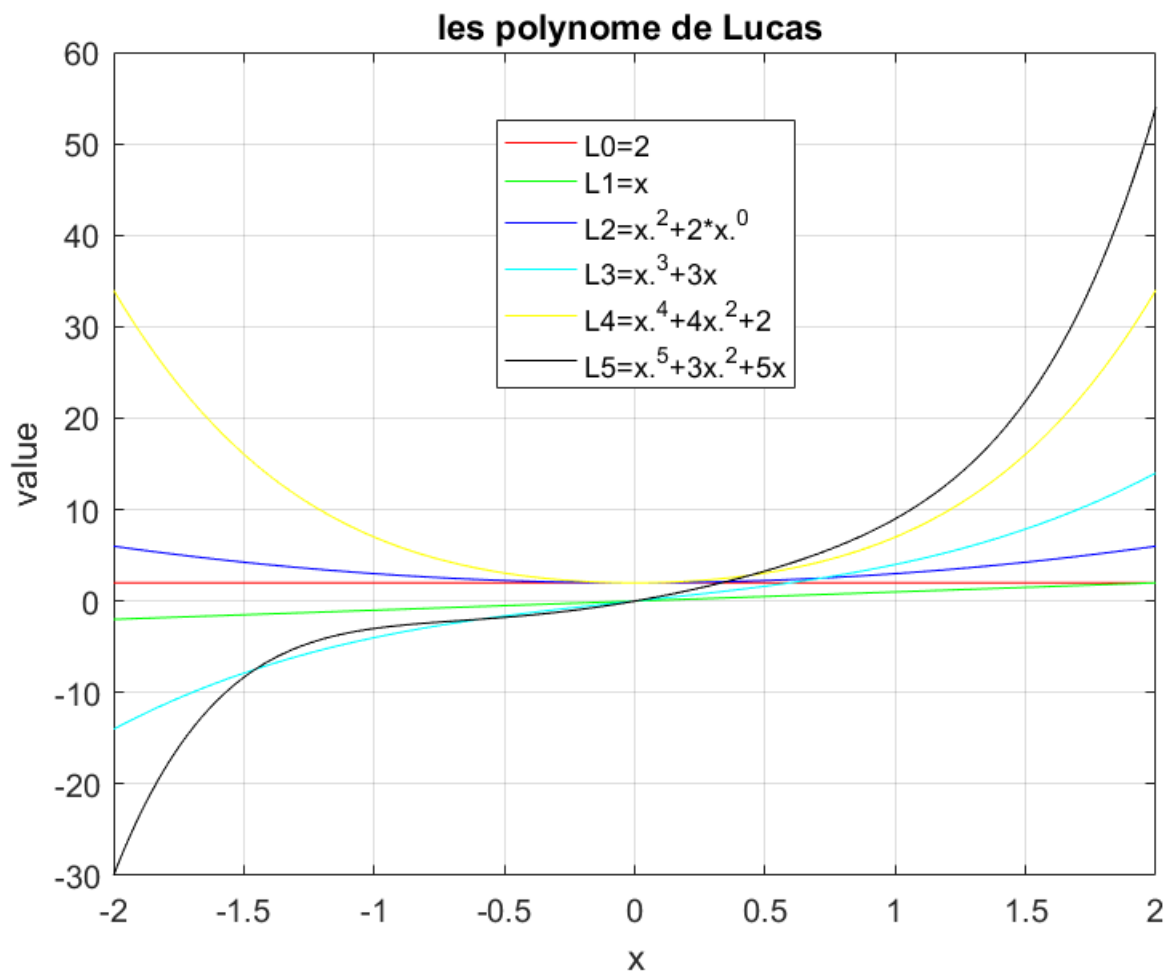


FIGURE 2.1 – Les Polynômes de Lucas

Proposition 2.1 *Les propriétés des polynôme de Lucas comprennent :*

1. **Coefficients entiers** : Tous les coefficients des polynôme de Lucas sont des nombres entiers. Les racines des polynôme de Lucas sont souvent des entiers.
2. **Relation de récurrence** : chaque terme de la séquence de Lucas est la somme de deux termes précédents ,ce qui lui confère une structure récurrente caractéristique
3. **Formule explicite** : il existe une formule explicite pour calculer L_n n-ième terme de séquence de Lucas sans avoir besoin de calcul les termes précédents. cette formule implique les racines d'une équation quadratique.
4. **Relation avec les nombres de Fibonacci** : le polynôme de Lucas est étroitement lié aux nombre de Fibonacci. en fait, si vous décalez la séquence de Fibonacci d'un terme, vous obtenez la séquence de Lucas

5. **Présence dans divers domaines mathématiques** : le polynôme de Lucas apparaît dans divers domaines des mathématiques, notamment en théorie des nombres, en combinatoire, en algèbre linéaire, et même en cryptographie.
6. **Applications en cryptographie** : les propriétés du sont utilisé es dans certains algorithmes cryptographie, tels que le cryptosystème de Lucas en raison de sa structure et de ses propriétés uniques.

En résumé, le polynôme de Lucas est une séquence de nombres fascinante avec des propriétés riches et variées, qui trouve des application dans divers domaines des mathématiques et de l'informatique, notamment en cryptographie

2.4.1 Approximation d'une fonction par le polynôme de Lucas

Exemple 2.3 Soit la fonction suivante : $f(x) = \sin(x)$.

On peut approché la fonction f par les polynômes de Lucas pour $N = 2$

ona :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{i=0}^2 \alpha_i L_i(x) = \alpha_0 L_0(x) + \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x) \\
 \sin(x) &= \alpha_0(2) + \alpha_1(x) + \alpha_2(x^2 + 2) \\
 \text{pour } x &= 0 \Rightarrow 0 = 2\alpha_0 + 2\alpha_2 \\
 \text{pour } x &= 0.1 \Rightarrow \sin(1) = 2\alpha_0 + \alpha_1 + 3\alpha_2 \\
 \text{pour } x &= 0.2 \Rightarrow \sin(2) = 2\alpha_0 + 2\alpha_1 + 6\alpha_2 \\
 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(0.1) \\ \sin(0.2) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0.1 & 2.01 \\ 2 & 0.2 & 2.04 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_{0.1} \\ \alpha_{0.2} \end{pmatrix} \quad \text{alors} \\
 \alpha &= \begin{pmatrix} 0.0499 \\ 1.0033 \\ -0.0499 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

donc

$$\sin(x) = 0.0499(2) + 1.0033(x) - 0.0499(2 + x^2) = -0.0499x^2 + 1.0033x.$$

Résolution numérique des équations intégrale linéaires de Volterra avec les polynômes de Lucas

Dans ce chapitre ,on va résoudre numériquement les équations intégrales linéaire de Volterra de deuxième espèce par la méthode de collocation(il y'a plusieurs méthodes numérique pour résoudre E. I. L. V méthode de Galerkin,.....) ,pour obtenir la solution polynomiale de Lucas des E.I.V et donnés quelques exemple pour Démontrer l'efficacité de la méthode.

3.1 Description des méthode

Considérons les équations intégrale de Volterra

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x,t)\varphi(t)dt \quad (1)$$

telle que $f(x)$ et $k(x,t)$ sont des fonctions continus sur intervalle $a \leq x, t \leq b$; λ est constant ,la fonction $\varphi(x)$ doit être déterminée comme fonction continue .la recherche de la fonction approximative φ_N de la fonction φ est donné par :

$$\varphi(x) \cong \varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(t) \quad (2)$$

$$a \leq t \leq b, n = 0, \dots, N$$

telle que : L_n les polynômes de Lucas, et a_n les coefficient à de

Dans cette étude ,la méthode utilise des points de collocation standard définis dans (5),ou les points sont définis comme suit

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

Nous allons analyser l' équation de Volterra les convertir en forme matricielle en suivant les étapes suivantes :

3.2 Relations matricielles

Dans cette section ,le processus suivant est utilisé dans cette section l'expression définie dans l'équation (2)sous forme de matrice

$$\varphi(x) = \varphi_N(x) = [L_0(x)L_1(x), L_2(x)\dots L_n(x)] \times A = L(x) \times A$$

ou $A = [a_0 a_1 a_2 \dots a_n]^T$

à partir de la définition du polynôme de Lucas , on obtient la matrice :

$$L(x) = X(x)D^T \quad (4)$$

de l'équation des relations matricielles il s'ensuit que

$$\varphi(x) \cong \varphi_N(x) = X(x)D^T A \quad (5)$$

L'étape suivante consiste à introduire la relation matricielle de la fonction du noyau comme :

$$K(x, t) = X(x).K.X^T(t) \quad (6)$$

Pour trouver l'expression de la fonction noyau , nous utilisons la formule de Taylor à deux variables :

Formule de Taylor de deux variable est une généralisation de la formule de Taylor pour une fonction d'une seule variable.

Elle permet d'approximer une fonction $(f(x, y))$ autour d'un point $((a, b))$ en termes de ses dérivées partielles jusqu'à un certain ordre .la formule de Taylor de deux variables est donnée par :

$$f(x, y) \approx f(a, b) + \frac{\delta f}{\delta x}(a, b) \cdot (x-a) + \frac{\delta f}{\delta y}(a, b) \cdot (y-a) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\delta^2 f}{\delta x^2}(a, b) \cdot (x-a)^2 + 2 \frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y}(a, b) \cdot \dots \right)$$

Cette formule peut être étendue pour inclure des termes d'ordre supérieur en dérivant plus de fois la fonction (f) par rapport à (x) et (y) .

et nous trouver l'expression suivante :

$$K = [K_{p,q}]; K_{p,q} = \frac{1}{p!q!} \frac{\delta^{p+q} k(0,0)}{\delta x^p \delta y^q}; \quad p, q = 0, \dots, N$$

de même ,l'utilisation de la relation matricielle pour $\varphi(t)$ est obtenue comme :

$$\varphi(t) = X(t) \times D \times A \tag{7}$$

Remplacer la relation matricielle et (5), (6) et (7) dans(1) l'équation donne

$$X(x) D A = f(x) + \lambda \int_a^x X(x) K X^T(t) X(t) dt D A$$

$$X(x) D A = f(x) + \lambda X(x) K \int_a^x X^T(t) X(t) dt D A \tag{8}$$

L matrice M est obtenue à partir de l'intégrale ci-dessous,

$$M = \int_a^x X^T(t) X(t) dt = \int_a^x \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ t^N \end{bmatrix} [1 \quad t \quad \dots \quad t^N] = \int_a^x [t^{i+j}] dt \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

$$M(x) = \left[\frac{t^{i+j+1}}{i+j+1} \right]; \quad i, j = 0, 1, \dots, N \tag{9}$$

Remplacer(9) par (8) donne

$$X(x) D A = f(x) + \lambda X(x) K M D A \quad (10)$$

enfin, les points de collocation (3) sont appliqués à la relation (10) pour obtenir une équation algébrique de la forme

$$X(x_i) D A = f(x_i) + \lambda X(x_i) K M D A \quad (11)$$

Après application de point de collocation ,l'équation algébrique en (10) se réduit à une équation matricielle fondamentale

$$(X - \lambda \overline{XKM}) D A = F \quad (12)$$

où

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} X(x_0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X(x_1) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & X(x_N) \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & K \end{pmatrix} \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} M(x_0) \\ M(x_1) \\ \vdots \\ M(x_N) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_0^N & \cdots & x_0^N \\ 1 & x_1^N & \cdots & x_1^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N^N & \cdots & x_N^N \end{pmatrix}$$

De plus , la matrice fondamentale (12) est écrite sous une forme compact comme suite :

$$W A = F \quad (13)$$

Ou sous forme de matrice augmentée,comme suit :

$$[W; F] = \begin{bmatrix} W_{00} & W_{01} & W_{0N} & ; & f_0 \\ W_{10} & W_{11} & W_{1N} & ; & f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & ; & \vdots \\ W_{N0} & W_{N1} & W_{NN} & ; & f_N \end{bmatrix}$$

Un système non homogène d'équations linéaires est soluble si et seulement son déterminant n'est pas égal à zéro, donc :

$$|W| \neq 0 \quad \Rightarrow \quad A = W^{-1}F$$

Donne une solution unique A est la matrice de coefficient nécessaire du polynôme de Lucas, donc la solution approximative (2) est obtenu.

3.3 exemple numériques

Dans cette section, on va traité quelques exemple pour résoudre les équations intégrales linéaires de Volterra de deuxième espèce, en utilisant les polynômes de Lucas et la méthode de collocation.

Exemple 3.1 *Considérons l'équation intégrale de Volterra :*

$$y(x) = x + \int_a^x (t-x)y(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

On cherchons un approchée écrit sous la forme :

$$\varphi(x) \cong \varphi_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n L_n(x)$$

ona

$$f(x) = x \quad \text{et} \quad k(x, t) = t - x \quad (\text{des fonction continue dans l'intervalle}[0,1])$$

$\varphi(x) = \sin(x)$ est lq solution exacte

Tout d'abord ,le problème est résolution ($N = 2$), donc pour $x_i = \{0, 1/2, 1\}$.

l'équation fondamentale de la matrice pour ce problème est écrite comme suit :

$$W = (X - \lambda \overline{XKM}) L$$

Alors

$$A = W^{-1} F$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M(x) = \begin{pmatrix} x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} \\ \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} \\ \frac{x^3}{3} & \frac{x^4}{4} & \frac{x^5}{5} \end{pmatrix} \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} M(0) \\ M(\frac{1}{2}) \\ M(1) \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 100 & 000 & 000 \\ 000 & 1\frac{1}{2} & 000 \\ 000 & 000 & 111 \end{pmatrix} \quad \lambda = 1 \quad \overline{K} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[W; F] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & ; & 0 \\ \frac{9}{4} & \frac{25}{48} & \frac{48}{192} & ; & \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{7}{6} & \frac{49}{12} & ; & 1 \end{bmatrix}.$$

La résolution du système d'équations pour les trois inconnues dans la matrice ci-dessus donne A

comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{72}{307} \\ \frac{330}{307} \\ \frac{307}{307} \\ -\frac{72}{307} \end{bmatrix}$$

par conséquent, on a :

$$y_2(x) \approx \frac{72}{307}(2) + \frac{330}{307}(t) - \frac{72}{307}(t^2 + 2) \quad (3.1)$$

Ce qui simplifie à :

$$y_2(x) \cong -\frac{72}{307}x^2 + \frac{330}{307}x$$

En appliquant les mêmes étapes utilisées pour ($N = 2$) lorsque ($N = 3$), on obtient :

$$y_3(x) \simeq \sin(x)$$

Ce qui est la solution exacte.

3.4 Exemples Illustratifs

Dans cette section on va traité quelques exemple pour résoudre les équations intégrales de Volterra avec le polynôme de Lucas par la méthode Collocation .

Exemple 3.2 On Considère l'équation s de Volterra de second espèce

$$\varphi(x) = x + \int_0^x (t - x)\varphi(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

la solution exacte donné par :

$$\varphi_{exact}(x) = \sin(x)$$

| x | S_{exact} | err(N = 4) | err(N = 6) | err(N = 8) |
|-----|-------------|------------|------------|------------|
| 0.1 | 9.9833e-02 | 2.6120e-05 | 4.1032e-08 | 9.3067e-11 |
| 0.2 | 1.9867e-01 | 9.3858e-06 | 1.1889e-08 | 9.7398e-11 |
| 0.3 | 2.9552e-01 | 7.7049e-06 | 7.6803e-09 | 4.6349e-11 |
| 0.4 | 3.8942e-01 | 1.0265e-05 | 5.7590e-09 | 1.8342e-11 |
| 0.5 | 4.7943e-01 | 1.3508e-06 | 2.2096e-09 | 2.4165e-11 |
| 0.6 | 5.6464e-01 | 7.4108e-06 | 1.0054e-08 | 7.3433e-11 |
| 0.7 | 6.4422e-01 | 4.8100e-06 | 3.1763e-09 | 1.2282e-10 |
| 0.8 | 7.1736e-01 | 1.1439e-05 | 7.2214e-09 | 2.1175e-10 |
| 0.9 | 7.8333e-01 | 2.6755e-05 | 4.2899e-08 | 2.6910e-10 |
| 1 | 8.4147e-01 | 2.3863e-06 | 3.8895e-09 | 4.1328e-10 |

TABLE 3.1 – L'erreur entre la solutions exacte et approchée pour l'exemple (3.2)

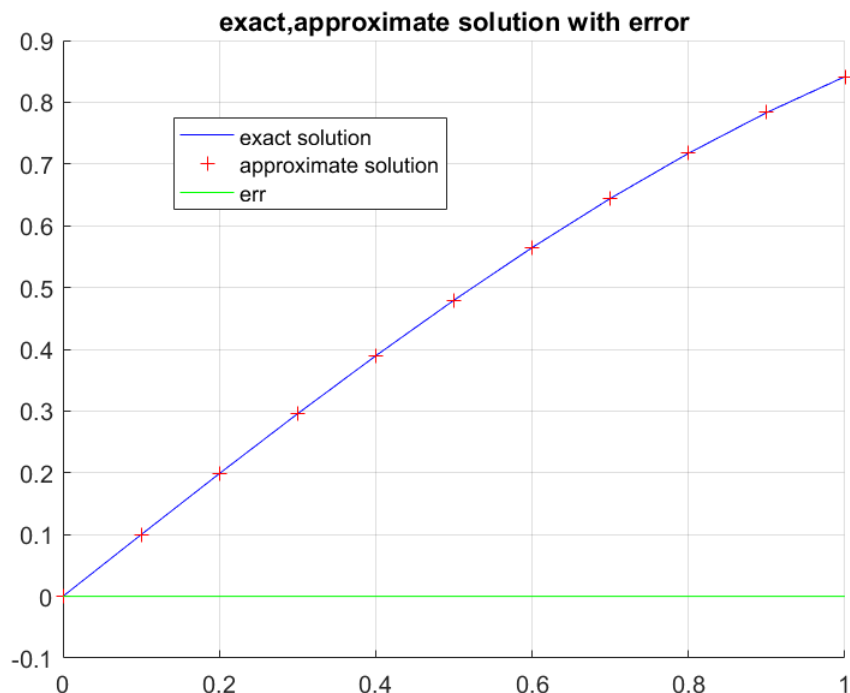


FIGURE 3.1 – graphe des solutions exacte et approchée

Exemple 3.3 On Considère l'équation s de Volterra de second espè ce

$$\varphi(x) = 6x - 3x^2 + \int_0^x \varphi(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

la solution exacte donné par :

$$\varphi_{exact}(x) = 6x$$

| x | S _{exact} | S _{app} | err(N = 2) |
|-----|--------------------|------------------|------------|
| 0.1 | 6.0000e-01 | 6.0000e-01 | 0 |
| 0.2 | 1.2000e+00 | 1.2000e+00 | 0 |
| 0.3 | 1.8000e+00 | 1.8000e+00 | 0 |
| 0.4 | 2.4000e+00 | 2.4000e+00 | 0 |
| 0.5 | 3.0000e+00 | 3.0000e+00 | 0 |
| 0.6 | 3.6000e+00 | 3.6000e+00 | 0 |
| 0.7 | 4.2000e+00 | 4.2000e+00 | 0 |
| 0.8 | 4.8000e+00 | 4.8000e+00 | 0 |
| 0.9 | 5.4000e+00 | 5.4000e+00 | 0 |
| 1 | 6.0000e+00 | 6.0000e+00 | 0 |

TABLE 3.2 – L'erreur entre la solutions exacte et approchée pour l'exemple (3.3)

| x | S_{exact} | $err_{Lu}(N=2)$ | $err_{Lg[13]}(N=8)$ |
|-----|-------------|-----------------|---------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.1 | 0.6 | 0 | 0 |
| 0.2 | 1.2 | 0 | 0 |
| 0.3 | 1.8 | 0 | 1,1102230246e-015 |
| 0.4 | 2.4 | 0 | 0 |
| 0.5 | 3 | 0 | 0 |
| 0.6 | 3.6 | 0 | 0 |
| 0.7 | 4.2 | 0 | 0 |

TABLE 3.3 – Comparaison pour l'exemple (3.3)

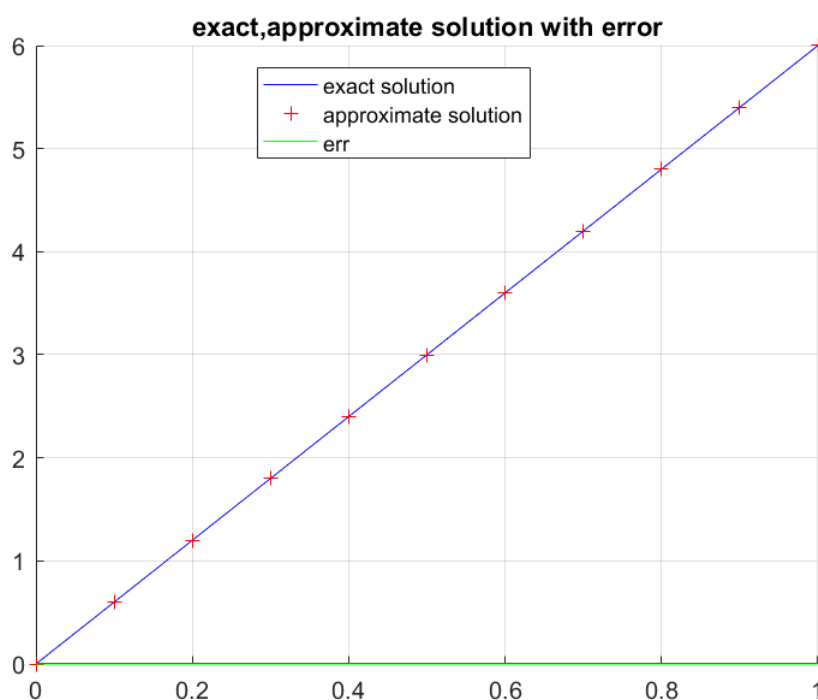


FIGURE 3.2 – graphe des solutions exacte, approchée et err

Exemple 3.4 On Considère l'équation de Volterra de second espèce

$$\varphi(x) = 1 + 2 \sin(x) - \int_0^x \varphi(t) dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

la solution par :

$$\varphi_{exact}(x) = \cos(x) + \sin(x)$$

| x | S_{exact} | S_{app} | err(N=5) | err(N=7) |
|-----|-------------|------------|------------|------------|
| 0.1 | 1.0948e+00 | 1.0948e+00 | 1.5009e-06 | 1.4305e-09 |
| 0.2 | 1.1787e+00 | 1.1787e+00 | 2.0304e-07 | 8.9841e-10 |
| 0.3 | 1.2509e+00 | 1.2509e+00 | 7.1306e-07 | 1.3192e-12 |
| 0.4 | 1.3105e+00 | 1.3105e+00 | 9.9135e-08 | 3.4768e-11 |
| 0.5 | 1.3570e+00 | 1.3570e+00 | 3.0669e-07 | 3.5165e-10 |
| 0.6 | 1.3900e+00 | 1.3900e+00 | 1.3069e-07 | 9.3344e-11 |
| 0.7 | 1.4091e+00 | 1.4091e+00 | 6.9763e-07 | 4.5035e-11 |
| 0.8 | 1.4141e+00 | 1.4141e+00 | 3.3609e-08 | 8.1867e-10 |
| 0.9 | 1.4049e+00 | 1.4049e+00 | 1.7805e-06 | 1.7998e-09 |
| 1 | 1.3818e+00 | 1.3818e+00 | 2.7158e-07 | 3.0160e-10 |

TABLE 3.4 – L'erreur entre la solutions exacte et la solution approchée pour exemple 3.4

| x | err $_{Lu}$ | err $_{Lg}$ 13 |
|-----|-------------|--|
| 0 | 1.2259e-12 | 3 :970354698501488e-05 |
| 0.1 | 1.8171e-08 | 3 :509603230256175e-07 |
| 0.2 | 7.9560e-09 | 8 :650733198667382e-07 |
| 0.3 | 4.7985e-09 | 6 :624327508752970e-08 |
| 0.4 | 1.8459e-09 | 6 :066674289817442e-06 |
| 0.5 | 1.7331e-09 | 2 :192544910559757e-04 |

TABLE 3.5 – Comparaison entre les Solutions de polynôme de Lucas et Legendre 3.4

Exemple 3.5 *On Considère l'équation de Volterra de second espèce*

$$\varphi(x) = 2 \exp(x) - x - 2 + \int_0^x (x - y)\varphi(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1$$

la solution par :

$$\varphi_{exact}(x) = x \exp(x)$$

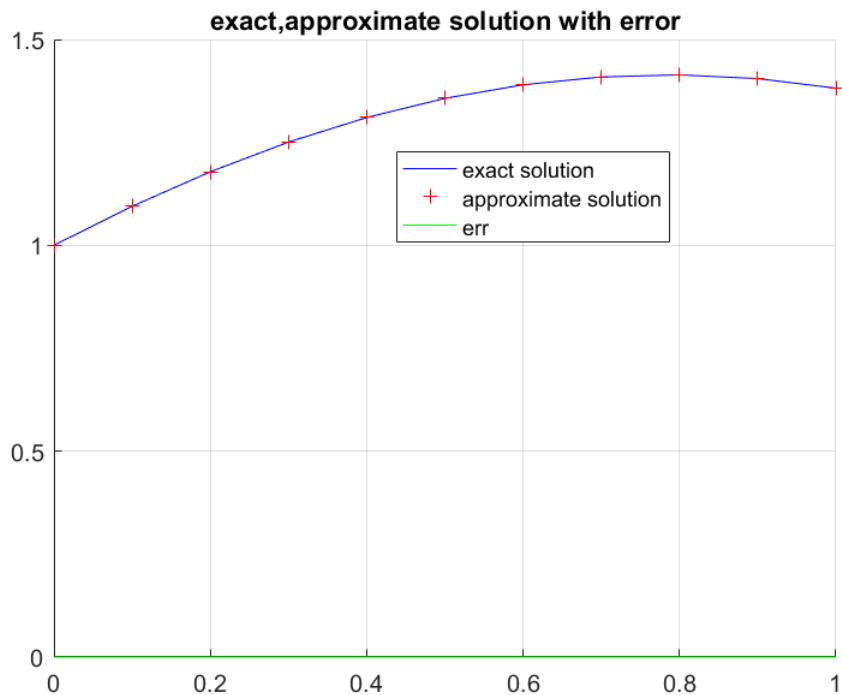


FIGURE 3.3 – graphe des solutions exacte et approchée

| x | S_{exact} | S_{app} | err(N=8) | err(N=10) 13 |
|-----|-------------|------------|------------|--|
| 0.1 | 1.1052e-01 | 1.1052e-01 | 5.5485e-10 | 1.3794e-09 |
| 0.2 | 2.4428e-01 | 2.4428e-01 | 7.3340e-11 | 1.3687e-09 |
| 0.3 | 4.0496e-01 | 4.0496e-01 | 2.3326e-10 | 1.3173e-09 |
| 0.4 | 5.9673e-01 | 5.9673e-01 | 1.1044e-10 | 1.2679e-09 |
| 0.5 | 8.2436e-01 | 8.2436e-01 | 1.8697e-10 | 1.2457e-09 |
| 0.6 | 1.0933e+00 | 1.0933e+00 | 2.9199e-10 | 1.2399e-09 |
| 0.7 | 1.4096e+00 | 1.4096e+00 | 2.4780e-10 | 1.1800e-09 |
| 0.8 | 1.7804e+00 | 1.7804e+00 | 7.1708e-1 | 9.0268e-10 |
| 0.9 | 2.2136e+00 | 2.2136e+00 | 2.4697e-10 | 1.0517e-10 |
| 1 | 2.7183e+00 | 2.7183e+00 | 9.5406e-10 | 1.7211e-09 |

TABLE 3.6 – Comparaison L'erreur entre la solutions exacte et la solution approchée pour exemple 3.5

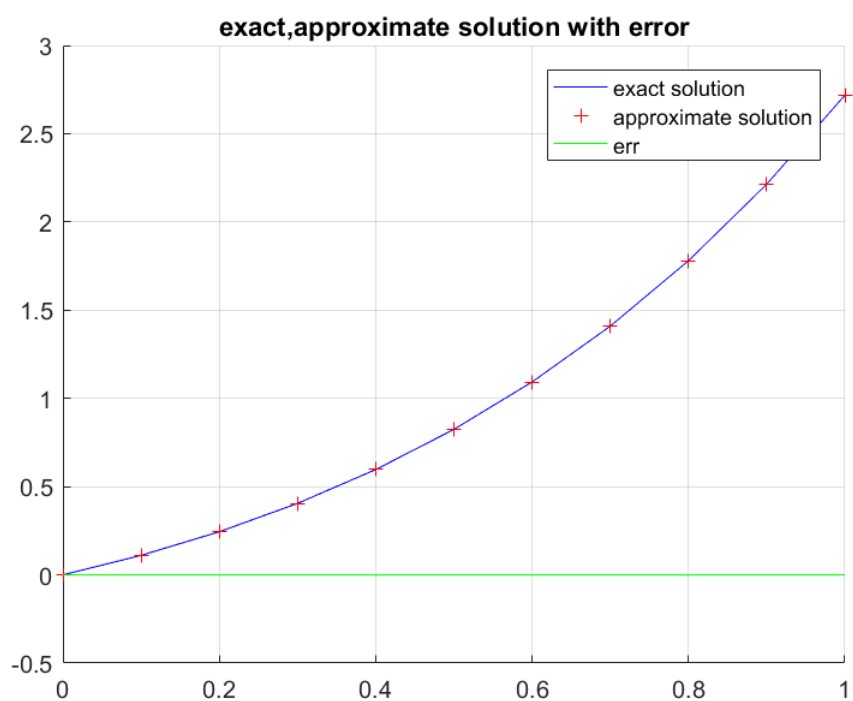


FIGURE 3.4 – graphe des solutions exacte et approchée

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons abordé la méthode de collocation pour résoudre les équations intégrales de Volterra. L'objectif de ce travail est d'obtenir une solution approximative de ces équations en utilisant les polynômes de Lucas. Nous avons présenté quelques exemples où la solution exacte est connue et nous avons obtenu les résultats et les solutions à l'aide du logiciel MATLAB.

Nous avons trouvé que la méthode donne une convergence approximative vers la solution exacte à travers les exemples étudiés. Pour les fonctions exponentielles (e) et les fonctions trigonométrique ($\sin(x)$, $\cos(x)$) nous avons remarqué que plus la valeur de (n) augmente, plus la solution approchée se rapproche de la solution exacte. Dans certains cas la solution exacte est atteinte, comme démontré dans l'exemple où la solution exacte est un polynôme. Cette convergence démontrée dans un tableau.

En conséquence, nous concluons que la méthode de collocation utilisant les polynômes de Lucas est efficace et applicable à l'équation intégrale linéaire de Volterra

Bibliographie

- [1] Daniel Li, Cours d'analyse fonctionnelle avec 200 exercices corrigés, Ellipses Édition Marketing S.A., 2013 32, rue Bargue 75740 Paris cedex 15.
- [2] Deniz Elmaci, Nurkan Baykus,Savasaneril(2022).The Lucas polynomial solution of Linear volterra_fredholm integral Equation .matrix Sience mathimatic, 6(1) :21-25.
- [3] Gourdin Analyse,lemme de Gronwall.
- [4] NADIR .M, Cours d'analyse fonctionnelle ,université de M'sila Alg érie 2004
- [5] Nadir. M, cours sur léquation intégrale ,University de M'sila ,algérie ,2008.
- [6] Peter Alpha Lukonde Pell-Lucas polynomial for Volettra integral equations of the second kind, Afrika Matematika (2023) 34 :52.
- [7] Peter Alpha Lukonde pell-Lucas series solution for Fredholm integral equations of the second kind, in international journal of science and Research(IJSR).june2021.
- [8] RahmouneA, Integral Equations and their Applications, Dalhousie University, Canada,2007.
- [9] Rahmoune.A, équation intégrales linéaires et non linéaires Analyse et tchniquesde résolution,August 16,2018.
- [10] Rahmoune Azedine, sur la résolution Numérique des équations inté grales en utilisant des Fonctions Spéciales ,Thèse de doctorat.

-
- [11] Wazwaz A.M, A First Course in Integral Equations, World Scienti...c, Singapore,(1997).
- [12] Wazwaz A. M, Linear and nonlinear integral equations methods and applications,Saint Xavier University chicago, IL 60655, USA.
- [13] Yucheng Liu, Application of Legendre Polynomials in Solving Volterra Integral Equations of the Second Kind .University of Louisiana Lafayette LA 70504 USA.

Résumé:

Le but de ce mémoire, est la résolution numérique de l'équation intégrale de Volterra du second type, en utilisant le polynôme de Lucas . De plus de nombreux exemples sont présentés pour illustrer la précision et l'efficacité de la méthode proposée

Mots clés:

- Polynôme de Lucas
- Equation intégrale de Volterra
- la méthodes de Collocation.

Abstract:

The goal of this memory is consecrated to the numerical method to find approximate solutions to the volterra integral equation of the second kind using the Lucas polynomial , many examples are presented to illustrate the accuracy and efficiency of the method

keywords:

- Lucas polynomial, Volterra integral equation , Collocation method.
- Volterra integral equation
- Collocation method

الملخص

الهدف من هذه المذكرة هو ايجاد الحلول التقريبية لمعادلة فولتيرا التكاملية من الرتبة الثانية وذلك باستخدام كثير حدود لوكاس وطريقة التجميع وعلى ذلك تم تقديم أمثلة مختلفة لتوضيح دقة الطريقة المقترحة

الكلمات المفتاحية

طرق التجميع, المعادلة التكاملية لفولتيرا , كثير حدود لوكاس

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

﴿ وَلَقَدْ مَنَّا عَلَيْكَ مَرَّةً أُخْرَى ﴾

وفي الختام ... أقف اليوم أمامكم ، قلبي يملؤه مزيج من المشاعر المتناقضة، فرحة الإنجاز وحنن الفراق، مشاعر ممزوجة بذكريات رحلة تعليمية طويلة مليئة بالتحديات والإنجازات.

لم تكن الرحلة قصيرة، ولا ينبغي لها أن تكون، لم يكن الحلم قريباً، ولا طريق كان محفوظاً بالتسهيلات، لكنني فعلتها.

إلى من كلله الله بأهيبته والوقار من كان يُراهن على نجاحي ويؤمن بشجاعتي ... يا من اودعني لله ها أنا أكمل المسير الذي بدأناه معا.

" أبي " _ حفظه الله _

إلى اليد الخفية التي أزالَت الأشواك عن طريقي إلى من لا يضاهاها أحد في الكون ملاكي الحارس قرة عيني نعمتي وجنة قلبي.

" أمي " _ حفظها الله _

إلى نفسي الطموحة التي تدفعني للأمام ولا تقبل الاستسلام
إلى كل من علمني حرفاً طيلة مسيرتي التعليمية لكم مني كل الاحترام والتقدير.

1

﴿ وَعَاخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلَّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ ﴾

دلال .

1