



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière Mathématiques:

Option : Analyse Mathématiques et Numérique

Par

Nettah Siham

Sujet

Applications de la transformée de Laplace aux équations
intégrales

Soutenu le : 02/07/2019

Devant le jury :

Mostefa NADIR

Prof. Université de M'sila

Président

Khirani AMINA

Prof. Université de M'sila

Encadreur

Gagui BACHIR

Prof. Université de M'sila

Examineur

Promotion : 2018 / 2019

ملخص:

يعد تحويل لا بلاس أداة أساسية للتحليل. و يستخدم في العديد من المجالات المختلفة: دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية ،دراسة المعادلات التكاملية ، تحليل الإشارات إلخ.. في هذه الذاكرة سوف نظهر فائدة تحويل لابلاس في حل بعض المعادلات التكاملية .

الكلمات المفتاحية : تحويل لابلاس ، المعادلات التكاملية ، معادلة أبال.

Abstract :

The Laplace transformation is a fundamental tool of the analysis. It is used in several different domains :the study of partial differential equations, the study of integral equations, the signal analysis, etc...

In this memory we will show the utility of the Laplace transform in solving some integral equations.

Keywords : Laplace's transformed ,integral equations, Abel's equation.

Remerciements

Je tiens à remercier, en premier lieu, **Mon Dieu** qui m'a donné la force de rédiger ce modeste travail.

Je tiens à remercier les membres du jury, qui ont accepté d'évaluer mon travail de mémoire.

Je tiens à remercier **Amina Khirani** directeur de mon mémoire, pour sa disponibilité et ses conseils judicieux tout au long de ce travail.

Je tiens à exprimer tout mes respects à mes parents, mes frères et ma soeur qui m'ont toujours encouragé.

Je remercie tous les professeurs du département de Mathématiques, sans oublier aussi mes collègues et amies, ainsi tous ceux qui ont participé de loin ou de près à l'élaboration de ce mémoire.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail :

-A mes parents ma mère et mon père.

- A mes soeurs

-A mes frères.

-A toute la famille.

-A toute mes amies.

- Je tiens à remercier l'ensemble de tous les étudiants et étudiantes de ma promotion,

En fin je dédie ce mémoire à mes collègues et tous ceux qui me sont chers.

NOTATIONS

T	Opérateur compact
φ	Fonction inconnue
$[a, b]$	Intervalle réel
$C([a, b])$	L'espace des fonctions continue sur l'intervalle $[a, b]$
L	Opérateur linéaire
L	Opérateur linéaire où $L = I - A$
EIs	Equation integrale de deuxième espèce
X	espace normé
$\ker(L)$	Le noyau de l'opérateur L , $\ker(L) = \{\varphi / L\varphi = 0\}$
$\text{Im}(L)$	L'image de l'opérateur L , $\text{Im}(L) = \{\psi / \psi = L\varphi\}$
$K(x, y)$	Noyau de l'intégrale
I	Opéreteur d'identité
A	Opérateur linéaire compact

Liste des tableaux

Tableau 1: Table de transformée de Laplace usuelles

Table des matières

Introduction	1
1 Transformation de Laplace	2
1.1 Introduction	2
1.2 Fonction C_L	2
1.3 Définition de la transformation de Laplace	3
1.4 Propriétés de la transformation de Laplace	5
1.4.1 Linéarité	5
1.4.2 Translation	7
1.4.3 Changement d'échelle	8
1.4.4 Conjugaison complexe	8
1.5 Transformé de la dérivée	9
1.6 La transformation de Laplace inverse	10
1.7 Propriétés de la transformation de Laplace inverse	11
1.7.1 Linéarité	11
1.7.2 Changement d'échelle	12
1.7.3 Translation	12
1.7.4 Propriété de convolution	12
1.8 Tableaux de transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles	13
2 Equations intégrales	14
2.1 Introduction à la théorie des équations intégrales	14

2.1.1	Opérateur compact	14
2.1.2	Définition de l'équation intégrale	15
2.2	Classification des équations intégrales	17
2.2.1	Equations intégrales linéaires	17
2.2.2	Equations intégrales non- linéaires	19
2.2.3	Equations intégrales singulières	20
2.3	Existence et unicité des solutions des EIs	21
2.3.1	La théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm:	21
2.4	Existence et unicité des solutions des équations intégrales non linéaires de Volterra	25
3	Applications sur les équations intégrales	26
3.1	Applications sur l'équation intégrale de Volterra	26
3.1.1	Applications sur l'équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce de type de convolution	26
3.1.2	Applications sur l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce de type de convolution	28
3.1.3	Applications sur l'équation intégrale non-linéaire de Volterra de pre- mière espèce de type de convolution	29
3.2	Applications sur l'équation intégrale d'Abel	32
3.2.1	Applications sur l'équation intégrale d'Abel généralisée	32
3.2.2	Applications sur l'équation intégrale d'Abel	33
3.2.3	Applications sur l'équation intégrale de Volterra faiblement singulière	34
3.2.4	Applications sur l'équation intégrale d'Abel non linéaire	35
	Conclusion générale	38
I	Annexe	39
	Bibliographie	42

Introduction

La transformation de Laplace est, avec la transformation de Fourier, l'une des plus importantes transformations intégrales. Elle intervient dans de nombreuses questions de physique mathématique, de calcul des probabilités, d'automatique, etc., mais elle joue aussi un grand rôle en analyse classique. Elle porte très légitimement le nom de Pierre-Simon Laplace (1749-1827), surnommé le « Newton français », éphémère ministre de l'intérieur de Napoléon Bonaparte, qui avait commencé ses travaux dès les années 1770, sous l'Ancien régime. En effet, Laplace a souligné l'intérêt de présenter la plupart des fonctions, des suites, des sommes partielles et restes de séries usuelles sous forme intégrale, afin d'en obtenir des développements. Sous l'influence de Liouville, le hongrois Joseph Petzval (1807-1891) fut le premier à étudier la transformation de Laplace en tant que telle, et ses applications aux équations différentielles linéaires. Plus tard, l'ingénieur britannique Oliver Heaviside (1850-1925) a inventé le calcul symbolique afin de résoudre des équations différentielles et intégrales. Laurent Schwartz (1915-2002) a étendu la transformation de Laplace aux distributions, permettant de mieux comprendre et étayer le calcul symbolique [13].

La transformée de Laplace est un outil très puissant dans l'analyse fonctionnelle.

Le but de ce travail est de montrer l'utilité de la transformée de Laplace dans la résolution de certaines équations intégrales.

Ainsi notre mémoire se compose de trois chapitres:

Le premier chapitre: nous rappelons quelques définitions et propriétés sur la transformée de Laplace.

Le deuxième chapitre: On présente une introduction à la théorie des équations intégrales et leur classifications et on va démontrer l'existence et l'unicité des solutions des équations intégrales linéaires et non linéaires.

Le troisième chapitre: On applique la transformée de Laplace sur les équations intégrales linéaires et non linéaires (les équations intégrales de Volterra ,les équations intégrales d'Abel) pour trouver la solution exacte, avec des exemples.

On termine notre mémoire par une conclusion générale.

Chapitre 1

Transformation de Laplace

Dans ce chapitre on présente quelques définitions et quelques propriétés importantes de la transformation de Laplace.

1.1 Introduction

On note que la transformation de Laplace transforme des fonctions $f(t)$ en d'autres fonctions $F(s)$, on écrit

$$F = \mathcal{L}\{f\}$$

ou

$$F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

et la transformation de Laplace inverse transforme $F(s)$ en $f(t)$, on écrit

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}$$

ou

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F\}(t)$$

1.2 Fonction C_L

La classe des fonctions réelles C_L est formée des fonctions causales continues par morceaux et d'ordre exponentielle.

1. Une fonction est causale si elle est nulle pour $x < 0$, i.e. $f(x) = 0$ si $x < 0$.
2. Elle continue par morceaux si elle n'admet que des points de discontinuité de première espèce.
3. Elle est d'ordre exponentielle si elle est bornée par une exponentielle, i.e. $\exists M > 0$ et $\alpha > 0$ telles que: $|f(x)| \leq Me^{\alpha x}, \forall x \geq x_0$.

- Les fonctions usuelles $\sin(x), x^2, e^x$ ne sont pas causales, une façon de créer des fonctions causales est d'utiliser la fonction de Heaviside :

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Il suffit de multiplier les fonctions précédentes par la fonction $H(x)$.par exemple:

$f(x) = e^x$ n'est pas une fonction causale, mais

$$f(x) = H(x)e^x = \begin{cases} e^x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

c'est une fonction causale.(voir [12])

1.3 Définition de la transformation de Laplace

Définition 1.3.1 La transformation de Laplace d'une fonction de C_L est défini par

$$\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

telle que: s est une variable complexe et $F(s)$ une fonction complexe.

1. F est définie par une intégrale impropre que ne converge pas toujours si $f \notin C_L$.
2. Si f est discontinue en 0. La borne inférieure de l'intégrale de vrait être notée 0^+ .

Exemple 1.3.1 :

$$f(x) = H(x)e^{2x} = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a:

$$|f(x)| = |H(x)e^{2x}| < e^{2x}$$

alors:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} e^{2x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{(2-s)x} dx \\ &= \frac{1}{2-s} [e^{(2-s)x}]_0^{\infty} \\ &= \frac{-1}{2-s} \\ &= \frac{1}{s-2}, \operatorname{Re}(s) > 2 \end{aligned}$$

car:

on pose: $s = \alpha + i\beta$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} |e^{-sx} f(x)| &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty} |e^{-sx}| |f(x)| \\ &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} e^{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(2-\alpha)x} \\ &= 0 \text{ si } \alpha > 2 \\ &= 0 \text{ si } \operatorname{Re}(s) > 2 \end{aligned}$$

Théorème 1.3.1 : Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} telle que:

1. $f(x) = 0$ si $\forall x < 0$.
2. f est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.
3. il existe des constantes $M \geq 0$ et $r \geq 0$ telles que: $\forall x \geq x_0, |f(x)| \leq Me^{rx}$, alors la transformation de Laplace de f existe pour tout $\operatorname{Re}(s) > r$.

Preuve. On a:

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx = \int_0^{x_0} e^{-sx} f(x) dx + \int_{x_0}^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

l'intégrale $\int_0^{x_0} e^{-sx} f(x) dx$ existe car f est continue par morceaux. Concernant l'autre intégrale, notons que :

$$\begin{aligned} |e^{-sx} f(x)| &\leq e^{-\alpha x} |f(x)|, \quad s = \alpha + i\beta \\ &\leq M e^{-(\alpha-r)x} \end{aligned}$$

or $\int_{x_0}^{+\infty} M e^{-(\alpha-r)x} dx$ converge car $\operatorname{Re}(s) = \alpha > r$, donc d'après le critère de comparaison des intégrales généralisées, l'intégrale $\int_{x_0}^{+\infty} |e^{-sx} f(x)| dx$ converge aussi, ce qui entraîne que $\int_{x_0}^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$ existe. Par conséquent $\int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$ existe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > r\}$. ■

1.4 Propriétés de la transformation de Laplace

1.4.1 Linéarité

La transformation de Laplace est une application linéaire. Plus précisément pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ pour toutes fonctions f, g d'abscisses de sommabilité respectives r, σ alors :

$$\mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}(s) = \alpha F(s) + \beta G(s)$$

où $\operatorname{Re}(s) > \max(r, \sigma)$ avec $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$, $G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx$. (voir[11])

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\alpha f(x) + \beta g(x)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx \\ &= \alpha \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx + \beta \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx \\ &= \alpha F(s) + \beta G(s) \end{aligned}$$

Si les abscisses de sommabilité de f et g sont respectivement r et σ alors le domaine de sommabilité sur lequel $\alpha f + \beta g$ est défini sur $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > \max(r, \sigma)\}$. ■

Exemple 1.4.1 :

$$f(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0, n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^n dx \end{aligned}$$

En intégrant par partie, on obtient:

$$\begin{aligned} F(s) &= \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} x^n \right]_0^{+\infty} + \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^{n-1} dx, \operatorname{Re}(s) > 0 \\ &= \frac{n}{s} \int_0^{+\infty} e^{-sx} x^{n-1} dx \\ &= \frac{n}{s} I_{n-1} \text{ donc } I_n = \frac{n}{s} I_{n-1} \\ F(s) &= I_n \\ &= \frac{n}{s} \times \frac{n-1}{s} \times \frac{n-2}{s} \times \dots \times \frac{1}{s} \times I_0 \end{aligned}$$

On a:

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx \\ &= \frac{-1}{s} [e^{-sx}]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0 \end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{n}{s} \times \frac{n-1}{s} \times \frac{n-2}{s} \times \dots \times \frac{1}{s} \times \frac{1}{s} \\ &= \frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re}(s) > 0 \end{aligned}$$

1.4.2 Translation

Si $\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = F(s)$ avec $\text{Re}(s) > r$, alors:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\tau_a f(x)\} &= \mathcal{L}\{f(x-a)\}(s) \\ &= e^{-as} F(s), \text{Re}(s) > r\end{aligned}$$

Preuve. Posons:

$$g(x) = \begin{cases} f(x-a) & \text{si } x \geq a \\ 0 & \text{si } x < a \end{cases}$$

On a:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g(x)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx \\ &= \int_0^a e^{-sx} g(x) dx + \int_a^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-sx} g(x) dx \\ &= \int_a^{+\infty} e^{-sx} f(x-a) dx\end{aligned}$$

on pose: $y = x - a \iff dy = dx$

$$\begin{aligned}L\{g(x)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-s(y+a)} f(y) dy \\ &= e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-sy} f(y) dy \\ &= e^{-sa} F(s), \text{Re}(s) > r\end{aligned}$$

donc:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\tau_a f(x)\} &= \mathcal{L}\{f(x-a)\}(s) \\ &= e^{-as} F(s), \text{Re}(s) > r\end{aligned}$$

■

1.4.3 Changement d'échelle

Si $\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = F(s)$, alors:

$$\mathcal{L}\{f(\lambda x)\}(s) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right), \lambda > 0$$

Preuve. On a:

$$\mathcal{L}\{f(\lambda x)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(\lambda x) dx$$

on pose: $y = \lambda x \iff dy = \lambda dx$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(\lambda x)\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-s(\frac{y}{\lambda})} f(y) \frac{dy}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{+\infty} e^{-\left(\frac{s}{\lambda}\right)y} f(y) dy \\ &= \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

donc:

$$\mathcal{L}\{f(\lambda x)\}(s) = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right), \lambda > 0$$

■

1.4.4 Conjugaison complexe

Si $\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = F(s)$, alors:

$$\mathcal{L}\{\overline{f(x)}\}(s) = \overline{F(\bar{s})}$$

Preuve. On a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\overline{f(x)}\}(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} \overline{f(x)} dx \\ &= \overline{\int_0^{+\infty} e^{-\bar{s}x} f(x) dx} \\ &= \overline{F(\bar{s})} \end{aligned}$$

donc:

$$\mathcal{L}\{\overline{f(x)}\}(s) = \overline{F(\bar{s})}$$

■

1.5 Transformé de la dérivée

Théorème 1.5.1 Si f' est continue par morceaux sur tout fermé $[0, x_0]$ et s'il exist $M > 0$ et $r > 0$ telles que $|f(x)| \leq Me^{rx}$, $\forall x \geq x_0$ et si $\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = F(s)$, alors:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(s) = sF(s) - f(0^+), \operatorname{Re}(s) > r$$

Preuve. On a:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f'(x) dx$$

En intégrant par partie, on obtient:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(s) = [e^{-sx} f(x)]_0^{+\infty} + s \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

comme:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} |e^{-sx} f(x)| &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty} |e^{-sx}| |f(x)|, s = \alpha + i\beta \\ &\leq \lim_{x \rightarrow +\infty} M e^{(r-\alpha)x} \\ &= 0, \operatorname{Re}(s) > r \end{aligned}$$

alors:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(s) = -f(0^+) + s \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx$$

donc:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(s) = sF(s) - f(0^+), \operatorname{Re}(s) > r$$

■

Généralisation:

Si f'' vérifie à son tour les hypothèses du théorème précédente, on a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(x)\}(s) &= s\mathcal{L}\{f'(x)\}(s) - f'(0^+) \\ &= s(sF(s) - f(0^+)) - f'(0^+) \end{aligned}$$

donc:

$$\mathcal{L}\{f''(x)\}(s) = s^2 F(s) - s f(0^+) - f'(0^+)$$

On peut démontrer par la récurrence que :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(x)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

Remarque 1.5.1 En général, si $f(x)$ est discontinue aux points x_1, x_2, \dots, x_n alors:

$$\mathcal{L}\{f'(x)\}(s) = sF(s) - f(0^+) - \sum_{k=1}^n e^{-sx_k} (f(x_k^+) - f(x_k^-))$$

Proposition 1.5.1 Si $\mathcal{L}\{f(x)\}(s) = F(s)$, alors:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}, \text{Re}(s) > \max(0, r).$$

Preuve. Posons:

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

On a:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g'(x)\}(s) &= s\mathcal{L}\{g(x)\}(s) - g(0^+) \\ &= s\mathcal{L}\{g(x)\}(s) \text{ car } g(0^+) = 0 \text{ et } g'(x) = f(x) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g'(x)\}(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s) &\iff s\mathcal{L}\{g(x)\}(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s) \\ &\iff \mathcal{L}\{g(x)\}(s) = \frac{\mathcal{L}\{f(x)\}(s)}{s} \\ &\iff \mathcal{L}\left\{\int_0^x f(t)dt\right\}(s) = \frac{F(s)}{s}, \text{Re}(s) > \max(0, r) \end{aligned}$$

■

1.6 La transformation de Laplace inverse

Définissons maintenant la transformée de Laplace inverse:

Soit $F(s)$ la transformation de Laplace d'une fonction $f(x)$. On appelle transformée de Laplace inverse ou originale de $F(s)$ la fonction $f(x)$ et nous écrivons

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(x)$$

$$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(x) \Leftrightarrow \mathcal{L}\{f(x)\}(s) = F(s)$$

Il exist une autre formule (de Mellin-Fourier) pour calculer une transformée de Laplace inverse. Nous pouvons, en passant dans le plan complexe, montrer que

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(x) = \frac{1}{2i\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\gamma-i\beta}^{\gamma+i\beta} e^{st} F(s) ds$$

L'intégrale est prise le long d'une ligne se trouvant dans le plan complexe.

1.7 Propriétés de la transformation de Laplace inverse

1.7.1 Linéarité

L'inverse d'une application linéaire étant linéaire :

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F(s) + \beta G(s)\}(x) = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(x) + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(x)$$

D'une façon générale pour obtenir l'original d'une fraction rationnelle $F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$, on utilise sa décomposition en élément simples.

Exemple 1.7.1 :

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2(s^2+4)}$$

$F(s)$ s'écrit comme:

$$F(s) = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{Cs+D}{(s^2+4)}$$

le calcule donne: $A = \frac{1}{4}, B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{4}, D = -\frac{1}{4}$, alors:

$$F(s) = \frac{\frac{1}{4}}{s^2} + \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{-\frac{1}{4}s - \frac{1}{4}}{s^2+4}$$

donc:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{1}{4}}{s^2} + \frac{\frac{1}{4}}{s} + \frac{-\frac{1}{4}s - \frac{1}{4}}{s^2+4}\right\}(x) \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+4}\right\} \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4} + \frac{1}{s^2+4}\right\}(x), x > 0 \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}(x) - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}(x), x > 0 \\ &= \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2x) - \frac{1}{8}\sin(2x), x > 0 \\ &= \left[\frac{1}{4}(x+1) - \frac{1}{4}(\cos(2x) - \frac{1}{2}\sin(2x))\right] H(x) \end{aligned}$$

1.7.2 Changement d'échelle

Soit $f(x)$ l'original de $F(s)$, on a :

$$F(as) = \int_0^{+\infty} e^{-asx} f(x) dx$$

On pose : $y = ax \iff dy = a dx$

$$\begin{aligned} F(as) &= \int_0^{+\infty} e^{-sy} f\left(\frac{y}{a}\right) \frac{dy}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} e^{-sy} f\left(\frac{y}{a}\right) dy \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{L}\left(f\left(\frac{x}{a}\right)\right)(s) \end{aligned}$$

donc:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(as))(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$$

1.7.3 Translation

Soit $f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(x)$, on a :

$$\begin{aligned} F(s+a) &= \int_0^{+\infty} e^{-(s+a)x} f(x) dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-sx} (e^{-ax} f(x)) dx \\ &= \mathcal{L}(e^{-ax} f(x))(s) \end{aligned}$$

donc:

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s+a))(x) = e^{-ax} f(x)$$

1.7.4 Propriété de convolution

1. Si f et g deux fonctions, alors on appelle convolution de f et g , la fonction définie par

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$$

2. Si $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(x) = f(x)$ et $\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}(x) = g(x)$, alors :

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \times G(s)\}(x) = (f * g)(x)$$

Proposition 1.7.1 *Le produit de convolution est commutatif*

$$f * g = g * f$$

Preuve. En effet:

On utilise le changement de variable: $y = t - x$, on obtient:

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_0^t f(x)g(t-x)dx \\ &= \int_t^0 f(t-y)g(y)(-dy) \\ &= - \int_t^0 f(t-y)g(y)dy \\ &= \int_0^t g(y)f(t-y)dy \\ &= (g * f)(t) \end{aligned}$$

■

1.8 Tableaux de transformée de Laplace de quelques fonctions usuelles

$f(x) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(x)$	$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}(s)$
$H(x)$	$\frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0$
e^{ax}	$\frac{1}{s-a}, \operatorname{Re}(s) > a$
$\sin(wx)$	$\frac{w}{s^2+w^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$\cos(wx)$	$\frac{s}{s^2+w^2}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$x^\alpha, \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re}(s) > 0$
$\frac{1}{a}f\left(\frac{x}{a}\right)$	$F(as)$
$e^{-ax}f(x)$	$F(s+a)$
$f(x-a)H(x-a)$	$e^{-as}F(s)$

Table de transformées de Laplace usuelles

Chapitre 2

Equations intégrales

Dans ce chapitre, on présente une introduction à la théorie des équations intégrales et leur classifications et on va démontrer l'existence et l'unicité des solutions des équations intégrales linéaires et non linéaires.

2.1 Introduction à la théorie des équations intégrales

2.1.1 Opérateur compact

Définition 2.1.1 Soit $T \in L(X, Y)$ un opérateur borné, on dit que T est un opérateur compact si et seulement si l'image de toute partie bornée de X est relativement compacte dans Y . Autrement dit, toute partie $B \subset X$ est bornée, alors $\overline{T(B)}$ est compacte dans Y .

Définition 2.1.2 Un opérateur linéaire T défini sur un espace de Banach X dans Y , est dit compact (ou complètement continu) si l'adhérence $\overline{T(B_X)}$ est compacte dans Y , B_X désigne la boule unité dans X .

$$B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$$

Définition 2.1.3 Dire que l'opérateur $T \in L(X, Y)$ est compact, revient à dire, que pour toute suite bornée (x_n) dans X , la suite image (Tx_n) admet une suite convergente dans Y . Notons l'ensemble des opérateurs bornés par $B(X, Y)$ et l'ensemble des opérateurs compacts par $K(X, Y)$. (voir [7])

2.1.2 Définition de l'équation intégrale

On appelle équation intégrale une équation fonctionnelle où la fonction inconnue figure sous le signe d'intégration \int .

C'est en générale l'équation par rapport à l'inconnue φ de la forme :

$$\int_E K(x, t, \varphi(t)) dt = \lambda \varphi(x) + f(x), \quad x \in E \quad (2.1)$$

où E est un espace mesuré. $f(x)$ une fonction mesurable donné sur E . λ un scalaire donné qui peut être réel ou complexe. et $K(x, t, \varphi(t))$ une fonction mesurable sur E^3 appelée noyau de l'équation intégrale.

Avec toutes ces données, notre problème est de chercher la fonction φ qui satisfait l'équation (2.1). (voir[5])

Remarque 2.1.1 :

1. Pour l'étude de l'équation intégrale suivante:

$$\int_E K(x, t, \varphi(t)) dt = \lambda \varphi(x) + f(x), \quad x \in E \quad (*)$$

On se restreint aux espaces $L_p(E)$ avec $(1 \leq p \leq \infty)$.

Implicitement, pour les fonctions $f \in L_p(E)$. on cherche les fonctions φ dans $L_p(E)$ vérifie cette équation . cela veut dire que dans cette restriction. on utilise uniquement les noyaux $K(x, t)$ pour lesquels $T\varphi$ soit dans $L_p(E)$ lorsque φ l'est.

2. Si on prend

$$K(x, t, \varphi(t)) = K(x, t)\varphi(t)$$

l'équation (*) devient linéaire. i.e.

$$f(x) = \int_E K(x, t)\varphi(t) dt - \lambda \varphi(x)$$

est si non devient équation intégrale non linéaire.

3. Notons que l'équation (*) peut être écrite sous forme d'opérateur

$$T\varphi = \lambda \varphi + f$$

où l'opérateur T s'écrit comme

$$T\varphi(x) = \int_E K(x, t, \varphi(t)) dt$$

4. Le type le plus générale d'une équation intégrale est :

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_E K(x, t)\varphi(t) dt$$

La fonction $h(x)$ détermine de type de l'équation.

Lemme 2.1.1 :

Soit K une fonction de l'espace $L^2([a, b[\times]a, b[)$, alors l'opérateur T défini par :

$$T\varphi(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt, x \in]a, b[\quad (2.2)$$

est bien défini, en tant qu'opérateur de $L^2([a, b[)$ dans lui-même.

Preuve. La linéarité est évidente, seule la continuité (et le fait que $T\varphi$ est un élément de $L^2([a, b[)$ si $u \in L^2([a, b[)$, qui en sera une conséquence immédiate) est à démontrer bien entendu, nous voulons majorer

$$\int_a^b (T\varphi(x))^2 dx = \int_a^b \left(\int_a^b K(x, t)\varphi(t) dt \right)^2 dx, x \in]a, b[$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient

$$\int_a^b (T\varphi(x))^2 dx \leq \int_a^b \left(\int_a^b |K(x, t)|^2 dt \right) \left(\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \right) dx \leq M^2 \int_a^b |\varphi(t)|^2 dt$$

avec $M^2 = \int \int_{]a, b[\times]a, b[} |K(x, t)|^2 dt dx < \infty$, puisque $K \in L^2([a, b[\times]a, b[)$.

Ce qui prouve que (2.2) définit bien un opérateur continu de $L^2([a, b[)$ dans lui-même et montre au passage que sa norme est majorée par M . ■

Lemme 2.1.2 (voir[3])

Soit $K \in L^2([a, b[\times]a, b[)$. L'opérateur intégral A de noyau K est compact de $L^2([a, b[)$ dans lui même.

2.2 Classification des équations intégrales

La classification des équations intégrales est centrée sur trois caractéristiques de base décrivent leur structure globale, il est utile de les citer avant d'entrer dans les détails.

- i) le type (espèce) d'une équation se rapporte à la localisation de la fonction inconnue. Pour les équations de première espèce, la fonction inconnue apparaît uniquement à l'intérieur du signe intégrale. Cependant pour les équations de deuxième espèce, la fonction inconnue apparaît également à l'extérieur du signe intégrale.
- ii) La description historique Fredholm et Volterra concerne les bornes d'intégrations. Dans une équation de Fredholm, les bornes d'intégrations sont fixées, dans l'équation de Volterra les bornes d'intégrations sont indéfinies.
- iii) L'adjectif singulière est parfois employée d'une part, quand l'intégration est impropre, d'autre part si l'une des bornes d'intégrations ou les deux sont infinies ou si l'intégrand est non borné sur l'intervalle donné, évidemment, une équation intégrale peut être singulière dans les deux sens.

2.2.1 Equations intégrales linéaires

a) Equation intégrale de Fredholm:

On appelle équation intégrale de Fredholm tel que les deux limites d'intégrations sont constantes, une équation à une inconnue $\varphi(x)$ de la forme:

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt \quad (2.3)$$

où $f(x)$, $K(x,t)$ sont des fonctions connues et λ est un paramètre non nul, réel ou complexe.

La fonction $h(x)$ détermine le type de l'équation intégrale.

1. Si $h(x) = 0$, l'équation (2.3) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0 \quad (2.4)$$

est appelée équation intégrale de Fredholm de première espèce.

2. Si $h(x) = c = \text{constante} \neq 0$, l'équation (2.3) s'écrit :

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.5)$$

est s'appelle équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce.

3. Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (2.3) est appelée équation intégrale de Fredholm de troisième espèce.

Remarque 2.2.1 :

1. Si $f(x) = 0$, l'équation (2.3) est dite homogène.
2. Si $f(x) \neq 0$, l'équation (2.3) est dite non homogène.

b) Equation intégrale de Volterra:

On appelle équation intégrale linéaire de Volterra telle que l'un des deux limites d'intégrations est variable, une équation de la forme:

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.6)$$

1. On appelle équation intégrale de Volterra de première espèce, si $h(x) = 0$, l'équation (2.6) s'écrit :

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt = 0 \quad (2.7)$$

2. On appelle équation intégrale de Volterra de deuxième espèce, si $h(x) = c = \text{constante} \neq 0$, l'équation (2.6) s'écrit :

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)\varphi(t)dt \quad (2.8)$$

3. Si $h(x) \neq 0$, donc la formule (2.6) est appelée équation intégrale de Volterra de troisième espèce.

Remarque 2.2.2 :

1. Si $f(x) = 0$, donc l'équation (2.6) est dite homogène.

2. Si $f(x) \neq 0$, donc l'équation (2.6) est dite non homogène.

Remarque 2.2.3 *L'équation intégrale de Volterra est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau K vérifie la condition:*

$$K(x, t) = 0 \text{ pour } x < t$$

c) Equation intégrale d'Abel:

On appelle équation intégrale linéaire d'Abel une équation sous la forme:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} u(t) dt \quad (2.9)$$

où $f(x)$ est une fonction de donnée prédéterminée, et $u(x)$ est la solution qui sera déterminée. L'expression $(x-t)^{-\frac{1}{2}}$ est appelée le noyau de l'équation intégrale d'Abel. (voir [6])

Remarque 2.2.4 :

1. Il existe une équation intégrale d'Abel généralisée s'écrit sous la forme:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

2.2.2 Equations intégrales non- linéaires

a) Equation intégrale de Fredholm:

L'équation intégrale non linéaire de Fredholm de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt = 0 \quad (2.10)$$

et appelée équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce, de la forme

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt \quad (2.11)$$

où $c = \text{constante} \neq 0$

et troisième espèce, de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t, \varphi(t)) dt \quad (2.12)$$

b) Equation intégrale de Volterra:

L'équation intégrale non linéaire de Volterra de première espèce prendre la forme

$$f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt = 0 \quad (2.13)$$

et appelée équation intégrale non linéaire de Volterra de deuxième espèce, de la forme

$$c\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt \quad (2.14)$$

où $c = \text{constante} \neq 0$

et troisième espèce, de la forme

$$h(x)\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t, \varphi(t)) dt \quad (2.15)$$

Remarque 2.2.5 ;

1. Si $f(x) = 0$, donc l'équation est dite homogène.
2. Si $f(x) \neq 0$, donc l'équation est dite non homogène

c)Equation intégrale d'Abel:

On appelle équation intégrale d'Abel une équation de la forme

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^x (x-t)^{\alpha-1} g(\varphi(t)) dt \quad (2.16)$$

où $-\infty < x$, $0 < \alpha < 1$ et $g : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ tel que $g(0) = 0$ et $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

Pour plus d'informations voir [8].

2.2.3 Equations intégrales singulières

On dit qu'une équation intégrale est singulière si l'un ou les deux limites d'intégration sont infinies, ou bien le noyau devient infini ou voisinage des limites de l'intégration.

Définition 2.2.1 :

1-Considérons l'équation intégrale suivante:

$$\varphi(x) - \int_{\Omega} R(x, t) \varphi(t) dt = g(x) \quad (2.17)$$

On dit que (2.17) est singulière si $R(x, t)$ admet une singularité ou le domaine Ω n'est pas borné.

2- On considère l'équation intégrale de deuxième espèce suivante:

$$\varphi(x) - \int_{\Omega} K(x, t) \varphi(t) dt = g(x) \quad (2.18)$$

où $K(x, t)$ est singulière ou faiblement singulière, en générale $K(x, t)$, est donné par :

$$K(x, t) = \begin{cases} |x - t|^{-\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \\ \log |x - t| \end{cases}$$

Alors:

- (i) Le cas où $K(x, t) = |x - t|^{-\alpha}, 0 < \alpha < 1$ l'équation (2.18) est de Abel.
- (ii) Le cas où $K(x, t) = \log |x - t|$ s'appelle singularité logarithmique. (voir[2])

2.3 Existence et unicité des solutions des EIs

2.3.1 La théorie de Riesz et l'alternative de Fredholm:

Dans ce paragraphe, on désigne par $A : X \rightarrow X$ l'opérateur linéaire compact dans un espace normé dans lui-même.

Nous présentons la théorie de base pour une équation:

$$\varphi - A\varphi = f$$

On définit l'opérateur L , par :

$$L = I - A$$

où I désigne l'opérateur d'identité.

Théorème 2.3.1 (*Premier théorème de Riesz*)

L'espace nul de l'opérateur L , i.e. le noyau de l'opérateur L :

$$\ker(L) = \{\varphi \in X : L\varphi = 0\}$$

est un sous-espace de dimension finie .

Preuve. Le noyau de l'opérateur linéaire borné L est un sous-espace fermé de X .Puisque pour chaque suite $\varphi_n \rightarrow \varphi$, $n \rightarrow \infty$ et $L\varphi_n = 0$,alors on a $L\varphi = 0$ donc:

$$\varphi \in \ker(L) \text{ est équivalent à } A\varphi = \varphi$$

Et donc la restriction de A sur $\ker(L)$ coïncide avec l'opérateur d'identité sur $\ker(L)$, l'opérateur A est compact dans X et donc rendre compact de $\ker(L)$ sur $\ker(L)$,puisque $\ker(L)$ est fermé .Par conséquent $\ker(L)$ est de dimension fini. ■

Théorème 2.3.2 (*Deuxième théorème de Riesz*)

L'image de l'opérateur L , i.e.

$$\text{Im}(L) = \{L\varphi : \varphi \in X\}$$

est un sous-espace linéaire fermé et de co-dimension finie.

Preuve. L'image de l'opérateur L est un sous-espace .Soit f un élément de $\overline{L(X)}$,alors il existe une suite (φ_n) de X tel que $L\varphi_n \rightarrow f$, $n \rightarrow \infty$, on choisit la meilleure approximation \varkappa_n ,i.e.

$$\|\varphi_n - \varkappa_n\| = \inf_{\varkappa_n \in \text{Im}(L)} \|\varphi_n - \varkappa_n\|$$

on définit la suite :

$$\tilde{\varphi}_n = \varphi_n - \varkappa_n, n \in \mathbb{N}$$

qui est bornée .

On suppose que la suite $(\tilde{\varphi}_n)$ n'est pas bornée ,alors on peut extraire une sous-suite $(\tilde{\varphi}_{n(k)})$,telle que $\|(\tilde{\varphi}_{n(k)})\| \geq k$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,maintenant on pose:

$$\psi_n = \frac{(\tilde{\varphi}_{n(k)})}{\|(\tilde{\varphi}_{n(k)})\|}, k \in \mathbb{N}$$

avec $\|\psi_k\| = 1$ et A est compact ,alors il existe une sous-suite $\psi_{k(j)}$ telle que $A\psi_{k(j)} \rightarrow \psi$, $n \rightarrow \infty$ en d'autre part

$$L\psi_n = \frac{(\tilde{\varphi}_{n(k)})}{\|(\tilde{\varphi}_{n(k)})\|} \leq \frac{\|(\tilde{\varphi}_{n(k)})\|}{k} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

puisque la suite $(L\varphi_n)$ est converge et donc bornée. Par conséquent :

$$L\psi_{k(j)} \rightarrow 0 , j \rightarrow \infty$$

alors on obtient:

$$\psi_{k(j)} = L\psi_{k(j)} + A\psi_{k(j)} \rightarrow \psi , j \rightarrow \infty$$

et puisque L est borné ,et par les deux équations précédentes nous concluons que $L\varphi = 0$.Mais comme

$$\chi_{n(k)} + \|(\tilde{\varphi}_{n(k)})\| \psi \in \text{Im}(L), \forall k \in \mathbb{N}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \|\psi_k - \psi\| &= \frac{1}{\|(\tilde{\varphi}_{n(k)})\|} \|\varphi_{n(k)} - \{\chi_{n(k)} + \|(\tilde{\varphi}_{n(k)})\| \psi\}\| \\ &\geq \frac{1}{\|(\tilde{\varphi}_{n(k)})\|} \inf_{\chi \in \text{Im}(L)} \|\varphi_{n(k)} - \chi\| \\ &= \frac{1}{\|(\tilde{\varphi}_{n(k)})\|} \|\varphi_{n(k)} - \chi_{n(k)}\| = 1 \end{aligned}$$

Ceci contredit le fait que cela $\psi_{k(j)} \rightarrow \psi , j \rightarrow \infty$.Par conséquent $(\tilde{\varphi}_n)$ est bornée ,et puisque A est compact, on peut extraire une sous suite $(\tilde{\varphi}_{n(k)})$ telle que $(A\tilde{\varphi}_{n(k)})$ converge pour $k \rightarrow \infty$.En raison que $L\tilde{\varphi}_{n(k)} \rightarrow f , k \rightarrow \infty$,et par

$$\tilde{\varphi}_{n(k)} = L\tilde{\varphi}_{n(k)} + A\tilde{\varphi}_{n(k)}$$

On observe que $\tilde{\varphi}_{n(k)} \rightarrow \varphi \in X , k \rightarrow \infty$,mais $L\tilde{\varphi}_{n(k)} \rightarrow L\varphi \in X , k \rightarrow \infty$. ■

Théorème 2.3.3 (Troisième théorème de Riesz)

Il existe un unique $r \in \mathbb{N}$ appelé nombre de Riesz de l'opérateur L tel que:

$$\{0\} = \ker(L^0) \subset \ker(L^1) \subset \dots \subset \ker(L^r) \subset \ker(L^{r+1})$$

$$E = \text{Im}(L^0) \supset \text{Im}(L^1) \supset \dots \supset \text{Im}(L^r) \supset \text{Im}(L^{r+1})$$

Et on a la somme directe:

$$E = \ker(L^r) \oplus \text{Im}(L^r)$$

Preuve. :

pour la preuve voir [1] ■

Théorème 2.3.4 (*Alternative de Fredholm*)

On considère les équations intégrales homogènes duales, l'une de l'autre, issues d'un noyau $K : [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$, qui sont donc définies par :

$$\text{trouver } \varphi \in [a, b] \text{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = 0 \quad (2.19)$$

$$\text{trouver } \psi \in [a, b] \text{ tel que } \psi(x) - \int_a^b K(x, t)\psi(t)dt = 0 \quad (2.20)$$

On considère pour $f \in C[a, b]$ et $g \in C[a, b]$ les équations intégrales avec seconds membres

$$\text{trouver } \varphi \in [a, b] \text{ tel que } \varphi(x) - \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt = f(x) \quad (2.21)$$

$$\text{trouver } \psi \in [a, b] \text{ tel que } \psi(x) - \int_a^b K(x, t)\psi(t)dt = g(x) \quad (2.22)$$

Alors on a l'alternative :

- Ou bien les équations (2.19) et (2.20) n'ont que les solutions triviales $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, et dans ces cas les équations (2.21) et (2.22) admettent une unique solution $\varphi \in [a, b]$ et $\psi \in [a, b]$ pour chaque $f \in C[a, b]$ et $g \in C[a, b]$.

-ou bien les équations (2.19) et (2.20) ont le même nombre fini m de solutions linéairement indépendantes, et dans ce cas, les équations (2.21) et (2.22) sont résolubles si et seulement si pour toute solution φ de (2.19) et toute solution ψ de (2.20) on a :

$$\int_a^b f(x)\psi(x)dx = \int_a^b g(x)\varphi(x)dx = 0$$

Dans ces conditions, la solution générale de (2.21) s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \bar{\varphi} + \sum_{i=1}^m \alpha_i \varphi_i$$

où $\bar{\varphi}$ est une solution particulière de (2.21) et les $(\varphi_i)_{0 \leq i \leq m}$ forme une famille libre de solution de (2.19).

2.4 Existence et unicité des solutions des équations intégrales non linéaires de Volterra

Théorème 2.4.1 :

Soit $K : [0, T] \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et lipschitzienne:

$$|K(t, s, x) - K(t, s, y)| \leq L |x - y| \text{ pour tout } (s, t) \in [0, T] \times [0, T] \text{ et } x, y \in \mathbb{R}$$

alors pour tout $f \in C[0, T]$ l'équation

$$\varphi(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, \varphi(s)) ds \quad (0 \leq t \leq T)$$

admet une solution unique $\varphi \in C[0, T]$. De plus pour tout $\varphi_0 \in C[0, T]$ la suite des fonctions définie par

$$\varphi_{n+1}(t) = f(t) + \int_a^t K(t, s, \varphi_n(s)) ds \quad (0 \leq t \leq T)$$

converge uniformément dans $C[0, T]$ vers une solution unique. (voir [10])

Preuve. :

Pour la preuve voir [10] ■

Chapitre 3

Applications sur les équations intégrales

Dans ce chapitre on résoudra quelques équations intégrales linéaires et non linéaires (équations intégrales de Volterra et équations intégrales d'Abel) en utilisant la transformée de Laplace, avec des exemples.

3.1 Applications sur l'équation intégrale de Volterra

3.1.1 Applications sur l'équation intégrale linéaire de Volterra de première espèce de type de convolution

1) Soit l'équation intégrale de Volterra de première espèce suivante :

$$f(x) = \int_0^x K(x-t)u(t)dt \quad (3.1)$$

où $K(x-t)$ est appelée le noyau de l'équation intégrale de Volterra, $f(x)$ ont des fonctions réelles et $u(x)$ est la solution qui sera déterminée.

En prenant la transformée de Laplace de le produit de convolution, on obtient :

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x K(x-t)u(t)dt \right\} = H(s)U(s)$$

Ainsi ,en prenant la transformée de Laplace des deux côtés de (3.1), on obtient :

$$F(s) = H(s)U(s) \quad (3.2)$$

où

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(x)\} , F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\} \text{ et } H(s) = \mathcal{L}\{K(x)\}$$

la résolution (3.2) donne :

$$U(s) = \frac{F(s)}{H(s)} , (H(s) \neq 0) \quad (3.3)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés (3.3) donne la solution exacte

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{F(s)}{H(s)} \right\} \quad (3.4)$$

donc $u(x)$ est la solution exacte de l'équation intégrale Volterra de première espèce.

Exemple 3.1.1 :

Résoudre l'équation intégrale de Volterra première espèce suivante:

$$1 - \cos(x) = \int_0^x \cos(x-t)u(t)dt \quad (3.5)$$

En prenant la transformée de Laplace de le produit de convolution, on obtient :

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x \cos(x-t)u(t)dt \right\} = \frac{s}{s^2+1}U(s)$$

En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de (3.5) ,on obtient:

$$\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1}U(s)$$

équivalente

$$\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1}U(s)$$

alors

$$U(s) = \frac{1}{s^2} \quad (3.6)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de (3.6), on obtient:

$$u(x) = x$$

donc $u(x)$ la solution exacte de l'équation intégrale de Volterra de première espèce.

3.1.2 Applications sur l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce de type de convolution

1) Soit l'équation intégrale de Volterra de type de convolution suivante :

$$\phi(x) - \lambda \int_0^x K(x-y)\phi(y)dy = f(x) \quad (3.7)$$

où le noyau $K(x-y)$ est de type de convolution, peut très facilement être résolu en utilisant la méthode de transformation de Laplace. Pour commencer la processus de solution, on définit la transformation de Laplace de $\phi(x)$, $f(x)$, $K(x)$:

$$\Phi(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} \phi(x) dx$$

$$\mathcal{F}(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} f(x) dx$$

$$H(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{-\sigma x} K(x) dx$$

En prenant la transformée de Laplace de l'intégrale de convolution, nous avons :

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x K(x-y)\phi(y)dy \right\} = H(\sigma)\Phi(\sigma)$$

Ainsi ,en prenant la transformée de Laplace de l'équation (3.7), on obtient :

$$\Phi(\sigma) - \lambda H(\sigma)\Phi(\sigma) = \mathcal{F}(\sigma)$$

alors

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{1 - \lambda H(\sigma)} \mathcal{F}(\sigma) , (1 - \lambda H(\sigma) \neq 0) \quad (3.8)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse de la formule (3.8) ,on obtient :

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty+p}^{+i\infty+p} e^{\sigma x} \frac{1}{1 - \lambda H(\sigma)} \mathcal{F}(\sigma) d\sigma \quad (3.9)$$

L'expression (3.9) est la solution de l'équation intégrale de Volterra de deuxième type de type convolution.(voir[4])

Exemple 3.1.2 :

Résoudre l'équation intégrale de Volterra de deuxième espèce suivant :

$$\phi(x) - \int_0^x \sin(x-y)\phi(y)dy = \cos(x) \quad (3.10)$$

On a: $\lambda = 1$, $K(x-y) = \sin(x-y)$ et $f(x) = \cos(x)$, en utilisant la transformée de Laplace de l'intégrale de convolution, nous avons :

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x \sin(x-y)\phi(y)dy \right\} = \mathcal{L}\{\sin(x)\}\mathcal{L}\{\phi(x)\} = \frac{1}{\sigma^2 + 1}\Phi(\sigma)$$

En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de (3.10), on obtient:

$$\Phi(\sigma) - \frac{1}{\sigma^2 + 1}\Phi(\sigma) = \frac{\sigma}{\sigma^2 + 1}$$

équivalent

$$\Phi(\sigma)(1 - \frac{1}{\sigma^2 + 1}) = \frac{\sigma}{\sigma^2 + 1}$$

alors

$$\Phi(\sigma)(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + 1}) = \frac{\sigma}{\sigma^2 + 1}$$

donc

$$\Phi(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \quad (3.11)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de (3.11), on obtient :

$$\phi(x) = \mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{\sigma}) = 1$$

3.1.3 Applications sur l'équation intégrale non-linéaire de Volterra de première espèce de type de convolution

1) Soit l'équation intégrale non-linéaire de Volterra de première espèce :

$$\int_0^x K(x,t)F(u(t))dt = f(x) \quad (3.12)$$

où le noyau $K(x, t)$ et la fonction $f(x)$ ont des fonctions à valeurs réelles, et $F(u(t))$ est une fonction non linéaire de $u(x)$.

En utilisant la transformation

$$v(x) = F(u(x)) \quad (*)$$

alors

$$u(x) = F^{-1}(v(x)) \quad (**)$$

On substitue (*) dans la formule (3.12), on obtient:

$$\int_0^x K(x, t)v(t)dt = f(x) \quad (3.13)$$

nous supposons que le noyau $K(x, t)$ est un noyau de différence, En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de (3.13), on obtient:

$$\mathcal{L}\{K(x - t)\} \times \mathcal{L}\{v(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$$

alors

$$V(s) = \frac{F(s)}{H(s)} \quad (3.14)$$

où

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}, H(s) = \mathcal{L}\{K(x)\} \text{ et } V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de (3.14) donne $v(x)$, la solution $u(x)$ est obtenue en utilisant (**).

Exemple 3.1.3 :

Résoudre l'équation intégrale non-linéaire de Volterra de première espèce :

$$\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \int_0^x (x - t)u^2(t)dt \quad (3.15)$$

On pose

$$v(x) = u^2(x) \quad (*)$$

alors

$$u(x) = \bar{+}\sqrt{v(x)} \quad (**)$$

on substitue la formule (*) dans la formule (3.15), on obtient :

$$\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \int_0^x (x-t)v(t)dt \quad (3.16)$$

En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de (3.16), on obtient :

$$\frac{1}{4}\mathcal{L}\{e^{2x}\} - \frac{1}{2}\mathcal{L}\{x\} - \frac{1}{4}\mathcal{L}\{1\} = \mathcal{L}\{x\}\mathcal{L}\{v(x)\}$$

équivalent

$$\frac{1}{4(s-2)} - \frac{1}{2s^2} - \frac{1}{4s} = \frac{1}{s^2}V(s)$$

donc

$$V(s) = \frac{1}{(s-2)} \quad (3.17)$$

où

$$V(s) = \mathcal{L}\{v(x)\}$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de (3.17), on obtient:

$$v(x) = e^{2x}$$

les solutions exactes sont donc données par

$$u(x) = \bar{+}e^x$$

Il convient de noter que deux solutions ont été obtenues car l'équation (3.15) est une équation non linéaire, et que la solution peut ne pas être unique.

3.2 Applications sur l'équation intégrale d'Abel

3.2.1 Applications sur l'équation intégrale d'Abel généralisée

1) Soit l'équation intégrale linéaire d'Abel généralisée:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt \quad (3.18)$$

où α est une constante, $0 < \alpha < 1$.

En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de (3.18), on obtient:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{u(x)\} \mathcal{L}\{x^{-\alpha}\}$$

équivalent

$$F(s) = U(s) \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}}$$

ça donne

$$U(s) = \frac{s^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} F(s) \quad (3.19)$$

où Γ la fonction gamma, le dernier équation peut être réécrit comme :

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{s}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \mathcal{L}\{y(x)\} \quad (3.20)$$

où

$$y(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} f(t) dt$$

En utilisant le fait

$$\mathcal{L}\{y'(x)\} = s\mathcal{L}\{y(x)\} - y(0) \quad (1)$$

et

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \quad (2)$$

en (3.20), on obtient:

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \mathcal{L}\{y'(x)\} \quad (3.21)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse des deux côtés de (3.21), on obtient :

$$u(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (3.22)$$

En intégrant l'intégrale à droite de (3.22) et en différenciant le résultat ,on obtient la formule la mieux adaptée:

$$u(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \left(\frac{f(0)}{x^{1-\alpha}} + \int_0^x \frac{f'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \right), 0 < \alpha < 1 \quad (3.23)$$

Exemple 3.2.1 :

Résoudre l'équation intégrale d'Abel généralisée suivante:

$$\pi x = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^{\frac{2}{3}}} u(t) dt \quad (*)$$

Remarquez que $\alpha = \frac{2}{3}$, $f(x) = \pi x$, en utilisant (3.22) donne:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\pi t}{(x-t)^{\frac{1}{3}}} dt \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{9}{10} x^{\frac{5}{3}} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} x^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

3.2.2 Applications sur l'équation intégrale d'Abel

1) Soit l'équation intégrale d'Abel:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt \quad (3.24)$$

On utilise la même techniques des résolutions d'équation intégrale d'Abel généralisée pour résoudre d'équation intégrale d'Abel. Alors pour $\alpha = \frac{1}{2}$ la solution exacte d'équation intégrale d'Abel est:

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \quad (3.25)$$

Exemple 3.2.2 :

Résoudre l'équation intégrale d'Abel suivante:

$$\frac{\pi}{2} x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u(t) dt \quad (*)$$

Substituant $f(x) = \frac{\pi}{2} x$ dans (3.25) ,on obtient:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\frac{\pi}{2} t}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left(\frac{2\pi}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \sqrt{x} \end{aligned}$$

3.2.3 Applications sur l'équation intégrale de Volterra faiblement singulière

Nous allons concentrer notre étude sur l'équation de Volterra généralisée , faiblement singulière de la forme

$$u(x) = f(x) + \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.26)$$

En prenant la transformée de Laplace de l'intégrale de convolution, on obtient:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt \right\} = \mathcal{L}\{x^{-\alpha}\} \mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}} U(s)$$

En prenant la transformée de Laplace de l'équation (3.26), on obtient:

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \mathcal{L}\{f(x)\} + \mathcal{L}\{x^{-\alpha}\} \mathcal{L}\{u(x)\}$$

équivalent

$$U(s) = F(s) + \frac{\Gamma(1-\alpha)}{s^{1-\alpha}} U(s)$$

ça donne

$$U(s) = \frac{s^{1-\alpha} F(s)}{s^{1-\alpha} - \Gamma(1-\alpha)} \quad (3.27)$$

où Γ est la fonction gamma, $U(s) = \mathcal{L}\{u(x)\}$ et $F(s) = \mathcal{L}\{f(x)\}$. L'appendice D (voir [6]), la définition de la fonction gamma et certaines des relations qui s'y rapportent sont données.

En prenant la transformé de Laplace inverse des deux côtés de (3.27), on obtient

$$u(x) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^{1-\alpha} F(s)}{s^{1-\alpha} - \Gamma(1-\alpha)} \right\} \quad (3.28)$$

qui sera utilisé pour détermination de la solution $u(x)$. Notez que la formule (3.28) sera utilisée pour résoudre l'équation intégrale faiblement singulière.

Exemple 3.2.3 :

Résoudre l'équation intégrale de Volterra faiblement singulière :

$$u(x) = 4 - 8\sqrt{x} + \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}} u(t) dt \quad (3.29)$$

On a : $f(x) = 4 - 8\sqrt{x}$ et $\alpha = \frac{1}{2}$, on applique la transformée de Laplace sur la fonction f , on obtient :

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{4\} - 8 \times \mathcal{L}\{x^{\frac{1}{2}}\} \\ &= \frac{4}{s} - 8 \times \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{4}{s} - 8 \times \frac{\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{4}{s} - \frac{4\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, substituer la formule $F(s)$ à la formule donnée en (3.28) donne :

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{S^{\frac{1}{2}} \left(\frac{4}{s} - \frac{4\sqrt{\pi}}{s^{\frac{3}{2}}} \right)}{S^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\pi}} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{4}{s^{\frac{1}{2}}} - \frac{4\sqrt{\pi}}{s}}{S^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\pi}} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4S^{\frac{1}{2}} - 4\sqrt{\pi}}{S^{\frac{1}{2}} - \sqrt{\pi}} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s} \right\} \\ &= 4 \end{aligned}$$

3.2.4 Applications sur l'équation intégrale d'Abel non linéaire

Soit l'équation intégrale non linéaire d'Abel [9]:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} F(u(t)) dt \quad (3.30)$$

où $f(x)$ ont des fonctions réelles, $F(u(t))$ est une fonction non linéaire de $u(x)$.

Déterminer une solution pour l'équation intégrale d'Abel non linéaire (3.30), convertissons-la d'adord en une équation intégrale d'Abel linéaire de la forme

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} v(t) dt \quad (3.31)$$

en utilisant la transformation

$$v(x) = F(u(x))$$

où $F(u(x))$ est inversible ,i.e $F^{-1}(u(x))$ existe, cela signifie que

$$u(x) = F^{-1}(v(x))$$

En prenant la transformée de Laplace des deux côtés de (3.31) ,on obtient:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \mathcal{L}\{v(x)\}\mathcal{L}\{x^{-\frac{1}{2}}\}$$

équivalent

$$F(s) = V(s)\frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}} = V(s)\frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}$$

alors

$$V(s) = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}}F(s) \quad (3.32)$$

où Γ la fonction gamma et $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.Le dernier équation peut être réécrit :

$$V(s) = \frac{s}{\pi}(\sqrt{\pi}s^{-\frac{1}{2}}F(s)) \quad (3.33)$$

qui peut être réécrit par :

$$\mathcal{L}\{v(x)\} = \frac{s}{\pi}\mathcal{L}\{y(x)\} \quad (3.34)$$

où

$$y(x) = \int_0^x (x-t)^{-\frac{1}{2}}f(t)dt$$

En utilisant le fait

$$\mathcal{L}\{y'(x)\} = s\mathcal{L}\{y(x)\} - y(0) \quad (3.35)$$

en (3.34), on obtient:

$$\mathcal{L}\{v(x)\} = \frac{1}{\pi}\mathcal{L}\{y'(x)\} \quad (3.36)$$

En prenant \mathcal{L}^{-1} des deux côtés de (3.36) ,on obtient:

$$v(x) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt \quad (3.37)$$

qui sera utilisé pour la détermination de la solution $v(x)$. Après avoir déterminé $v(x)$,puis la solution $u(x)$ de (3.30) suit immédiatement en utilisant

$$u(x) = F^{-1}(v(x))$$

Notez que la formule (3.37) sera utilisée pour l'équation integrale d'Abel non linéaire.

Exemple 3.2.4 :

Résoudre l'équation intégrale d'Abel non linéaire:

$$x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} u^2(t) dt \quad (3.38)$$

On suppose $F(u(x)) = u^2(x)$ est inversible.

On pose

$$v(x) = u^2(x) \quad (*)$$

alors

$$u(x) = \bar{+} \sqrt{v(x)} \quad (**)$$

Substituée (*) dans (3.38), on obtient:

$$x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}} v(t) dt$$

En remplaçant $f(x) = x$ dans la formule (3.37), on obtient:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{t}{\sqrt{x-t}} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dx} \left(\frac{4}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} x^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Les solutions exactes sont donc données par

$$u(x) = \bar{+} \sqrt{\frac{2}{\pi} x^{\frac{1}{2}}}$$

Conclusion générale

La transformée de Laplace est un outil très puissant dans l'analyse mathématique.

Au term de ce mémoire nous pouvons résoudre certaines équations intégrales telles que: équations intégrales de Volterra et équations intégrales d'Abel, en utilisant la transformée de Laplace avec quelques techniques de calculs.

En fin c'est très interessant de développer cette techniques àfin de résoudre d'autre type d'équations .

Partie I

Annexe

Il existe une fonction matlab qui calcule la transformée de Laplace d'une fonction quelconque c'est la fonction `<<laplace>>` :

Programme :

```
clear all
clc
syms t
syms s
g=input ('entrer la fonction g= ');
G=laplace(g,t,s)
pretty(G)
```

Exemple 3.2.5 :

`>> entrer la fonction g= exp(t)`

`>>G =`

$1/(s - 1)$

`>>ans =`

$\frac{1}{(s-1)}$

Exemple 3.2.6 :

`>> entrer la fonction g= cos(2 * t)`

`>>G =`

$s/(s^2 + 4)$

`>>ans =`

$\frac{s}{(s^2+4)}$

Exemple 3.2.7 :

`>> entrer la fonction g= sin(t)`

`>>G =`

$1/(s^2 + 1)$

`>>ans =`

$\frac{1}{(s^2+1)}$

Bibliographie

- [1] **R. Kress**, Linear Integral Equations, Springer-Verlag, New York, 1999.
- [2] **B. Gagui**, Sur les Equations Intégrales dans les Espaces d'Orlicz, Thèse de doctorat en science, Université de M'sila, 2015
- [3] **Kern M**, Problèmes Inverses, Ecole supérieure d'ingénieurs Léonard de Vinci, 2003.
- [4] **Hochstadt. H**, Integral Equations. John Wiley and Sons .New York 1989.
- [5] **Aidjouli Hadjer**, Résolution des Equations Intégrales Non Linéaire Type Volterra, Mémoire de master, Université de M'sila, 2016-2017.
- [6] **A.M. Wazwaz**, Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications ,Saint Xavier University Chicago, IL 60655, USA,2011.
- [7] **B.Lakehali**, Sur les Equations Intégrales Singulières, Thèse de docteur en sciences, Université de Biskra, 2016.
- [8] **W. Mydlarczyk and W.Okraśinski**, Positive solutions to a nonlinear Abel-type integral equation on the whole line ,Computers and Mathematics with Applications 41 (2001) 835-842.
- [9] **A.M. Wazwaz**, A First course in Integral Equations, World Scientific, Singapore,(1997).
- [10] **A.Khirani**, Résolutions des équations intégrales non linéaires type Volterra, Mémoire de magistère, Université de M'sila, 2011.

- [11] **Ahmed Lesfari**. Distributions, analyse de FOURIER et transformation de LAPLACE, cours et exercices, 2012.
- [12] **Lang Fred**. transformation de Laplace, Version 2011.
- [13] **Pierre-Jean Hormière**. transformation de Laplace, 2016.
- [14] **F.G TRICOMI**, Integral equations . University press, Combridge, 1957.
- [15] **Kanwal, R.P**. Linear Integral Equations, Theory and Technique. Academic Press, New York 1971.

Résumé :

La transformation de Laplace est un outil fondamental de l'analyse mathématique. Elle est utilisée dans plusieurs domaines différents : l'étude des équations aux dérivées partielles, l'étude des équations intégrales, l'analyse des signaux etc..

Dans ce mémoire on va montrer l'utilité de la transformée de Laplace dans la résolution de certaines équations intégrales.

Mots clés : transformée de Laplace, équations intégrales, équation d'Abel

Abstract :

The Laplace transformation is a fundamental tool of the analysis. It is used in several different domains :the study of partial differential equations, the study of integral equations, the signal analysis, etc...

In this memory we will show the utility of the Laplace transform in solving some integral equations.

Keywords : Laplace's transformed ,integral equations, Abel's equation.

ملخص:

يعد تحويل لابلاس أداة أساسية للتحليل. و يستخدم في العديد من المجالات المختلفة: دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية ،دراسة المعادلات التكاملية ، تحليل الإشارات إلخ.. في هذه الذاكرة سوف نظهر فائدة تحويل لابلاس في حل بعض المعادلات التكاملية .

الكلمات المفتاحية : تحويل لابلاس ، المعادلات التكاملية ، معادلة أبال.