



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE M'SILA

Faculté des Mathématiques et de l'Informatique

Département de Mathématiques



MEMOIRE DE FIN D'ETUDE

Présenté pour l'obtention du Diplôme de **MASTER**

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : Analyse Mathématique et Numérique

Par

Hechaichi Selma

Thème

*Résolution Numérique des équations
Intégrales linéaires de Volterra avec
Retard par les Polynômes de Bernstein*

Devant le jury :

NADIR Mostefa	Prof,	Université de M'sila	<i>Président</i>
KHIRANI Amina	M.C.A,	Université de M'sila	<i>Encadreur</i>
DJAIDJA Noui	M.C.B,	Université de M'sila	<i>Examineur</i>

Promotion : 2022 / 2023

Remerciements

Au nom du Dieu Clément et Miséricordieux

Avant tout, je remercie **DIEU** le Tout Puissant de m'avoir donné le courage, la volonté, la patience et la santé durant toutes ces années de recherche et que grâce à Lui ce travail de a pu être réaliser. **Je Lui dois tout.**

Je tiens à exprimer ma profonde grantitude envers (Ma encadreur; Maitraisse **Amina KHIRANI**) qui a accepté d'encadrer ce travail. Je la remercie aussi pour sa guidance, ses conseils et pour m'avoir écouté et encouragé durant la préparation de ce mémoire. Merci aussi pour toutes les relecteurs, suggestions et commentaires qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire de Master.

Ma sincère reconnaissance à tous les membres du jury pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de présider et examiner ce travail.

NADIR Mostefa

DJADJA Noui

Je ne saurais oublier dans mes remerciements tous ceux qui m'ont apporté leur contribution et leur aide de près ou de loi et de ce fait m'ont permis d'achever ce travail.

Dédicace

Je dédie ce travail:

A ma chère mère et à mon père qui n'ont jamais cessé de me supporter, me soutenir et m'encourager durant mes années d'études. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma profonde gratitude et le connaissance.

A mes frères, mes grands-parents et ma famille qui me donnent de l'amour et de la vivacité.

A tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin et ceux qui ont partagé avec moi les moments d'émotion lors de la réalisation de ce travail et qui m'ont chaleureusement supporté et encouragé tout au long de mon parcours.

A tous mes amis qui m'ont toujours encouragé, et à qui je souhaite plus de succès.

Merci!!!

Table des matières

Notations	1
Introduction	1
1 Préliminaires	3
1.1 Notions d'analyse fonctionnelle	3
1.1.1 Théorème d'Ascoli-Arzelà	3
1.1.2 Opérateurs complètement continus	4
1.1.3 Théorème du point fixe de Schauder	5
1.2 Notions d'analyse numérique	6
1.2.1 Définition et propriétés des polynômes de Bernstein	6
1.2.2 Méthode de collocation	11
2 Introduction aux équations intégrales linéaires avec retard	12
2.1 Définition d'équation intégrale avec retard	12
2.2 Classification des équations intégrales linéaires avec retard	13
2.3 Résultats d'existence pour l'équation intégrale linéaire avec retard	14
3 Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Volterra avec retard par les polynômes de Bernstein	17
3.1 Description de la méthode	17
3.2 Exemples Numériques	22
3.2.1 Exemple 01	22

3.2.2 Exemple 02	25
3.2.3 Exemple 03	27
Conclusion générale	29
Bibliographie	30

Notations

$C([a; b])$	L'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$
$[a; b]$	Intervalle réel
φ	Fonction inconnue
φ^*	Solution approximée
A	Opérateur linéaire
H	Espace de Hilbert
I	Opérateur d'identité
$K(x; y)$	Noyau de l'intégrale
T	Opérateur linéaire compact $T = I - A$
a_i	Facteurs des polynômes de Bernstein
$B_{i,n}(x)$	Polynômes de Bernstein
$EILV$	Equation Integrale Linéaire de Volterra

INTRODUCTION

Une équation intégrale est une équation dont l'une des indéterminées apparaît sous le signe d'intégrale. Les équations intégrales sont l'un des principaux outils dans divers domaines de la mathématique appliquée, de la physique et de l'ingénierie.

Les équations intégrales linéaires de Volterra de deuxième espèce avec retard sont l'une des équations intégrales les plus importantes peut être définie par:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)u(t - \tau)dt$$

L'équation précédente est fréquemment rencontrée dans les processus de modélisation physique et biologique [8, 5]. La monographie [6] présente un aperçu historique des modèles mathématiques en biologie, qui peuvent être décrits par des équations intégrales de Volterra avec des retards constants.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour la résolution numérique de ces équations intégrales linéaires de Volterra avec retard, Mustafa and Lattif Ibrahim (2008) ont proposé une solution numérique de l'équation intégrale de Volterra avec retard en utilisant des méthodes de Block. Nouri and Maleknejad (2016) ont proposé une solution numérique en utilisant des méthodes de Block-pulse.

Dans ce mémoire, on présente une méthode de collocation en utilisant les polynômes de Bernstein à fin d'approcher la solution d'une équation intégrale linéaire de Volterra de deuxième espèce avec retard, puis on étudie la validité et l'applicabilité de la méthode proposée à l'aide des exemples.

Ce mémoire est divisé en 3 chapitres comme suit:

Chapitre 01: Ce chapitre s'agit d'une introduction à l'analyse fonctionnelle et à l'analyse numérique, où nous avons utilisé les concepts de base de l'analyse fonctionnelle:

Théorème d'Ascoli-Arzelà, Opérateur complètement continu, Théorème du point fixe de Schauder. Dans l'analyse numérique, nous avons mentionné la définition et les propriétés des polynômes de Bernstein en plus la méthode de collocation.

Chapitre 02: Ce chapitre s'agit d'une introduction à l'équation intégrale linéaire avec retard, où nous avons mentionné la définition d'une équation intégrale avec retard et sa classification. Il ya aussi une étude sur l'existence des solutions à l'équation intégrale linéaire avec retard

Chapitre 03: Ce chapitre est consacré à l'étude d'une solution numérique de l'équation intégrale linéaire de Volterra avec retard par la méthode de collocation, en utilisant les polynômes de Bernstein, tout en démontrant l'efficacité de cette méthode à travers les exemples présentés.

Chapitre 1

Préliminaires

L'objectif de ce chapitre est de définir quelques notions fondamentales et rappeler des propriétés qui seront utilisées dans la suite de ce mémoire.

1.1 Notions d'analyse fonctionnelle

1.1.1 Théorème d'Ascoli-Arzelà

Soit (K, d) un espace métrique compact et $C(K, \mathbf{R}^n)$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues de K dans \mathbf{R}^n , sous la sup-norme $|\cdot|_\infty$.

Théorème 1.1.1 (Ascoli-Arzelà) *Un sous-ensemble Y de $C(K, \mathbf{R}^n)$ est relativement compact si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:*

(i) Y est borné, c'est-à-dire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$|u(x)| \leq c$$

pour tout $x \in K$ et $u \in Y$.

(ii) Y est équicontinue, c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $u \in Y$

$$|u(x) - u(x')| < \varepsilon$$

chaque fois que $x, x' \in K$ et $d(x, x') < \delta$.

Corollaire 1.1.1 Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^n . Tout sous-ensemble borné de l'espace $(C^1(\overline{\Omega}; \mathbf{R}^n), |\cdot|_{1,\infty})$ est relativement compact dans $(C(\overline{\Omega}; \mathbf{R}^n), |\cdot|_{\infty})$.

Remarque 1.1.1 Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^n et $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Tout sous-ensemble borné de l'espace $(C^k(\overline{\Omega}; \mathbf{R}^n), |\cdot|_{k,\infty})$ est relativement compact dans $(C^{k-1}(\overline{\Omega}; \mathbf{R}^n), |\cdot|_{k-1,\infty})$.

1.1.2 Opérateurs complètement continus

Définition 1.1.1 Soient X, Y des espaces de Banach et $T : D \subset X \rightarrow Y$.

- (a) L'opérateur T est dit borné s'il envoie tout sous-ensemble borné de D dans un sous-ensemble borné de Y .
- (b) L'opérateur T est dit complètement continu s'il est continu et envoie tout sous-ensemble borné de D en un sous-ensemble relativement compact de Y .
- (c) L'opérateur T est dit de rang fini si $T(D)$ est dans un sous-espace de dimension finie de Y .

Il est clair qu'un opérateur continu $T : D \subset X \rightarrow Y$ est complètement continu si et seulement si pour toute suite bornée (u_k) avec $u_k \in D$, la suite $(T(u_k))$ admet une sous-suite convergente.

Notez que tout opérateur complètement continu est un opérateur borné.

Théorème 1.1.2 (1) Si les opérateurs $T_1, T_2 : D \subset X \rightarrow Y$ sont bornés. (complètement continu) alors pour tout $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ l'opérateur $\alpha T_1 + \beta T_2$ est borné (respectivement, complètement continu).

- (2) Soient X, Y, Z des espaces de Banach et T_1, T_2 deux opérateurs définis comme suit:

$$D_1 \xrightarrow{T_1} T_1(D_1) \subset D_2 \xrightarrow{T_2} Z, \quad D_1 \subset X, \quad D_2 \subset Y.$$

Si les deux opérateurs T_1, T_2 sont bornés alors l'opérateur composite $T_2 T_1$ est également borné. Si l'un des opérateurs T_1, T_2 est continu borné et l'autre est complètement continu, alors $T_2 T_1$ est complètement continu.

Théorème 1.1.3 (1) Si les opérateurs $T_k : D \rightarrow Y$, $D \subset X$, $k = 1, 2, \dots$ sont complètement continue et $T : D \rightarrow Y$, et tel que

$$T(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} T_k(u) \quad (1.1)$$

uniformément sur tout sous-ensemble borné de D , alors T est complètement continu aussi.

(2) Soit $D \subset X$ un ensemble fermé borné et $T : D \rightarrow Y$ un opérateur complètement continu. Alors il existe une suite d'opérateurs continus $T_k : D \rightarrow Y$ de rang fini telle que (1.1) soit vérifiée, uniformément sur D , et

$$T_k(D) \subset \text{conv}(T(D))$$

pour chaque k .

1.1.3 Théorème du point fixe de Schauder

Théorème 1.1.4 (Schauder) Soit X un espace de Banach, $K \subset X$ un sous-ensemble compact, convexe non vide et soit $T : K \rightarrow K$ un opérateur continu. Alors T admet au moins un point fixe.

Preuve. [13] ■

Théorème 1.1.5 (Schauder) Soit X un espace de Banach, $D \subset X$ un ensemble fermé, borné, convexe, non vide et soit $T : D \rightarrow D$ un opérateur complètement continu. Alors T admet au moins un point fixe.

Nous pouvons dériver le théorème (1.1.5) du théorème (1.1.4) via le résultat suivant.

Lemme 1.1.1 (Mazur) L'enveloppe convexe de tout sous-ensemble relativement compact d'un espace de Banach est relativement compact.

1.2 Notions d'analyse numérique

1.2.1 Définition et propriétés des polynômes de Bernstein

Définition 1.2.1 (*polynômes de Bernstein*) Les polynômes de Bernstein de degré n sont définies sur $[0, 1]$ par

$$B_{i,n}(x) = \begin{cases} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Exemple 1.2.1 Dans le cas simple on obtient

Les polynômes de Bernstein de degré $n = 1$ sont :

$$B_{0,1}(x) = 1 - x,$$

$$B_{1,1}(x) = x.$$

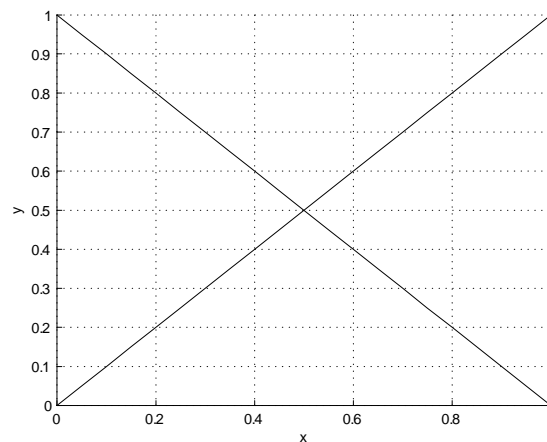


Figure 1.2.1 : Polynômes de Bernstein de degré 1

Les polynômes de Bernstein de degré $n = 2$ sont:

$$B_{0,2}(x) = (1-x)^2,$$

$$B_{1,2}(x) = 2x(1-x),$$

$$B_{2,2}(x) = x^2.$$

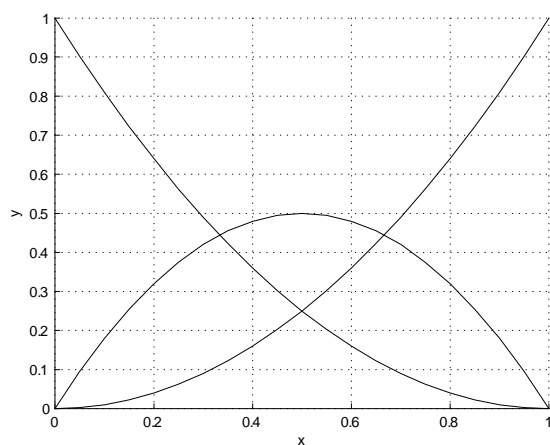


Figure 1.2.2 : Polynômes de Bernstein de degré 2

les polynômes de Bernstein de degré $n = 3$ sont:

$$B_{0,3}(x) = (1-x)^3,$$

$$B_{1,3}(x) = 3x(1-x)^2,$$

$$B_{2,3}(x) = 3x^2(1-x),$$

$$B_{3,3}(x) = x^3.$$

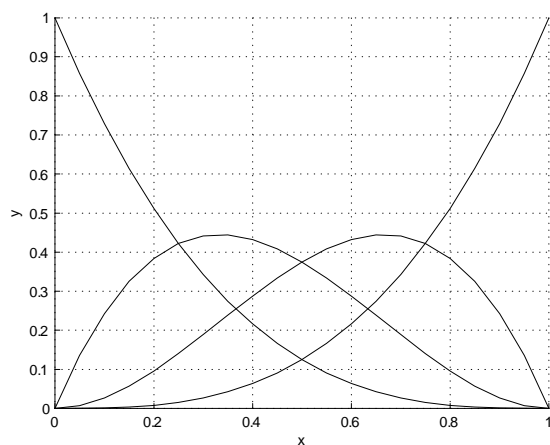


Figure 1.2.3 : Polynômes de Bernstein de degré 3

Propriétés des polynômes de Bernstein

Définition 1.2.2 *Les polynômes de Bernstein admettent les propriétés suivantes:*

- **Partition de l'unité:**

$$\sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) = 1$$

Preuve.

$$\begin{aligned} 1 &= [(1-x) + x]^n \\ &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^n B_{i,n}(x) \end{aligned}$$

■

- **Positivité:** Les polynômes de Bernstein sont non négatif sur $[0, 1]$

$$\forall x \in [0, 1], B_{i,n}(x) \geq 0$$

Preuve.

$$B_{i,n}(x) = \begin{cases} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} & \text{si } 0 \leq i \leq n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$\binom{n}{i} > 0$ et pour $x \in [0, 1]$, $x \geq 0$ et $1-x \geq 0 \Rightarrow x^i \geq 0$ et $(1-x)^{n-i} \geq 0$ donc

$$\forall x \in [0, 1], B_{i,n}(x) \geq 0$$

■

- **Symétrie:**

$$\text{si } 0 \leq i \leq n \text{ alors } B_{i,n}(1-x) = B_{n-i,n}(x)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \forall i \in 0, \dots, n, B_{i,n}(y) &= \binom{n}{i} y^i (1-y)^{n-i} \\ \Rightarrow B_{i,n}(1-x) &= \binom{n}{i} (1-x)^i (1-(1-x))^{n-i} \end{aligned}$$

$$= \binom{n}{i} x^{n-i} (1-x)^i$$

Or

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{n!}{(n-i)!(n-(n-i))!} \\ &= \binom{n}{n-i} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} B_{i,n}(1-x) &= \binom{n}{n-i} x^{n-i} (1-x)^i \\ &= B_{n-i,n}(x) \end{aligned}$$

■

• **Récurrence:**

$$B_{i,n}(x) = (1-x)B_{i,n-1}(x) + xB_{i-1,n-1}(x)$$

avec $B_{0,0}(x) = 1$ et $B_{j,n}(x) = 0$, $\forall j \notin \{0, \dots, n\}$

Preuve.

$$\begin{aligned} \binom{n}{i} &= \frac{n!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{(n-i+i)(i-1)!}{i!(n-1)!} \\ &= \frac{(n-i)(i-1)! + i(n-1)!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{(n-i)(i-1)!}{i!(n-i)!} + \frac{i(n-1)!}{i!(n-i)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} \end{aligned}$$

Pour $i \in [0, n]$

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\ &= \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i} + \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (1-x) \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i-1} + x \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1} (1-x)^{n-i} \\
 &= (1-x) B_{i,n-1}(x) + x B_{i-1,n-1}(x).
 \end{aligned}$$

■

Théorème 1.2.1 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, les polynômes de Bernstein $(B_{i,n})_{0 \leq i \leq n}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$.*

Preuve. Il suffit de prouver que la famille de $n+1$ polynômes

$$Q_{i,n}(X) = X^i(1-X)^{n-i}$$

forme une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$.

Pour cela, on va procéder par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$. Notons en effet $P(n) : \forall m \leq n, (Q_{k,m})_{0 \leq k \leq m}$ est une famille libre de $\mathbb{R}_m[X]$.

$P(0)$ est vraie. Soit $n \geq 0$ tel que $P(n)$ est vraie et considérons des réels $\lambda_0, \dots, \lambda_{n+1}$ tel que

$$\lambda_0 Q_{0,n+1} + \dots + \lambda_{n+1} Q_{n+1,n+1},$$

soit

$$\lambda_0(1-X)^{n+1} + \dots + \lambda_{n+1} X^{n+1} = 0.$$

Si on évalue cette égalité en $X=0$, alors on trouve $\lambda_0 = 0$, et si on l'évalue en 1, alors on trouve $\lambda_{n+1} = 0$. Ceci suffit si $n=0$, sinon l'égalité devient

$$\lambda_1(1-X)^n X + \dots + \lambda_n(1-X) X^n = 0.$$

On peut simplifier par $X(1-X)$ et on trouve

$$\lambda_1(1-X)^{n-1} + \dots + \lambda_n X^{n-1} = 0$$

soit

$$\lambda_1 Q_{0,n-1} + \dots + \lambda_n Q_{n-1,n-1} = 0.$$

Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ ce qui prouve que $P(n+1)$ est vraie. ■

1.2.2 Méthode de collocation

Le principe de la méthode de collocation appliqué à la résolution numérique de l'équation opérateur

$$\varphi - A\varphi = f \tag{1.2}$$

consiste à chercher une solution approchée dans un sous espace de dimension finie, en exigeant que l'équation (1.2) soit vérifiée seulement sur un nombre fini de points appelés points de collocation

En pratique, nous choisissons une suite des sous espaces $X_n \subset X$, $n \geq 0$ de dimension finie des sous espaces de $C([0, 1])$ ou de $L^2([0, 1])$. Soit $\{B_0, \dots, B_n\}$ une base de X_n . On cherche une fonction $u_n \in X_n$, de la forme

$$u_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x), \quad x \in [0, 1]$$

Chapitre 2

Introduction aux équations intégrales linéaires avec retard

Dans ce chapitre, on donne la définition d'équation intégrale linéaire avec retard et leur classification, ainsi que résultat d'existence pour l'équation intégrale linéaire avec retard.

2.1 Définition d'équation intégrale avec retard

On introduit la forme générale de l'équation intégrale avec retard suivante:

$$u(x) = \int_{x-\tau}^x f(t, u(t)) dt \quad (2.1)$$

cette équation peut être interprétée comme un modèle de propagation de certaines maladies infectieuses avec un taux de contact qui varie selon les saisons. Dans cette équation $u(t)$ est la proportion d'infectieux dans une population au temps t , τ est la durée pendant laquelle un individu reste infectieux, et $f(t, u(t))$ est la proportion de nouveaux infectieux par unité de temps.

Remarque 2.1.1 *Nous avons d'autres formes d'équations intégrales linéaires de Volterra avec retard, telles que:*

$$u(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t)u(t - \tau) dt \quad (2.2)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^{x-\tau} k(x, t)u(t)dt \quad (2.3)$$

$$u(x) = f(x) + \int_a^{x-\tau} k_1(x, t)u(t)dt + \int_a^x k_2(x, t)u(t)dt \quad (2.4)$$

Dans le sujet que nous étudions, nous utilisons l'équation intégrale linéaire de Volterra avec retard de la forme (2.2).

2.2 Classification des équations intégrales linéaires avec retard

Les équations intégrales linéaires apparaissent dans de nombreux types. Les types dépendant principalement des limites d'intégration et du noyau de l'équation, nous intéresserons aux types d'équations intégrales linéaires avec retard.

A-Équations intégrales de Fredholm avec retard:

Définition 2.2.1 *Pour les équations intégrales de Fredholm avec retard, les limites d'intégration sont fixes. De plus, la fonction inconnue $u(x)$ ne peut apparaître qu'à l'intérieur de l'équation intégrale sous la forme:*

$$f(x) = \int_a^b k(x, t)u(t - \tau)dt.$$

C'est ce qu'on appelle l'équation intégrale de Fredholm de première espèce avec retard. Cependant, pour les équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce avec retard, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégrale. Le deuxième espèce est représenté par la forme:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x, t)u(t - \tau)dt.$$

Exemple 2.2.1 *Des exemples des deux espèces sont donnés par:*

$$\frac{\sin(x) - x \cos(x)}{x^2} = \int_0^1 \sin(xt)u(t - \tau)dt,$$

et

$$u(x) = x + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (x - t)u(t - \tau)dt.$$

respectivement.

B-Équations intégrales de Volterra avec retard:

Définition 2.2.2 Dans les équations intégrales de Volterra avec retard, au moins une des limites d'intégration est une variable. Pour les équations intégrales de Volterra de première espèce, la fonction inconnue $u(x)$ n'apparaît qu'à l'intérieur du signe intégrale sous la forme:

$$f(x) = \int_0^x k(x, t)u(t - \tau)dt.$$

Cependant, dans les équations intégrales de Volterra avec retard du deuxième espèce, la fonction inconnue $u(x)$ apparaît à l'intérieur et à l'extérieur du signe intégrale. Le deuxième espèce est représenté par la forme:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x k(x, t)u(t - \tau)dt.$$

Exemple 2.2.2 exemples des équations intégrales de Volterra du premier espèce sont

$$x \exp(-x) = \int_0^x \exp(t - x)u(t - \tau)dt,$$

et

$$5x^2 + x^3 = \int_0^x (5 + 3x - 3t)u(t - \tau)dt.$$

Cependant, des exemples d'équations intégrales de Volterra du deuxième espèce sont

$$u(x) = \sin(x - 1) + \sin(1) + \sin(x) - x \cos(1) + \int_0^x (x - t)u(t - \tau)dt,$$

et

$$u(x) = \exp(x) - (x(\exp(x) - 1)) \exp(-1) + \int_0^x (x)u(t - \tau)dt.$$

2.3 Résultats d'existence pour l'équation intégrale linéaire avec retard

Dans cette section, nous étudions l'existence de solutions continues sur un intervalle $[0, x_1]$, pour le problème de la valeur initiale

$$\begin{cases} u(x) = \int_{x-\tau}^x f(t, u(t))dt, & 0 \leq x \leq x_1. \\ u(x) = \varphi(x), & -\tau \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Nous supposons

$$f \in C([- \tau, x_1] \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n), \varphi \in C([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n)$$

telle que la condition suivante vérifie

$$\varphi(0) = \int_{-\tau}^0 f(t, \varphi(t)) dt. \quad (2.6)$$

Théorème 2.3.1 *Supposons que $f \in C([- \tau, x_1] \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$, $\varphi \in C([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ et que (2.6) est vérifié. Alors l'opérateur d'intégrale de retard $T : D(T) \rightarrow C([0, x_1]; \mathbf{R}^n)$ donné par*

$$T(u)(x) = \int_{x-\tau}^x f(t, \tilde{u}(t)) dt \quad (x \in [0, x_1]),$$

où

$$D(x) = \{u \in C([0, x_1]; \mathbf{R}^n) : u(0) = \varphi(0)\}$$

et

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{for } x \in [-\tau, 0], \\ u(x) & \text{for } x \in [0, x_1], \end{cases}$$

est complètement continue.

Preuve. Utilisez le théorème d'Ascoli-Arzelà et suivez les mêmes étapes que la preuve du théorème (3.1) [13]. Nous omettons les détails. ■

Théorème 2.3.2 *Supposons $f \in C([- \tau, x_1] \times \mathbf{R}^n; \mathbf{R}^n)$, $\varphi \in C([- \tau, 0]; \mathbf{R}^n)$ et que (2.6) est vérifié. Supposons de plus qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$ tel que*

$$f(x, z) \leq \alpha |z| + \beta \quad (2.7)$$

pour tout $z \in \mathbf{R}^n$ et $x \in [0, x_1]$. Alors (2.5) admet une solution $u \in C([- \tau, x_1]; \mathbf{R}^n)$.

Preuve. La preuve ressemble beaucoup à la preuve du théorème (3.6) [13]. Soit

$$\gamma = \max_{x \in [-\tau, 0]} |f(x, \varphi(x))|.$$

Nous avons

$$|T(u)(x)| \leq \tau \gamma + \int_0^x |f(t, u(t))| dt$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \tau\gamma + \alpha \int_0^x |u(t)| dt + \beta x_1 \\
 &= \tau\gamma + \beta x_1 + \alpha \int_0^x |u(t)| \exp(-\theta t) \exp(\theta t) dt \\
 &\leq \tau\gamma + \beta x_1 + \alpha |u(t) \exp(-\theta t)|_\infty \int_0^x \exp(\theta t) dt \\
 &\leq \tau\gamma + \beta x_1 + \alpha |u(t) \exp(-\theta t)|_\infty \theta^{-1} \exp(\theta x).
 \end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$|T(u)(x) \exp(-\theta x)|_\infty \leq \tau\gamma + \beta x_1 + \alpha \theta^{-1} |u(t) \exp(-\theta t)|_\infty.$$

Choisissez maintenant $\theta > \alpha$ et un nombre $R > 0$ avec

$$\tau\gamma + \beta x_1 + \alpha \theta^{-1} R \leq R.$$

Alors $T'(B) \subset B$, où

$$B = \{u \in D(T) : |u(x) \exp(-\theta x)| \leq R \text{ pour tout } x \in [0, x_1]\}.$$

Il est clair que B est un sous-ensemble fermé borné convexe non vide de $C([0, x_1]; \mathbf{R}^n)$.

La conclusion est maintenant immédiate à partir du théorème (1.1.5). ■

Comme dans la section précédente, le lecteur pourrait essayer d'obtenir des résultats d'existence pour (2.5) en supposant au lieu de (2.7) une condition de la forme

$$|f(x, z)| \leq \psi(|z|)$$

avec différents types de fonction $\psi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$.

Chapitre 3

Résolution numérique des équations intégrales linéaires de Volterra avec retard par les polynômes de Bernstein

Dans ce chapitre, on va résoudre numériquement les équations intégrales linéaires de Volterra avec retard de deuxième espèce par la méthode de collocation, en utilisant les polynômes de Bernstein.

3.1 Description de la méthode

On considère l'équation intégrale linéaire de Volterra avec retard de deuxième espèce est donnée par:

$$u(x) = f(x) + \int_0^x k(x, t)u(t - \tau)dt \quad (3.1)$$

tels que, $u(x)$ une fonction inconnue à déterminer, $k(x, t)$ est le noyau et f est une fonction connue.

Pour trouver une solution approchée de l'équation (3.1), on utilise la méthode de collocation.

Où $u(x)$ approximée par les polynômes de Bernstein sur $[0, 1]$ par

$$u(x) = \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x) = aB(x) \quad (3.2)$$

Tels que, a est un vecteur et $B(x)$ est une matrice donnée par

$$a = [a_0, a_1, \dots, a_n]^t$$

et

$$B(x) = [B_{0,n}(x), B_{1,n}(x), \dots, B_{n,n}(x)]$$

et $B_{i,n}(x)$ sont les polynômes de Bernstein de degré n et ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), définis sur $[0, 1]$ par

$$B_{i,n}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

et $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ sont des coefficients inconnus à déterminer.

La substitution de la relation (3.2) en (3.1) nous donne l'équation suivante

$$\sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(x) - \int_0^x k(x, t) \sum_{i=0}^n a_i B_{i,n}(t - \tau) dt = f(x) \quad x \in [0, 1]$$

Pour déterminer les coefficients inconnus $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, nous choisissons des points collocation

$$\begin{cases} x_{j+1} = x_j + \frac{(b-a)}{n}, & j = 0, 1, 2, \dots, n \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Alors, on obtient un système linéaire

$$Ax = b \tag{3.3}$$

tels que

$$A = \left[B_{i,n}(x_j) - \int_0^{x_j} k(x_j, t) B_{i,n}(t - \tau) dt \right]_{(n+1) \times (n+1)}^t, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n \text{ et } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$b = [f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)]^t$$

$$x = [a_0, a_1, \dots, a_n]^t$$

le système linéaire (3.3) peut être résolu par n'importe quelle méthode de résolution de système linéaire pour trouver les $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$

Ces $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ lorsqu'ils remplacés dans (3.2) produisent $u(x)$ approximativement.

Exemple 3.1.1 On considère l'équation intégrale de volterra linéaire avec retard de deuxième espèce par:

$$u(x) = \exp(x) - (x(\exp(x) - 1)) \exp(-1) + \int_0^x (x)u(t - \tau)dt$$

avec la solution exacte et donnée par

$$u(x) = \exp(x)$$

tel que

$$f(x) = \exp(x) - (x(\exp(x) - 1)) \exp(-1)$$

$$k(x, t) = x$$

$$\tau = 0.99086$$

on prend $n = 3$, alors

$$u(x) = \sum_{i=0}^3 a_i B_{i,3}(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (3.4)$$

et on a

$$B_{i,3}(x) = \binom{3}{i} x^i (1-x)^{3-i}, \quad i = 0, 1, 2, 3$$

Donc, (3.4) devient

$$\sum_{i=0}^3 a_i \binom{3}{i} x^i (1-x)^{3-i} = \exp(x) - (x(\exp(x) - 1)) \exp(-1) + \int_0^x (x) \left[\sum_{i=0}^3 a_i \binom{3}{i} (t - \tau)^i (1 - t + \tau)^{3-i} \right] dt$$

pour déterminer les coefficients inconnus $a_i (i = 0, 1, 2, 3)$, nous choisissons les points collocation

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1$$

Alors, on obtient un système linéaire

$$Ax = b$$

tel que

$$A = [B_{j,i}]_{4 \times 4}^t, \quad j = 0, 1, 2, 3 \text{ et } i = 0, 1, 2, 3.$$

$$A = \left[B_{i,3}(x_j) - \int_0^{x_j} k(x_j, t) B_{i,3}(t - \tau) dt \right]_{4 \times 4}^t \quad i = 0, 1, 2, 3 \text{ et } j = 0, 1, 2, 3.$$

$$b = [f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3)]^t$$

$$x = [a_0, a_1, a_2, a_3]^t$$

et après le calcul de toutes les intégrales, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.3838 & 1.3725 & -0.2016 & 0.1018 \\ -2.0688 & 2.8270 & -0.6578 & 0.4551 \\ -3.6864 & 4.1412 & -1.6958 & 1.2410 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.34710 \\ 1.71530 \\ 2.08616 \end{pmatrix}$$

$$d'où x = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.3214 \\ 1.7175 \\ 2.5891 \end{pmatrix}$$

Donc

$$u(x) = a_0 B_{0,3}(x) + a_1 B_{1,3}(x) + a_2 B_{2,3}(x) + a_3 B_{3,3}(x)$$

$$u(x) = (1-x)^3 + 1.3214 [3x(1-x)^2] + 1.7175 [3x^2(1-x)] + 2.5891x^3$$

$$u(x) = 1 + 0.9642x + 0.4008x^2 + 0.2241x^3 \simeq \exp(x)$$

Exemple 3.1.2 on considère l'équation intégrale linéaire de Volterra avec retard de deuxième espèce par:

$$u(x) = \sin(x-1) + \sin(1) + \sin(x) - x \cos(1) + \int_0^x (x-t)u(t-\tau)dt$$

avec solution exacte est donné par

$$u(x) = \sin(x)$$

tel que

$$f(x) = \sin(x-1) + \sin(1) + \sin(x) - x \cos(1)$$

$$k(x, t) = x - t$$

$$\tau = 0.45$$

on prend $n = 3$, alors

$$u(x) = \sum_{i=0}^3 a_i B_{i,3}(x)$$

Donc, devient

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^3 a_i \binom{3}{i} x^i (1-x)^{3-i} &= \sin(x-1) + \sin(1) + \sin(x) - x \cos(1) \\ &+ \int_0^x (x-t) \left[\sum_{i=0}^3 a_i \binom{3}{i} (t-\tau)^i (1-t+\tau)^{3-i} \right] dt \end{aligned}$$

Pour déterminer les coefficients inconnus $a_i (i = 0, 1, 2, 3)$, nous choisissons les points collocation

$$x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 1.$$

Alors, on obtient un système linéaire

$$Ax = b$$

tel que

$$\begin{aligned} A &= [B_{j,i}]_{4 \times 4}^t, \quad j = 0, 1, 2, 3 \text{ et } i = 0, 1, 2, 3 \\ A &= \left[B_{i,3}(x_j) - \int_0^x k(x_j, t) B_{i,3}(t-\tau) dt \right]_{4 \times 4}^t \quad i = 0, 1, 2, 3 \text{ et } j = 0, 1, 2, 3 \\ b &= [f(x_0), f(x_1), f(x_2), f(x_3)]^t \\ x &= [a_0, a_1, a_2, a_3]^t \end{aligned}$$

et après le calcul de toutes les intégrales, on obtient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1615 & 0.5487 & 0.1945 & 0.0395 \\ -0.3939 & 0.4938 & 0.3757 & 0.3021 \\ -0.7855 & 0.4029 & -0.1241 & 1.0068 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 1.3471 & 1.7153 & 2.0862 \end{pmatrix}^t$$

$$\text{d'où } x = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0.3342 & 0.7381 & 1.0922 \end{pmatrix}^t$$

Donc

$$u(x) = a_0 B_{0,3} + a_1 B_{1,3} + a_2 B_{2,3} + a_3 B_{3,3}$$

$$u(x) = 0.3342 [3x(1-x)^2] + 0.7381 [3x^2(1-x)] + 1.0922x^3$$

$$u(x) = 1.0026x + 0.0213x^2 - 0.1195x^3 \simeq \sin(x)$$

3.2 Exemples Numériques

Dans cette section, on va traité quelques exemples pour résoudre les équations intégrales linéaires de Volterra avec retard de deuxième espèce, avec différentes valeurs pour τ . En utilisant les polynômes de Bernstein et méthode de collocation.

3.2.1 Exemple 01

On considère l'équation intégrale linéaire de volterra avec retard de deuxième espèce par:

$$u(x) = \exp(x) - (x(\exp(x) - 1)) \exp(-1) + \int_0^x (x)u(t - \tau)dt$$

où la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \exp(x)$$

on prend $n = 10$, alors

Tableau: résultats de l'exemple 01

	$\tau = 1$	$\tau = 0.99$	$\tau = 0.03$
x	Erreur $ u_{exact} - u_{app} $	Erreur $ u_{exact} - u_{app} $	Erreur $ u_{exact} - u_{app} $
0	0	0	0
0.1	$0.0068e - 4$	$1.6452e - 5$	0.0063
0.2	$0.0252e - 4$	$8.5750e - 5$	0.0269
0.3	$0.0519e - 4$	$2.3676e - 4$	0.0646
0.4	$0.0836e - 4$	$4.9649e - 4$	0.1233
0.5	$0.1177e - 4$	$8.9002e - 4$	0.2084
0.6	$0.1517e - 4$	$1.4409e - 3$	0.3266
0.7	$0.1843e - 4$	$2.1725e - 3$	0.4868
0.8	$0.2148e - 4$	$3.1089e - 3$	0.7007
0.9	$0.2434e - 4$	$4.2770e - 3$	0.9830
1	$0.2709e - 4$	$5.7088e - 3$	1.3535

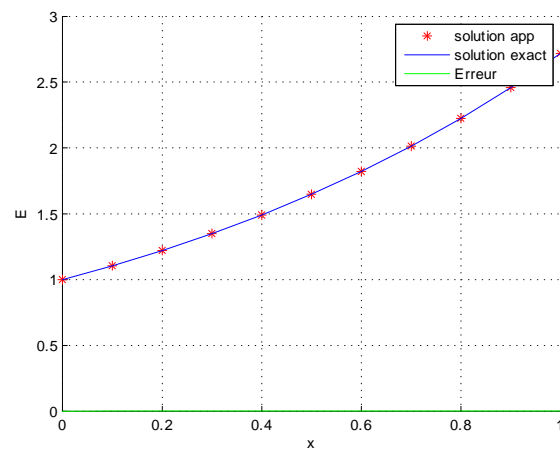


Figure 3.2.1 : L'erreur absolue et la solution exacte et la solution approchée de l'exemple 01 pour $\tau = 1$

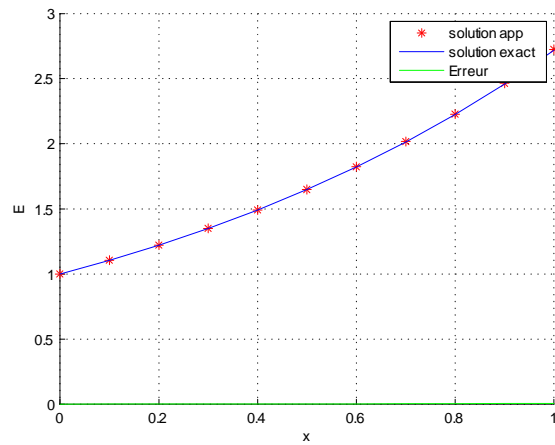


Figure 3.2.2 : L'erreur absolue et la solution exacte et la solution approchée de l'exemple 01 pour $\tau = 0.99$

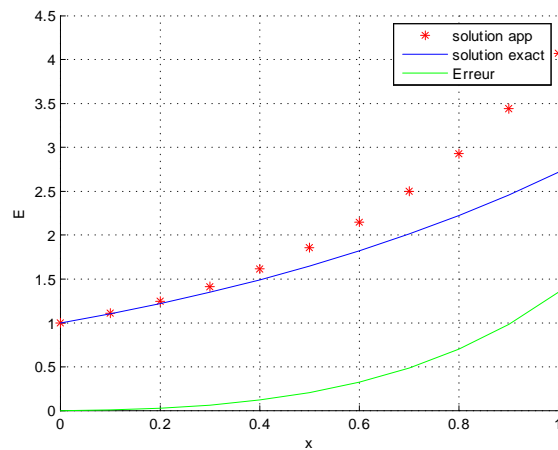


Figure 3.2.3 : L'erreur absolue et la solution exacte et la solution approchée de l'exemple 01 pour $\tau = 0.03$

3.2.2 Exemple 02

On considère l'équation intégrale linéaire de volterra avec retard de deuxième espèce par:

$$u(x) = \sin(x - 1) + \sin(1) + \sin(x) - x \cos(1) + \int_0^x (x - t)u(t - \tau)dt$$

où la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \sin(x)$$

on prend $n = 10$, alors

Tableau: résultats de l'exemple 02

	$\tau = 1$	$\tau = 0.95$	$\tau = 0.11$
x	Erreur $ u_{exact} - u_{app} $	Erreur $ u_{exact} - u_{app} $	Erreur $ u_{exact} - u_{app} $
0	0	0	0
0.1	$0.0057e - 3$	0.0002	0.0037
0.2	$0.0209e - 3$	0.0007	0.0152
0.3	$0.0432e - 3$	0.0016	0.0348
0.4	$0.0707e - 3$	0.0030	0.0628
0.5	$0.1017e - 3$	0.0048	0.0997
0.6	$0.1350e - 3$	0.0070	0.1458
0.7	$0.1696e - 3$	0.0098	0.2014
0.8	$0.2050e - 3$	0.0130	0.267
0.9	$0.2407e - 3$	0.0168	0.3428
1	$0.2765e - 3$	0.0210	0.4294

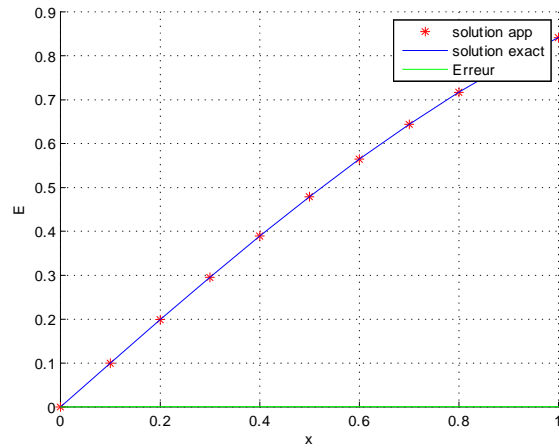


Figure 3.2.4 : L'erreur absolue et la solution exacte et la solution approchée de l'exemple 02 pour $\tau = 1$

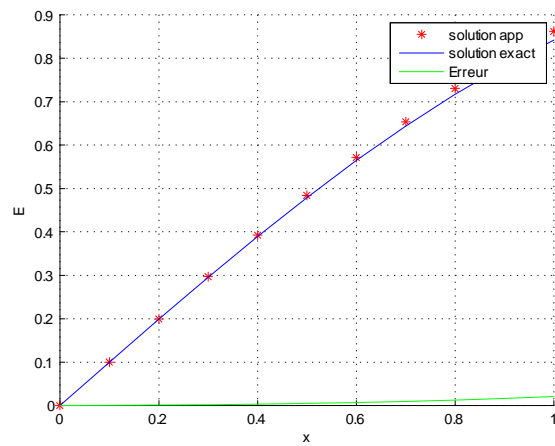


Figure 3.2.5 : L'erreur absolue et la solution exacte et la solution approchée de l'exemple 02 pour $\tau = 0.95$

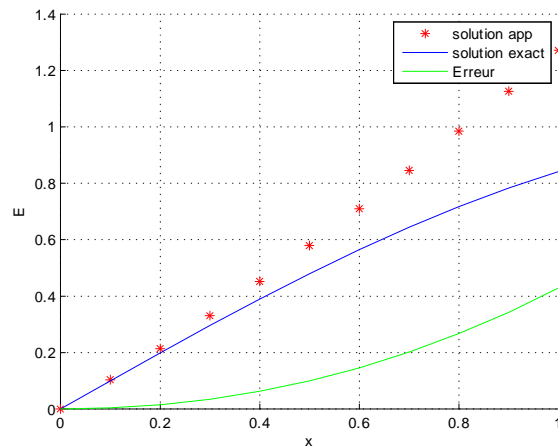


Figure 3.2.6 : L'erreur absolue et la solution exacte et la solution approchée de l'exemple 02 pour $\tau = 0.11$

3.2.3 Exemple 03

On considère l'équation intégrale linéaire de Volterra avec retard de deuxième espèce par:

$$u(x) = \sin(x - 1) + \sin(1) + \sin(x) - x \cos(1) + \int_0^x (x - t)u(t - \tau)dt$$

où la solution exacte est donnée par

$$u(x) = \sin(x)$$

on prend $n = 10$, alors

Tableau: résultats de l'exemple 03

τ	x	Solution exacte	Erreur $ u_{exact} - u_{app} $
0.921	0	0	0
0.912	0.091	0.0909	0.0017
0.903	0.182	0.1810	0.0064
0.894	0.273	0.2696	0.0135
0.885	0.364	0.3560	0.0224
0.876	0.455	0.4395	0.0330
0.867	0.545	0.5184	0.0450
0.858	0.636	0.5940	0.0586
0.849	0.727	0.6646	0.0739
0.840	0.818	0.7298	0.0909
0.831	0.909	0.7889	0.1100

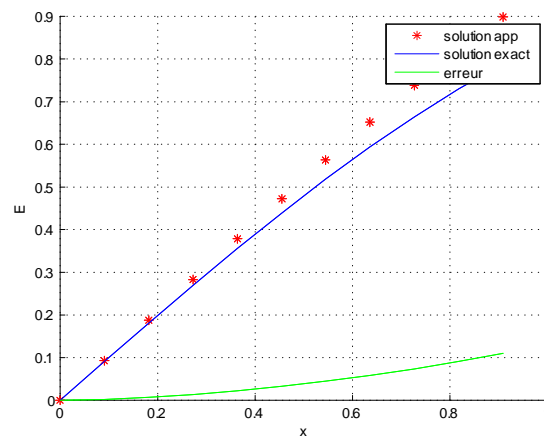


Figure 3.2.7 : L'erreur absolue et la solution exacte et la solution approchée de l'exemple

03

Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons utilisé les polynômes de Bernstein pour approximer la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra avec retard de deuxième espèce, pour déterminer la solution approchée nous avons utilisé la méthode de collocation. Nous avons présenté quelques exemples où la solution exacte est connue et nous avons obtenu les résultats et les solutions à l'aide du logiciel **MATLAB**.

Pour tester l'efficacité et estimer la précision à travers nos résultats lorsque la valeur τ est fixée pour la solution exacte, nous constatons que les résultats sont plus précises et que la méthode est plus efficace. Chaque fois que la valeur τ est retardée par rapport à la valeur fixée l'erreur augmente.

Bibliographie

- [1] Alturk. A, (2016). Application of the Bernstein polynomial for solving Volterra Integral Equation with Convolution kernels. *Filomat*, 30(4), 1045-1052.
- [2] AL-Zawi S,N. (2011). Using Bernstein polynomial for solving Volterra Integral Equation of the second kind. *Journal B. E.*, (70).
- [3] A. M,M, (2017). Numerical Solution of Volterra Integral Equation with Delay by Using Non polynomial Spline Function. *Misan Journal for Academic studies*, 16(32).
- [4] Bencheikh, A, L. Chiter. Abbassi Hocine. A New Operational Matrix of Orthonormal Bernstein Polynomials and Its Application.
- [5] Cooke , K. L. An epidemic equation with immigration. *Math. Biosci.* 29, 135-158(1976).
- [6] Hurmman, B. : Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations. Cambridge university press, Cambridge (2004).
- [7] I. Kenneth Joy. Bernstein polynomials, Departement of Computer Science University of California, Davis 1996-2000.
- [8] J, Bélair. : Population models with state-dependent delays. In: Arino, O., Axelrod, D.E., Kimmel, M. (eds.) *Mathematical Population Dynamics*, pp. 165-176. Marcel Dekker, New york (1991).
- [9] Kendal, E. A. *The Numerical Solution of Integral Equation of Second Kind*, Cambridge University Press, Cambridge 1997.

- [10] M. M, M., & Latiff I, T. A. (2008). Numerical solution of Volterra Integral Equation with Delay Using Block Methods. *AL-Fatih Journal*, (36).
- [11] Muhammad, Adhraa M, and A. M. Ayal. “Numerical solution of linear Volterra integral equation with delay using Bernstein polynomial” *International Elctronic Journal of Mathematics Education* 14.3 (2019): 735-740.
- [12] Nouri, M. M., & Maleknjad, K. (2016). Numerical Solution of delay integral equation by using Block-pulse functions. *Arises in Boological sciences International Journal of mathematical modeling and computations*, 66(3).
- [13] Precup. R, *Methods in Non linear Integral Equations*, Departement of Applied Mathematics, Babeş-Bolyai University, Cluj, Romania 2002.
- [14] S. Bhattachaya., & Mandal B.N (2008). Use of Bernstein polynomials is Numerical Solution of Volterra Integral Equation. *Applied Mathemattical Sciences*, 2(36), 1773-1787.
- [15] Shihab. S., & Mohammed Ali, M. N. (2015). Collocation orthonormal Bernstein polynomials method for solving integral equation. *Eng and Tech. Journal*, 33(8).
- [16] Wazwaz, A. M. *Linear and non-linear integral equations methods and application*. Sait xavier university Chicago. USA. 2011.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو تقريب حل معادلة فولتيرا التكاملية الخطية مع التأخير من النوع الثاني عدديا باستخدام كثيرات حدود برنشتاين. بالإضافة إلى ذلك تم تقديم أمثلة عددية للتحقق من دقة وفعالية الطريقة المقترحة. الكلمات المفتاحية: معادلة فولتيرا التكاملية الخطية مع التأخير من النوع الثاني، طريقة التجميع، كثيرات حدود برنشتاين ، نظرية النقطة الصامدة.

Résumé

Le but de ce mémoire, est approximer numériquement la solution de l'équation intégrale linéaire de Volterra avec retard de deuxième espèce. En utilisant les polynômes de Bernstein. De plus, des exemples numériques sont présentés pour vérifier la précision et l'efficacité de la méthode proposée.

Mots-clés : *Equation intégrale linéaire de Volterra avec retard de deuxième espèce, Méthode de collocation, Polynôme de Bernstein, théorème de point fixe .*

Abstract

The aim of this thesis is to approximate numerically the solution of linear integral equation of Volterra with delay of the second kind. Using Bernstein polinomial.

In addition, numerical are presented to verify the accuracy and the efficiency of the proposed method.

Keywords : *Volterra linear integral equation with delay of the second kind, Collocation method , Bernstein polynomials, fixed point theorem.*